Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2021/22

IS27

Mardi 9 mai

♡ 0 ♡ Énoncez le théorème de Rolle pour une application f de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. 2 pt.

♡ 1 ♡ Énoncez le théorème des accroissements finis pour une application f de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. 2 pt.

♡ 2 ♡ Démontrez le second en considérant le premier comme acquis. 2 pt.

♢ 0 ♢ Soit f dérivable de $[a,\ c]$ dans $\mathbb{R}$, avec f' croissante. En appliquant le théorème des accroissements finis entre a et b puis entre b et c (avec $a \leqslant b \leqslant c$), montrez : $\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$. 3 pt.

♡ 3 ♡ Un résultat classique dit : « pour tout réel a, la suite $\left(\dfrac{[a.10^n]}{10^n}\right)$ est une suite de rationnels qui converge vers a. Re-démontrez ce résultat. 2 pt.

♢ 1 ♢ Un professeur étourdi a envisage la suite $\left(\dfrac{[a.10^{-n}]}{10^{-n}}\right)$ *(c'est à dire* $\left(10^n.\left[\frac{a}{10^n}\right]\right)$*)*. Pour quels a converge-t-elle, et dans ce cas, vers quoi ? 2 pt.

♢ 2 ♢ L'énoncé demande de prouver sur l'ensemble P des quintuplets $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ vérifiant $\left\{\begin{array}{rrrrrcl} 2.x_1 & +x_2 & -x_3 & +2.x_4 & +5.x_5 & = & 0 \\ 3.x_1 & +x_2 & +4.x_3 & +3.x_4 & -4.x_5 & = & 0 \\ 5.x_1 & +2.x_2 & +3.x_3 & +5.x_4 & +x_5 & = & 0 \end{array}\right|$ est un espace vectoriel. Pour gagner du temps, l'élève dit « je définis $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ X \longmapsto M.X$ avec $M = (completer)$ et j'ai juste à dire que P en est le ... ». Complétez justement. 2 pt.
Ensuite, il dit que la dimension de $Im(f)$ est 3 *(c'est $\mathbb{R}^3$)*, et il déduit que P est de dimension $5 - 3 = 2$ par la formule du rang. Pourtant, il a tort. Trouvez l'erreur. Donnez la dimension de P. 2 pt.

♢ 3 ♢ Le sujet des Mines de cette année demandait de prouver $\left|\prod_{k=1}^{n} z_k - \prod_{k=1}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i - u_i|$ où les z_i et les u_i sont des complexes de module plus petit que 1. Montrez le résultat pour $n = 1$ et $n = 2$. 2 pt.

Une preuve passe par $\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{i} z_k.\prod_{k=i+1}^{n} u_k - \prod_{k=1}^{i-1} z_k.\prod_{k=i}^{n} u_k\right)$ et $\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{i-1} z_k.(z_i - u_i) \times \prod_{k=i+1}^{n} u_k\right)$. Trouvez la. 4 pt.

♣ 0 ♣ La suite A004721 de l'encyclopédie des suites de N.J.A.Sloane est celle ci : 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 1, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 30, 31, 3, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 4, 43, 44, 45, 46, 47, 48,... Et sa définition est « Delete all 2's from the sequence of non-negative integers [1] ».
Notre année en cours se matérialise donc par un 0 dans cette suite. Combien y a-t-il eu de 0 avant ? 2 pt.
Écrivez un script qui prend en entrée n et calcule les n premiers termes de ce cette suite *(oui, les n premiers, et pas jusqu'au rang n)*. 4 pt.

♢ 4 ♢ Un point critique d'une application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (ou d'une partie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$) est un point où les deux dérivées partielles de f s'annulent (utiles pour la recherche des extrema). Donnez les points critiques de $(x,\ y) \longmapsto y.(x^2 + (\ln(y))^2)$. 2 pt.

Donnez les points critiques de $(x,\ y) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. 2 pt.

Montrez que l'application $(x,\ y) \longmapsto x.e^y + y.e^x$ a un point critique et un seul (sans forcement le calculer). On pourra être amen à montrer que $x \longmapsto x.e^{1/x} + e^x$ est strictement croissante sur $]-\infty,\ 0[$. 5 pt.

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2021/22

IS27 38 points IS27

1. even 2 himself or 22, but not 202 wich gives 0

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2021/22

IS27
Correction

Lycee Charlemagne	IS27

Theorème de Rolle et des accroissmentes finis.

Soit f continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable au moins sur $]a,\ b[$ *(et peut être en a et b, on s'en moque)*.
Rolle : on suppose $f(a) = f(b)$, alors il existe c dans $]a,\ b[$ vérifiant $f'(c) = 0$ *(tangente horizontale, là où f atteint un extrémum)*.
Accroissements finis : sans rien supposer sur $f(a)$ et $f(b)$, il existe c dans $]a,\ b[$ vérifiant $f(b) - f(a) = (b-a).f'(c)$ *(tangente parallèle à la corde)*.

Si on prend f continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]a,\ b[$,
on définit $g = x \longmapsto f(x) - \Big(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a) + f(a)\Big)$, différence entre la fonction et sa corde $\Big(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a) + f(a)\Big)$. Cette application g est encore continue sur $[a,\ b]$ et dérivable sur $]a,\ b[$. De plus elle prend la même valeur *(nulle)* en a et b. On peut lui appliquer le théorème de Rolle : il existe c vérifiant $g'(c) = 0$.
Et en ce point, on a $f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. C'est ce qu'on voulait.

On prend cette fois $a < b < c$. Le théorème de Rolle entre a et b donne $\exists \alpha \in]a,\ b[,\ f'(\alpha) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
entre b et c donne $\exists \beta \in]b,\ c[,\ f'(\beta) = \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

Il faut relier ceci à la positivité de $\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, et on pourra utiliser la croissance de f'.
On peut développer le déterminant par la règle de Sarrus et remplacer $f(a)$ par $f(b) - (b-a).f'(\alpha)$ et remplacer $f(c)$ par $f(b) + (c-b).f'(\beta)$. On finit par y arriver.
Mais on peut aussi être vraiment matheux et chercher à avoir les termes de la formule des accroissements finis dans le déterminant en effectuant des combinaisons sur les colonnes [2].

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(a)-f(b) & f(b) & f(c)-f(b) \\ a-b & b & c-b \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} f(a)-f(b) & & f(c)-f(b) \\ a-b & & c-b \\ & 1 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f(c)-f(b) \\ b-a & c-b \end{vmatrix}$$

Ce déterminant vaut $(c-b).(f(b)-f(a)) - (b-a).(f(c)-f(b)$
soit encore $(c-b).(b-a).\Big(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} - \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}\Big)$.
Il est temps de l'écrire $(c-b).(b-a).(f'(\beta) - f'(\alpha))$ avec α plus petit que β pour conclure : les trois termes du produit sont positifs.

Lycee Charlemagne	IS27

Approximation de reels.

Pour tout réel a, la suite $\Big(\dfrac{[10^n.a]}{10^n}\Big)$ est bien définie, et est une suite de rationnels (numérateur et dénominateur entiers) [3].
Ensuite, on rappelle par définition : $x - 1 < [x] \leqslant x$ pour tout réel x.
En particulier : $10^n.a - 1 < [10^n.a] \leqslant 10^n.a$ puis par positivité du diviseur : $a - 10^{-n} < \dfrac{[10^n.a]}{10^n} \leqslant a$ pour tout n.
Le théorème d'encadrement donne deux choses : la convergence et la limite.

Passons à $10^n.\Big[\dfrac{a}{10^n}\Big]$, pour a fixé.

2. c'est là que je vous traite de matheux : du recul sur les outils et non la force brute du calcul avec l'espoir que ça se passe bien
3. qui a oublie que dans la question, il y avait déjà « rationnels » ? qui a oubli qu'une uestion amène plusieurs tapes dans la reponse ?

La suite réelle $\left(\dfrac{a}{10^n}\right)$ converge vers 0. Et donc, pour n assez grand *(calculable)*, on a $0 \leqslant a.10^{-n} < 1$ puis $[a.10^{-n}] = 0$ (un vrai 0).
A partir de ce rang, on a donc $10^n.[a.10^{-n}] = 0$. La suite est stationnaire. Elle converge, vers 0.

Trop facile, même pas besoin d'encadrer.

A un détail près. Pour a négatif, $10^{-n}.a$ converge vers 0 par valeur inférieure. Sa partie entière atteint la valeur -1 et n'en démord plus.
La suite $(10^n.[a.10^{-n}])$ coïncide alors à compter de ce rang avec (-10^n), elle diverge vers $-\infty$.

$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
diverge vers $-\infty$	constante, converge vers 0	stationnaire, converge vers 0

Lycee Charlemagne IS27

Sous espace vectoriel de $(\mathbb{R}^5, +, .)$.

On devrait prouver la stabilité de P et la présence du neutre, ce qui n'est pas si difficile et long.

Mais laissons nous porter avec $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$. Elle va de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$.
Elle est linéaire par distributivité du produit matriciel : $M.(a.X + b.Y) = a.M.X + b.M.Y$.
P est le noyau de cette application linéaire, et en tant que noyau, c'est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ.

La formule du rang dit $\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{R}^5)$ *(puisque l'espace de départ est $\mathbb{R}^5$)*.
On passe de l'autre côte : $\dim(P) = \dim(Ker(f)) = 5 - \dim(Im(f))$.
L'ensemble image est inclus dans $\mathbb{R}^3$ (trois composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$). Sa dimension ne dépassera pas 3. On a donc $\dim(P)2$.
Mais l'ensemble image est il vraiment égal à $\mathbb{R}^3$? Avez vous regardé la troisième ligne $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$: elle est la somme des deux précédentes.
L'ensemble image est donc strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$ (triplets $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec $c = a + b$).
L'ensemble image est donc au plus de dimension 2. Il est même exactement de dimension 2 car il contient $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, linéairement indépendants.
Finalement, $Im(f)$ est de dimension 2 et $Ker(f)$ *(c'est à dire P)* est de dimension 3.
En fait, on pouvait dire que P était défini par deux équations seulement dans un espace de dimension 5.
On pouvait aussi donner la forme des éléments de P : $\begin{pmatrix} -5.x_3 - x_4 + 9.x_5 \\ 11.x_3 - 23.x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ et trouver une base.

Lycee Charlemagne IS27

Une inegalite des Mines.

Pour $n = 1$, c'est facile de prouver $\left|\prod_{k=1}^{n} z_k - \prod_{k=1}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i - u_i|$, c'est $|z_1 - u_1| = |z_1 - u_1|$.

Pour $n=2$, on va comparer $|z_1.z_2-u_1.u_2|$ avec $|z_1-u_1|+|z_2-u_2|$.

Assez naturellement, avec l'hypothèse « de module plus petit que 1 », j'écris

$$\begin{array}{rcl} |z_1.z_2-u_1.u_2| & = & |z_1.z_2-z_1.u_2+z_1.u_2-u_1.u_2| \\ |z_1.z_2-u_1.u_2| & \leqslant & |z_1.z_2-z_1.u_2|+|z_1.u_2-u_1.u_2| \\ |z_1.z_2-u_1.u_2| & \leqslant & |z_1|.|.z_2-u_2|+|u_2|.|z_1-u_1| \\ |z_1.z_2-u_1.u_2| & \leqslant & |.z_2-u_2|+|z_1-u_1| \end{array}$$

On en a fait plusieurs, des comme ça, non ? On pourrait peut être même mener une récurrence ensuite.

Pour n quelconque, on nous invite à regarder $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(\prod_{k=1}^{i} z_k.\prod_{k=i+1}^{n} u_k-\prod_{k=1}^{i-1} z_k.\prod_{k=i}^{n} u_k\Big)$ qui semble énorme.

Mais si on pose $a_i=\displaystyle\prod_{k=1}^{i} z_k.\prod_{k=i+1}^{n} u_k$, cette somme s'écrit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i-a_{i-1}$. Elle vaut donc au final a_n-a_0 si ceci a bien un sens.

qui est a_n ? $a_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n} z_k.\prod_{k=n+1}^{n} u_k$. Le second produit est vide ; Il vaut donc 1. $a_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n} z_k.1$. Bon début.

Et qui est a_0 ? $a_0=\displaystyle\prod_{k=1}^{0} z_k.\prod_{k=1}^{n} u_k=1.\prod_{k=1}^{n} u_k$.

Bref, l'étrange somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(\prod_{k=1}^{i} z_k.\prod_{k=i+1}^{n} u_k-\prod_{k=1}^{i-1} z_k.\prod_{k=i}^{n} u_k\Big)$ vaut exactement $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} z_k-\prod_{k=1}^{n} u_k$.

Mais regardons ensuite $\displaystyle\prod_{k=1}^{i} z_k.\prod_{k=i+1}^{n} u_k-\prod_{k=1}^{i-1} z_k.\prod_{k=i}^{n} u_k$ en factorisant la partie commune :

$$\prod_{k=1}^{i} z_k.\prod_{k=i+1}^{n} u_k-\prod_{k=1}^{i-1} z_k.\prod_{k=i}^{n} u_k=\Big(\prod_{k=1}^{i-1} z_k\Big).z_i.\Big(\prod_{k=i+1}^{n} u_k\Big)-\Big(\prod_{k=1}^{i-1} z_k\Big).\Big(\prod_{k=i+1}^{n} u_k\Big).u_i$$

$$\prod_{k=1}^{i} z_k.\prod_{k=i+1}^{n} u_k-\prod_{k=1}^{i-1} z_k.\prod_{k=i}^{n} u_k=\Big(\prod_{k=1}^{i-1} z_k\Big).\Big(\prod_{k=i+1}^{n} u_k\Big).\big(z_i-u_i\big)$$

On peut majorer en module, sachant que tous les z_i et u_i sont en module plus petits que 1 :

$$\Big|\prod_{k=1}^{i} z_k.\prod_{k=i+1}^{n} u_k-\prod_{k=1}^{i-1} z_k.\prod_{k=i}^{n} u_k\Big|\leqslant|z_i-u_i|$$

En sommant : $\displaystyle\Big|\prod_{k=1}^{n} z_k-\prod_{k=1}^{n} u_k\Big|=\Big|\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{i} z_k.\prod_{k=i+1}^{n} u_k-\prod_{k=1}^{i-1} z_k.\prod_{k=i}^{n} u_k\Big|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|z_i-u_i|$

Lycee Charlemagne	IS27
Points critiques.	

On calcule les deux dérivées partielles de $(x,\ y)\longmapsto y.(x^2+(\ln(y))^2)$: $\begin{array}{|c|c|}\hline \nearrow & 2.x.y \\ \hline \searrow & x^2+(\ln(y))^2+2.\ln(y) \\ \hline\end{array}$

On annule les deux dérivées partielles. La première équation donne $x=0$ ou $y=0$. Mais $y=0$ n'est pas acceptable dans le domaine de définition.
On a donc forcément $x=0$.
On reporte dans la seconde équation : $(\ln(y))^2+2.\ln(y)=0$. Ceci nous donne deux valeurs pour $\ln(y)$: 0 et $-1/2$. On a finalement deux points critiques : $\boxed{(0,\ 1) \text{ et } (0,\ e^{-2})}$

On recommence avec $(x,\ y)\longmapsto\begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$

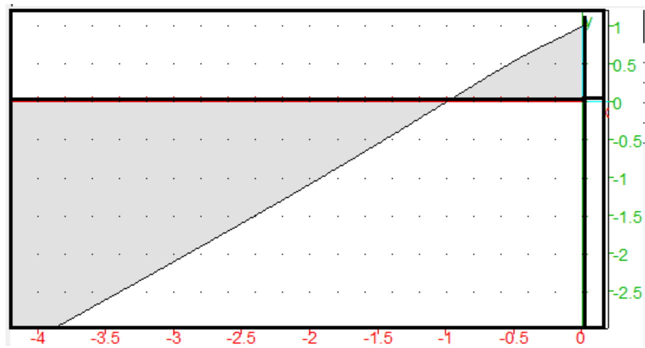
c'est à dire $(x,\ y)\longmapsto x^2+9.y^2+7.x.y+x+5.y$.

On calcule les deux dérivées partielles $\begin{array}{|c|c|}\hline \nearrow & 2.x+7.y+1 \\ \hline \searrow & 18.y+7.x+5 \\ \hline\end{array}$ et on résout $\left\{\begin{array}{rrcr} 2.x & +7.y & = & -1 \\ 7.x & +18.y & = & -5\end{array}\right|$.

Ce système très moche n'a qu'une solution : $\boxed{\Big(\frac{-17}{13},\ \frac{3}{13}\Big)}$

On dérive $(x,\ y)\longmapsto x.e^y+y.e^x$: $\begin{array}{|c|c|}\hline \nearrow & e^y+y.e^x \\ \hline \searrow & x.e^y+e^x \\ \hline\end{array}$

On doit résoudre un système pas linéaire du tout : $x.e^y = -e^x$ et $y.e^x = -e^y$.
Déjà, ni x ni y n'est nul, on garde donc des équivalences en multipliant par x, y ou en divisant.
En multipliant membre à membre et en simplifiant par $e^y.e^x$ jamais nul, on trouve $x.y = 1$.
On voit aussi que x et y sont tous deux négatifs.
Si on reporte $y = 1/x$ dans l'une des équations, on trouve $x.e^{1/x} + e^x = 0$.



On ne voit pas de solution simple à cette équation, et on ne connaît pas non plus le nombre de solutions. Mais si on définit $x \longmapsto x.e^{1/x} + e^x$ sur $]-\infty,\ 0[$, on peut la dériver et aussi calculer ses limites aux bornes. Sa dérivée est $x \longmapsto e^{1/x}.\left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^x$. Comme on travaille sur $]-\infty,\ 0[$, elle est strictement positive. Les limites aux bornes sur $-\infty$ et 1. Par thorème des valeurs intermdiaires, l'application s'annule au moins une fois, et par stricte monotonie une seule fois.
Il existe un unique x_0 vérifiant $x_0.e^{1/x_0} + e^{x_0} = 0$. Et un unique $y_0 = \dfrac{1}{x_0}$qui va avec.

On a un unique point critique.
Cela dit, sachant qu'il n'y en a qu'un, et que les rôles de x et de y sont symétriques, on se dit qu'on doit donc avoir $y = x$. mais comme tous deux sont négatifs, de produit égal à 1, on aboutit à $x = y = -1$. Et on vérifie $(-1).e^{1/(-1)} + e^{-1} = 0$.

Lycee Charlemagne	IS27
La suite A004721.	

On regarde et on voit que 2 n'a pas d'image, de même que 22 ou 222. Ce sont d'ailleurs les seuls avant 2022 et le suivant sera 2222.
Mais entre temps, certains auront eu pour image 0, comme 0, 20, 200, 202, 220, 2000, 2002, 2020.
Ce sont d'ailleurs les seuls. C'est notre neuvième 0. Et il y en aura d'autres...

Ensuite, comment calculer l'image d'un nombre n ?
Si on triche et profite de ce que `Python` sait faire :

```
def SansDeux(n) :
....Mot = str(n) #convertit en chaine de caractères
....MotSans = " #ce sera lui à la fin
....for Lettre in Mot : #on prend les lettres une à une
........if Lettre != ’2’ : #si ce n’est pas un 2 on le colle
...........MotSans += Lettre
....return(int(MotSans))
```

A un détail près : justement pour 222 par exemple, à la fin, `MotSans` est vide et la conversion en entier produit une erreur.
Sinon, il y a même `return(int(str(n).remplace(’2’,")))` que vous décortiquez : `str(n)` convertit en chaine
`str(n).replace(...)` applique la méthode `remplace` (truc par bidule)à la chaine
`int(str(n).remplace(...))` convertit le résultat en entier.
Mais il y a toujours le même problème avec les nombres n'ayant que des 2. Si le mot final est vide, il faut ne rien retourner...

Pour ce qui est de créer la liste des n premières valeurs, ce ne sera pas une boucle impérative `for`, mais une boucle conditionnelle `tant que`. « Tant que la longueur de la liste est plus petite que n », on avance...

```
def Liste(n) : #int -> list of int
....N = 0 #on commencera pas 0, et N augmentera au fur et a mesure
....L = [] #une liste vide au départ
....while len(L) < n : #tant qu'elle est trop courte
........Mot = str(N) #conversion
........MotSans = '' #mot qui va grandir
........for Lettre in Mot : #on prend les lettres une à une
............if Lettre != '2' : #si ce ne sont pas des 2
................MotSans += Lettre #on les colle au mot sans 2
........if MotSans != '' : #si on n'avait pas un nombre tel que 2222
............L.append(int(MotSans)) #on reconvertit en entier et on allonge la liste
........N += 1 #surtout ne pas oublier de passer au N suivant
....return(L)
```

Voici d'ailleurs la liste aux alentours de notre millésime en cours :
1998, 1999, 0, 1, 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 1, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 0, 1, 0, 3, 4...