

$\mathcal{M}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{S}$ $\mathcal{I}$ 2 LYCEE CHARLEMAGNE 2020/2021	MARDI 4 MAI I.S.26
--	--

Calculuez $\int_0^a 2^t \cdot dt$ en revenant aux limites de sommes de Riemann.

Calculuez $\int_0^{2\pi} [2 \cdot \cos(t)] \cdot dt$ et $\int_0^4 \cos(\pi \cdot [t]) \cdot dt$ (parties entières).

f est une application continue. En séparant par linéarité après avoir appliqué la formule du binôme, montrez que $x \mapsto \int_{t=0}^x (x-t)^3 \cdot f(t) \cdot dt$ a pour dérivée quatrième un multiple de f .

Combien existe-t-il d'intervalles de la forme $[0, a]$ sur lequel la valeur moyenne de l'exponentielle vaut 2 ?

Pour quelles valeurs de a l'application $t \mapsto t + a \cdot \cos(t)$ est elle un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Pour quelles valeurs de a l'application $t \mapsto t + a \cdot \cos(t)$ est elle un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

L'un des mensonges les plus fructueux, les plus intéressants qui soient, et l'un des plus faciles en outre, est celui qui consiste à faire croire à quelqu'un qui vous ment que vous le croyez.

Sacha GUITRY

Deux applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont dites conjuguées si il existe un homéomorphisme h vérifiant $f \circ h = h \circ g$. Montrez que la relation « être conjuguées » est une relation d'équivalence.

Montrez que si f et g sont conjuguées alors f^n et g^n le sont pour tout entier naturel n (f^n c'est au sens de $f \circ f \circ \dots \circ f$).

Montrez que $\exp$ et $x \mapsto e^x - 1$ ne sont pas conjuguées (indication : points fixes).

Montrez que $x \mapsto e^x - 1$ et $x \mapsto e^x - 2$ ne sont pas conjuguées (re-indication : re-points fixes).

Montrez que $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{x+a} - a$ sont conjuguées pour tout a .

On suppose que $\sin$ et $\cos$ sont conjuguées via un homéomorphisme h ($\sin \circ h = h \circ \cos$). Montrez que h est bijective de $[-1, 1]$ dans $[-1, 1]$.

Étudiez l'injectivité de $h^{-1} \circ \sin \circ h$ sur $[-1, 1]$. Concluez.

Souvent, quand on marche avec des chaussures neuves, ça fait « scrouik scrouik ». Avec de vieilles chaussures aussi, mais il faut alors marcher sur des souris.

Philippe GELUCK (le Chat)

Calculuez $\int_0^{\sqrt{2}-1} \tan(3 \cdot \text{Arctan}(t)) \cdot dt$.

Il y a 101 couples de matrices vérifiant des relations comme $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 24 \\ 36 & 28 \end{pmatrix}$ (c'est à dire $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & b\beta \\ c\gamma & d\delta \end{pmatrix}$).

Retrouvez les coefficients de ce couple : $\begin{pmatrix} 6 & \\ & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & \\ & 5 \end{pmatrix}$ (expliquez rapidement que je ne vous soupçonne pas d'avoir copié).

M P S I 2

CORRECTION

**LYCEE CHARLEMAGNE
2020/2021**

I.S.26

M P S I 2

Retour aux sommes de Riemann.

I.S.26

On découpe l'intervalle $[0, a]$ en n segments d'égale longueur, et on calcule la somme de Riemann gauche : $\frac{a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 2^{\frac{ka}{n}}$. On identifie une série géométrique de raison $2^{\frac{a}{n}}$, de premier terme 1 et de terme à venir $2^{n \cdot \frac{a}{n}}$.

On trouve donc $\frac{a}{n} \cdot \frac{1 - 2^a}{1 - 2^{a/n}}$ qu'on écrit $\frac{e^a - 1}{e^{a \cdot \ln(2)/n} - 1}$. Le dénominateur est un taux d'accroissement de $\ln(2) \cdot \frac{a \cdot \ln(2)}{n}$.

l'exponentielle, qui converge vers 1.

La limite des sommes de Riemann (et donc l'intégrale, par continuité) converge vers $\frac{2^a - 1}{\ln(a)}$

M P S I 2

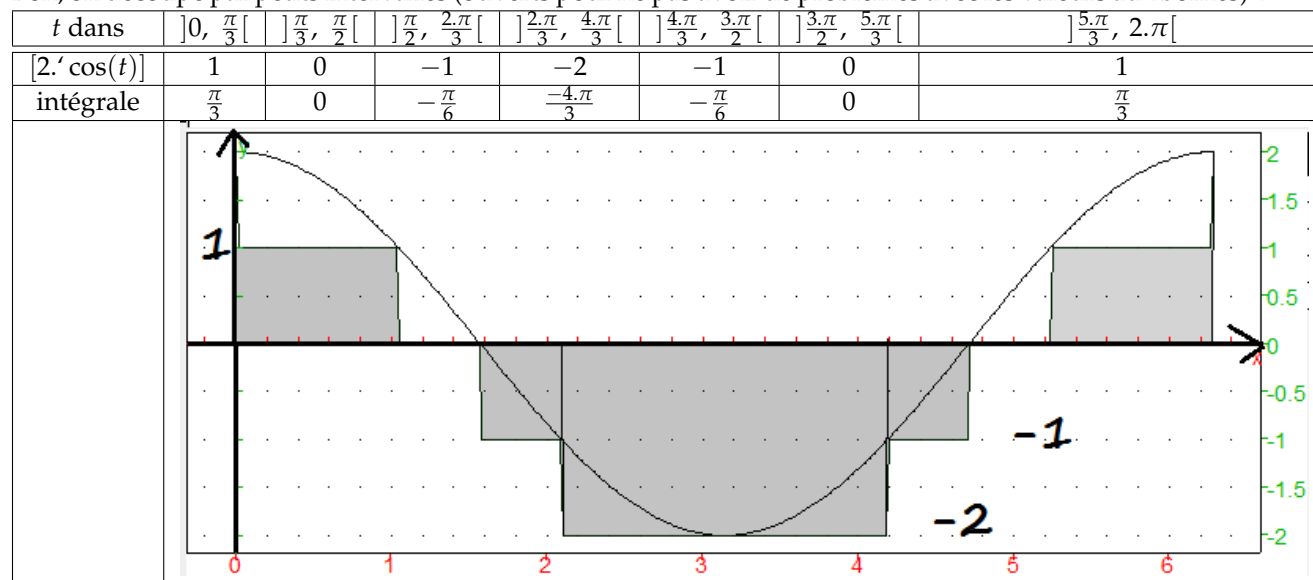
Intégrales et parties entières.

I.S.26

Les applications sous le signe somme sont continues par morceaux. On pourra calculer l'intégrale en découpant relation de Chasles :

$$\int_0^{2\pi} [2 \cdot \cos(t)] \cdot dt = \int_0^{\pi/3} [2 \cdot \cos(t)] \cdot dt + \int_{\pi/3}^{\pi/2} [2 \cdot \cos(t)] \cdot dt + \int_{\pi/2}^{2\pi/3} [2 \cdot \cos(t)] \cdot dt + \dots + \int_{5\pi/3}^{2\pi} [2 \cdot \cos(t)] \cdot dt$$

Bon, on découpe par petits intervalles (ouverts pour ne pas avoir de problèmes avec les valeurs aux bornes) :



Attention en effet dans les négatifs : $[-0, 8] = -1$ et $[-1, 4] = -2$. Marginalement, la valeur 2 est atteinte en 0.

Il ne reste qu'à sommer. l'intégrale vaut $-\pi$.

$$\begin{aligned} \text{De même } \int_0^4 \cos(\pi \cdot [t]) \cdot dt &= \int_0^1 \cos(\pi \cdot [t]) \cdot dt + \int_1^2 \cos(\pi \cdot [t]) \cdot dt + \int_2^3 \cos(\pi \cdot [t]) \cdot dt + \int_3^4 \cos(\pi \cdot [t]) \cdot dt \\ \int_0^4 \cos(\pi \cdot [t]) \cdot dt &= \int_0^1 \cos(0 \cdot \pi) \cdot dt + \int_1^2 \cos(1 \cdot \pi) \cdot dt + \int_2^3 \cos(2 \cdot \pi) \cdot dt + \int_3^4 \cos(3 \cdot \pi) \cdot dt \\ \int_0^4 \cos(\pi \cdot [t]) \cdot dt &= \int_0^1 dt - \int_1^2 dt + \int_2^3 dt - \int_3^4 dt \end{aligned}$$

Bon, oui, on trouve 0.

$\mathcal{M}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{I}$	2	Une primitive d'ordre 4.	I.S.26
---------------	---------------	---------------	---------------	---	--------------------------	--------

On note F l'application $x \mapsto \int_{t=0}^x (x-t)^3 \cdot f(t) \cdot dt$, on la développe en $x \mapsto \int_{t=0}^x (x^3 - 3.x^2.t + 3.x.t^2 - t^3) \cdot f(t) \cdot dt$ et on sépare en quatre termes qu'on dérive à chaque fois comme des produits :

termes de $F(x)$	$x^3 \cdot \int_0^x f(t) \cdot dt$	$-3.x^2 \cdot \int_0^x t \cdot f(t) \cdot dt$	$+3.x \cdot \int_0^x t^2 \cdot f(t) \cdot dt$	$-\int_0^x t^3 \cdot f(t) \cdot dt$
dérivée	$3.x^2 \cdot \int_0^x f(t) \cdot dt$	$-6.x \cdot \int_0^x t \cdot f(t) \cdot dt$	$3 \cdot \int_0^x t^2 \cdot f(t) \cdot dt$	
	$x^3 \cdot f(x)$	$-3.x^2 \cdot x \cdot f(x)$	$3.x \cdot x^2 \cdot f(x)$	$-x^3 \cdot f(x)$

On est d'accord, il n'y a plus de t dans la dérivée (ou alors sous la forme de variable muette d'intégrale).

Et $x \mapsto \int_0^x f(t) \cdot dt$ se dérive bien en $x \mapsto f(x)$ et c'est tout.

De même $x \mapsto \int_0^x t^2 \cdot f(t) \cdot dt$ se dérive bien en $x \mapsto x^2 \cdot f(x)$.

Tout le contenu de la seconde ligne s'en va. Il reste la somme de la première qu'on va re-dériver :

termes de $F'(x)$	$3.x^2 \cdot \int_0^x f(t) \cdot dt$	$-6.x \cdot \int_0^x t \cdot f(t) \cdot dt$	$+3 \cdot \int_0^x t^2 \cdot f(t) \cdot dt$
dérivée	$6.x \cdot \int_0^x f(t) \cdot dt$	$-6 \cdot \int_0^x t \cdot f(t) \cdot dt$	
	$3.x^2 \cdot f(x)$	$-6.x \cdot x \cdot f(x)$	$3.x^2 \cdot f(x)$

Là encore, la seconde ligne s'efface. Et on va pouvoir redériver :

termes de $F''(x)$	$6.x \cdot \int_0^x f(t) \cdot dt$	$-6 \cdot \int_0^x t \cdot f(t) \cdot dt$
dérivée	$6 \cdot \int_0^x f(t) \cdot dt$	
	$6.x \cdot f(x)$	$-6.x \cdot f(x)$

A ce stade : $F^{(3)} = x \mapsto 6 \cdot \int_0^x f(t) \cdot dt$. On dérive encore : $F^{(4)} = 6 \cdot f$

$\mathcal{M}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{I}$	2	valeur moyenne.	I.S.26
---------------	---------------	---------------	---------------	---	-----------------	--------

On cherche s'il existe des a (non nuls) vérifiant $\frac{1}{a} \cdot \int_0^a e^t \cdot dt = 2$ c'est à dire $e^a - 1 = 2.a$.

On n'a aucune formule toute prête pour résoudre cette équation. Alors on va juste compter les solutions en étudiant les variations de l'application auxiliaire $x \mapsto e^x - 1 - 2.x$ notée φ_a .

Sa dérivée est $x \mapsto e^x - 2$. On voit que $(\varphi_a)'$ s'annule et change de signe en $\ln(2)$.

	de $-\infty$ jusqu'à $\ln(2)$	$\ln(2)$	de $\ln(2)$ jusqu'à $+\infty$
φ'_a	-	0	0
	$+\infty \searrow$	$1-2 \cdot \ln(2)$	$\nearrow +\infty$

Par théorème des valeurs intermédiaires, notre équation a deux solutions ($1 - 2 \cdot \ln(2)$ est négatif).

Il y aurait deux solutions ? Étrange.

Mais l'une d'elles est 0 (la solution négative). Et elle, on la récuse (dénominateur nul et intégrale sur un point a lieu d'un segment)..

Il n'y a finalement qu'une solution, graphiquement cohérente, qui ne peut se calculer que de manière approchée.

$\mathcal{M}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{I}$	2	Homoéomorphisme, difféomorphisme.	I.S.26
---------------	---------------	---------------	---------------	---	-----------------------------------	--------

L'application $t \mapsto t + a \cdot \cos(t)$ est continue. Ce qui va l'empêcher d'être un homéomorphisme, c'est de changer de sens de variation.

On regarde donc le signe de $1 - a \cdot \sin$.

Tant que a est entre -1 et 1 , $a \cdot \sin(t)$ reste entre -1 et 1 et la somme $1 - a \cdot \sin(t)$ reste positive. L'application

1. just call me $Id + a \cdot \cos$

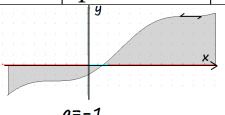
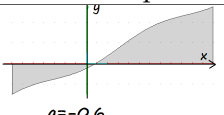
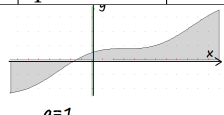
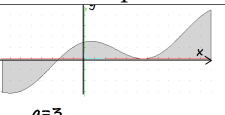
est croissante. On a un homéomorphisme.

Même le cas $a = 1$ donne un homéomorphisme. la dérivée $1 - \sin$ est positive ou nulle et ne s'annule qu'en des points isolés. Ceci garantit la croissance stricte.

Si a est plus grand que 1, l'application dérivée peut changer de signe (positive en 0, négative en $\pi/2$). L'application n'est pas un homéomorphisme.

Pareil si a est plus petit que -1 .

Comme un difféomorphisme est déjà un homéomorphisme, on élimine $a \in]-\infty, -1[$ et $a \in]1, +\infty[$. Mais on doit aussi éliminer $a = -1$ et $a = 1$ qui autorisent les tangentes horizontales pour f et donc « verticales » pour f^{-1} .

a	$] -\infty, -1[$	-1	$] -1, 1[$	1	$]1, +\infty[$
	pas homéomorphisme	homéo	homéomorphisme	homéo	pas homéomorphisme
	ni difféomorphisme	pas difféo	et difféomorphisme	pas difféo	ni difféomorphisme
					
	$a = -2$	$a = -1$	$a = -0.6$	$a = 1$	$a = 3$

M

P

S

I

2

Matrice "rigolotes".

I.S.26

On nomme les inconnues : $\begin{pmatrix} 6 & a \\ b & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & c \\ d & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 60+c \\ 10.b+d & 75 \end{pmatrix}$

On résout donc $\begin{pmatrix} 24+a.d & 6.c+5.a \\ 4.b+7.d & 35+b.c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 60+c \\ 10.b+d & 75 \end{pmatrix}$ avec des inconnues entières dans $\text{range}(10)$.

Le produit $a.d$ vaut 40, ce qui dans $\text{range}(10)$ ne laisse que deux solutions : 5×8 ou 8×5 .

De même, $b.c$ vaut 40 : 5×8 ou 8×5 .

On n'a guère que quatre matrices à tester comme $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 70 \\ 67 & 75 \end{pmatrix}$. Ce couple ci divorce à cause des termes Nord-Est et Sud-Ouest.

Il ne reste finalement que $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 88 \\ 55 & 75 \end{pmatrix}$

M

P

S

I

2

Fonctions conjuguées.

I.S.26

Réflexive. On se donne f . On sait $f \circ \text{Id} = \text{Id} \circ f$ et Id est un homéomorphisme. On reconnaît que f est conjuguée à elle même.

On se donne f et g et on suppose que f est conjuguée à g .

On traduit : il existe un homéomorphisme h vérifiant $f \circ h = h \circ g$.

Comme h est bijective, h^{-1} existe, et c'est aussi un homéomorphisme. En composant à droite et à gauche : $h^{-1} \circ f = g \circ h^{-1}$.

On reconnaît que g est conjuguée à f .

On se donne f_1, f_2 et f_3 . On suppose qu'il existe h_1 et h_2 , deux homéomorphismes vérifiant $f_1 \circ h_1 = h_1 \circ f_2$ et $f_2 \circ h_2 = h_2 \circ f_3$.

Par associativité, on a alors $f_1 \circ (h_1 \circ h_2) = (f_1 \circ h_1) \circ h_2 = (h_1 \circ f_2) \circ h_2 = h_1 \circ (f_2 \circ h_2) = h_1 \circ (h_2 \circ f_3)$.

Et comme $h_1 \circ h_2$ est un homéomorphisme (de réciproque $(h_2)^{-1} \circ (h_1)^{-1}$), on reconnaît que f_1 est conjuguée à f_3 .

On a prouvé réflexivité, symétrie et transitivité. On a une relation d'équivalence.

Est ce si compliqué de bien rédiger en introduisant les bonnes variables au bon moment ?

On va conduire une récurrence qu'on initialise pour 0 ($f^0 = g^0 = Id$ et on a la réflexivité) et pour 1 .
 On met les mains dans le cambouis pour $n = 2$. On suppose $f \circ h = h \circ g$ avec h homéomorphisme.
 On combine $(f \circ f) \circ h = f \circ (f \circ h) = f \circ (h \circ g) = (f \circ h) \circ g = (h \circ g) \circ g = h \circ g^2$.

Pour l'hérédité, on fait de même, et on comprend qu'il suffit de garder h .

On suppose pour un n donné quelconque : $f^n \circ h = h \circ g^n$. On utilise l'hypothèse et l'associativité :

$$f^{n+1} \circ h = f \circ (f^n \circ h) = f \circ (h \circ g^n) = (f \circ h) \circ g^n = (h \circ g) \circ g^n = h \circ g^{n+1}$$

La récurrence s'achève.

Petite idée sur les points fixes. On pose $f = \exp$ et $g = x \mapsto e^x - 1$.

On constate $g(0) = 0$. C'est une histoire de point fixe, en effet.

Si h existe pour rendre f et g conjuguées, on a alors $f \circ h = h \circ g$ et en particulier $f(h(0)) = h(g(0)) = h(0)$.
 Le réel $h(0)$ est alors point fixe de f . Mais f n'en a pas (le graphe de l'exponentielle ne coupe pas la bissectrice). C'est donc raté.

Finale, si une application a un point fixe, ses conjuguées doivent aussi en avoir. C'est notre argument ici pour dire que l'une en a un et pas l'autre.

Elles ne sont pas conjuguées.

On reprend la même idée astucieuse en la poussant plus loin.

On pose cette fois $g = x \mapsto e^x - 1$ et $G = x \mapsto e^x - 2$.

g a un point fixe (c'est 0) et G en a deux (tableau de variations ou graphe rapide), on va les noter α et β .

On suppose que g et G sont conjuguées via un certain homéomorphisme $H : g \circ H = H \circ G$.

En particulier : $g(H(\alpha)) = H(G(\alpha)) = H(\alpha)$

$g(H(\beta)) = H(G(\beta)) = H(\beta)$ les deux réels $H(\alpha)$ et $H(\beta)$ sont points fixes de g . Mais g n'a qu'un point fixe : 0 . On a donc $H(\alpha) = H(\beta) = 0$. Et H n'est plus bijective.

Finale, il faut que deux applications conjuguées aient le même nombre de points fixes.

je n'ai pas dit que ça suffisait...

a est fixé. On cherche h vérifiant $h(e^x) = e^{h(x)+a} - a$ pour tout x . C'est un peu « je tente ce qui me vient à l'esprit en espérant que ce ne soit pas trop compliqué ».

Je propose $t \mapsto t - a$. C'est bon. Et c'est un homéomorphisme.

On part de $\sin \circ h = h \circ \cos$, et on va bien voir ce qui arrive. Si tout explose, ce sera la faute à h . Ou la preuve que h n'existe pas. Et $\sin$ et $\cos$ ne seront pas conjugués.

On a donc pour tout θ : $\sin(h(\theta)) = h(\cos(\theta))$.

On déduit que les images des éléments de $[-1, 1]$ sont forcément entre -1 et 1 .

En effet, si t est entre -1 et 1 , on écrit $t = \cos(\theta)$ pour un θ convenable.

On a alors $h(t) = \sin(h(\arccos(t)))$: il est entre -1 et 1 .

A ce stade : $h([-1, 1]) \subset [-1, 1]$.

Prenons à présent y dans $[-1, 1]$. On veut l'écrire $y = h(t)$ pour un t bien choisi.

On commence par l'écrire $y = \sin(\theta)$ pour un θ bien choisi (en fait $\theta = \arcsin(y)$, c'est tout).

Mais, $\sin = h \circ \cos \circ h^{-1}$. On a donc $y = \sin(\theta) = h(\cos(h^{-1}(\theta)))$. Il ne reste qu'à poser $t = \cos(h^{-1}(\theta))$ et la variable attendue est là.

Par double inclusion : $h([-1, 1]) = [-1, 1]$.

On étudie sur $[-1, 1]$ l'application $h^{-1} \circ \sin \circ h$.

Elle utilise h injective, $\sin$ injectif car on le regarde sur $[-1, 1]$ (ce sont des $\sin(h(t))$ avec $h(t)$ dans $[-1, 1]$) et h^{-1} injectif.

C'est donc une application injective.

Mais c'est aussi l'application $\cos$. Et sur $[-1, 1]$, $\cos$ est une application paire. Donc non injective.

On tient une contradiction.

M	P	S	I	2	Une intégrale avec tangente et arctangente.	I.S.26
---	---	---	---	---	---	--------

Comme $\sqrt{2} - 1$ est assez petit², $\text{Arctan}(t)$ existe pour t dans $[0, \sqrt{2} - 1]$, mais surtout, reste entre 0 et $\frac{\pi}{6}$. $3.\text{Arctan}(t)$ reste donc entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. L'application $t \mapsto \tan(3.\text{Arctan}(t))$ est bien définie et continue.

Après, on développe avec $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a).\tan(b)}$ et on trouve en deux étapes : $\tan(3.\theta) = \frac{3.\tan(\theta) - \tan^3(\theta)}{1 - 3.\tan^2(\theta)}$.

On va donc calculer $\int_{t=0}^{\sqrt{2}-1} \frac{3.t - t^3}{1 - 3.t^2} . dt$ (et le dénominateur ne s'annule pas, effectivement).

On décompose en éléments simples $\frac{X^3 - 3.X}{3.X^2 - 1} = \frac{\frac{X}{3} . (3.X^2 - 1) - \frac{8}{3} . X}{3.X^2 - 1} = \frac{X}{3} - \frac{8}{3.(\sqrt{3}.X - 1).(\sqrt{3}.X + 1)} = \frac{X}{3} - \frac{4}{3.(3.X + \sqrt{3})} - \frac{4}{3.(3.X - \sqrt{3})}$

On peut intégrer, avec $\frac{t^2}{6}$ et des logarithmes.

On regroupe et on trouve $\frac{3 - 2.\sqrt{2}}{6} - \frac{4.\ln(6.\sqrt{2} - 8)}{9}$.

M	P	S	I	2		36 points		I.S.26
---	---	---	---	---	---	-----------	---	--------

2. en fait : $\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{\sqrt{3}}$ suffit, et $\sqrt{2} - 1 = \tan(\pi/12)$ est le bel argument pour qui a étudié les maths