$\mathcal{M}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{I}$	2	MARDI 11 MAI

LYCEE CHARLEMAGNE 2020/2021

I.S.27

♡ 0 ♡ Montrez que si f est C^1 de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ alors elle est lipschitzienne. 3 pt.

♡ 1 ♡ Prolongez par continuité en 0 $x \longmapsto x^2.[1/x]$, puis montrez qu'elle y est dérivable. Est elle paire ou impaire ? 4 pt.

◊ 0 ◊ Montrez : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x^x + x^{-x}}.dx = \frac{\pi}{4}$ en sachant qu'il y a bien une arctangente de cachée. 3 pt.

◊ 1 ◊ L'autre preuve du Théorème de Darboux. Soit f continue et dérivable de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrez que f n'est pas monotone. Déduisez que f n'est pas injective. Déduisez qu'il existe c vérifiant $f'(c) = 0$. 4 pt.

Soit f dérivable de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$.Soit λ un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Appliquez le résultat précédent à l'application $f - \lambda.Id$ (ou $\lambda.Id - f$) et déduisez qu'il existe c vérifiant $f'(c) = \lambda$. 2 pt.

◊ 2 ◊ Donnez la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)}$. 4 pt.

Il y a pile un an, c'était votre anniversaire. Ça se fête, ça, non ? Philippe GELUCK (le Chat)

♠ 0 ♠ On cherche les application f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f \circ f = x \longmapsto -3.x + 2$. Montrez que les solutions f sont forcément injectives. Montrez qu'elles sont monotones. Concluez. 3 pt.

♠ 1 ♠ Maintenant soit f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f \circ f = x \longmapsto \dfrac{3.x-2}{4}$. Donnez une solution affine de ce problème. 2 pt. On revient au cas général.

♠ 2 ♠ Montrez que f est injective. 1 pt. On pose $h = x \longmapsto \dfrac{3.x-2}{4}$.

♠ 3 ♠ Montrez $h(-2) = -2$ puis $h(f(-2)) = f(-2)$ et enfin $f(-2) = -2$. 3 pt.

♠ 4 ♠ Explicitez $h^n(x)$ pour tout x (composition). Montrez que pour tout x, la suite $h^n(x)$ converge vers -2. 3 pt.

♠ 5 ♠ Montrez : $h^n \circ f = f \circ h^n$ pour tout n. 1 pt.

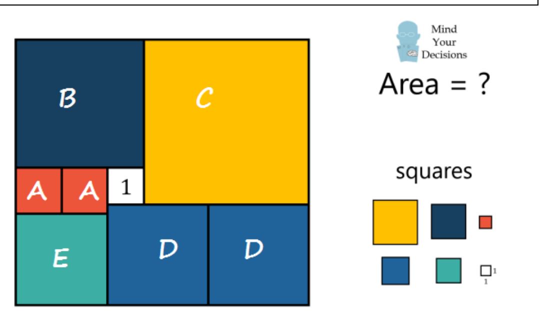
♠ 6 ♠ Montrez : $f(h^n(x)) = f(-2) + (3/4)^n.(x+2).f'(-2) + o((3/4)^n)_{n\to+\infty}$. 2 pt.

♠ 7 ♠ Déduisez : $f(x) = -2 + f'(-2).(x+2)$. 2 pt.

♠ 8 ♠ Donnez toutes les solutions. 2 pt.

L'argent est fait pour être dépensé sans compter. « Sans compter sur les autres » je veux dire. Pierre PERRET

Toutes les pièces du puzzle (rectangulaire) sont des carrés. Le plus petit a pour côté 1. On note x la longueur du carré A. Retrouvez en fonction de x toutes les longueurs puis trouvez x et enfin l'aire du rectangle. 3 pt.



Toutes les pièces du puzzle (rectangulaire) sont des carrés. Mais de quelle taille ?

On pose $f = x \longmapsto \frac{1}{1+|\sin(x/2)|}$. On constate $f(\pi) = f(3.\pi)$. Pourquoi ne peut on quand même pas appliquer le théorème de Rolle ? 1 pt.

$\mathcal{M}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{I}$	2	CORRECTION

LYCEE CHARLEMAGNE
2020/2021

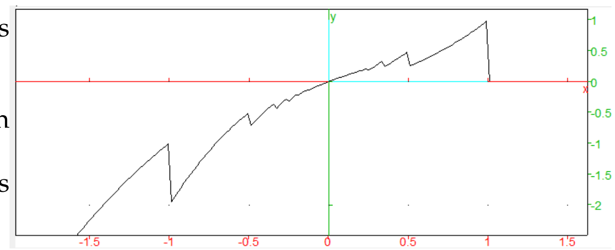
I.S.27

Questions de cours.

I.S.27

L'application $f = x \longmapsto \frac{1}{1+|\sin(x/2)|}$ est continue... Mais pas dérivable (en $2.\pi$).
Le théorème de Rolle ne peut pas s'appliquer.

L'application $x \longmapsto x^2.[1/x]$ n'est définie en 0. Mais on sait : $\dfrac{1}{x} - 1 \leqslant \left[\dfrac{1}{x}\right] \leqslant \dfrac{1}{x}$.
On multiplie par x^2 (positif) : $x - x^2 \leqslant f(x) \leqslant x$ en nommant f notre application.
Par encadrement, $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. On va donc poser $\boxed{f(0) = 0}$



On passe aux taux d'accroissement : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ est cette fois égal à $x.[1/x]$ et reste compris entre $1 - x$ et x [1]. Par encadrement, les taux tendent vers 1. f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

La partie entière n'est ni paire ni impaire, f ne va pas l'être non plu. D'ailleurs $f(2) = 0$ et $f(-2) = -4$ (car $[-1/2] = -1$).
Ils ne sont ni égaux, ni opposés.

Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors f' existe et est continue.
Par compacité, f' est bornée : $\exists K, \forall x \in [a, b], |f'(x)| \leqslant K$.
Pour tout couple (x, y), par théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x, y]$ (inclus dans $[a, b]$)), on a $|f(x) - f(y)| = |f'(c)|.|x - y| \leqslant K.|x - y|$. Le réel K est un bon rapport de Lipschitz.

Théorème de Darboux.

I.S.27

On a donc f dérivable (donc continue, oui je sais) de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ avec $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$.
Si f était monotone, par exemple croissante, sa dérivée serait positive ou nulle en tout point. y compris en a. Impossible.
Si f était décroissante, sa dérivée serait négative ou nulle, y compris en b. Ceci contredit l'hypothèse.

f n'est donc pas monotone.

Or, un théorème du cours (conséquence du théorème des valeurs intermédiaires) dit « si f est continue et injective de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, alors elle est monotone ».

par contraposée (ou par l'absurde diront certains), f continue ne peut donc pas être injective.

On traduit la non injectivité : $\exists(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$, $\alpha \neq \beta$ *et* $f(\alpha) = f(\beta)$.

Mais alors on peut appliquer le théorème de Rolle sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ sur lequel f est D^1.

1. je veux dire $1 \leqslant taux \leqslant 1 - x$ pour x négatif et $1 - x \leqslant taux \leqslant 1$ pour x positif

Il existe donc c dans $[\alpha,\ \beta]$ (donc dans $[a,\ b]$) vérifiant $f'(c)=0$.

La dérivée a changé de signe ; forcément elle s'est annulée. Même si elle n'était pas continue.

La version étendue, pour atteindre toute valeur λ entre $f'(a)$ et $f'(b)$ fait appel à une fonction auxiliaire $f-\lambda.Id$ qui incline l'axe des abscisses, tout naturellement.
On a alors $g'(a)=f'(a)-\lambda$ et $g'(b)=f'(b)-\lambda$.
L'un est positif, l'autre est négatif.
Le résultat précédent, appliqué à g donne $\exists c,\ g'(c)=0$. C'est donc $\exists c,\ f'(c)=\lambda$.

$\mathcal{M}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{I}$	2	Intégration.	I.S.27

Chaque $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\dfrac{k^2}{n^2}\Big)}$ est une somme de Riemann. Ou plutôt, l'exponentielle d'une somme de Riemann :
$\dfrac{1}{n}.\ln\Big(\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\dfrac{k^2}{n^2}\Big)\Big)=\dfrac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(1+\dfrac{k^2}{n^2}\Big)$.
On identifie

$a=0$	$b=1$	$f=x\longmapsto\ln(1+x^2)$

Par continuité, cette somme de Riemann converge vers l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\ln(1+t^2).dt$.

Reste à calculer cette intégrale, par parties :

$\ln(1+t^2)$	$\hookrightarrow$	$\frac{2.t}{1+t^2}$
1	$\hookleftarrow$	t

On va devoir calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{2.t^2}{1+t^2}.dt$ qu'on va écrire $\displaystyle\int_0^1\frac{2.t^2+2-2}{1+t^2}.dt$ pour avoir un terme simple : 1 (aire d'un rectangle) et $\displaystyle\int_0^1\frac{2.dt}{1+t^2}$(Arctangente).
Finalement $\displaystyle\int_0^1\ln(1+t^2).dt=\ln(2)+\frac{\pi}{2}-2$.

Par continuité, on remonte : $\boxed{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\dfrac{k^2}{n^2}\Big)}\longrightarrow_{n\to+\infty}\frac{2.e^{\pi/2}}{e^2}}$

$\displaystyle\int_1^a\frac{1+\ln(x)}{x^x+x^{-x}}.dx$ existe, en écrivant $x^x=e^{x.\ln(x)}$ et $x^{-x}=e^{-x.\ln(x)}$ et en argüant de la continuité [2] On verra ensuite si on peut faire tendre a vers l'infini et trouver une valeur pour l'intégrale « impropre » pour parler à l'ancienne.
Où est le $\dfrac{du}{1+u^2}$. On l'a souvent avec des $\dfrac{1}{t+\dfrac{1}{t}}$.
L'envie est grande de poser ici $u=x^x$ (surtout quand on est celui a pondu le sujet, je sais...). On a bien $u=e^{x.\ln(x)}$ et donc $du=e^{x.\ln(x)}.(1+\ln(x)).dx$.
Ça prend forme ! $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1+\ln(x)}{x^x+x^{-x}}.dx=\int_1^{+\infty}\frac{1+\ln(x)}{x^x+x^{-x}}.\frac{x^x}{x^x}.dx=\int_1^{+\infty}\frac{(1+\ln(x)).x^x}{(x^x)^2+1}.dx$.
On pose donc bien $u=x^x$ (C^1 difféomorphisme) : $\displaystyle\int_{x=1}^{a}\frac{1+\ln(x)}{x^x+x^{-x}}.dx=\int_{u=1}^{u=a^a}\frac{du}{1+u^2}=\Big[Arctan(u)\Big]_{u=1}^{a^a}$.
On trouve $Arctan(a^a)-Arctan(1)$ et quand a tend vers l'infini, on trouve $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}$ (le physicien écrirait même $Arctan(+\infty)-Arctan(1)$ et je ne lui en voudrais pas).

$\mathcal{M}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{I}$	2	Un rectangle et des carrés.	I.S.27

On décide de noter x le côté des deux carrés A.
Par juxtaposition horizontale : B a pour côté $2.x+1$.

2. trop classe le verbe « argüer » !

Par juxtaposition verticale : C a pour côté $(2.x+1)+1$ (ce qui fait $2.x+2$).
Mais alors, horizontalement, les deux carrés D recouvrent $(2.x+2)+1$.
C'est donc que D a pour côté $x+\frac{3}{2}$.

Et le grand rectangle a pour hauteur $2.x+2+x+\frac{3}{2}$ (mesurée à droite sur le dessin)
largeur $(2.x+1)+(2.x+2)$ (mesurée en haut sur le dessin).

Mais le dernier carré E a pour côté $2.x$ (il est collé à deux carrés de type A).
Cette fois le grand rectangle a pour hauteur $(2.x)+x+(2.x+1)$ (mesurée à gauche sur le dessin)
largeur $2.x+2.\left(x+\frac{3}{2}\right)$ (mesurée en bas sur le dessin).

On égalise : $3.x+\frac{7}{2}=5.x+1$ (hauteurs) et $4.x+3=4.x+3$.

C'est cohérent : x vaut $\frac{5}{4}$.

	A	B	C	D	E
1	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{5}{2}$

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 — $f\circ f=h$ avec h affine. — **I.S.27**

Si on suppose $f\circ f$=h avec h affine, alors $f\circ f$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Par hérédité, f (à gauche est surjective, et f (à droite) est injective.
f est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est plus que demandé.

Sinon, on partait de $f(a)=f(b)$. On appliquait f : $f(f(a))=f(f(b))$. Par définition $-3.a+2=-3.b+2$.
. *On en déduisait $a=b$.*

Un théorème du cours dit « si f est injective et continue sur un intervalle I alors elle est monotone ».

Si f est croissante, alors $f\circ f$ l'est aussi	Si f est décroissante, alors $f\circ f$ est croissante.
Mais $f\circ f=x\longmapsto -3.x+2$, décroissante...	Mais $f\circ f=x\longmapsto -3.x+2$, décroissante...

Contradiction dans les deux cas.
Bilan : impossible d'avoir $f\circ f=h$ avec h injective et décroissante.

Cette fois, on veut $f(f(x))=\frac{3.x-2}{4}$ pour tout x. le même raisonnement dit que f est injective. Mais aucune contradiction sur la monotonie. Ce qui ne dit pas qu'il y a des solutions.

Toutefois, on peut chercher des solutions affines : $x\longmapsto a.x+b$. La condition devient : $a^2.x+a.b+b=\frac{3.x-2}{4}$ pour tout x.
On ne rédige pas par « on identifie », ce n'est pas le sens demandé. On veut des solutions affines, on ne demande pas de montrer que les solutions ne peuvent être que...
$\boxed{x\longmapsto \frac{\sqrt{3}}{2}.x+\sqrt{3}-2 \text{ ou } x\longmapsto -\frac{\sqrt{3}}{2}.x-\sqrt{3}-2}$ (deux solutions de sens de variations opposés, faites votre choix).

Le calcul donne sans problème $h(-2)=-2$, ça ne vaut pas un point.
On calcule ensuite $h(f(-2))=f^2(f(-2))=f^3(-2)=f(f^2(-2))=f(h(-2))=f(-2)$.
Il s'ensuit que $f(-2)$ est un point fixe de h (solution de $h(x)=x$, c'est ça « point fixe »). Mais h n'a qu'un point fixe, c'est -2. On a donc $f(-2)=-2$.

On calcule $h(h\dots h(x)))$ pour tout x par tâtonnements sur les premières valeurs puis par récurrence ?
Non, on n'est pas idiot au point de ne pas reconnaître une suite récurrente linéaire $u_{n+1}=\frac{3}{4}.u_n-\frac{1}{2}$.
Classique, o cherche le point fixe : -2. La suite $u_n-(-2)$ est géométrique de raison $\frac{3}{4}$. On a donc $u_n+2=\left(\frac{3}{4}\right)^n(x+2)$ puisqu'on a posé $u_0=x$.
On le ré-écrit : $\boxed{h^n(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^n.(x+2)-2}$ et la convergence vers -2 est évidente (raison entre 0 et 1).

. *Mais oui, c'était juste une question de cours !*

La formule $h^n \circ f = f \circ h^n$ se démontre sans récurrence.
On écrit $h^n \circ f = (f^2)^n \circ f = f^{2.n+1}$ et $f \circ h^n = f \circ (f^2)^n = f^{2.n+1}$.

Qu'est ce que la formule $f(h^n(x)) = f(-2) + (3/4)^n.(x+2).f'(-2) + o((3/4)^n)_{n\to+\infty}$? Une conséquence des résultats précédents ? Et si oui, desquels ?
Doit on remplacer $f(-2)$ par sa valeur ? Non, ça ne sert à rien.
$f(h^n(x)) = f(-2) + (3/4)^n.(x+2).f'(-2) + o((3/4)^n)_{n\to+\infty}$ ressemble à un développement limité d'ordre 1 : $f(-2+t) = f(-2) + t.f'(-2) + o(t)_{t\to 0}$.
Ici, $f(h^n(x)) = f\Big(-2 + \Big(\dfrac{3}{4}\Big)^n.(x+2)\Big)$ avec $t = \Big(\dfrac{3}{4}\Big)^n.(x+2)$ qui tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

$$f(h^n(x)) = f(-2) + f'(-2).\Big(\frac{3}{4}\Big)^n.(x+2) + o\Big(\Big(\frac{3}{4}\Big)^n.(x+2)\Big)_{n\to+\infty}$$

On notera : $o\Big(\Big(\dfrac{3}{4}\Big)^n.(x+2)\Big)_{n\to+\infty} = o\Big(\Big(\dfrac{3}{4}\Big)^n.(x+2)\Big)_{n\to+\infty}$ car ici, x est fixé, et seul n bouge pour nos suites.

A présent, on recolle quelques morceaux comme $f \circ h^n = h^n \circ f$ et $f(-2) = -2$:
$h^n(f(x)) = -2 + f'(-2).\Big(\dfrac{3}{4}\Big)^n.(x+2) + o\Big(\Big(\dfrac{3}{4}\Big)^n\Big)_{n\to+\infty}$
On remplace : $-2 + \Big(\dfrac{3}{4}\Big)^n.(f(x)+2) = -2 + f'(-2).\Big(\dfrac{3}{4}\Big)^n.(x+2) + o\Big(\Big(\dfrac{3}{4}\Big)^n\Big)_{n\to+\infty}$.
On multiplie par $\Big(\dfrac{4}{3}\Big)^n$ (après avoir viré les -2) : $(f(x)+2) = f'(-2).(x+2) + o(1)_{n\to+\infty}$.
On fait tendre n vers $+\infty$: $(f(x)+2) = f'(-2).(x+2)$.

Le réel $f'(-2)$ est indépendant de x. C'est donc que f est une fonction affine.
Et on a trouvé (par condition nécessaire et suffisante finalement) toutes les solutions affines.
Il ne reste que $\boxed{x \longmapsto \dfrac{\sqrt{3}}{2}.x + \sqrt{3} - 2 \text{ ou } x \longmapsto -\dfrac{\sqrt{3}}{2}.x - \sqrt{3} - 2}$