

CHARLEMAGNE D.S.13. vendredi 20 mai	- LE RETOUR DE MASCHKE - <i>On reprend notre théorème : $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, G est un sous-groupe fini de $(GL(E), \circ)$, de cardinal s, F est un sous-espace vectoriel de E, stable par chaque élément de G.</i> <i>On veut trouver un supplémentaire K de F, stable par chaque élément de G.</i> <i>On suppose que E est doté d'un produit scalaire ϕ.</i> <i>On définit : $\psi := (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \sum_{g \in G} \phi(g(\vec{u}), g(\vec{v}))$. Montrer que ψ est un produit scalaire sur E.</i>	M.P.S.I.2. D.S.13. Année 2005/2006
---	--	--

de $(GL(E), \circ)$, de cardinal s , F est un sous-espace vectoriel de E , stable par chaque élément de G .

On veut trouver un supplémentaire K de F , stable par chaque élément de G .

On suppose que E est doté d'un produit scalaire ϕ .

On définit : $\psi := (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \sum_{g \in G} \phi(g(\vec{u}), g(\vec{v}))$. Montrer que ψ est un produit scalaire sur E .

[2 pt]

On note K le supplémentaire orthogonal de F pour ce produit scalaire. Montrer que K est stable par tous les éléments h de G . [2 pt]

	- ISOMÉTRIES ET ENTIERS -	
--	----------------------------------	--

Pour tout n , on note E_n l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients entiers (matrices d'isométries pour le produit scalaire usuel) et E_n^+ l'ensemble, des matrices orthogonales à coefficients entiers et de déterminant 1.

♠(1) Déterminez E_1 , E_1^+ , montrez que E_2 et E_2^+ ont pour cardinaux 8 et 4. [1,5 pt]

♠(2) Montrez que E_n a pour cardinal $n! \cdot 2^n$. [2 pt]

♠(3) Quel est le cardinal de E_n^+ ? [1 pt]

♠(4) Pour tout n , on note T_n l'ensemble des matrices orthogonales à trace entière. Déterminez T_2 . [1,5 pt]

♠(5) Montrez que T_3 est stable par élévation au carré. [2 pt]

♠(6) Montrez que T_2 et T_3 ne sont pas stables par multiplication. [1,5 pt]

♠(7) Montrez que T_4 n'est pas stable par élévation au carré. [2 pt]

	- DISTANCE DE SCHUR -	
--	------------------------------	--

n est un entier naturel donné. On note $\mathbb{E}_n$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels, $\mathbb{D}_n$ le sous-espace des matrices diagonales, $\mathbb{S}_n$ le sous-espace des matrices symétriques et $\mathbb{A}_n$ celui des matrices antisymétriques. On note $\mathbb{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques positives, c'est à dire des matrices symétriques S vérifiant $\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tX.S.X \geq 0$. On note GL_n le groupe des matrices inversibles. On note $\mathbb{O}_n$ le groupe des matrices orthogonales.

Les différentes parties sont très indépendantes. Vous pourrez admettre les résultats de l'une pour travailler sur les autres.

On admettra le théorème spectral : toute matrice réelle symétrique se diagonalise, et on peut choisir la matrice de passage orthogonale. On le reformule : toute matrice réelle symétrique admet une base orthonormée formée de vecteurs propres. On le reformule encore : $\forall S \in \mathbb{S}_n, \exists P \in \mathbb{O}_n, \exists D \in \mathbb{D}_n, S_n = P.D.{}^tP$.

Distance d'une matrice à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}_n$.

I- 1) Pour A et B dans $\mathbb{E}_n$, on définit : $\phi(A, B) = \text{Tr}({}^tA.B)$. Montrez que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{E}_n$. [1,5 pt] La norme associée est notée N et s'appelle norme de Schur.

I- 2) Calculez $N(\Omega)$ pour toute matrice Ω de $\mathbb{O}_n$. [0,5 pt]

I- 3) Montrez que $\mathbb{E}_n$ est la somme directe orthogonale de $\mathbb{S}_n$ et $\mathbb{A}_n$. [1 pt]

I- 4) Pour toute matrice A de $\mathbb{E}_n$ et tout sous-ensemble non vide $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}_n$, on pose $d(A, \mathbb{F}) = \inf(N(A - M) \mid M \in \mathbb{F})$. Montrez que si $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}_n$, alors on a $d(A, \mathbb{F}) = N(A - p_{\mathbb{F}}(A))$ où $p_{\mathbb{F}}$ est le projecteur sur $\mathbb{F}$, parallèlement à $\mathbb{F}^\perp$. [2 pt]

I- 5) Montrez : $\forall A \in \mathbb{E}_n, d(A, \mathbb{S}_n) = \frac{1}{2}.N(A - {}^tA)$. [1 pt]

I- 6) Calculez $d(A, \mathbb{A}_n)$ pour A dans $\mathbb{E}_n$. [1 pt]

.../...

Étude d'un exemple.

II- 1) On pose : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculez $d(M, \mathbb{A}_3)$. [1 pt]

II- 2) Calculez ${}^t M.M$, et montrez que cette matrice notée S est dans $\mathbb{S}_3^+$. [2 pt]

II- 3) Donnez la valeur de a telle que $S - a.I_3$ soit de rang 1. [1 pt] Donnez alors une base de $\text{Ker}(S - a.I_3)$ et de son orthogonal. [1,5 pt] Construisez alors une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dont les vecteurs soient dans $\text{Ker}(S - a.I_3)$ et $\text{Ker}(S - a.I_3)^\perp$. [1 pt]

II- 4) Déduisez alors que $S - a.I_3$ est diagonalisable. [1,5 pt]

II- 5) S est elle diagonalisable ? [1 pt]

Décomposition polaire.

III- 1) Montrez pour tout A de $\mathbb{E}_n$ que ${}^t A.A$ est dans $\mathbb{S}_n^+$, avec des valeurs propres positives. [2 pt]

III- 2) Soit A dans $\mathbb{E}_n$. On suppose le temps de cette question que ${}^t A.A$ est une matrice diagonale. Déterminez le signe de ses termes diagonaux. [0,5 pt] Montrez qu'il existe alors une matrice D vérifiant ${}^t A.A = D^2$. [1 pt] Montrez que les vecteurs colonne de A forment une famille orthogonale. [1 pt] Déduisez l'existence de Ω matrice orthogonale vérifiant $A = \Omega.D$. [2 pt]

III- 3) Soient A et B deux matrices de $\mathbb{E}_n$ vérifiant ${}^t A.A = {}^t B.B$. Montrez qu'il existe P dans $\mathbb{O}_n$ et D dans $\mathbb{D}$ vérifiant ${}^t P.{}^t A.A.P = {}^t P.{}^t B.B.P = D^2$. [1 pt]

III- 4) Déduisez alors : $\exists \Omega \in \mathbb{O}_n, A = \Omega.B$. [2 pt]

III- 5) Déduisez de ce qui précède : $\forall A \in \mathbb{E}_n, \exists \Omega \in \mathbb{O}_n, \exists S \in \mathbb{S}_n^+, A = \Omega.S$ (décomposition polaire). [1,5 pt]

III- 6) Donnez la décomposition polaire de la matrice M définie plus haut. [1,5 pt]

Distance d'une matrice à $\mathbb{O}_n$.

IV- 1) Montrez : $\forall A \in \mathbb{E}_n, \forall P \in \mathbb{O}_n, N(P.A) = N(A.P) = N(A)$. [1 pt]

IV- 2) Soit A une matrice de $\mathbb{E}_n$, de décomposition polaire $\Omega.S$. On admet donc que S se diagonalise en $P.D.{}^t P$ avec P dans $\mathbb{O}_n$ et D dans $\mathbb{D}_n$. Montrez : $\forall Q \in \mathbb{O}_n, N(A - Q) = N(S - {}^t \Omega.Q)$. [1 pt]

IV- 3) Déduisez : $d(A, \mathbb{O}_n) = d(S, \mathbb{O}_n) = d(D, \mathbb{O}_n)$. [1 pt]

IV- 4) Soit D dans $\mathbb{D}_n$, de terme diagonaux λ_1 à λ_n , positifs. Montrez : $\forall Q \in \mathbb{O}_n, N(D - Q)^2 = \sum_{k=1}^n (\lambda_k)^2 - 2.Tr(D.Q) + n$. [1,5 pt]

IV- 5) Montrez : $\forall Q \in \mathbb{O}_n, Tr(D.Q) \leq Tr(D)$ (calculez effectivement les coefficients diagonaux de $D.Q$). [1 pt]

IV- 6) Déduisez : $d(D, \mathbb{O}_n) = N(D - I_n)$. [1,5 pt]

IV- 7) Déduisez : $d(A, \mathbb{O}_n) = N(A - \Omega)$. [1 pt]

V- 1) Calculez la distance de M à $\mathbb{O}_3$ et déterminez la matrice de $\mathbb{O}_3$ la plus proche de M . [1,5 pt]

Distance d'une matrice à $\mathbb{GL}_n$.

VI- 1) Soit A dans $\mathbb{E}_n$. Montrez qu'il existe α strictement positif vérifiant : $\forall \lambda \in]0, \alpha[, \det(A - \lambda.I_n) \neq 0$. [1,5 pt]

VI- 2) Déduisez : $\forall A \in \mathbb{E}_n, d(A, \mathbb{GL}_n) = 0$. [1,5 pt]

Source : sujet du G.C.P. (Concours Commun des E.N.S.I.), filière M.P., année 2003

CHARLEMAGNE CORRIGÉ © N.C.	Pour tout n, on note E_n l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients entiers et E_n^+ l'ensemble, des matrices orthogonales à coefficients entiers et de déterminant 1. Étudiez E_1, E_1^+, E_2 et E_2^+.	M.P.S.I.2. D.S.13. Année 2004/2005
---	---	--

Dans E_1 il y a (1) et (-1) . De toutes façons, les seules isométries en dimension 1 sont Id et $-Id$.

Dans E_1^+ il n'y a plus que (1) .

Une matrice d'isométrie est faite de vecteurs colonnes normés, deux à deux orthogonaux. Un vecteur colonne de coefficients x_1 à x_n est normé si et seulement si on a $(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2 = 1$. Mais comme les x_i sont ici supposés entiers, leurs carrés valent 0 ou 1. Pour quel la somme vaille 1, il faut et il suffit que l'un des carrés vaille 1 et que les autres soient nuls.

Les seuls vecteurs colonnes des matrices de E_n sont donc, au signe près, les vecteurs de la base canonique.

En taille 2, on construit donc des matrices à l'aide des quatre vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La condition d'orthogonalité nous conduit aux matrices suivantes pour E_2 :

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Pour E_2^+ , on ne garde que celles qui ont un déterminant positif :

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Montrez que E_n a pour cardinal $n!.2^n$. Quel est le cardinal de E_n^+ ?

On refait le même raisonnement qu'au dessus. Une récurrence en effet n'est pas la bonne démarche ici.

Une matrice de E_n est formée des vecteurs colonne de la base canonique, au signe près. Il y a $2.n$ tels vecteurs.

Ensuite, la condition d'orthogonalité conduit à ce qu'il faille les prendre tous différents, et donc tous une fois et une seule, au signe près.

Malheureusement, en notant C_1 à C_n les n vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on crée des matrices en $(\pm C_{\sigma(1)}, \pm C_{\sigma(2)}, \dots, \pm C_{\sigma(n)})$.

On a $n!$ permutations.

On a deux choix pour chaque signe. Les choix de signes sont indépendants, d'où un 2^n .

Le choix des signes et le choix de la permutation sont indépendants, on a donc $n!.2^n$ choix possibles.

Quelques exemples en taille 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, il ne faut garder que celles qui ont un déterminant positif.

On sent bien qu'il va y en avoir la moitié.

Pour ce faire, on crée l'application f qui transforme une matrice de taille n en celle dont on a permuté les deux premières colonnes.

Si M est dans E_n , alors $f(M)$ est encore dans E_n . En effet, les vecteurs colonne ayant été mélangés, le caractère orthonormé est préservé.

De plus, f est bijective, et égale à son propre inverse (si on échange deux colonnes deux fois de suite, on retrouve la même matrice).

D'autre, f change le signe du déterminant. En effet, la permutation de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 .

Il s'ensuit qu'en notant $E_n^\perp$ l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients entiers de déterminant -1 , alors f est une bijection entre E_n^+ et $E_n^\perp$.

Il y a donc autant d'éléments dans E_n^+ que dans $E_n^\perp$.

Or, E_n^+ et $E_n^\perp$ forment une partition de E_n (réunions égale à E_n , intersection vide).

On a donc $\text{Card}(E_n) = \text{Card}(E_n^+) + \text{Card}(E_n^\perp) = 2 \cdot \text{Card}(E_n^+)$. On a donc $\boxed{\text{Card}(E_n^+) = n! \cdot 2^{n-1}}$

Pour tout n , on note T_n l'ensemble des matrices orthogonales à trace entière. Déterminez T_2 .

Dans O_2 , il y a deux catégories de matrices : les symétries et les rotations.

Les symétries en $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$ ont une trace entière (car nulle), on les garde toutes.

Les rotations en $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ ont une trace célèbre égale à $2 \cdot \cos(\alpha)$. On ne les garde que pour α ayant un cosinus égal à $-1, -1/2, 0, 1/2$ ou 1 .

On résout donc les équations $\cos(\alpha) = 1/2$ et autres. On trouve des solutions multiples de $\pi/4$ (ce qui inclut les $\pi/2$ et les π) et des solutions multiples de $\pi/3$. On le lit très bien sur le cercle trigonométrique tracé ici à droite.

On a donc les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Montrez que T_3 est stable par élévation au carré.

Dans T_3 , il y a les rotations et les rotations-réflexions, dont les axes sont assez libres et les angles à préciser.

Une rotation d'angle α a pour trace $1 + 2 \cdot \cos(\alpha)$, car elle est semblable à une matrice en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$ et partage avec elle cette trace.

La condition "être dans T_3 " se réduit donc à $1 + 2 \cdot \cos(\alpha) \in \mathbb{Z}$. On aboutit là encore à $\cos(\alpha)$ est un multiple de $1/2$.

On pose donc tout naturellement $A = \{k \cdot \pi/4 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{p \cdot \pi/3 \mid p \in \mathbb{Z}\}$.

On sait donc qu'une rotation est dans T_3 si et seulement si son angle est dans A , et l'axe n'a aucune importance.

Par élévation au carré d'une matrice de rotation R , l'angle α double et reste dans A . Le carré R^2 reste donc dans T_3 .

Pour les rotations-réflexions, la trace vaut $-1 + 2 \cdot \cos(\alpha)$. Le carré est une rotation de trace $1 + \cos(2\alpha)$. La même stabilité de A par doublement permet de rester dans T_3 .

Remarque : T_3 est stable aussi par passage à l'inverse, comme on le montre aisément.

Montrez que T_2 et T_3 ne sont pas stables par multiplication.

On commence par le cas de T_2 , car il nous permettra de conclure pour T_3 .

Si deux rotations de T_2 ont des angles convenables, leur produit a un angle qui peut sortir de A car A n'est pas stable par addition.

On crée un contre-exemple (car les "il n'y a pas de raison pour que" ne sont pas des arguments) :

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Ce contre-exemple s'exporte aisément en dimension 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Montrez que T_4 n'est pas stable par élévation au carré.

Qui a-t-on dans T_4 ? Des rotations, des réflexions pour lesquelles le raisonnement de la question précédente reste valable. Il faut donc trouver autre chose.

Il y a donc aussi les objets faits de deux rotations, autour de plans orthogonaux entre eux, de la forme $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \perp \sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & \perp \sin \beta \\ 0 & 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$.

Par élévation au carré elles donnent $\begin{pmatrix} \cos 2.\alpha & \perp \sin 2.\alpha & 0 & 0 \\ \sin 2.\alpha & \cos 2.\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2.\beta & \perp \sin 2.\beta \\ 0 & 0 & \sin 2.\beta & \cos 2.\beta \end{pmatrix}$.

Le passage de “ $2.(\cos \alpha + \cos \beta)$ est entier” à “ $2.(\cos 2.\alpha + \cos 2.\beta)$ est entier” n'est plus aussi évident, car on peut répartir la propriété sur les deux.

On peut jouer avec des cosinus égaux à $1/4$ (ou $1/3$ et $2/3$). Et là, l'élévation au carré perd des choses.

On prend $\alpha = \beta = \textit{Arccos}(1/4)$ (le sinus vaut $\sqrt{15}/4$, mais ça ne sert guère). La trace vaut alors 1. On élève au carré. L'angle double, et on calcule :

$$\cos(2.\textit{Arccos}(1/4)) = 2.\cos^2(\textit{Arccos}(1/4)) - 1 = 2.\frac{1}{16} - 1 = -\frac{7}{8}$$

Le sinus vaut $\sqrt{15}/8$, mais on s'en moque.

La trace de la matrice élevée au carré vaut $-7/2$ et n'est plus entière.

$$\left(\begin{pmatrix} 1/4 & -\sqrt{15}/4 & 0 & 0 \\ \sqrt{15}/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & -\sqrt{15}/4 \\ 0 & 0 & \sqrt{15}/4 & \cos 1/4 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} -7/8 & -\sqrt{15}/8 & 0 & 0 \\ \sqrt{15}/8 & -7/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7/8 & -\sqrt{15}/8 \\ 0 & 0 & \sqrt{15}/8 & \cos -7/8 \end{pmatrix}$$

On définit : $\psi := (\vec{u}^\rceil, \vec{v}^\rceil) \mapsto \sum_{g \in G} \phi(g(\vec{u}^\rceil), g(\vec{v}^\rceil))$. Montrer

que ψ est un produit scalaire sur E .

Déjà, il n'y a pas de problème d'existence. Pour chaque couple de vecteurs $(\vec{u}^\rceil, \vec{v}^\rceil)$, chaque $g(\vec{u}^\rceil)$, $g(\vec{v}^\rceil)$ existe et est dans E ; on peut calculer leur produit scalaire. Enfin, on peut sommer car il n'y a qu'un nombre fini de termes.

- Tous les termes de la somme sont des réels, on a donc bien une forme.
- Si on compare $\psi(\vec{u}^\rceil, \vec{v}^\rceil)$, et $\psi(\vec{v}^\rceil, \vec{u}^\rceil)$, on trouve la même chose par symétrie du produit scalaire ϕ .
- On prend à présent trois vecteurs $\vec{u}^\rceil$, $\vec{v}^\rceil$ et $\vec{w}^\rceil$, et un réel μ (j'en ai marre de λ , c'est plus long à taper). On calcule $\psi(\vec{u}^\rceil, \vec{v}^\rceil) + \mu.\psi(\vec{u}^\rceil, \vec{w}^\rceil)$. C'est une somme de deux sigma :

$$\psi(\vec{u}^\rceil, \vec{v}^\rceil) + \mu.\psi(\vec{u}^\rceil, \vec{w}^\rceil) = \sum_{g \in G} \phi(g(\vec{u}^\rceil), g(\vec{v}^\rceil)) + \mu. \sum_{g \in G} \phi(g(\vec{u}^\rceil), g(\vec{w}^\rceil))$$

On fusionne en $\sum_{g \in G} \left(\phi(g(\vec{u}^\rceil), g(\vec{v}^\rceil)) + \mu.\phi(g(\vec{u}^\rceil), g(\vec{w}^\rceil)) \right)$.

Par bilinéarité de ϕ , on en fait $\sum_{g \in G} \phi(g(\vec{u}^\rceil), g(\vec{v}^\rceil) + \mu.g(\vec{w}^\rceil))$.

Par linéarité de chaque g , on en fait $\sum_{g \in G} \phi(g(\vec{u}^\rceil), g(\vec{v}^\rceil + \mu.\vec{w}^\rceil))$ et on reconnaît $\psi(\vec{u}^\rceil, \vec{v}^\rceil + \mu.\vec{w}^\rceil)$.

Par symétrie, on a la bilinéarité.

- On prend un seul vecteur $\vec{u}^\rceil$, et on calcule $\psi(\vec{u}^\rceil, \vec{u}^\rceil)$. C'est une somme de termes en $\phi(g(\vec{u}^\rceil), g(\vec{u}^\rceil))$. Tous les termes de la somme sont positifs, la somme est positive.

• On reprend un seul vecteur $\vec{u}$, et on suppose que $\psi(\vec{u}, \vec{u})$ est nul. L'objectif est de prouver que $\vec{u}$ est nul.

Or, quand une somme de termes positifs est nulle, c'est que chaque terme est nul. Chaque $\phi(g(\vec{u}), g(\vec{u}))$ est donc nul. Par caractère défini positif du produit scalaire initial ϕ , c'est que chaque $g(\vec{u})$ est nul.

Mais dans le groupe G , il y a au moins le neutre Id_E . Pour lui, on a donc : $\vec{u} = \vec{0}$, et ce n'est pas la peine d'aller chercher plus loin.

En utilisant un seul élément de G on parvient déjà à la réponse. On n'est pas forcé de les utiliser tous, puisque le " $\forall g \in G$," est dans l'hypothèse et non dans la conclusion.

On note K le supplémentaire orthogonal de F pour ce produit scalaire. Montrer que K est stable par tous les éléments h de G .

Comme on a un produit scalaire, on peut parler du supplémentaire d'un sous-espace. On sait que c'est un nouveau sous-espace vectoriel, et on connaît sa dimension.

Tout ce qu'on doit prouver, c'est que K est stable par chaque élément h de G .

On prend donc un élément $\vec{u}$ dans K et un élément h dans G . On veut prouver que $h(\vec{u})$ est orthogonal à tous les éléments de F .

On prend donc un élément $\vec{v}$ de F , sans le particulariser. On va calculer $\psi(h(\vec{u}), \vec{v})$ (obtiendra-t-on 0 ? quel suspense...).

Cette quantité vaut $\sum_{g \in G} \phi(g(h(\vec{u})), g(\vec{v}))$, et on la note A .

On a alors : $A = \sum_{g \in G} \phi(g(h(\vec{u})), g(h^{-1}(\vec{v})))$, car les éléments de G sont bijectifs.

On reformule : $A = \sum_{g \in G} \phi(f(\vec{u}), f(h^{-1}(\vec{v})))$ en posant : $hfg \circ h$.

Quand g décrit tout G , la composée f reste dans G (groupe). Deux g différents ont des images différentes, on a une injection. Par finitude du cardinal de G , on a une bijection.

On reformule : quand g décrit G , f décrit aussi tout G une fois et une seule, dans un ordre différent, c'est tout.

On a donc : $B = \sum_{f \in G} \phi(f(\vec{u}), f(h^{-1}(\vec{v})))$. On reconnaît : $B = \psi(\vec{u}, h^{-1}(\vec{v}))$.

Or, pour h dans G et $\vec{v}$ dans F , on sait que h^{-1} est encore dans le groupe G , et $h^{-1}(\vec{v})$ est dans F , par stabilité de F par tous les éléments de G .

On a donc un produit scalaire entre un élément de K et d'un élément de H , c'est nul par définition de $\vec{v} \in K$.

On a donc notre sous-espace supplémentaire de F , stable par tous les éléments de G . C'est bien ce que l'on voulait.

Pour A et B dans $\mathbb{E}_n$, on définit : $\phi(A, B) = \text{Tr}({}^t A.B)$.

C'est un résultat vu en cours.

On a une **forme**, car les formats sont compatibles ; la matrice ${}^t A.B$ existe, est carrée et a donc pour trace un réel.

Cette forme est **symétrique**. Pour tout couple de matrices, (A, B) , les deux matrices ${}^t A.B$ et ${}^t B.A$ sont symétriques l'une de l'autre et ont donc la même trace.

Elle est **linéaire** par rapport au second vecteur, donc linéaire par rapport à tous par symétrie :

$$\text{Tr}({}^t A.(\lambda.B + \mu.C)) = \lambda.\text{Tr}({}^t A.B) + \mu.\text{Tr}({}^t A.C)$$

Elle est **positive**. Pour toute matrice A donnée, de terme général a_i^j , on constate que les termes diagonaux de ${}^t A.A$ sont les $(a_i^1)^2 + \dots + (a_i^n)^2$. La trace est une somme de carrés, elle est positive. Supposons pour A donnée que cette somme soit nulle. Chaque terme de la somme de carrés doit être nul, chaque a_i^j est donc nul. Et dans cette somme, tous les a_i^j de la matrice initiale A sont présents. La matrice A est nulle.

Remarque : $N(A)^2 = \text{Tr}({}^t A.A)$ est la somme des carrés de tous les coefficients de la matrice A .

On se donne une matrice orthogonale Ω . On a alors ${}^t \Omega.\Omega = I_n$ par définition. On passe à la trace : $\Phi(\Omega, \Omega) = \text{Tr}(I_n)n$. On passe à la racine : $N(\Omega) = \sqrt{n}$

Montrez que $\mathbb{E}_n = \mathbb{S}_n \oplus \mathbb{A}_n$ (somme directe orthogonale).

Toute matrice réelle A se décompose sous la forme $(A + {}^t A)/2 + (A - {}^t A)/2$. La matrice $(A + {}^t A)$ est symétrique et $A - {}^t A$ est antisymétrique (${}^t(A - {}^t A) = {}^t A - {}^t({}^t A) = {}^t A - A$).

La seule matrice à la fois symétrique et antisymétrique est nulle. La somme est directe.

Il reste à prouver l'orthogonalité : toute matrice symétrique est orthogonale à toutes les matrices antisymétriques.

On aura juste $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{S}_n^-$, mais par un argument de dimension, on arrive à l'égalité.

On se donne S symétrique et A antisymétrique, et on arrive à $\Phi(A, S) = -\Phi(S, A)$, ce qui prouve que le produit scalaire est nécessairement nul :

$$\boxed{\Phi(A, A) = \text{Tr}({}^t A.S) = \text{Tr}(-A, S) = -\text{Tr}(A.S) = \text{Tr}(S.A) = \text{Tr}({}^t S.A) = \Phi(S, A)}$$

En milieu de ligne intervient la propriété célèbre $\text{Tr}(U.V) = \text{Tr}(V.U)$.

La propriété $d(A, \mathbb{F}) = N(A - p_F(A))$ est aussi dans le cours, mais l'objectif ici est bien de la (re)démontrer.

Pour $\mathbb{F}$ donné, on considère donc le projecteur orthogonal sur $\mathbb{F}$, parallèlement à $\mathbb{F}^\perp$.

On se donne ensuite A . On sait déjà que $\{N(A - M) \mid M \in \mathbb{F}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide, minorée par 0.

On calcule ensuite $N^2(A - M) = N^2(A - p(A) + p(A) - M)$. Or, $A - p(A)$ est dans $\mathbb{F}^\perp$ par définition de $p(A)$. En revanche, $p(A) - M$ est dans $\mathbb{F}$ car $\mathbb{F}$ est un espace vectoriel. Les deux termes $A - p(A)$ et $p(A) - M$ étant orthogonaux, on peut appliquer le théorème de Pythagore : $N^2(A - p(A) + p(A) - M) = N^2(A - p(A)) + N^2(p(A) - M)$. On passe à la racine :

$$\forall M \in \mathbb{F}, N(A - M) = \sqrt{N^2(A - p(A)) + N^2(p(A) - M)} \geq N(A - p(A))$$

On a un minorant de toutes les distances, et il est atteint pour M égal à $p(A)$. C'est donc lui la borne inférieure.

On traite ensuite le cas particulier de $\mathbb{S}_n$.

On se donne donc A . On décompose en $(A + {}^t A)/2 + (A - {}^t A)/2$. La première somme est dans $\mathbb{S}_n$ et la seconde dans $(\mathbb{S}_n)^\perp$. On en déduit que A se projette en $(A + {}^t A)/2$. La différence $A - P_S(A)$ est donc ici $(A - {}^t A)/2$. On en prend la norme, et on sort le 1/2 par homogénéité de la norme.

De la même façon, on a $\boxed{d(A, \mathbb{A}_n) = N(A + {}^t A)/2}$

On pose : $M = \dots$. Calculez $d(M, \mathbb{A}_3)$.

On décompose cette matrice en partie paire et impaire : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait ensuite que $d(M, \mathbb{S}_3)$ est la norme de la partie impaire. Et cette norme est la racine carrée de la somme des carrés des coefficients : $d(M, \mathbb{S}_3) = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

De même, $d(M, \mathbb{A}_3) = N(M + {}^t M)/2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$.

On calcule ensuite : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

L'exemple semble créé exprès. On constate que $M - I_3$ est une matrice de rang 1, puisque toutes ses colonnes sont proportionnelles, pour ne pas oser avouer qu'elles sont égales.

Une base du noyau s'obtient en résolvant $(M - I).X = 0$ (vecteur nul). On trouve l'équation $x + y + z = 0$, et on peut prendre ${}^t(1, -1, 0)$ et ${}^t(1, 0, -1)$.

L'orthogonal de cet espace est $Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On en prend une base : ${}^t(1, 1, 1)$.

Mais ceci ne donne pas une base orthonormée.

On recommence avec $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ \pm 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, obtenue par orthonormalisation de Schmidt (on a juste besoin de renormer le troisième, il est déjà orthogonal aux autres par construction).

Ces trois vecteurs sont des vecteurs propres de $S - I_3$. Les deux premiers avec valeur propre 0, et le dernier avec valeur propre 15.

On peut le vérifier, en posant : $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. On a alors $P \cdot {}^tP = I_3$ et $S \cdot P = P \cdot \text{Diag}(0, 0, 15)$, je vous laisse le soin de vérifier.

La matrice $S - I_3$ est diagonalisable. De toutes façons, toutes les matrices réelles symétriques le sont.

On pouvait aussi chercher son polynôme caractéristique et chercher ensuite des vecteurs propres en quantité suffisante.

On a donc une matrice P inversible et une matrice diagonale D vérifiant $(S - I_3) \cdot P = P \cdot D$.

On a alors immédiatement $S \cdot P = P \cdot D + P = P \cdot (D + I_3)$.

La matrice S est aussi diagonalisable, en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$, via la matrice trouvée tout à l'heure.

..... Montrez qu'il existe α strictement positif vérifiant :

$$\forall \lambda \in]0, \alpha[, \det(A - \lambda \cdot I_n) \neq 0.$$

..... *C'est du classique, qu'on réutilise en Spé.*

La fonction $\lambda \mapsto \det(A - \lambda \cdot I_n)$ est un polynôme en λ , de degré n , appelé "polynôme caractéristique de A ".

Il n'a qu'un nombre fini de racines, au maximum n . On peut donc chercher la racine non nulle qui a le plus petit module : r_1 . On sait alors que pour λ complexe vérifiant $0 < |\lambda| < |r_1|$, λ n'est pas racine du polynôme caractéristique. La quantité $\det(A - \lambda \cdot I_n)$ est alors non nulle. Le résultat reste valable pour les réels strictement positifs qui sont donc des complexes comme les autres.

On a isolé en fait la plus petite racine positive si elle existe.

Les matrices en $A - \lambda \cdot I_n$ tendent vers A quand λ tend vers 0. Par exemple la suite $\left(A - \frac{\alpha}{p+1} \cdot I_n\right)_p$ est une suite d'éléments de $\mathbb{GL}_n$, qui "tend vers A quand p tend vers l'infini".

La suite $N\left(A - \left(A - \frac{\alpha}{n+1} \cdot I_n\right)\right)$, indexée par p tend vers 0 quand p tend vers l'infini. **Ceci force la borne inférieure des $N(A - V)$ avec V inversible à valoir 0.**

On appelle cela un théorème de densité. Les matrices inversibles sont "majoritaires". Autour de chaque matrice, même non inversible, il y a des matrices inversibles.

..... Montrez pour tout A de $\mathbb{E}_n$ que ${}^tA \cdot A$ est dans $\mathbb{S}_n^+$.

..... Il faut prouver que cette matrice est symétrique. On vérifie : ${}^t({}^tA \cdot A) = {}^tA \cdot ({}^tA) = {}^tA \cdot A$.

On doit ensuite prouver que pour tout X , le réel ${}^tX \cdot ({}^tA \cdot A) \cdot X$ est positif.

C'est bien un réel, par compatibilité des formats.

Or, ce réel vaut ${}^t(A.X).(A.X)$. C'est le carré de la norme du vecteur $A.X$ (somme des carrés des coefficients). C'est bien un réel positif ou nul.

On prend ensuite une valeur propre λ de ${}^tA.A$ si elle en a. On lui associe un vecteur propre X . On a alors ${}^tA.A.X = \lambda.X$.

On remultiplie par tX à gauche (formats compatibles).

On a alors : ${}^t(A.X).(A.X) = \lambda.{}^tX.X$. Le réel ${}^tX.X$ est strictement positif (carré de norme), de même que ${}^t(A.X).(A.X)$. Le quotient reste positif. Les valeurs propres d'une matrice de Gram sont positives.

Soit A dans $\mathbb{E}_n$. On suppose ${}^tA.A \in \mathbb{D}$. Déterminez le signe de ses termes diagonaux.

La matrice ${}^tA.A$ est en fait une matrice de Gram.

On constate que son terme de position (i, j) est obtenu en faisant tomber la $i^{\text{ème}}$ colonne de A sur la $j^{\text{ème}}$ colonne, transformée en ligne.

Bref, en position (i, j) , on a $C_i.C_j$.

Les termes diagonaux sont des carrés de norme. Ils sont positifs.

Si on écrit alors ${}^tA.A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on a même ${}^tA.A = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})^2$.

Ici, l'hypothèse "matrice diagonale" permet de dire que les vecteurs colonne de A sont deux à deux orthogonaux. Il suffirait de presque rien pour les normer.

Et justement, les carrés de normes sont les termes diagonaux de ${}^tA.A$.

En notant donc C_1 à C_n ces colonnes et λ_1 à λ_n les termes diagonaux de ${}^tA.A$ positifs, la famille de $C_1/\sqrt{\lambda_1}$ à $C_n/\sqrt{\lambda_n}$, on a une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Pour diviser les colonnes, il suffit de multiplier à droite par une matrice diagonale.

On pose donc Δ la matrice diagonale formée des inverses des racines carrées des coefficients diagonaux de ${}^tA.A$. La matrice $A.\Delta$ est alors une matrice de vecteurs colonne deux à deux orthogonaux et normés. On a une base orthonormée, et la matrice $A.\Delta$ est dans $\mathbb{O}_n$. On la note Ω .

On repart de $A.\Delta = \Omega$, et on trouve $A = \Omega.\Delta^{\perp 1}$. Il ne reste plus qu'à préciser que $\Omega^{\perp 1}$ est la matrice diagonale, de coefficients diagonaux $\sqrt{\lambda_1}$ à $\sqrt{\lambda_n}$.

Il reste un problème quand même.

Si l'un des λ_k (termes diagonaux de ${}^tA.A$) est nul. Le vecteur colonne C_k en question est alors nul. On peut alors dans la matrice P prendre n'importe quel $k^{\text{ième}}$ vecteur colonne.

Il en existe au moins un par théorème de la base orthonormée incomplète si on n'a effectivement pas encore assez de vecteurs pour faire une base.

La matrice P reste orthogonale, et le produit $\Omega.D$ est encore égale à A .

On suppose ${}^tA.A = {}^tB.B$. Montrez qu'il existe P dans $\mathbb{O}_n$ et D dans $\mathbb{D}$ vérifiant ${}^tP.{}^tA.A.P = {}^tP.{}^tB.B.P = D^2$.

La matrice ${}^tA.A$ est réelle symétrique.

Elle se diagonalise donc, avec matrice de passage Q orthonormée si on le souhaite, et on le souhaite.

La matrice diagonale est formée des valeurs propres de ${}^tA.A$. Mais on sait déjà que ces valeurs propres sont positives. On en prend les racines carrées, et on les met dans une nouvelle matrice diagonale, que l'on note D . La matrice D^2 est encore diagonale, mais a pour coefficients les carrés des racines carrées des valeurs propres de ${}^tA.A$.

On peut donc bien écrire $Q.({}^tA.A).Q^{\perp 1} = D^2$.

On décide que P sera égale à tQ , c'est à dire à $Q^{\perp 1}$, et la formule suit.

On repart de ${}^tP.{}^tA.A.P = D^2$, et on l'écrit ${}^t(A.P).(A.P) = D^2$, matrice diagonale positive. On applique alors le résultat du lot de questions précédents à $A.P : A.P$ peut s'écrire $\Omega_1.D$ avec Ω_1 orthogonale et D définie plus haut. On refait le même raisonnement avec ${}^tP.{}^tB.B.P = D^2$. Cette fois, c'est $B.P$ qui peut s'écrire $\Omega_2.D$ avec Ω_2 orthogonale et le même D . On a donc : ${}^t\Omega_1.A = D = {}^t\Omega_2.B$. On oublie D et on remultiplie par $\Omega_1 : A = \Omega_1.{}^t\Omega_2.B$. On regroupe par associativité, et on rappelle que $\Omega_1.{}^t\Omega_2$ est encore une matrice orthogonale par stabilité du groupe $\mathbb{O}_n$.

Déduisez de ce qui précède : $\forall A \in \mathbb{E}_n, \exists \Omega \in \mathbb{O}_n, \exists S \in \mathbb{S}_n^+, A = \Omega.S$.

On part de ${}^tA.A$. C'est une matrice de $\mathbb{S}_n^+$. On la diagonalise en $Q.\Delta.Q^{\perp 1}$. On sait que les valeurs propres de A sont positives. Les termes diagonaux de Δ sont donc positifs. On peut prendre la racine carrée de chacun et écrire ${}^tA.A = Q.D^2.Q^{\perp 1}$ ou ${}^tA.A = Q.D^2.{}^tQ$ avec Q orthogonale et D diagonale. On pose alors $B = Q.D.{}^tQ$. On constate alors : ${}^tB.B = Q.{}^tD.{}^tQ.Q.D.{}^tQ = {}^tQ.D^2.Q = {}^tA.A$. On sait alors qu'il existe Ω dans $\mathbb{O}_n$ vérifiant $A = \Omega.B$. On a donc : $A = \Omega.Q.D.{}^tQ$. On constate que B est ici symétrique. On vérifie que $Q.D.{}^tQ$ est dans $\mathbb{S}_n^+$. En effet, pour tout vecteur X , on a ${}^tX.B.X = {}^tX.Q.D.{}^tQ.X = {}^tY.D.Y$ en notant Y le vecteur ${}^tQ.X$. En notant y_1 à y_n les composantes de Y , on a presque la somme $(y_1)^2 + \dots + (y_n)^2$. En fait, on a $(y_1 \dots y_n) \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Et cette somme est quand même positive. C'est $\mu_1.(y_1)^2 + \dots + \mu_n.(y_n)^2$ avec les μ_i positifs (racines carrées de réels positifs). Finalement, on a une matrice orthogonale et une matrice de $\mathbb{S}_n^+$.

Donnez la décomposition polaire de la matrice M définie plus haut.

On a diagonalisé ${}^tM.M$ en $Diag(1, 1, 16)$, avec matrice de passage connue. On passe à la racine : $Diag(1, 1, 4)$ est celle qu'on appellera D . On pose alors $B = P.Diag(1, 1, 4).{}^tP$. On trouve, tous calculs faits : $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Pour récupérer Ω vérifiant $M = \Omega.S$, il suffit de poser : $\Omega = M.S^{\perp 1}$, et on trouve $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Montrez : $\forall A \in \mathbb{E}_n, \forall P \in \mathbb{O}_n, N(P.A) = N(A.P) = N(A)$.

Une question pour récupérer des points si on lit les énoncés. On se donne donc une matrice quelconque et une matrice orthogonale. On rappelle la propriété de la trace : $Tr(M.N) = Tr(N.M)$, et on calcule : $N^2(P.A) = \Phi(P.A, P.A) = Tr({}^t(P.A).(P.A)) = Tr({}^tA.{}^tP.P.A) = Tr({}^tA.I_n.A) = \Phi(A, A) = N^2(A)$

On a aussi $N^2(A.P) = \Phi(A.P, A.P) = \text{Tr}({}^t(A.P).(A.P)) = \text{Tr}({}^tP.{}^tA.A.P) =$
 $\text{Tr}({}^tA.A.P.{}^tP) = \text{Tr}({}^tA.A.I_n) = \Phi(A, A) = N^2(A)$

On n'a plus qu'à passer aux racines, entre ces quantités positives.

..... Montrez : $\forall Q \in \mathbb{O}_n, N(A - Q) = N(S - {}^t\Omega.Q).$

On a : $A - Q = \Omega.S - Q = \Omega.(S - {}^t\Omega.Q).$

On applique le résultat précédent car Ω est orthogonale : $N(A - Q) = N(\Omega.(S - {}^t\Omega.Q)) = N(S - {}^t\Omega.Q).$

Quand Q décrit tout $\mathbb{O}_n$, la matrice ${}^t\Omega.Q$ décrit toujours aussi $\mathbb{O}_n$.

Il reste dans $\mathbb{O}_n$ par stabilités, et on construit la bijection réciproque sur le même modèle.

Le minimum des $N(A - Q)$ quand Q décrit $\mathbb{O}_n$ est donc le même que le minimum des $S - R$ quand R décrit aussi $\mathbb{O}_n$.

On poursuit avec $N(P.D.{}^tP - R)$ qui est égale à $N(D.{}^tP - {}^tP.R)$ puis à $N(D - {}^tP.R.P)$. Quand R décrit $\mathbb{O}_n$, ${}^tP.R.P$ en fait autant. On retrouve donc le même minimum.

..... $\forall Q \in \mathbb{O}_n, N^2(D - Q) = \sum_{k=1}^n (\lambda_k)^2 - 2.\text{Tr}(D.Q) + n.$

On applique la formule d'Al-Kashi pour ce produit scalaire ϕ :

$$N^2(D - Q) = N^2(D) - 2.\Phi(D, Q) + N^2(Q)$$

On calcule : $N^2(D) = \text{Tr}({}^tD.D) = \text{Tr}(D^2)$. Cette matrice diagonale a pour coefficients les carrés des termes de D . En prendre la trace permet de les récupérer tous. On a donc $\sum_{k \leq n} (\lambda_k)^2$.

Le terme $\phi(D, Q)$ devient $\text{Tr}(D.Q)$, car D est symétrique.

Enfin, $N^2(Q)$ vaut n comme on l'a dit dès le début.

..... Montrez : $\forall Q \in \mathbb{O}_n, \text{Tr}(D.Q) \leq \text{Tr}(D).$

Dans la matrice $D.Q$, chaque ligne de Q est multipliée par un coefficient de D .

On récupère la trace. En notant q_i^j les coefficients de Q et λ_i les termes diagonaux de D , on a $\text{Tr}(Q.D) = \sum_{i \leq n} q_i^i . \lambda_i$.

Or, les λ_i sont positifs (matrice à valeurs propres positives), et les q_i^j sont tous plus petits que 1, pour que la somme des carrés soit égale à 1.

On a la majoration demandée.

On revient à la majoration :

$$N^2(D - Q) \geq \sum_{k=1}^n (\lambda_k)^2 - 2.\text{Tr}(D) + n = \sum_{k=1}^n (\lambda_k)^2 - 2. \sum_{k=1}^n (\lambda_k)^2 + n = \sum_{k=1}^n ((\lambda_k)^2 - 2.\lambda_k + 1)$$

On minore donc à coup sûr par $\sum_{k=1}^n (\lambda_k - 1)^2$.

Or, ce minorant est atteint, avec la norme $N(D - I_n)$.

Si l'on ajoute que I_n est dans $\mathbb{O}_n$, on est en présence d'un minorant qui est dans l'ensemble ; c'est la borne inférieure cherchée (borne atteinte).

On a donc : $d(A, \mathbb{O}_n) = d(D, \mathbb{O}_n) = N(D - I)$.

On multiplie par P et tP , ce qui ne change pas la norme, d'après la première question de cette partie : $d(A, \mathbb{O}_n) = N(D - I) = N(P.D - P.I) = N(P.D.{}^tP - P.I.{}^tP) = N(S - I)$.

On multiplie enfin par Ω , ce qui ne change toujours pas la norme :

$$d(A, \mathbb{O}_n) = N(S - I) = N(\Omega.S - \Omega) = N(A - \Omega)$$

On interprète : la matrice de $\mathbb{O}_n$ la plus proche de A est justement Ω de la décomposition polaire.

..... Calculez la distance de M à $\mathbb{O}_3$.

On a trouvé Ω , on soustrait :

$M - \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \bot 1 & \bot 1 & \bot 1 \\ \bot 1 & \bot 1 & \bot 1 \end{pmatrix}$ et $N(M - \Omega) = \sqrt{9} = 3$

La matrice de $\mathbb{O}_n$ la plus proche de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \bot 2 & \bot 1 & \bot 1 \\ \bot 1 & \bot 1 & \bot 2 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \bot 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bot 1 \end{pmatrix}$.