Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2021/22

IS14

Mardi 11 janvier

♡ 0 ♡ Résolvez $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{5^k}\simeq\frac{5}{4}$ à 10^{-20} près, d'inconnue entière n. 3 pt.

♡ 1 ♡ Donnez la limite quand n tend vers l'infini de $\left(\sum_{k=0}^{n}k^2\right)\times\left(\sum_{p=0}^{2.n}p^2\right)\times\left(\sum_{k=0}^{n}k^3\right)^{-1}\times\left(\sum_{k=0}^{n}n\right)^{-1}$. 3 pt.

♡ 2 ♡ Sachant $y'_t+\cos(t).y_t=0$ et $y_0=2$, calculez y_π. Sachant $z'_t+t.\cos(t).z_t=0$ et $z_0=2$, calculez z_π. 5 pt.

♡ 3 ♡ Calculez $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\binom{k}{2}}$ et $\frac{1}{\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}}$ pour tout n (éléments simples ?). 4 pt.

♡ 4 ♡ Montrez que si la matrice A *(carrée de taille n)* est nilpotente d'indice p *(ce qui signifie $A^p=0_{n,n}$)*, alors I_n-A est inversible, d'inverse $I+A+A^2+\ldots+A^{p-1}$. 2 pt.

Annulez sa trace et son déterminant, et vérifiez alors qu'elle est nilpotente : $\begin{pmatrix}5 & -3 & \\ 7 & -4 & 1\\ -1 & 1 & \end{pmatrix}$. 3 pt.

♢ 0 ♢ Montrez pour tout couple de réels $(a,\ b)$: $2.|a.b|\leqslant a^2+b^2$. Déduisez pour tout couple de liste de réels $(a_k)_{k\leqslant n}$ et $(b_k)_{k\leqslant n}$: $2.\sum_{k=1}^{n}a_k.b_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2$. 2 pt.

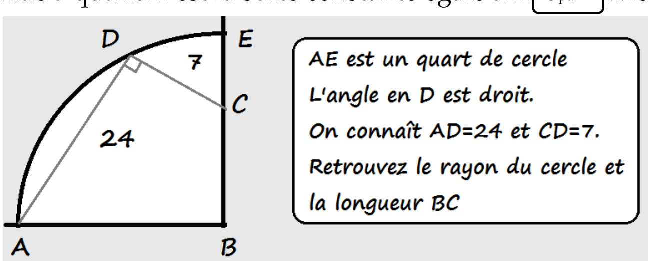
On donne deux listes de réels $(x_k)_{k\leqslant n}$ et $(y_k)_{k\leqslant n}$ *(non tous nuls)*. Appliquez le résultat précédent à $a_k=\frac{x_k}{A}$ et $b_k=\frac{y_k}{B}$ avec $A=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}$ et $B=$ *devinez* et retrouvez l'inégalité de Cauchy-Schwarz. 3 pt.

♢ 1 ♢ Calculez $\sum_{p=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{p}.k^p\right)$. 3 pt.

♢ 2 ♢ $(a_k)_{k\leqslant n}$ et $(b_k)_{k\leqslant n}$ sont deux suites réelles, classées toutes deux par ordre croissant. Montrez que $\sum_{\substack{i\leqslant n\\ k\leqslant n}}(a_i.b_i-a_i.b_k-a_k.b_i+a_k.b_k)$ est une somme de n^2 termes tous positifs. Déduisez $\left(\frac{1}{n}.\sum_{j=1}^{n}a_j.b_j\right)\geqslant\left(\frac{1}{n}.\sum_{j=1}^{n}a_j\right).\left(\frac{1}{n}.\sum_{j=1}^{n}b_j\right)$ *(moyenne du produit et produit des moyennes)*. 4 pt.

♢ 3 ♢ L'élève a oublié la formule pour $\sum_{k=0}^{n}k^2$, mais se souvient de $\sum_{k=0}^{n}k$. Proposez lui de retrouver la formule qui lui manque en permutant les sommes dans $\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n}k$. 4 pt.

♣ 0 ♣ On définit le N-produit $a\otimes b$ de deux suites a et b par $(a\otimes b)_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a_k.b_{n-k}$. Montrez que cette loi est commutative. 1 pt. Montrez que le N-produit de deux suites géométriques est une suite géométrique. 2 pt. Montrez que la suite u définie par $u_n=\left\{\begin{array}{ll}1 & si\quad n=0\\ 0 & sinon\end{array}\right|$ est élément neutre de $\otimes$. Résolvez $1\otimes b=u$ d'inconnue b quand 1 est la suite constante égale à 1. 3 pt. Montrez que la loi $\otimes$est associative. 3 pt.



Conseils : prolongez $[AB]$ et $[DC]$. Tracez aussi $[AC]$ mesurez le, et travaillez dans (ABC). Ca ne suffit pas, mais ça rapporte des points. 5 pt.

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2021/22

IS14
Correction

Lycee Charlemagne IS14

Série géométrique.

On veut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{5^k}\simeq\frac{5}{4}$ à 10^{-20}, ce qui signifie $\displaystyle\Big|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{5^k}-\frac{5}{4}\Big|\leqslant 10^{-20}$.

Ceci équivaut à $\dfrac{1-\dfrac{1}{5^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{5}}-\dfrac{5}{4}$ est entre -10^{-20} et 10^{-20}.

On effectue le calcul, et on demande $\Big|\dfrac{1}{4.5^n}\Big|\leqslant 10^{-20}$.
Le signe ne sert plus à rien, on passe au logarithme : $-\ln(4)-n.\ln(5)\leqslant -20.\ln(10)$.
On trouve $n\geqslant\dfrac{20.\ln(10)-\ln(4)}{\ln(5)}$.

Si on l'écrit proprement : $S=[N,\ +\infty[$ avec $N=\Big\lfloor\dfrac{20.\ln(10)-\ln(4)}{\ln(5)}\Big\rfloor+1$ (arrondi à l'entier supérieur).

Lycee Charlemagne IS14

Somme de puissances d'entiers.

On calcule par cœur : $\dfrac{\left(\sum_{k=0}^{n}k^2\right).\left(\sum_{p=0}^{2.n}p^2\right)}{\left(\sum_{k=0}^{n}k^3\right).\left(\sum_{k=0}^{n}n\right)}=\dfrac{\dfrac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}.\dfrac{(2.n).(2.n+1).(4.n+1)}{6}}{\dfrac{n^2.(n+1)^2}{4}.n.(n+1)}$ *(attention, dans l'une, k est un compteur)*.

On simplifie par n^6 en haut et en bas : $\dfrac{(2.n+1).(2).(2.n+1).(4.n+1)}{n.(n+1).(n+1)}.\dfrac{4}{36}$ et on divise encore, ou on passe par les équivalents. La limite est numérique : $\boxed{\dfrac{4.32}{36}=\dfrac{32}{9}}$

Lycee Charlemagne IS14

Equation différentielle.

La solution de $y'_t+\cos(t).y_t=0$ et $y_0=2$ est $t\longmapsto 2.\exp\left(-\int_0^t\cos(x).dx\right)$ (on tient compte tout de suite de la condition initiale).
On trouve $y_\pi=2.\exp\left(-\int_0^\pi\cos(x).dx\right)=2$.
On notera que la solution est périodique...

Pour $y'_t+t.\cos(t).y_t=0$, on va devoir intégrer par parties : $\displaystyle\int_0^\pi x.\cos(x).dx=\Big[x.\sin(x)+\cos(x)\Big]_0^\pi=-2$.
On trouve $y_\pi=2.e^2$ (et cette fois, la solution n'est plus périodique).

Lycee Charlemagne IS14

Somme et binomiaux.

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\binom{k}{2}}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\dfrac{k.(k-1)}{2}}=2.\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k.(k-1)}=2.\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$$

La somme devient télescopique et il reste $\boxed{2.\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}$

$\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} = \frac{1}{2}.\sum_{k=2}^{n}k.(k-1) = \frac{1}{2}.\sum_{k=2}^{n}k^2 - \frac{1}{2}.\sum_{k=2}^{n}k = \ldots = \frac{(n+1).n.(n-1)}{6}$ (comment il va Zhu Shi Jie ?).

On passe à l'inverse et on trouve $\boxed{\frac{6}{n^3-n}}$

Lycee Charlemagne	IS14
Inégalité de Cauchy-Schwarz.	

On montre $2.|a.b| \leqslant a^2+b^2$ en calculant la différence ; elle vaut $(|a|-|b|)^2$ et est donc positive (carré de réel).
On a aussi $2.a.b \leqslant a^2+b^2$ et $-2.a.b \leqslant a^2+b^2$.
On l'écrit pour chaque couple $(a_k,\ b_k)$: $2.a_k.b_k \leqslant (a_k)^2+(b_k)^2$ et on somme.

On a donc bien $2.\sum_{k=1}^{n}a_k.b_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}(a_k)^2 + \sum_{k=1}^{n}(b_k)^2$.

On veut $\left(\sum_{k=1}^{n}x_k.y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}(y_k)^2\right).\left(\sum_{k=1}^{n}(y_k)^2\right)$, ça n'y ressemble pas.

Mais laissons nous guider par l'énoncé avec $a_i = \frac{x_i}{A}$ et $b_i = \frac{yi}{B}$.

On obtient $2.\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k.y_k}{A.B} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_i}{A}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y_i}{B}\right)^2$.

On sort ce qu'on peut : $\frac{2}{A.B}.\sum_{k=1}^{n}x_k.y_k \leqslant \frac{1}{A^2}.\sum_{k=1}^{n}(x_i)^2 + \frac{1}{B^2}.\sum_{k=1}^{n}(y_i)^2$.

Et c'est là que c'est génial : $\sum_{k=1}^{n}(x_k)^2 = A^2$ et $\sum_{k=1}^{n}(y_k)^2 = B^2$ (définition de A et B).

Les deux termes du second membre valent 1 : $\frac{2}{A.B}.\sum_{k=1}^{n}x_k.y_k \leqslant 2$.

On décroise : $\sum_{k=1}^{n}x_i.y_i \leqslant A.B = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k)^2}.\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k)^2}$.

C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz (source : exercices d'Alain Troesch, lycée Le Roi Soleil).

Lycee Charlemagne	IS14
Une somme.	

$\sum_{p=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{p}.k^p\right)$ dépend juste de n (notons la A_n) et vaut $\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n}{p}.k^p\right)$ en permutant les sommes (variables indépendantes).

On l'écrit même $\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.k^p - \binom{n}{n}.k^n\right)$ en « ajoutant le terme qui manque.

On fait appel à Newton et son binôme : $A_n = \sum_{k=0}^{n}((k+1)^n - k^n)$.

Il est temps d'y voir un télescopage : $\boxed{A_n = (n+1)^n - 0^n}$

Lycee Charlemagne	IS14
Inégalité sur des listes triées.	

Dans $\sum_{\substack{i\leqslant n\\ k\leqslant n}}(a_i.b_i - a_i.b_k - a_k.b_i + a_k.b_k)$ (notée S), chaque terme est $(a_i.b_i - a_i.b_k - a_k.b_i + a_k.b_k)$ qu'on factorise en $(a_i-a_k).(b_i-b_k)$.
Si i est plus petit que k, c'est le produit de deux réels négatifs. Il est positif.
Si i est plus grand que k, c'est le produit de deux réels positifs, il est positif.

Tous les termes de la somme son positifs, elle est positive. Et il y en a bien n^2 puisque i et k vont tous deux de 1 à

n.

Calculons la par linéarité : $S = \sum_{\substack{i\leqslant n\\k\leqslant n}}(a_i.b_i) - \sum_{\substack{i\leqslant n\\k\leqslant n}}(a_i.b_k) - \sum_{\substack{i\leqslant n\\k\leqslant n}}(a_k.b_i) + \sum_{\substack{i\leqslant n\\k\leqslant n}}(a_k.b_k)$.

Prenons par exemple $\sum_{\substack{i\leqslant n\\k\leqslant n}} a_i.b_i$ qu'on écrit $\sum_{i\leqslant n}\Big(\sum_{k\leqslant n} a_i.b_i\Big)$ puis $\sum_{i\leqslant n}\Big(n.a_i.b_i\Big)$ (compteur).

On sort le n et on a $n.\sum_{i=1}^{n} a_i.b_i$.

Il en est de même pour $\sum_{\substack{i\leqslant n\\k\leqslant n}}(a_j.b_j) = n.\sum_{k=1}^{n} a_k.b_k$.

La somme de produits indépendants $\sum_{\substack{i\leqslant n\\k\leqslant n}}(a_i.b_j)$ est juste $\Big(\sum_{i\leqslant n} a_i\Big).\Big(\sum_{k\leqslant n} b_k\Big)$.

De même pour l'autre, avec des variables k et i.

Comme les variables sont muettes $\boxed{\begin{array}{llll} S = \sum_{\substack{i\leqslant n\\k\leqslant n}}(a_i.b_i) & -\sum_{\substack{i\leqslant n\\k\leqslant n}}(a_i.b_k) & -\sum_{\substack{i\leqslant n\\k\leqslant n}}(a_j.b_i) & \sum_{\substack{i\leqslant n\\k\leqslant n}}(a_j.b_j) \\ = n.\sum_{j=1}^{n} a_j.b_j & -\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j\Big).\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j\Big) & -\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j\Big).\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j\Big) & +n.\sum_{j=1}^{n} a_j.b_j \end{array}}$

Par positivité établie : $2.n.\sum_{j=1}^{n}(a_j.b_j) - 2.\sum_{j=1}^{n} a_j.\sum_{j=1}^{n} b_j \geqslant 0$.

On divise par 2 et par n (positif) : $\Big(\frac{1}{n}.\sum_{j=1}^{n}(a_j.b_j)\Big) \geqslant \Big(\frac{1}{n}.\sum_{j=1}^{n} a_j\Big).\Big(\frac{1}{n}.\sum_{j=1}^{n} b_j\Big)$

Lycee Charlemagne IS14

Somme des carrés d'entiers.

Calculons $\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n} 2.k$ de deux manières, c'est à dire $\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{k} 2.k\Big)$ et $\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(\sum_{i\leqslant k\leqslant n} 2.k\Big)$.

La première vaut justement $\sum_{k=1}^{n} 2.k^2$ (i est un compteur et il y a k termes).

La seconde vaut $\sum_{i=1}^{n}(n-i+1).\frac{2.i+2.n}{2}$ (nombre de termes fois moyenne des extrêmes, ou même $2.\sum_{k=1}^{n} k - 2.\sum_{k=1}^{i-1} k$).

On sépare en $\Big(\sum_{i=1}^{n}(n^2+n) + \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2\Big)$.

On effectue à partir de ce qu'on connaît : $\Big(n.(n^2+n) + \frac{n.(n+1)}{2} - \sum_{i=1}^{n} i^2\Big)$.

On a obtenu : $2.\sum_{k=1}^{n} k^2 = \Big(n.(n^2+n) + \frac{n.(n+1)}{2} - \sum_{i=1}^{n} i^2\Big)$ et par mutisme des variables :

$3.\sum_{k=1}^{n} k^2 = n.(n^2+n) + \frac{n.(n+1)}{2} = \frac{n.(n+1).(2.n+1)}{2}$. C'est finalement encore la formule du cours.

Lycee Charlemagne IS14

Un produit avec binomiaux.

Quand on part de deux suites, on en construit une nouvelle :

n	0	1	2	3	4
a_n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
b_n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
$(a\otimes b)_n$	$a_0.b_0$	$a_0.b_1 + a_1.b_0$	$a_0.b_2 + 2.a_1.b_1 + a_2.b_0$	$a_0.b_3 + 3.a_1.b_2 + 3.a_2.b_1 + a_3.b_0$	$a_0.b_4 + 4.a_1.b_2 + \ldots + a_4.b_0$

Je suis presque sûr que je vais devoir pourchasser de vos copies des notations absurdes comme $a_n \otimes b_n$.
La bonne notation est $(a\otimes b)_n$ (la suite $a\otimes b$, calculée au rang n).

La notation $a_n \otimes b_n$ sous-entendrait « on n'a besoin que de a_3 et b_3 pour calculer $a_3 \otimes b_3$, alors qu'on a besoin d'entrecroiser a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2 et b_3.

Pour prouver la commutativité, on se donne deux suites (a_n) et (b_n) et on compare $a \otimes b$ et $b \otimes a$.
On établit l'égalité de ces deux suites « terme par terme », c'est à dire qu'on va comparer $(a \otimes b)_n$ et $(b \otimes a)_n$.
L'un vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.a_k.b_{n-k}$ et l'autre $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.b_k.a_{n-k}$, ou même $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.b_p.a_{n-p}$ puisque les variables sont muettes.
Mais en posant $p = n - k$ (et en exploitant $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$), on trouve l'égalité demandée.

On prend deux suites a et b, géométriques de raisons α et β.
On calcule au rang n : $(a \otimes b)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.(a_0.\alpha^k).(b_0.\beta^{n-k})$.
On factorise et on exploite la formule du binôme : $(a \otimes b)_n = a_0.b_0.\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\alpha^k.\beta^{n-k} = (a_0.b_0).(\alpha+\beta)^n$.
On identifie une suite géométrique de premier terme$a_0.b_0$ et de raison $\alpha + \beta$.
Combien d'entre vous vont oublier a_0 et b_0 ?

On se donne une suite a quelconque, et la suite $(1,\ 0,\ 0,\ 0\ldots)$, et on calcule leur N-produit au rang n :
$(a \otimes u)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.a_{n-k}.u_k = \binom{n}{0}.a_{n-0}.u_0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.a_{n-k}.u_k = 1.a_n.1 + 0$.
Terme à terme, les deux suites sont égales : : $a \otimes u = a$.
Inutile de la vérifier des deux côtés, la loi est associative.

Partant de la suite constante égale à 1 (qu'on note (a_n)), on va construire sa suite « inverse » (qu'on note (α_n)) terme à terme (mais on verra une astuce plus loin).

n	a_n	α_n inconnu	équation	objectif	valeur α_n
0	1	α_0	$1.\alpha_0$	$= 1$	$\alpha_0 = 1$
1	1	α_1	$1.\alpha_0 + 1.\alpha_1$	$= 0$	$\alpha_1 = -1$
2	1	α_2	$1.\alpha_0 + 2.\alpha_1 + 1.\alpha_2$	$= 0$	$\alpha_2 = 1$
3	1	α_3	$1.\alpha_0 + 3.\alpha_1 + 3.\alpha_2 + 1.\alpha_3$	$= 0$	$\alpha_3 = -1$

On sent venir $\alpha_n = (-1)^n$. On le propose et on vérifie : $(a \otimes \alpha)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.1.(-1)^k = (1-1)^n = 0$ (sauf pour $n = 0$).

Mais en fait, il y avait plus rapide.
a est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 1.
u est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 0.
si α est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison -1 , le N-produit $a \otimes \alpha$ est la suite de premier terme 1 et de raison $1 - 1$. C'est bien u.

Pour l'associaitivité, on se donne trois suites a, b et c, et on doitcomparer pour tout n
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\Big(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}.a_{k-i}.b_i\Big).c_{n-k}$ et $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.a_{n-p}.\Big(\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}.b_j.c_{p-j}\Big)$
On transforme la première en $\sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k}.\binom{k}{i}.a_{k-i}.b_i.c_{n-k}$ et l'autre en $\sum_{0 \leqslant j \leqslant p \leqslant n} \binom{n}{p}.\binom{p}{j}.a_{n-p}.b_j.c_{p-j}$.
On écrit même après simplification $\sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} \frac{n!}{(n-k)!.i!.(k-i)!}.a_{k-i}.b_i.c_{n-k}$
et $\sum_{0 \leqslant j \leqslant p \leqslant n} \frac{n!}{(n-p)!.j!.(p-j)!}.a_{n-p}.b_j.c_{p-j}$.
On a des $a_r.b_s.c_t$avec condition $r + s + t = n$ et coefficient $\frac{n!}{r!.s!.t!}$ finalement dans l'une comme dans l'autre.
Ces deux quantités sont égales. Pour passer de l'une à l'autre, je suggère $j = i$ et $p = n - k + i$.

Lycee Charlemagne	IS14
Matrices nilpotentes.	

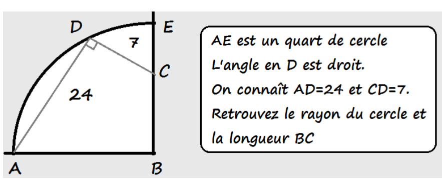
Si A est nilpotente, alors la somme $I_n + A + A^2 + A^p$ est même égale à $I_n + A + A^2 + \ldots + A^{p-1}$.
Ne simplifions pas avec des formules qu'on ne maîtrise que dans un corps. Mais multiplions par $(I_n - A)$:
$(I_n - A).\sum_{k=0}^{p-1} A^k = \sum_{k=0}^{p-1} A^k - A.\sum_{k=0}^{p-1} A^k = \sum_{k=0}^{p-1} A^k - \sum_{k=0}^{p-1} A^{k+1}$
(on a juste distribué) ; la somme devient rtélescopqieu, et il reste $I_n - A^p$ ce qui fait I_n.
Ayant $(I_n - A).M = I_n$ (et la même chose de l'autre côté par le même calcul), on reconnaît que M est l'inverse de $I_n - A$.

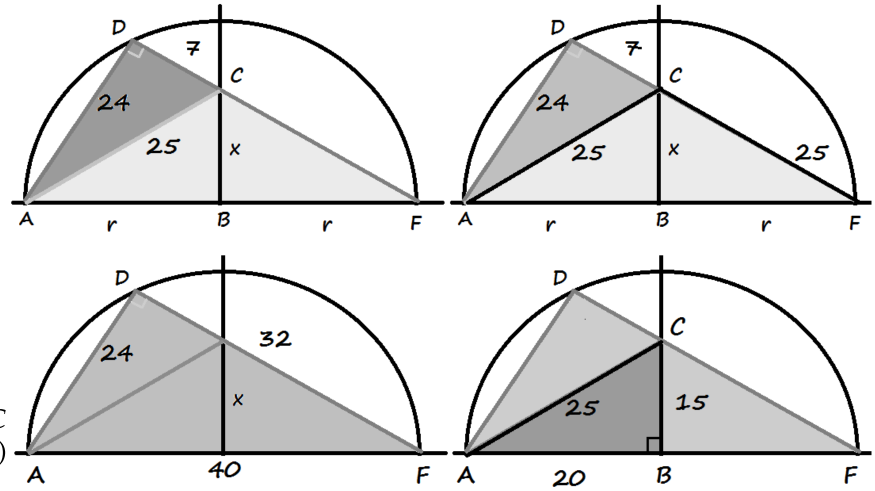
Pour que $\begin{pmatrix} 5 & -3 & a \\ 7 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & b \end{pmatrix}$ ait une trace nulle, le coefficient b vaut -1. Son déterminant est alors (Sarrus) : $3.a - 3$.
On l'annule en prenant $a = 1$.
On a la matrice, calculons ses puissances à la main :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -3 & a \\ 7 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Preuve que ça existe, les matrices nilpotentes.

Lycee Charlemagne	IS14
Un trinagle dans un demi disque.	





En fait, il faut déjà prolonger AB et DC pour retrouver un triangle (rectangle) inscrit dans un demi disque.
Dans $(C\ D\ A)$ rectangle en D, le théorème de Pythagrore calcule $AC = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$.
Par symétrie d'axe $(B\ C)$, $CF = AC = 25$. On additonne : $DF = DC + CF = 7 + 25 = 32$.
On revient dans le triangle rectangle inscrit dans le demi cercle et on calcule la longueur de l'hypothénuse : $AF = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40$.
Le diamètre est connu, on extrait le rayon : $AB = 20$.
Dans le dernier triangle rectangle : $(A\ B\ C)$ (rectangle en B) : $BC = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$.

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2021/22
.	IS14 45 points IS14	.