

O

Lycee Charlemagne	MPSI2	Année 2021/22
DS08 Vendredi 8 avril		
Lycee Charlemagne	MPSI2	Année 2021/22
Ulm MPI 2017 (extrait d'extrait)		

I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et f est une application de I dans I . On définit la suite de fonction (f^{on}) par $f^{o0} = Id$ et $f^{o(n+1)} = f \circ f^{on}$ (tout ça pour dire $f \circ f \circ \dots \circ f$ « n fois »). On pourra noter f^n au lieu de f^{on} . Un point fixe est une solution x de $f(x) = x$. Un point x est périodique si il existe p dans $\mathbb{N}^*$ tel que x soit point fixe de f^{op} . Pour une partie J de I , on posera $f^{-n}(J) = \{x \in I \mid f^{on}(x) \in J\}$. f est monotone par morceaux sur I si il existe une famille C de points de I , finie, telle que f soit strictement monotone sur chaque intervalle inclus dans $I - C$ (qui est une réunion d'intervalles disjoints).

Un réel x de I est un point critique de f si il n'existe aucun intervalle ouvert J contenant x tel que f soit monotone sur J (en particulier, si I est un segment, ses extrémités sont des points critiques). On note C_f l'ensemble des points critiques de f . Un pli de f est un intervalle le plus grand possible inclus dans $I - C_f$ (ses extrémités sont des points critiques de f ou des extrémités de I). On note $\lambda(f)$ le nombre de plis de f .

Pour x_0 donné, on définit et étudie la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ (et donc $x_n = f^{on}(x_0)$).

Déterminez les points critiques de f , de f^{o2} et f^{o3} pour $f = x \mapsto (x-1)^2 - 2$.

Combien de plis ont f , f^2 et f^3 ? 5 pt.

◇ 0 ◇ Dans cette partie : $f = x \mapsto x^2 + c$ et $I = \mathbb{R}$. On pose K_c l'ensemble des x_0 tels que la suite (x_n) soit bornée. Déterminez x_n en fonction de x_0 et n dans le cas $c = 0$. Explicitiez K_0 . 3 pt.

On prend maintenant c quelconque. Déterminez en fonction de c les points fixes de f . 1 pt. Montrez que si on suppose $4c > 1$, alors la suite (x_n) est croissante pour tout x_0 , et montrez que K_c est vide. 3 pt.

◇ 1 ◇ On suppose maintenant $4c \leq 1$, et on note β_c le plus grand point fixe de f . Montrez pour $c \in [-2, 1/4]$: $K_c = [-\beta_c, \beta_c]$. 3 pt.

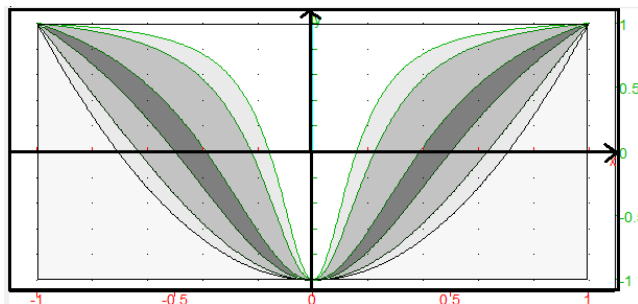
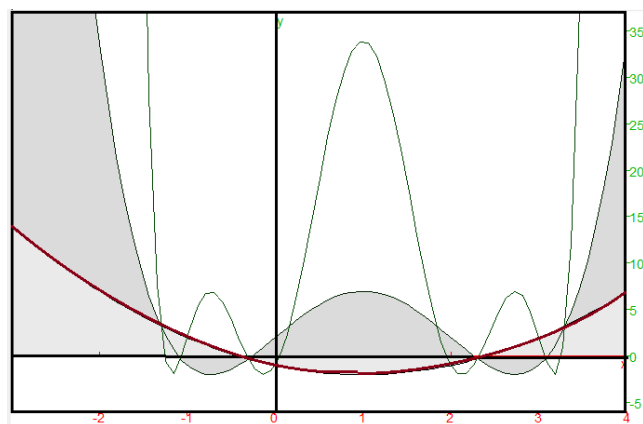
On termine avec $c < -2$. Montrez alors : $K_c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}([-\beta_c, \beta_c])$. 3 pt. Montrez que K_c est non vide. 1 pt.

◇ 2 ◇ On suppose que K_c contient un segment $[a, b]$ non réduit à un point. On pose $a_n = f^{on}(a)$, $b_n = f^{on}(b)$ et $L_n = \left| \int_{a_n}^{b_n} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x/c)^2}} \right|$. Montrez que pour tout n , f est strictement monotone sur l'intervalle d'extrémités a_n et b_n . Montrez que L_n est bien défini et établissez : $L_{n+1} \geq 2L_n$. Concluez : K_c est « totalement discontinu » (=ne contient aucun intervalle non réduit à un point). 5 pt.

On prend $I = [-1, 1]$, $a \in [0, 1[$. Montrez que $f = x \mapsto \frac{2x^2 + a - 1}{2ax^2 + 1 - a}$ va bien de I dans I , et qu'elle est même surjective de I sur I . 2 pt. Montrez pour tout n : $\lambda(f^{on}) = 2^n$. Montrez que pour tout n , f^{on} envoie chaque pli de f^{on} sur $] -1, 1[$. 3 pt.

On suppose $a = 0$, et on pose $t_0 = \text{Arccos}(x_0)$.

Exprimez x_n à l'aide de t_0 et n . 1 pt. Dédisez que l'ensemble des points périodiques de f est dense dans I (=tout



intervalle non réduit à un point contient une infinité de points fixes). 2 pt.

◇ 3 ◇

Montrez que la composée d'applications monotones par morceaux est monotone par morceaux.

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2021/22
Mines MP (Extrait)		

I~0) Une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est dite quasi-nilpotente si elle ne possède aucune valeur propre¹ non nulle dans $\mathbb{K}$.

Montrez que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (notée D) est quasi-nilpotente vue comme matrice de $M_2(\mathbb{R})$. L'est elle encore vue comme matrice de $M_2(\mathbb{C})$? 2 pt.

I~1) Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ (notée B) est quasi-nilpotente vue comme matrice de $M_2(\mathbb{C})$. 1 pt.

I~2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ est elle quasi-nilpotente dans $M_3(\mathbb{R})$? Et dans $M_3(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$? Et dans $M_3(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$? Montrez qu'elle ne l'est pas dans $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ (tentez $\lambda = 10$). 4 pt.

I~3) Écrivez un script Python qui cherche les entiers p premiers plus petits que 500 pour lesquels elle sera quasi-nilpotente dans $M_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. 3 pt.

II~0) On note $T_n^{++}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictement ($a_i^k = 0$ si $i \geq k$). Montrez que c'est un sous-espace vectoriel de $(M_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ et donnez sa dimension. 3 pt.

II~1) Une partie V de $M_n(\mathbb{K})$ est dite quasi-nilpotente si tous ses éléments sont quasi-nilpotents dans $M_n(\mathbb{K})$. Montrez que $T_n^{++}(\mathbb{K})$ est quasi-nilpotent. 1 pt.

III~0) Soit A une matrice antisymétrique de $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$. Montrez pour tout vecteur colonne U : ${}^tU.A.U = 0$ (déjà, vérifiez que c'est un réel). Déduisez que $A_n(\mathbb{R})$ (espace des matrices antisymétriques) est quasi-nilpotent, et donnez sa dimension. 4 pt.

III~1) Montrez qu'il n'existe pas de matrice inversible P vérifiant $A_2(\mathbb{R}) = \{P.T.P^{-1} \mid T \in T_2^{++}(\mathbb{R})\}$ (on pourra utiliser la matrice D). 2 pt.

III~2) Montrez qu'il n'existe pas de matrice inversible P vérifiant $A_3(\mathbb{R}) = \{P.T.P^{-1} \mid T \in T_3^{++}(\mathbb{R})\}$. 2 pt.

III~3) Déterminez les matrices de $S_2(\mathbb{R})$ (matrices symétriques) qui sont quasi-nilpotentes dans $M_2(\mathbb{R})$. Le résultat tient il si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$? 3 pt.

Soit S une matrice quasi-nilpotente dans $S_3(\mathbb{R})$. Montrez qu'elle admet au moins une valeur propre réelle, et que cette valeur propre réelle est nulle. Déduisez qu'il existe U non nul vérifiant $S.U = 0_3$. Donnez la dimension de $\{X \in \mathbb{R}^3 \mid {}^tU.X = 0\}$ (noté H) et montrez $\forall X \in H, S.X \in H$. 3 pt. Montrez qu'il n'y a dans $\mathbb{R}$ qu'une matrice quasi nilpotente symétrique de format 3 sur 3. 3 pt.

III~4) Déduisez que si V est un sous-espace vectoriel de $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ quasi-nilpotent, alors sa dimension est inférieure ou égale à $\frac{3 \cdot (3-1)}{2}$. 2 pt.

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2021/22
DS08 55 points DS08		

1. les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique $\det(X.I_n - A)$, caractérisées aussi par $\exists U \neq 0_n, A.U = \lambda.U$

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2021/22
DS08		
Correction		
Lycee Charlemagne	DS08	
Matrices D et B.		

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^2 + 1$. Ce polynôme n'a pas de racines réelle.

Il n'a donc pas de racine réelle non nulle.

Difficulté : | Comprendre la phrase « elle ne possède aucune valeur propre non nulle dans $\mathbb{K}$ ».
Ceci signifie donc « pas de valeur propre, ou alors la seule valeur propre est 0 ».
Ici, la matrice a des valeurs propres, mais pas dans $\mathbb{R}$.

Dans $\mathbb{C}$ elle n'est pas quasi-nilpotente, puisque ses valeurs propres sont i et $-i$ (et i est non nul, si si !).

$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique X^2 , dont la racine est 0.

Elle est quasi-nilpotente.

Elle est même nilpotente : $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Lycee Charlemagne	DS08
Quasi-nilpotence d'une matrice de taille 3.	

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ a pour trace 5 et pour déterminant 0 (deux lignes égales, ça saute aux yeux).

Sa comatrice a pour trace $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est $X^3 - 5X^2 - 12X$.

On a toujours pour racine 0, mais ça, c'est autorisé.

Dans $\mathbb{R}$, on a deux autres racines : $\frac{5 + \sqrt{73}}{2}$ et $\frac{5 - \sqrt{73}}{2}$, non nulles.

Cette matrice n'est pas quasi-nilpotente sur $\mathbb{R}$...

Ni sur $\mathbb{C}$.

Passons modulo 5.

On réduit son polynôme caractéristique : $X^3 + 3X$.

L'une des racine est nulle... Ce n'est pas interdit.

Ce qui pose problème, c'est « au moins une racine non nulle ».

Alors les autres ? On teste à la main 1, 2, 3 et 4. Aucune ne convient.

Elle est quasi-nilpotente (une seule racine, et celle ci est nulle).

Passons modulo 7.

$X^3 + 2X^2 + 2X$ a pour racine 0. Mais sinon ? Le discriminant de $X^2 + 2X + 2$ vaut -4 c'est à dire 3.

Et 3 n'est pas un carré parfait :

δ	0	1	2	3	4	5	6
δ^2	0	1	4	2	2	4	1

Attention : | Rappelons que les histoires $\Delta < 0$ sont des absurdités quand on raisonne module un entier.
-4 est ici aussi 3. Estimez vous que sous la forme -4 il est négatif et sous la forme 3 positif, comme un chat de Schrödinger ?
Non, en fait, la question n'a jamais été « quel est le signe de Δ ».
La question est « Δ est il un carré ».
Et sur $\mathbb{R}$, c'est bien la même question...

Sinon, vous pouviez tester un à un les six nombres de 1 à 6.

Si l'un d'entre eux avait été racine, la matrice n'était pas quasi-nilpotente.

Si l'un au moins était racine, la matrice l'était.

Et modulo 19 ?

Le polynôme caractéristique est $X.(X^2 + 14.X + 7)$.

Et autant tester 10. Il est racine ! ($247 = 13 \times 19$).

Le polynôme caractéristique a au moins une racine non nulle. Elle n'est pas quasi-nilpotente.

Décomposons le problème des entiers premiers plus petits que 500 tels que la matrice soit quasi-nilpotente.

On doit juste regarder pour chaque p si l'équation $x^2 = 5.x + 12$ admet ou non une racine (*modulo* p) autre que 0.

On fait donc défiler les entiers de 1 (*inclus*) à p (*exclu*).

Pour chacun, on fait le teste.

Si le test donne « $x^2 = 5.x + 12$ », c'est qu'on a une racine non nulle. La matrice n'est pas quasi-nilpotente.

Si tous les entiers ont défilé sans donner de racine, la matrice est quasi-nilpotente.

On aura un `return(False)` dans la boucle, et un `return(True)` après la boucle.

```
def Test(p) : #int -> boolean
...#teste si l'équation ... a des racines
...for x in range(1, p) :
.....if (x*x-5*x-12)%p == 0 :
.....return(False) #on a trouvé une racine, on sort
...return(True) #on n'avait trouvé aucune racine
```

```
def Test(p) :
...for x in range(1, p) :
.....if x*x-5*x-12)%p == 0 :
.....return(False)
.....else :
.....return(True)
```

Je ne peux rien pour celui (ou celle) qui va proposer

Un tel élève ne teste que le premier x (c'est $x=1$), et ne regarde pas les suivants.

Il n'a rien compris à l'informatique. Ou pire encore, aux mathématiques.

Mais il faut aussi faire défiler les nombres premiers.

On ne peut pas solliciter `Test(p)` avec juste `for p in range(1, 500) :`

Comment tester si un entier est premier ?

Solution du physicien : `from numpy import *`

Solution du mathématicien :

```
def Premier(p) : #int -> boolean
...#teste si un entier est premier
...for d in range(2, p) :
.....if p%d == 0 :
.....return(False) #d est un diviseur de p, p n'est pas premier
...return(True) #aucun diviseur n'a été détecté
```

On notera qu'on peut s'arrêter à « mi parcours » avec $[\sqrt{p}]$ puisque quand p n'est pas premier, il se factorise en $p = a.b$ avec $a \leq \sqrt{p}$ et $b \geq \sqrt{p}$.

Solution de l'informaticien :

```
def Premier (p) :
...d = 2
...while p%d != 0 and d*d<p :
.....d += 1
...return(p%d == 0)
```

Test à ajuster car 1 et 2 posent problème.

Solution qui profite du fait qu'on veut la liste des premiers entiers premiers.

Pour un nouvel entier p à tester, inutile de lui chercher un diviseur en testant tous les entiers. Il suffit de tester les nombres premiers qui l'ont précédé.

```
L, p = [2], 3 #2 est premier, et on va commencer à 3, premier entier impair
while p < 500 : #on va faire défiler les entiers jusqu'à 500
    ...NDP = 0 #on va compter le nombre de diviseurs premiers de p
    ...for d in L : #on fait défiler les nombres premiers qui précèdent
    .....if p%d == 0 : #si l'un divise p
    .....NDP += 1 #on compte un diviseur
    ...if NDP == 0 : #p n'a pas de diviseur premier
    .....L.append(p) #il est premier, on l'ajoute à la liste
    ...p += 2 #on passe au nombre impair suivant
```

On va estimer que l'on a la liste des nombres premiers qui nous intéressent.

On crée alors la liste des p tels que $\text{Test}(p)$ soit vrai.

```
LL = [ ]
for p in L :
    ...if Test(p) : #Test(p) est un booléen, n'allez pas surcharger avec if Test()==True, merci !!!
    .....LL.append(p)
```

Et voici la liste [5, 7, 11, 13, 17, 29, 31, 43, 47, 53, 59, 83, 101, 103, 107, 113, 131, 139, 151, 157, 163, 167, 179, 191, 193, 197, 199, 229, 233, 239, 241, 263, 271, 277, 281, 307, 313, 331, 337, 379, 409, 421, 431, 433, 443, 449, 467, 491]

5 et 7 en font partie, mais pas 19. C'est cohérent.

C'est évidemment une question personnelle, qui ne figurait pas dans l'énoncé des Mines.

Lycee Charlemagne

DS08

Matrice triangulaires strictement.

On regarde donc les matrices des formes suivantes : $\begin{pmatrix} 0 & a_1^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 \\ 0 & 0 & a_2^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ 0 & 0 & a_2^3 & a_2^4 \\ 0 & 0 & 0 & a_3^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Mais le mieux est de revenir à la définition.

La matrice nulle vérifie $a_i^k = 0$ pour tout k , donc aussi $a_i^k = 0$ pour $i \geq k$.

Si A et B vérifient $a_i^k = 0$ pour $i \geq k$ et $b_i^k = 0$ pour $i \geq k$, alors on a $a_i^k + b_i^k = 0$ pour $i \geq k$. La matrice $A + B$ est dans T_n^{++} .

De même, pour tout réel λ on a encore $\lambda a_i^k = 0$ pour $i \geq k$. La matrice λA est dans T_n^{++} .

On a bien un sous-espace vectoriel de $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Pour la dimension, on donne une base : les E_i^k pour $i < k$:

pour T_3^{++}					
$i = 1 < 2 = k$	$i = 1 < 3 = k$	$i = 2 < 3 = k$			
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$			
pour T_4^{++}					
$i = 1 < 2 = k$	$i = 1 < 3 = k$	$i = 1 < 4 = k$	$i = 2 < 3 = k$	$i = 2 < 4 = k$	$i = 3 < 4 = k$
$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En format n sur n , la dimension est $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ (somme des $n-1$ premiers entiers).

Le polynôme caractéristique d'une telle matrice est $\begin{vmatrix} \lambda & -a_1^2 & -a_1^3 & -a_1^4 \\ 0 & \lambda & -a_2^3 & -a_2^4 \\ 0 & 0 & \lambda & -a_3^4 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$ et plus généralement, c'est le déterminant d'une matrice triangulaire, dont la diagonale est faite de n termes λ .

On trouve X^n , dont la seule racine est 0 (avec multiplicité n).

Que l'on travaille sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ ou même sur un autre corps.

Remarque : Ces matrices sont même nilpotentes, au sens de $A^n = 0_{n,n}$ puisqu'à chaque multiplication, les 0

« gagnent du terrain :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ 0 & 0 & a_2^3 & a_2^4 \\ 0 & 0 & 0 & a_3^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1^3 & b_1^4 \\ 0 & 0 & 0 & b_2^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ puis } \begin{pmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ 0 & 0 & a_2^3 & a_2^4 \\ 0 & 0 & 0 & a_3^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c_1^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

la puissance suivante donne $0_{4,4}$.

Mais ce n'est pas demandé ici.

On a donc ici un sous-espace vectoriel de $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ formé de matrices toutes quasi-nilpotentes.

L'objectif du problème était de montrer que les sous-espaces de matrices quasi-nilpotentes étaient de dimension majorée par $\frac{n(n-1)}{2}$ justement...

Lycee Charlemagne

DS08

Cas des matrices antisymétriques.

Si A est une matrice antisymétrique (carrée, évidemment, sinon comment comparer tA et A) que donne le produit ${}^tU.A.U$?

Ligne fois carré fois colonne.

On obtient un réel (matrice de taille 1 sur 1).

On le valide par formule : $({}^tU)_1^n \cdot (A)_n^n \cdot (U)_n^1 = ({}^tU)_1^n \cdot (A.U)_n^1 = ({}^tU.A.U)_1^1$.

Ou par des écriture [nb col, nb ligne] : $[1, n]^* [n, n]^* [n, 1] = [1, n]^* [n, 1] = [1, 1]$.

Ou par un exemple : $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = (u)$

Mais ensuite, le calcul proprement dit.

On rédige un exemple (avec des lettres, et quand même pas des nombres pour lesquels on pourrait avoir eu un coup de chance) :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a.y & +b.z \\ -a.x & +c.y \\ -b.x & -c.z \end{pmatrix} = (0)$$

Notes la simplification deux à deux : $a.x.y$ avec $-a.y.x$ par exemple).

Ça donne une idée, mais ce n'est pas une preuve. Que va donner la dimension n ?

On tente une récurrence ? Mais quelle idée ! Comment passe-t-on du format n au format $n+1$?

On écrit une formule générale pour la matrice et le vecteur : a_i^k pour les coefficients matriciels et x_i pour ceux de U .

Le vecteur colonne $A.U$ a pour composantes les y_i avec $y_i = \sum_{k=1}^n a_i^k \cdot x_k$.

On fait tomber les y_i sur les x_i associés :

${}^tU.A.U$ est le réel $\left(x_i \cdot \sum_{k=1}^n a_i^k \cdot x_k \right)$.

On développe en $\sum_{\substack{i \leq n \\ k \leq n}} a_i^k \cdot x_i \cdot x_k$.

Les a_i^i sont nuls, donc pour $i = k$, on n'a que des termes nuls.

Et ensuite, chaque $a_i^k \cdot x_i \cdot x_k$ se regroupe avec son $a_k^i \cdot x_k \cdot x_i$ et s'annule.

Mais le plus joli est de se dire « qu'est ce qui caractérise A : la relation ${}^t A = -A$ ».

Et comment l'exploiter ? En transposant.

Mais en transposant quoi ? On a ${}^t U.A.U$ qui est un réel.

Si on le transpose, on retrouve le réel lui même.

$$({}^t U.A.U) = {}^t ({}^t U.A.U) = {}^t U.({}^t A).({}^t U) = {}^t U.(-A).U = -({}^t U.A.U).$$

Ce réel est son propre opposé. Il est donc nul.

Comment exploiter ceci pour dire qu'une matrice réelle symétrique n'a aucune valeur propre non nulle ?

Prenons λ une valeur propre de A . On a un vecteur propre associé U vérifiant $A.U = \lambda.U$.

On multiplie à gauche par ${}^t U$ (formats compatibles) : ${}^t U.A.U = {}^t U.(\lambda.U)$.

On exploite ce qui précède : $0 = \lambda.{}^t U.U$ (en considérant que 0 désigne ici le réel 0, ou même en fait la matrice de taille 1 sur 1, dont l'unique coefficient est 0).

Mais qui est aussi $\lambda.{}^t U.U$? C'est $\lambda.(\sum_i (x_i)^2)$.

Comme U n'est pas le vecteur nul la somme $\sum_i (x_i)^2$ est strictement positive.

On peut diviser, et il reste $\lambda = 0$.

La seule valeur propre réelle des matrices réelles antisymétriques est 0.

Remarque : *Le résultat est classique.*

Le chemin pour y arriver l'est aussi.

Le type de méthodes en jeu est habituel en Spé.

0 n'est même pas forcément valeur propre. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'a même pas de valeur propre réelle).

Sinon, $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ a pour spectre $\{0, i.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, -i.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\}$.

Sur $\mathbb{R}$, les matrices antisymétriques forment un espace de matrices quasi-nilpotentes (mais pas vraiment nilpotentes), de dimension $\frac{n.(n-1)}{2}$ (cours).

Comme T_n^{++} .

Lycee Charlemagne

DS08

Absence de passage entre T_n^{++} et $A_n(\mathbb{R})$.

On va raisonner par l'absurde.

Supposons qu'il existe P vérifiant $A_2(\mathbb{R}) = \{P.T.P^{-1} \mid T \in T_2^{++}(\mathbb{R})\}$.

La clef : les éléments de $T_2^{++}(\mathbb{R})$ sont non seulement quasi-nilpotents, mais même vraiment nilpotents.

Et ce n'est pas P qui va y changer quelquechose...

Allons-y. Supposons que P existe. Tout élément de $A_2(\mathbb{R})$ s'écrit donc $P.T.P^{-1}$. En particulier la matrice D .

On a alors $D^2 = (P.T.P^{-1}).(P.T.P^{-1}) = P.T^2.P^{-1} = P.0_{2,2}.P^{-1} = 0_{2,2}$ (le carré de $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est bien nul).

Mais dans le même temps : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On tient notre contradiction.

Peut on faire de même en format 3 sur 3 ?

Même raisonnement par l'absurde.

Supposons que P existe. Ne cherchons pas à l'écrire, ce n'est pas la bonne piste, travaillons juste sur les puissances. Toute matrice antisymétrique A s'écrit $A = P.T.P^{-1}$ avec T bien choisie dans $T_3^{++}(\mathbb{R})$.

Alors pour tout exposant n , on a $A^n = P.T^n.P^{-1}$ et en particulier pour $n = 3$: $A^3 = P.T^3.P^{-1}$.

Mais T^3 est déjà nulle si T était triangulaire strictement. On aurait donc $A^3 = 0_{3,3}$.

Que pensez vous de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Et en format n , on envisage $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Elle est dans $A_n(\mathbb{R})$ mais ne peut pas s'écrire $P.T.P^{-1}$

puisque $(P.T.P^{-1})^n = 0_{n,n}$.

Cette matrice est quand même quasi-nilpotente, de spectre réel $[0, \dots, 0]$ ($n - 2$ fois), et de spectre complexe $[i, -i, 0, \dots, 0]$ avec toujours $n - 2$ zéros.

Lycee Charlemagne	DS08
Matrices quasi-nilpotentes symétriques.	

Une matrice symétrique de format 2 s'écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et a pour polynôme caractéristique $X^2 - (a + c).X + (a.c - b^2)$.

Son discriminant vaut $(a + c)^2 - 4.b.c + 4.b^2$ soit encore $(a - c)^2 + 4.b^2$. Il est positif.

La matrice a donc des valeurs propres réelles. C'est interdit pour qu'elle soit quasi-nilpotente. sauf si ses valeurs propres réelles sont nulles.

Ceci force à avoir $\frac{a + c + \delta}{2} = 0$ et $\frac{a + c - \delta}{2} = 0$.

δ est nul, de même que $a + c$. Mais la nullité de δ entraîne celle de Δ et donc de $(a - c)^2 + 4.b^2$.

Pas e choix : b est nul, et a est égal à c .

Mais la nullité de $a + c$ donne alors $a = c = 0$.

La seule matrice symétrique quasi-nilpotente est la matrice nulle.

Dans C, on perd ce résultat, puisque la matrice B déjà croisée ($B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$) est quasi-nilpotente, symétrique, sans pour autant être nulle.

On prend S symétrique de format 3 et quasi nilpotente.

Son polynôme caractéristique est de degré 3 : $X^3 - \text{Tr}(S).X + \text{Tr}(\text{Com}(S)).X - \det(S)$.

Par théorème des valeurs intermédiaires, il a au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

Il existe donc au moins un vecteur propre associé, qu'on note U . On a donc $S.U = \lambda.U$.

Pour toute valeur propre λ on a $\det(\lambda.I_3 - S) = 0$, donc la matrice $\lambda.I_3$ est non inversible.

Il existe une relation de dépendance linéaire sur ces colonnes, qui nous permet de définir un vecteur U vérifiant $(\lambda.I_3 - S). = 0_3$.

On développe et fait passer de l'autre côté : $S.U = \lambda.U$.

Mais par quasi-nilpotence, la seule valeur propre possible est 0.

λ est donc nul, et il existe U vérifiant $S.U = 0_3$.

On note H l'ensemble des vecteurs orthogonaux à U , c'est à dire des X vérifiant ${}^tU.X = 0$.

Pour $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, l'équation ${}^tU.X = 0$ s'écrit $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$. On reconnaît l'équation d'un plan de $(\mathbb{R}^3, +, .) : a.x + b.y + c.z = 0$.

De toutes façons, le vecteur nul vérifie ${}^tU.0_3 = 0$.

Si deux vecteurs vérifient ${}^tU.X = 0$ et ${}^tU.Y = 0$, on a immédiatement ${}^tU.(\alpha.X + \beta.Y) = 0$.

On a la stabilité demandée pour les sous-espaces vectoriels.

Certains préféreront le noyau de $X \mapsto {}^tU.X$, de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ dans $(\mathbb{R}, +, .)$. Ce dernier argument donne même la

dimension...

Sinon, en écrivant comme ci dessus $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec a, b et c non tous nuls, on a bien un plan.

On y trouve deux vecteurs non nuls indépendants $\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ (si a est non nul, et sinon, passer par b , ou c).

H est au moins de dimension 2. Et sa dimension ne peut pas atteindre (et encore moins) dépasser 3.

H est de dimension 2.

Pour la stabilité, on prend X vérifiant ${}^tU.X = 0$.

On calcule $S.X$, et on doit valider son appartenance à H : ${}^tU.(H.X)$ est il nul ?

On calcule : ${}^tU.(S.X) = {}^tU.S.X = {}^tU.{}^tS.X$ car S est symétrique.

On « refactorise » ${}^tU.(S.X) = {}^t(S.U).X$ (rappel : ${}^t(P.Q) = {}^tP.{}^tQ$).

Or, $S.U = 0_3$. Il reste ${}^tU.(S.X) = {}^t0_3.X = 0$. C'est fini.

On pouvait bien sûr redescendre jusqu'aux coefficients.

La question « la seule matrice réelle symétrique quasi nilpotente est la matrice nulle » était simple pour un élève de seconde année.

« Toute matrice réelle symétrique se diagonalise sur $\mathbb{R}$ » (théorème spectral).

On la diagonalise. Or, par quasi-nilpotence, les seules valeurs possibles sont nulles.

La matrice S est semblable à la matrice nulle. Elle est nulle.

Ici, faute de cet outil, il faut le faire « à la main ».

On a déjà obtenu que S avait un déterminant nul. Écrivons la $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique est $X^3 - (a + d + f).X^2 + (a.d + a.f + d.f - b^2 - c^2 - e^2).X$.

Une fois isolée la racine nulle, il reste un polynôme de degré 2 et de discriminant laid mais positif :

$$\Delta = (a - d)^2 + (a - f)^2 + (d - f)^2.$$

On a donc deux racines réelles.

Il faut qu'elles soient nulles. Le polynôme caractéristique est X^3 et puis c'est tout.

Le discriminant est donc nul : $a = d = f$.

Mais la trace est nulle à son tour (somme des trois valeurs propres) : $a + d + f = 0$, donc $a = 0$.

Et comme la somme des doubles est nulle, ainsi que le déterminant, il ne reste à la fin que $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Lycee Charlemagne

DS08

Comment Grassman va nous aider.

On veut montrer que les sous-espaces vectoriels de matrices quasi-nilpotentes sont forcément de dimension plus petite que $\frac{n.(n-1)}{2}$.

On peut être tenté d'utiliser la décomposition « matrice symétrique plus matrice antisymétrique ».

Mais on ne voit pas trop comment l'utiliser. Si M est quasi-nilpotente, pourquoi tM le serait elle ? Pourquoi sa partie symétrique $\frac{M + {}^tM}{2}$ le serait elle ?

Non, comme indiqué dans mon titre, c'est la formule de Grassmann qui va servir.

Raisonnons par l'absurde. Supposons V un sous-espace vectoriel de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ de dimension strictement plus grande que $\frac{n.(n-1)}{2}$.

Sachant $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$, on a alors $\dim(V) + \dim(S_n) > \frac{n \cdot (n-1)}{2} + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = n^2$.

Or, dans le même temps, par inclusion dans $M_n(\mathbb{R})$, on a $V + S_n \subset M_n(\mathbb{R})$ puis $\dim(V + S_n) \leq n^2$.

La formule de Grassmann $\dim(V + S_n) = \dim(V) + \dim(S_n) - \dim(V \cap S_n)$ donne alors $\dim(S_n \cap V) > 0$.

Il existe donc au moins une matrice non nulle dans $V \cap S_n$.

C'est donc une matrice réelle symétrique quasi-nilpotente non nulle. Ceci est impossible...

On tient notre contradiction.

Preuve en sens direct.

Si V est un sous-espace de matrices quasi-nilpotentes, alors $V \cap S_n(\mathbb{R})$ ne contient que la matrice nulle.

On a donc $V + S_n(\mathbb{R}) = V \oplus S_n(\mathbb{R})$ (la somme est en fait directe).

On a alors $\dim(V + S_n(\mathbb{R})) = \dim(V) + \dim(S_n(\mathbb{R}))$.

Mais on a aussi $\dim(V + S_n(\mathbb{R})) \leq \dim(M_n(\mathbb{R})) = n^2$.

On rassemble : $\dim(V) + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \leq n^2$ et c'est ce qu'on voulait..

C'est ici le cas $n = 3$ qui est envisagé. Mais le sujet original traitait du cas de la dimension n .

Mais les élèves de Spé disposent du théorème spectral : toute matrice réelle symétrique se diagonalise. C'est lui qui donnait en une ligne « la seule matrice réelle symétrique quasi-nilpotente est la matrice nulle ».

Lycee Charlemagne

DS08

Cas de $x \mapsto x^2 - 2x - 1$.

L'application f est décroissante sur $] -\infty, 1[$, puis croissante sur $]1, +\infty[$.

Il n'existe effectivement aucun intervalle ouvert contenant 1 (de la forme $]a - \dots, a + \dots[$) sur lequel f soit monotone.

Le point 1 est point critique.

Et f a deux plis : $] -\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$

On développe $f \circ f = x \mapsto x^4 - 4x^3 + 8x + 2$.

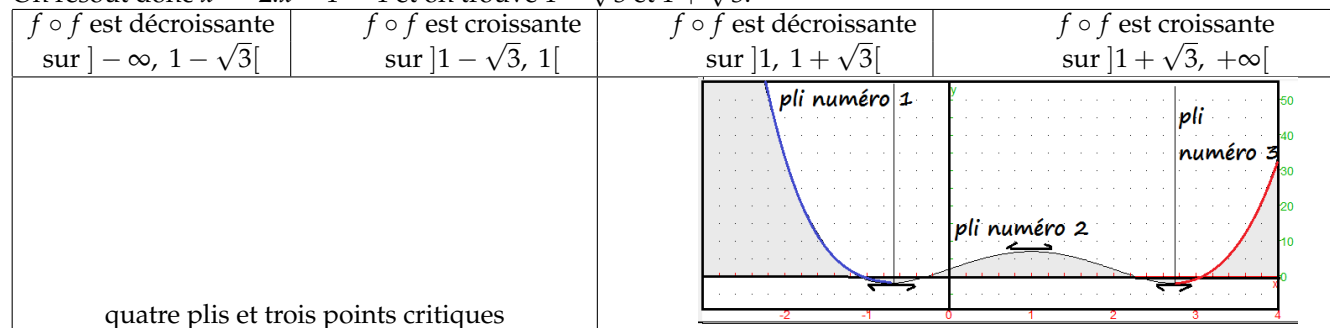
Pas facile de dériver ça et de chercher le sens de variations.

Mais en fait : $(f^{o2})'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Cette quantité s'annule et change de signe quand $f'(x)$ s'annule et change de signe : en 1 (et on confirme en calculant $4x^3 - 12x^2 + 8$ en 1).

Elle s'annule et change de signe aussi quand on a $f(x) = 1$.

On résout donc $x^2 - 2x - 1 = 1$ et on trouve $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$.



Pour f^{o3} , si on attaque comme un calculateur sans cervelle, on développe tout : $f^{o3} = x \mapsto x^8 - 8x^7 + 16x^6 + 16x^5 - 62x^4 - 8x^3 + 64x^2 + 16x - 1$, puis on dérive : $(f^{o3})' = x \mapsto 8x^7 - 56x^6 + 96x^5 + 80x^4 - 248x^3 - 24x^2 + 128x + 16$. Et on se flingue, car c'est trop moche.

Mais si on réfléchit au lieu de calculer².

On dérive $f \circ f^{o2}$ en $f'(f^{o2}) \cdot (f^{o2})'$.

Et cette dérivée s'annule et change de signe • quand $(f^{o2})'$ s'annule et change de signes (variations de $f \circ f$)
• et quand $f \circ f(x)$ est la racine de f' (composition avec f).

On retrouve • les mêmes points critiques 1, $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$

• plus les solutions de $f(f(x)) = 1$.

On doit donc résoudre $f(t) = 1$ puis $f(x) = t$.

2. on est vendredi, ça ne vous avance pas, mais on est vendredi des maths... ça vous avance ? Pas plus ?

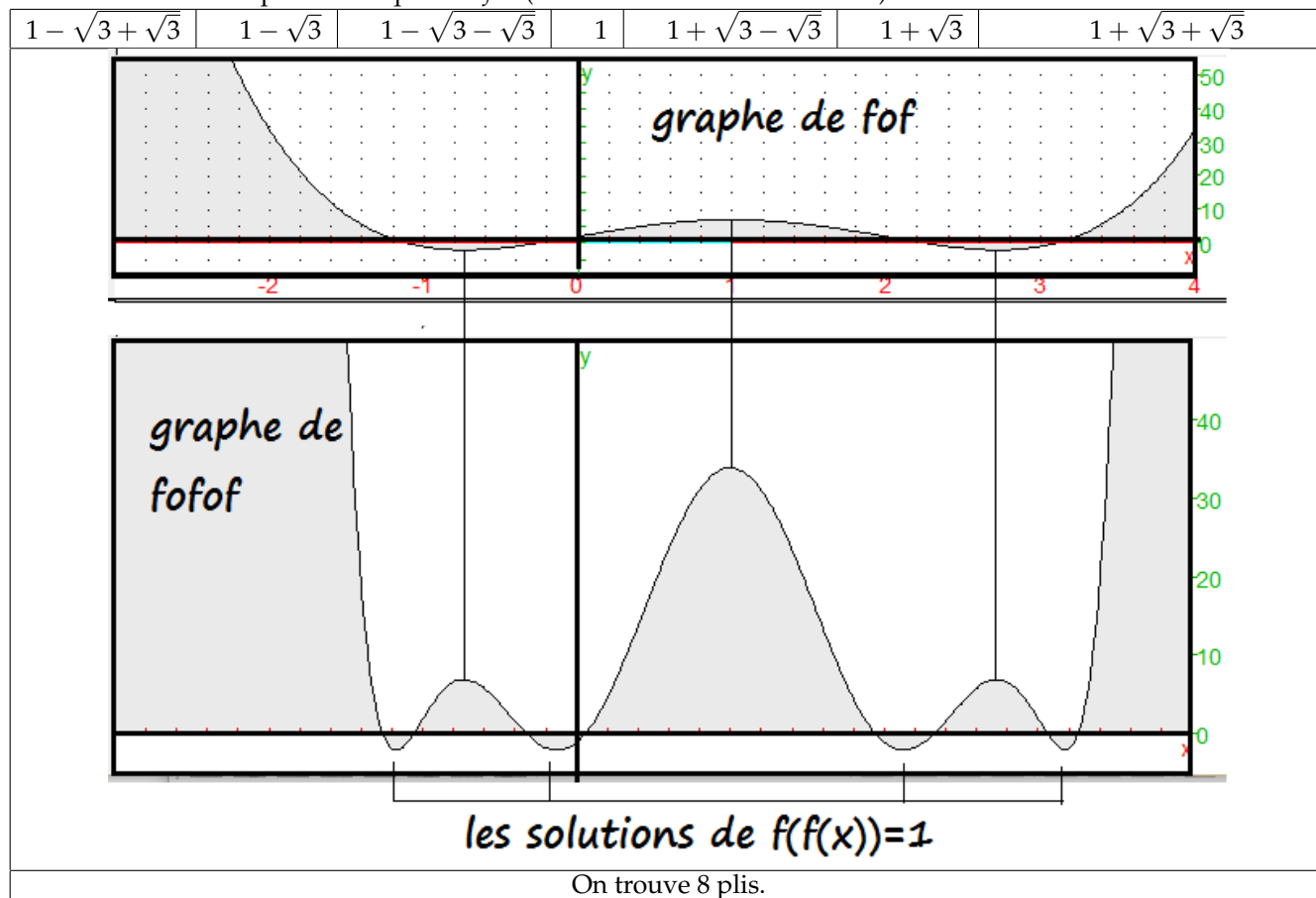
L'équation $f(t) = 1$ a pour solutions $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$ (déjà croisées).

On résout ensuite $x^2 - 2x - 1 = 1 \pm \sqrt{3}$.

On trouve $1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{3}$.

Ce qui fait quatre solutions en plus des trois autres.

On dresse la liste des points critiques de f^{o3} (centrée sur 1 comme il se doit) :



Il est normal que là où f^{on} change de sens de variations, $f \circ f^{on}$ change aussi. Plus les endroits à f^{on} passe par les points critiques de f .

Lycee Charlemagne

DS08

Etude de $x \mapsto x^2 + c$.

Avec $f = x \mapsto x^2$, j'ai une question pratique pour vous tester.

La suite est x_0 donné et $x_{n+1} = (x_n)^2$.

La formule générale à prouver par récurrence immédiate est $x_n = (x_0)^{(2^n)}$

Si on ne fait pas vraiment la récurrence, on propose facilement n'importe quoi, et on affirme que la récurrence est évidente. Je ne vous dis pas pour quoi vous passez...

Rapport du jury :

Cette partie, consacrée à l'étude des itérées de la fonction $f_c = x \mapsto x^2 + c$ en fonction des valeurs du paramètre $c \in \mathbb{R}$ a été, sans surprise, la plus largement abordée. L'apparente facilité des questions était trompeuse, car d'emblée, quelques subtilités ont permis de distinguer les copies de bon ou très bon niveau. L'attention au détail, la rigueur absolue de raisonnement, et la concision ont été autant de qualités largement valorisées dans le barème.

Toutes les copies procèdent par récurrence, mais près d'une sur deux répond que la suite est $x_n = (x_0)^{2^n}$, au lieu de $x_n = (x_0)^{2^n}$. Une telle erreur en début de copie coûte cher : elle met cruellement en lumière que pour certains élèves, le raisonnement par récurrence est un outil purement formel, un artifice de rédaction plus qu'un mode de raisonnement.

Le signe de x_0 est perdu dès la première étape. x_n est positif pour tout n plus grand que 1.

$x_0 < -1$	$x_0 = -1$	$x_0 \in]-1, 1[$	$x_0 = 1$	$x_0 > 1$
diverge vers $+\infty$	converge vers 1	converge vers 0	converge vers 1	diverge vers $+\infty$
$K_0 = [-1, 1]$				

Dans C c'est plus drôle même si ce n'est pas demandé.

$ x_0 < 1$	$x_0 = 1$	$ x_0 = 1$	$ x_0 > 1$
(x_n) converge vers 0	(x_n) converge vers 1	(x_n) est bornée	(x_n) diverge

Dans le cas $|x_0| = 1$, la suite $e^{i \cdot 2^n \cdot \theta}$ se comporte de différentes façons suivant θ . Elle peut converger (θ de la forme $\frac{p \cdot \pi}{2^k}$) ou ne jamais se stabiliser...

Pour les points fixes, on résout $x^2 + c = x$ de discriminant $1 - 4c$.

$c < \frac{1}{4}$	$c = \frac{1}{4}$	$c > \frac{1}{4}$
deux points fixes : $\beta_c = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$ $\gamma_c = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$	un seul point fixe $\frac{1}{2}$	pas de point fixe

On notera, à toutes fins utiles pour la suite, que β_c est positif.

Rapport du jury : Question très facile. Les correcteurs ont été attentifs à la rigueur de la résolution de l'équation du second degré par équivalences.

On commence par le cas $c > \frac{1}{4}$. Il n'y a pas de point fixe. Elle ne peut déjà pas converger.

Mais elle pourrait rester bornée (périodique ou situations similaires).

Toutefois, le critère de la bissectrice va s'appliquer.

Pour tout x , on a $x^2 - x + c > 0$. On en déduit $f(x) > x$.

Pour tout n , $u_{n+1} > u_n$.

La suite est croissante.

On va raisonner par élimination.

Soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$.

Mais si elle converge c'est vers un point fixe (passage à la limite et continuité).

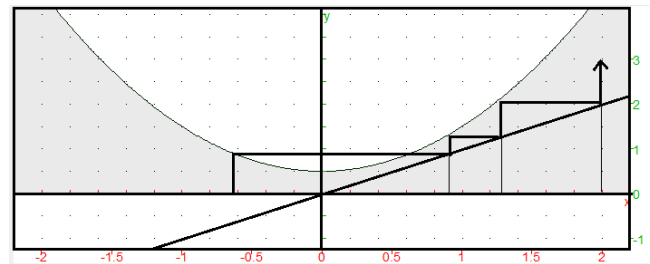
Et il n'y a pas de point fixe.

Par élimination, la suite diverge vers $+\infty$. Et ceci, que que soit la choix de x_0 .

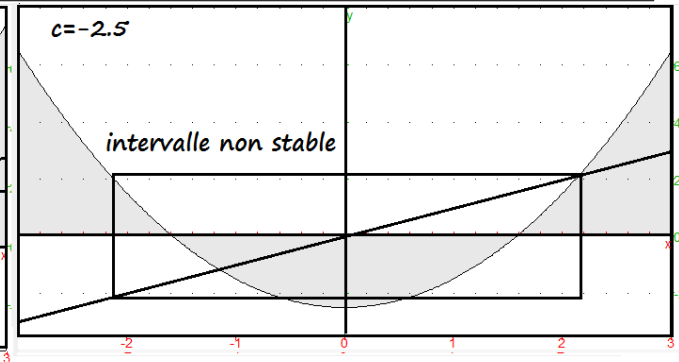
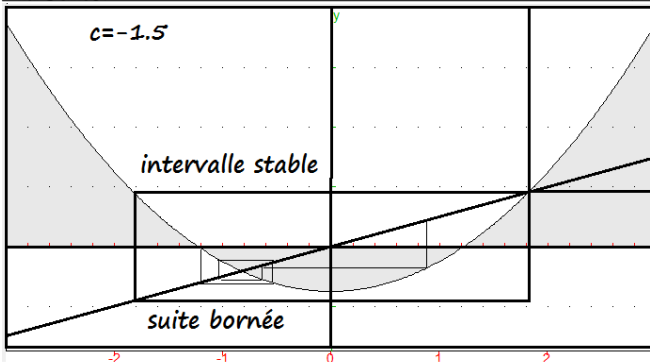
L'ensemble K_c est donc vide.

Rapport du jury : Certains confondent la croissance de la suite et la croissance de la fonction f_c , mais en général, cette question est bien traitée, et le théorème de la limite monotone est correctement invoqué.

On prend c entre -2 et $1/4$. On a donc deux points fixes. Et on doit montrer une double inclusion.



Pour x_0 dans $[-\beta_c, \beta_c]$, la suite (x_n) est bornée.	Pour x_0 hors de $[-\beta_c, \beta_c]$, la suite (x_n) est non bornée.
On sent venir l'intervalle stable. Vérifions : si x est entre $-\beta_c$ et β_c, alors x est entre 0 et β_c, et x^2 est plus petit que $(\beta_c)^2$. $x^2 + c$ est alors plus petit que $(\beta_c)^2 + c$. Et ceci vaut exactement β_c (point fixe !). Mais attention, il faut aussi minorer $f(x)$ par $-\beta_c$! Par positivité des carrés de réels, $x^2 + c$ est plus grand que c. c est-il lui-même plus grand que $-\beta_c$? Calculons : $c + \beta_c = c + \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$ $c + \beta_c = \frac{2c + 1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$ Ceci est-il positif ? Si c est plus grand que $-\frac{1}{2}$, pas de problème. Imaginons c entre -2 et $-\frac{1}{2}$ ($2c + 1$ est négatif). $c + \beta_c = \frac{(1 - 4c) - (2c + 1)^2}{2(\sqrt{1 - 4c} - 2c + 1)}$ $c + \beta_c = \frac{-4c(c + 2)}{2(\sqrt{1 - 4c} - 2c + 1)}$ Cette différence est positive. On a donc $\forall x \in [-\beta_c, \beta_c], f(x) \in [c, \beta_c] \subset [-\beta_c, \beta_c]$ Par récurrence, tous les termes sont entre $-\beta_c$ et β_c, la suite est bornée. En revanche, on ne garantit pas la convergence de la suite.	Si x est plus grand que β_c, alors x^2 est plus grand que $(\beta_c)^2$ et $x^2 + c$ est plus grand que $(\beta_c)^2 + c$, ce qui fait β_c. Par récurrence immédiate, pour x_0 hors de $[-\beta_c, \beta_c]$ tous les termes à partir du rang 1 sont plus grands que β_c. Mais ensuite, pour x plus grand que β_c, $f(x)$ est plus grand que β_c. Par critère direct, la suite est strictement croissante. Elle n'a que deux possibilités : converger ou tendre vers $+\infty$. Mais ayant tous ses termes plus grands que x_1, lui-même strictement plus grand que β_c, sa limite éventuelle serait plus grande que x_1 et donc différente de β_c (et de l'autre point fixe par majoration). Par élimination, la suite diverge vers $+\infty$. Elle n'est donc pas bornée.



Rapport du jury :

Cette question présente une difficulté, car son enjeu véritable (montrer que $c \geq -\beta_c$) devait être trouvé par l'élève. Beaucoup peinent à prendre l'initiative de montrer un résultat que l'énoncé ne mentionne pas ; d'autres s'égarent ici dans d'interminables disjonctions de cas. Les copies qui ont su proposer une résolution nette et parcimonieuse de cette question ont fait montre d'une louable hauteur de vue, qui a été récompensée.

On passe à $c < -2$. L'intervalle $[-\beta_c, \beta_c]$ n'est plus stable. On risque d'en sortir, et de ne plus y revenir...

On doit montrer une double inclusion.

• Montrons : Si x_0 est dans $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}([-\beta_c, \beta_c])$ alors la suite est bornée.

On prend x dans cette intersection. Alors pour tout n , x_0 est dans $f^{-n}([-\beta_c, \beta_c])$.

On traduit : pour tout n , $f^{on}(x_0)$ est dans $[-\beta_c, \beta_c]$.

On écrit même : pour tout n , x_n est dans $[-\beta_c, \beta_c]$.

La suite (x_n) est à valeurs dans $[-\beta_c, \beta_c]$.

La suite est donc bornée (par $[-\beta_c, \beta_c]$).

x_0 est dans celui qu'on appelle K_c (ensemble des x_0 tels que la suite soit bornée).

• Montrons : Si x_0 n'est pas dans $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}([- \beta_c, \beta_c])$ alors la suite est non bornée.

On prend x_0 hors de cette intersection.

On écrit la négation de $\forall n, x_0 \in f^{-n}([- \beta_c, \beta_c])$.

On obtient : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, x_0 \notin f^{-n_0}([- \beta_c, \beta_c])$.

On reconnaît : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, x_{n_0} \notin [- \beta_c, \beta_c]$.

Mais alors, à partir de ce rang n_0 , les x_n sont tous plus grands que β_c (stabilité de l'intervalle $]\beta_c, +\infty[$).

On a mis le pied dans un intervalle stable, on y reste.

Mais sur cet intervalle stable, f est au dessus de l'identité. la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ est croissante.

Elle converge vers un point fixe ou diverge vers $+\infty$.

Mais elle a dépassé le plus grand point fixe et ne peut plus converger vers celui ci.

Par élimination, la suite diverge vers $+\infty$.

Elle n'est pas bornée.

x_0 n'est donc pas dans K_c .

On a donc bien K_c qui est l'intersection des $f^{-n}([- \beta_c, \beta_c])$.

Pour ce qui est de K_c non vide, c'est direct, β_c est dans K_c .

La suite initialisée par β_c est constante égale à β_c (point fixe), donc bornée...

Remarque : Le rapport du jury mentionne :

Certains bons éléments, trop soucieux de faire étalage de leur savoir, se lancent sans guère réfléchir dans un raisonnement de compacts emboîtés, juste, mais fastidieux, où ils perdent du temps et un peu de la patience des correcteurs.

Vous savez quoi ? J'ai failli glisser des questions intermédiaires vous lançant sur cette piste, trop heureux que j'étais de me dire « oh, une question faisant intervenir les segments emboîtés, c'est génial ! ».

Montrons que, pour tout $n \geq 0$, f_c est strictement monotone sur le segment (a_n, b_n) (notation qu'avait introduit l'énoncé original pour dire $[a_n, b_n]$ si $a_n \leq b_n$ et $[b_n, a_n]$ si $b_n \leq a_n$).

Commençons par remarquer : $f_c(K_c) \subset K_c$. En effet, si $x_0 \in K_c$, notons $x'_0 = f_c(x_0) = x_1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x'_n = f_c^n(x'_0) = x_{n+1}$; la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc la suite extraite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi, donc $x'_0 \in K_c$ (en gros, si on commence un cran plus tard, on a le même phénomène).

Si $[a, b] \subset K_c$, alors $f_c([a, b]) \subset K_c$ d'après ce qui précède. Or la fonction f_c est continue, donc le segment d'extrémités $f(a), f(b)$ est contenu dans l'image directe $f_c([a, b])$ par le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi, par récurrence, on obtient $(a_n, b_n) \subset K_c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par ailleurs, $c < -2$. Donc, comme on l'a montré par équivalences quelques questions auparavant, $f_c(0) = c < -\beta_c$. Donc $0 \notin f_c^{-1}([- \beta_c, \beta_c])$, donc $0 \notin K_c$ par la question 5 (a). Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le segment (a_n, b_n) ne contient pas 0 ; il est donc contenu dans $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$; dans les deux cas, la fonction $f_c : x \mapsto x^2 + c$ est strictement monotone sur (a_n, b_n) .

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_c est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme $c < -\beta_c$, on a $(a_{n+1}, b_{n+1}) \subset K_c \subset [- \beta_c, \beta_c] \subset]c, -c[$, donc la fonction $x \mapsto 1/\sqrt{1 - x^2/c^2}$ est continue sur le segment (a_{n+1}, b_{n+1}) . On peut alors effectuer, dans l'intégrale définissant L_{n+1} , le changement de variable $x = f_c(t) = t^2 + c : L_{n+1} = \left| \int_{a_n}^{b_n} \frac{2t \, dt}{\sqrt{1 - (t^2 + c)^2/c^2}} \right| =$

$$2 \left| \int_{a_n}^{b_n} \frac{\sqrt{t^2} \, dt}{\sqrt{-t^2/c - t^4/c^2}} \right| = 2.$$

Remarquons que le terme sous la racine carrée dans la dernière expression reste strictement positif, puisqu'il est issu du changement de variable et de la simplification par t^2 . De plus, on a $c < -2 \leq -1$ donc $-1/c \geq 1$ et $\sqrt{-1/c - t^2/c^2} \geq \sqrt{1 - t^2/c^2}$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ et croissance de l'intégrale, on obtient enfin $L_{n+1} \geq 2L_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(a_n, b_n) \subset K_n \subset [- \beta_c, \beta_c]$. Donc, par relation de Chasles et positivité de l'intégrale, on a

$L_n \leq \int_{-\beta_c}^{\beta_c} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2/c^2}}$ (on a vu à la question précédente que cette intégrale existe). La suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc majorée ; elle

est par ailleurs positive. Si $L_0 \neq 0$, on a par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n \geq 2^n \cdot L_0 \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$: contradiction. Donc $L_0 = 0$.

Or la fonction $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2/c^2}$ est continue et strictement positive sur le segment $[a, b]$, donc celui-ci est de longueur nulle, c'est-à-dire $a = b$.

Ça se voit que j'ai piqué la correction à un collègue ?

Rapport du jury :

Comme à la question 4, la difficulté était de comprendre qu'il fallait prouver que $0 \notin (an; bn)$. Un tiers des copies y parviennent environ.

Cette question, quoique sans grande difficulté, demandait un soin spécial que seules quelques copies ont su fournir : la justification du changement de variable, le maniement des valeurs absolues (pour prendre en compte le fait que l'ordre des bornes de l'intégrale n'est pas connu), ou la minoration de la fonction intégrée étaient autant de chausse-trappes. Il est regrettable que presque personne n'ait cité sans omettre d'hypothèse le résultat selon lequel une fonction positive, continue, d'intégrale nulle sur un intervalle est identiquement nulle sur cet intervalle.

Lycee Charlemagne

DS08

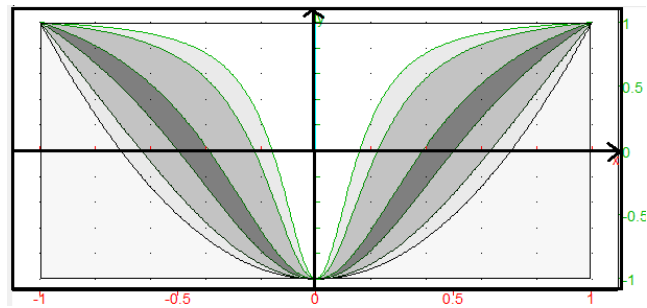
Cas de $f(x) \mapsto \frac{2x^2 + a - 1}{2ax^2 + 1 - a}$.

On prend x entre -1 et 1 .

Se pourrait-il que le dénominateur s'annule ?

Mais $2ax^2$ est positif ou nul et $1 - a$ aussi (strictement positif même). La somme est positive strictement.

L'application f est une composée $x \mapsto x^2 \mapsto \frac{(2x^2) + (a - 1)}{(2ax^2) + (1 - a)}$.
La première est décroissante puis croissante.
La seconde est croissante de dérivée $t \mapsto 2 \cdot \frac{2(1 - a) - 2a(a - 1)}{(2at + 1 - a)^2}$ positive.



f est décroissante puis croissante. $f(-1) = 1$, $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$.

L'intervalle image est $[-1, 1]$.

Je vous ai offert les graphes. Dans le sujet initial ils n'y étaient pas, et l'usage des calculatrices était interdit. Pas cool.

Rapport du jury :

Cette question, sans difficulté particulière, a été bien traitée par un grand nombre de copies. Il fallait toutefois faire attention à ne pas écrire de division par zéro et, si le raisonnement l'exigeait, à citer explicitement le théorème des valeurs intermédiaires.

$f^{o0} = Id$ a un pli.

Graphiquement, $f^{o1} = f$ a deux plis : $] -1, 0[$ et $]0, 1[$. Et chacun a pour image $] -1, 1[$.

C'est confirmé sur les graphes et sur le tableau de variations.

On se donne n , on suppose que f^{on} a 2^n plis et que chacun, de la forme $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ a pour image $] -1, 1[$.

On va montrer que $f^{o(n+1)}$ a 2^{n+1} plis et que chacun, de la forme $]\beta_k, \beta_{k+1}[$ a pour image $] -1, 1[$.

Plaçons nous sur un des plis de f^{on} : $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ (envoyé sur $] -1, 1[$ par hypothèse).

On travaille sur $f^{o(n+1)}$, c'est donc qu'on recompose par f .

Par théorème des valeurs intermédiaires, la valeur 0 est atteinte une fois (et une seule par stricte monotonie) en un réel γ_k de $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$.

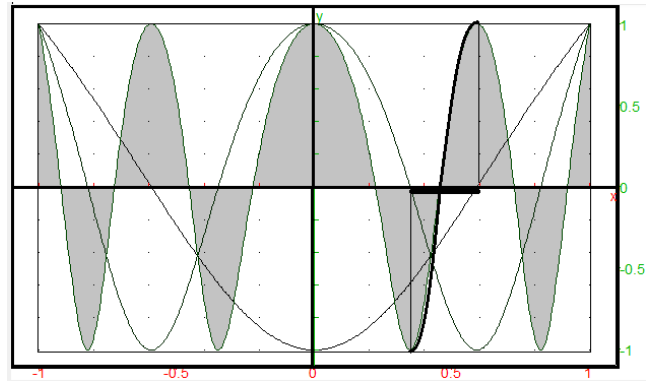
On va décrire le cas où f^{on} est croissante sur $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ (sans trop de perte de généralité).

Quand x décrit $]\alpha_k, \gamma_k[$, $f^{on}(x)$ décrit $] -1, 0[$ en croissant. Par composition avec f ; $f(f^{on}(x))$ décrit $f(] -1, 0[)$ en décroissant, c'est à dire tout de 1 à -1 ,

On a un pli.

Quand x décrit $]\gamma_k, \alpha_{k+1}[$, $f^{on}(x)$ décrit $]0, 1[$ en croissant. Par composition avec f ; $f(f^{on}(x))$ décrit $f(]0, 1[)$ en croissant, c'est à dire tout de -1 à 1,

On a un pli de plus.



Finalement, chaque pli de f^{on} se dédouble en deux plis de $f \circ f^{on}$.

On en a 2×2^n plis pour $f^{o(n+1)}$. Et sur chaque pli, l'ensemble image est $] -1, 1[$.

La récurrence s'achève.

Il reste quand même des détails. Risque-t-on de perdre les α_k ?

Les points critiques de f^{on} sont ils encore points critiques de $f^{o(n+1)}$?

Rapport du jury :

Beaucoup de copies contenaient le bon principe de raisonnement mais la rédaction était parfois trop vague (« f envoie chaque pli de f^{on} sur deux plis de $f^{o(n+1)}$ », sans aucune justification).

Même dans les copies qui avaient fait un effort certain de formalisation, certains arguments étaient souvent laissés dans l'ombre, notamment le fait qu'un point critique de f^{on} reste un point critique de $f^{o(n+1)}$ ou qu'un point où $(f^{on})'$ s'annule est un point critique de f^{on} .

Lycee Charlemagne

DS08

$$\text{Cas de } f(x) \mapsto \frac{2x^2 + 0 - 1}{2 \cdot 0 \cdot x^2 + 1 - 0}.$$

Bon, f est un simple polynôme, et c'est un de ceux de Tchebychev, comme on va le constater par la suite : $f = x \mapsto 2x^2 - 1$.

On l'a déjà dit, $f(x)$ décrit tout $[-1, 1]$ quand x décrit $[-1, 1]$, avec deux plis.

On change de variable en posant $x_0 = \cos(t_0)$ (en fait, on devrait dire qu'on pose $t_0 = \arccos(x_0)$ pour lever toute ambiguïté).

On a alors $f(x) = 2 \cdot \cos^2(t_0) - 1 = \cos(2t_0)$.

Supposons à un rang n quelconque donné $f^{on}(x_0) = \cos(2^n \cdot t_0)$.

On applique à nouveau $f : f^{o(n+1)}(x_0) = f(\cos(2^n \cdot t_0)) = 2 \cdot \cos^2(2^n \cdot t_0) - 1 = \cos(2 \cdot 2^n \cdot t_0)$.

L'angle a bien doublé à nouveau.

Ceci rappelle $x_n = (x_0)^{2^n}$ dans le cas $f = x \mapsto x^2$, vous ne trouvez pas ?

Qui sont alors les points périodiques de f ? Ce sont des points fixes d'un certains f^{on} .

On résout donc l'équation $\cos(2^n \cdot t_0) = \cos(t_0)$ d'inconnue $x_0 = \cos(t_0)$.

Cette fois ci, on fait de la trigonométrie. On trouve $2^n \cdot t_0 = t_0 + 2k \cdot \pi$ avec k pouvant décrire $\mathbb{Z}$, et aussi $2^n \cdot t_0 = -t_0 + 2k \cdot \pi$.

Les valeurs de t_0 sont de la forme $\frac{2k \cdot \pi}{2^n - 1}$ et $\frac{2k \cdot \pi}{2^n + 1}$.

On en a une infinité, puisque k et n peuvent varier.

Et tout intervalle en contient une infinité. Le transfert par $\cos$ pour revenir à x_0 ne change rien.

Rapport du jury :

Il fallait déduire de la question (a) l'expression d'un certain nombre de points critiques puis montrer leur densité. Selon le mode de rédaction choisi, il pouvait être naturel d'utiliser le fait que l'image par $\cos$ d'un sous-ensemble dense de $[0, \pi]$ est dense dans $[-1, 1]$. Ce fait devait alors être correctement justifié (par la continuité et la surjectivité de $\cos$).

Lycee Charlemagne

DS08

Composition de fonctions monotones par morceaux.

Cette question était posée dès le début du sujet de concours. Je l'ai laissée pour notre fin à nous.

Allez, une résolution avec la rigueur voulue :

Soit $f : I \rightarrow I$ une fonction monotone par morceaux. Notons $\mathcal{C}'_f$ l'ensemble des points critiques de f , auxquels on ajoute les extrémités de l'intervalle I si celle-ci sont strictes. Comme l'ensemble $\mathcal{C}_f$ est fini et de cardinal au moins 2, on peut noter $\mathcal{C}'_f = \{a_0, \dots, a_k\}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 < \dots < a_k$.

Soit $c \in \mathbb{R}$. Pour tout $i \in [1, n]$, comme la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$, elle prend la valeur c au plus une fois sur cet intervalle. Par conséquent, la fonction f prend la valeur c un nombre fini de fois : au plus k fois sur les intervalles $]a_{i-1}, a_i[$ pour $i \in [1, n]$, et $k+1$ fois en les points a_i pour $i \in [0, n]$. Plus généralement, si C est une partie finie de $\mathbb{R}$, l'image réciproque $f^{-1}(C)$ est finie, car réunion finie de parties finies.

Soit maintenant $J =]c, d[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Pour tout $i \in [1, n]$, comme la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$, l'intersection $K_i =]a_{i-1}, a_i[\cap f^{-1}(J)$ est un intervalle : si $a_{i-1} < x < y < z < a_i$ et $f(x), f(y)$ sont dans J , alors $f(z)$ est dans l'intervalle J car il est compris entre $f(x)$ et $f(y)$.

Soit maintenant $g : I \rightarrow I$ une autre fonction monotone par morceaux ; notons $\mathcal{C}'_g = \{b_0, \dots, b_\ell\}$ avec $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $b_0 < \dots < b_\ell$. Notons $D = f^{-1}(\mathcal{C}'_g)$; on a montré que D est une partie finie de I . Pour $i \in [1, n]$ et $j \in [1, \ell]$, notons $K_{i,j} =]a_{i-1}, a_i[\cap f^{-1}(]b_{j-1}, b_j[)$. On a montré que les $K_{i,j}$ sont des intervalles ; notons E l'ensemble des extrémités des $K_{i,j}$ qui sont non vides. Alors l'ensemble $C = I \cap (D \cup E)$ est une partie finie de I (notons que E pourrait contenir une extrémité stricte de I). Notons enfin $K_{i,j}^\circ$ l'intérieur de l'intervalle $K_{i,j}$.

L'intervalle I est alors la réunion disjointe de l'ensemble fini C et des intervalles ouverts $K_{i,j}^\circ$, pour $i \in [1, n]$ et $j \in [1, \ell]$ (ces intervalles étant éventuellement vides, mais toujours deux à deux disjoints). Les $K_{i,j}^\circ$ sont donc les composantes connexes de l'ensemble $I \setminus C$. De plus, f est strictement monotone sur $]a_{i-1}, a_i[$, et g est strictement monotone sur $]b_{j-1}, b_j[$, donc $g \circ f$ est strictement monotone sur l'intervalle $K_{i,j}^\circ$. Ceci prouve que $g \circ f$ est une fonction monotone par morceaux.

La composée de deux fonctions monotones par morceaux est donc monotone par morceaux. Par ailleurs, la fonction identité de I , c'est-à-dire $f^{\circ 0}$, est strictement croissante donc monotone par morceaux. Il s'ensuit immédiatement, par récurrence, que $f^{\circ n}$ est monotone par morceaux pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Rapport du jury :

Cette première question était d'ores et déjà difficile. Il était naturel de raisonner par récurrence et de décrire les plis de $f^{\circ(n+1)}$ en fonction des plis de $f^{\circ n}$ et de f . Parmi les erreurs courantes, quelques copies ont admis sans démonstration que la composée de deux fonctions monotones par morceaux, g et h , était monotone par morceaux.

D'autres, assez nombreuses, ont écrit, en notant I_1 à I_k les plis de g et J_1 à J_ℓ ceux de h , que les plis de $g \circ h$ étaient les $I_j \cap J_k$ (il s'agissait en fait des $h^{-1}(I_j) \cap J_k$). Certaines ont donné une expression correcte pour les plis mais ont oublié de montrer que ceux-ci étaient en nombre fini.

Enfin, la majorité a supposé, au moins implicitement, que f était continue.

Complément sur ce rapport de jury :

Le nombre de points accordés à chaque question dépendait de la difficulté de celle-ci, les questions longues ou difficiles rapportant davantage. Les petites erreurs ou les problèmes de rédaction entraînaient des malus. À titre indicatif : - Faire parfaitement toutes les questions jusqu'à la II.5 (donc un peu au delà de ce que je vous ai posé) permettait d'avoir 15.

Avec de petites erreurs, aller jusqu'à la II.5 rapportait autour de 12.

- Dans l'ensemble, les élèves semblent maîtriser correctement les notions d'analyse intervenant dans la première moitié du sujet (suites et fonctions principalement). La plupart des copies contenaient des idées intéressantes et des ébauches de démonstration qui témoignaient d'une bonne intuition des objets manipulés.

- S'il était possible d'avoir une bonne note sans traiter les questions les plus difficiles du sujet, il convenait néanmoins d'aborder au moins un certain nombre de questions de difficulté moyenne.

« Grappiller » était peu rentable car les questions faciles, surtout en fin de sujet, rapportaient peu de points.

- Rédiger soigneusement était valorisé. Tous les arguments nécessaires aux raisonnements devaient être explicitement écrits et, à l'exception bien sûr des résultats du programme, tous les énoncés non-triviaux se devaient d'être

démontrés. Les questions relatives aux notions de pli ou de point critique ont concentré une bonne partie des problèmes de rédaction : beaucoup d'élèves ont semblé avoir compris le principe des définitions, mais n'ont pas su raisonner à leur sujet de manière rigoureuse, se limitant à des arguments informels et un peu vagues.

- Si les rédactions trop rapides étaient à proscrire, l'excès inverse (beaucoup moins fréquent) était également à éviter. Il était par exemple inutile de consacrer toute une page à la question I.1 (censée être très facile), en justifiant minutieusement chaque étape du raisonnement par récurrence. Quelques rares élèves semblent avoir consacré l'essentiel de leurs six heures à rédiger parfaitement la question préliminaire et la partie I ; cela ne permettait malheureusement pas d'avoir la moyenne.
- Avant de manipuler des objets, il convenait de s'assurer qu'ils étaient bien définis (il fallait par exemple établir la dérivabilité de f^{0n} à l'intérieur de ses plis dans la question III.3.(a)). Lorsque les objets en question étaient censés satisfaire une définition un peu complexe, il fallait également bien penser à vérifier chacune des propriétés de la définition (par exemple la finitude des points critiques dans la définition de la monotonie par morceaux).

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2021 / 22
•	DS08 55 points DS08	•