CHARLEMAGNE I.S.25 lundi 18 avril	- TRIGONOMÉTRIE -	M.P.S.I.2. I.S.25 Année 2005/2006

[◇(1)] Représentez graphiquement $\theta \mapsto \sqrt{3}.\cos(\theta)+\sin(\theta)$. [2 pt]

- ANALYSE -

[♠(1)] Donnez le développement limité d'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \dfrac{x}{1+\sin(x)}$. [2 pt] En notant f cette application, calculez $f^{(4)}(0)$. [1 pt]

[♠(2)] Calculez $\left(x \mapsto \dfrac{x}{\cos^3(x)}\right)'$. [1 pt]

- LOGIQUE -

[♯(1)] E.D.F. a proposé à ses salariés de passer des trente cinq heures aux trente deux heures, moyennant une baisse de salaire de trois pour cent. Quel pourcentage de son salaire peut donc réclamer un salarié qui resterait chez lui toute la semaine ? [$\cos(\pi/2)$ pt]

[♯(2)] On a quatre objets A, B, C et D dont les prix sont en euros (nombre entier naturel non nul). On a le prix des achats groupés suivants : "A, B et C : deux cent euros", "A, B et D : cent cinquante euros", "A, C et D : cent euros", "B, C et D : n euros".
Lesquelles des phrases suivantes sont vraies, lesquelles sont fausses (argumentez) : [4 pt]

- a- il est impossible que n soit égal à cinquante,
- b- n est nécessairement supérieur à cent cinquante,
- c- n est nécessairement un multiple de 3,
- d- si n vaut deux cent dix, alors l'un des objets vaut dix euros,
- e- si n vaut deux cent dix, alors l'un des objets vaut trente euros.

- COURS -

[♡(1)] *Soit $(E,+,.,\phi)$ un espace vectoriel euclidien.* Rappelez la définition de "f est une isométrie de E". [1 pt]

[♡(2)] Montrez que les valeurs propres réelles de f valent -1, 0 ou 1. [0,5 pt]

[♡(3)] Montrez que les vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux. [1 pt]

[♡(4)] Existe-t-il un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont de rang 1 ? [1 pt]
Existe-t-il un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont de rang inférieur ou égal à 1 ? [1 pt]
Existe-t-il un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont de rang 0, 1, 3 ou 4 ? [? pt]

- ALGÈBRE BILINÉAIRE -

[♣(1)] *On définit : $\nu((x,y,z)) = x^2+13.y^2+4.z^2-20.x.y-14.y.z+14.x.z$ pour tout triplet (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$.*
Construisez ϕ, forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$, vérifiant :

$$\forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \phi((x,y,z),(x,y,z)) = \nu((x,y,z))$$ [1 pt]

[♣(2)] Déterminez la matrice de Gram de la base canonique pour cette forme bilinéaire symétrique ϕ, et calculez son déterminant. [2 pt]

[♣(3)] ϕ est il un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$? [0,5 pt] Si oui, donnez une base orthonormée par la méthode de Schmidt, sinon, donnez un vecteur (x,y,z) vérifiant $\nu((x,y,z))<0$. [1,5 pt]

[♣(4)] Montrez que $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2.x+y-z=0\}$ (noté H) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donnez en une base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. [2 pt]

[♣(5)] Calculez $\phi(a.\overrightarrow{u}+b.\overrightarrow{v},\alpha.\overrightarrow{u}+\beta.\overrightarrow{v})$ et montrez que ϕ est un produit scalaire sur H. [2 pt]

CHARLEMAGNE
CORRIGÉ
©N.C.

On a quatre objets A, B, C et D dont les prix sont en euros. On donne les prix des lots : $A+B+C=200$, $A+B+D=150$, etc. Lesquelles des phrases suivantes sont vraies, lesquelles sont fausses ?

M.P.S.I.2.
I.S.25
Année 2004/2005

On note a, b, c et d ces quatre prix. On sait que ce sont des entiers naturels.

On traduit le système : $\left\{\begin{array}{ccccccccc} a & + & b & + & c & & & = & 200 \\ a & + & b & & & + & d & = & 450 \\ a & & & + & c & + & d & = & 100 \\ & & b & + & c & + & d & = & n \end{array}\right.$.

On résout à l'aide des formules de Cramer par exemple.

Ou alors on fait des combinaisons judicieuses.

> Surtout, là encore, on évite les mauvais réflexes issus des mauvaises Terminables. On ne résout pas les systèmes en extrayant a de la première équation pour reporter dans la seconde, et ainsi de suite. C'est lourd, illogique, sot ; ça introduit des discussions inutiles quand les coefficients du système sont des paramètres. Je vais finir par tuer l'élève qui persistera à utiliser ces méthodes crétines qu'ils ont réussi à se mettre dans le cerveau avec la complicité de leurs professeurs criminels.

Le système devient, en sommant tout : $\left\{\begin{array}{ccccccccc} a & + & b & + & c & & & = & 200 \\ a & + & b & & & + & d & = & 150 \\ a & & & + & c & + & d & = & 100 \\ & & b & + & c & + & d & = & n \\ 3.a & + & 3.b & + & 3.c & + & 3.d & = & 450+n \end{array}\right.$.

On divise la dernière par 3, et on la soustrait aux autres :

$$d=\frac{450+n}{3}-200,\ c=\frac{450+n}{3}-150,\ b=\frac{450+n}{3}-100,\ a=\frac{450+n}{3}-n$$

On simplifie : $\boxed{a=\frac{450-2.n}{3},\ b=\frac{150+n}{3},\ c=\frac{n}{3},\ d=\frac{n-150}{3}}$

On exploite maintenant ces informations pour répondre aux questions :

• a- il est impossible que n soit égal à cinquante,
Vrai. Si n vaut 50, alors A est gratuit.

• b- n est nécessairement supérieur à cent cinquante,
Vrai. Sinon, d est négatif.

• c- n est nécessairement un multiple de 3,
Vrai. Il faut que c soit entier.

• d- si n vaut deux cent dix, alors l'un des objets vaut dix euros,
Vrai. C'est A.

• e- si n vaut deux cent dix, alors l'un des objets vaut trente euros.
Faux. Les objets valent respectivement 10, 120, 70 et 20 euros.

> Source : Q.C.M. de l'E.S.I.E.E., école d'informatique et d'électronique accessible après la Terminale et après la Sup. Elle réalise des Q.C.M. pour d'autres écoles. Les réponses aux Q.C.M. sont juste en Vrai-Faux, et ne demandent pas à être argumentées, évidemment.

Représentez graphiquement $\theta \mapsto \sqrt{3}.\cos(\theta)+\sin(\theta)$.

Cette application reste une sinusoïde, comme toutes les applications en $a.\cos+b.\sin$.

On l'écrit ici $x \mapsto 2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos(x)+\frac{1}{2}.\sin(x)\right)$. On reconnaît $x \mapsto 2.\sin(x+\pi/3)$.

On a une sinusoïde d'amplitude 2, dont le maximum est en $\pi/6$, et le minimum est en $7.\pi/6$ par exemple. En 0, elle vaut $\sqrt{3}$, avec pente 1.

$\nu\big((x,y,z)\big)=x^2+13.y^2+4.z^2-20.x.y-14.y.z+14.x.z$

On définit :

$$\boxed{\phi := \big((x,y,z),(x',y',z')\big) \ \mapsto\ x.x' + 13.y.y' + 4.z.z' - 10.(x.y' + y.x') - 7.(y.z' + z.y') + 7.(x.z' + z.x')}$$

On constate que l'on a bien l'égalité demandée.

On vérifie que ϕ est une forme (no problemo), symétrique (on a symétrisé les morceaux pour ça), bilinéaire (c'est ce qui est lourd à écrire).

La bilinéarité s'obtient en mettant cette forme sous écriture matricielle : ${}^tU.G.V$ avec G matrice réelle symétrique écrite plus loin.

On notera que l'on n'a pas d'autre possibilité que cette forme si on lui impose la symétrie.

On écrit la matrice de Gram de la base canonique en calculant des $\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et autres.

On trouve bien sûr : $\boxed{G = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 \\ -10 & 13 & -7 \\ 7 & -7 & 4 \end{pmatrix}}$ On calcule le déterminant et on trouve $\boxed{-54}$

Ce déterminant est négatif, on n'a pas la matrice de Gram d'un produit scalaire.

ϕ a beau être une forme bilinéaire symétrique, elle n'est pas positive.

N'ayant pas un produit scalaire, on est exempté de la recherche d'une base orthonormée, mais on cherche un vecteur de pseudo-norme négative.

On cherche donc (x,y,z) d'image négative par $\overrightarrow{u}$.

Pour ne pas être encombré, on prend déjà z nul. On veut alors que $x^2 - 20.x.y + y^2$ soit négatif.

On a un trinôme en x du second degré, de discriminant positif, c'est faisable. On factorise même : $(x - 10.y)^2 - 99.y^2$. On prend y égal à 1 et x égal à 10.

Le réel $\overrightarrow{u}((10,1,0))$ est négatif. $\overrightarrow{u}$ n'est vraiment pas une norme.

Il y a bien d'autres vecteurs possibles. À votre niveau, c'est en tâtonnant que vous pouvez en trouver.

Montrez que $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2.x + y - z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donnez en une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

On a une partie de $\mathbb{R}^3$ contenant le vecteur nul et stable par addition et par multiplication par un réel.

On a bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Pour faire simple aussi, c'est le noyau de la forme $(x,y,z) \ \mapsto\ 2.x + y - z$. C'est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, comme tout noyau qui se respecte.

Cette forme va de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Son ensemble image est égal à $\mathbb{R}$, il est donc de dimension 1. Son noyau H est donc de dimension 2, comme le confirme la demande de base.

On cherche donc deux vecteurs indépendants dans H. Ou on écrit que les vecteurs de H sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2.x + y \end{pmatrix}$. On a donc les $x.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les deux vecteurs de base les plus naturels sautent alors aux yeux.

Mais quelques pervers iront m'en chercher d'autres.

On calcule : $\phi(a.\overrightarrow{u} + b.\overrightarrow{v}, \alpha.\overrightarrow{u} + \beta.\overrightarrow{v}) = 45.a.\alpha - 9.(a.\beta + \alpha.b) + 3.b.\beta$.

On retrouve tous les attributs d'une forme bilinéaire symétrique, exprimée ici sur une base d'espace de dimension 2.

On va tester sa positivité, en regardant si $45.a^2 - 18.a.b + 3.b^2$ est toujours positif.

On canonise en $9.(\sqrt{5}.a - b/\sqrt{5})^2 + 6.b^2/5$. C'est bien positif.

Cette quantité est nulle si et seulement si b et $\sqrt{5}.a - b/\sqrt{5}$ est nul, ce qui conduit à $(a,b) = (0,0)$.

Cette forme bilinéaire symétrique positive est même définie positive.

On a bien un produit scalaire sur H.

ϕ n'était pas un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ tout entier, mais si on le regardait "de profil" sur un plan, il devenait produit scalaire, ayant éliminé les contributions négatives.

Développement limité d'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \frac{x}{1+\sin(x)}$.

Cette application est définie en 0 et sur un voisinage de 0 tel que $]-\pi/2,\ \pi/2[$, et de classe C^∞. On sait qu'un développement limité existe. On le trouve par formule *a priori* et produit en croix, ou par division suivant les puissances croissantes :

$$
\begin{array}{ccccccc|l}
x & & & & & & & 1 + x - x^3/6 + o(x^3) \\
(x & + & x^2 & & & - & x^4/6) & \ldots \\
& - & x^2 & & & + & x^4/6 & x - x^2 + x^3 - 5.x^4/6 \\
& (- & x^2 & - & x^3 & &) & \\
& & & & x^3 & + & x^4/6 & \\
& & & (& x^3 & + & x^4) & \\
& & & & & - & 5.x^4/6 &
\end{array}
$$

Le développement cherché est donc $\boxed{x - x^2 + x^3 - 5.x^4/6 + o(x^4)}$

On peut aussi écrire : $\frac{x}{1+\sin(x)} = x.\Big(1 - \sin(x) + \sin^2(x) - \sin^3(x) + \sin^4(x) + o(x^4)_{x\mapsto 0}\Big)$. On remplace ensuite le sinus par son développement limité, on simplifie ce qu'il reste vraiment dans les carrés, cubes, et on multiplie. On voit qu'en fait, $\sin^4(x)$ ne sert à rien par exemple.

On sait que les coefficients sont aussi donnés par la formule de Taylor. Par unicité du développement limité, on a donc $f^{(4)}(0)/4! = -5/6$. On a donc $\boxed{f^{(4)}(0) = -20}$

Calculez $\left(x \mapsto \frac{x}{\cos^3(x)}\right)'$.

On écrit cette application sous la forme $x \mapsto x.\cos^{-3}(x)$, et on dérive le produit.

On trouve $\boxed{x \mapsto \cos^{-3}(x) + 3.x.\cos^{-4}(x).\sin(x)}$ (comptez bien les signes moins).

Les formules crétines en $\frac{quelquechose}{(\cos^3(x))^2}$ vous vaudront les pires insultes de ma collection, à juste titre. Si vous n'avez pas réussi à sortir de votre cerveau la formule de dérivation d'un quotient, tant pis pour vous. Mais au moins, faites le discrètement, et pas devant tout le monde en dépit de toute pudeur.

Rappelez la définition de "f est une isométrie de E".

f est linéaire de E dans E, et on a aussi :

$$\forall\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ \phi(f(\overrightarrow{u}), f(\overrightarrow{v})) = \phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

Il ne faut pas oublier la linéarité...

On prend une valeur propre λ et un vecteur propre associé : $f(\overrightarrow{u}) = \lambda.\overrightarrow{u}$.

On tient compte de la conservation de la norme par l'isométrie et de la bilinéarité du produit scalaire :

$$\lambda^2.\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = \phi(\lambda.\overrightarrow{u}, \lambda.\overrightarrow{u}) = \phi(f(\overrightarrow{u}), f(\overrightarrow{u})) = \phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})$$

On simplifie par $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})$ qui est strictement positif (un vecteur propre est non nul, et le produit scalaire est défini positif). On a donc : $\lambda^2 = 1$.

λ vaut -1 ou 1. *A fortiori*, il vaut -1, 0 ou 1, même si on est assuré que la valeur 0 n'est pas atteinte.

On prend ensuite deux "couples propres" $(1, \overrightarrow{u})$ et $(-1, \overrightarrow{v})$, puisque les deux valeurs propres distinctes ne peuvent valoir que -1 ou 1.

L'objectif est l'orthogonalité de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

On applique le fait que f conserve le produit scalaire :

$$-\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\phi(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})\phi(f(\overrightarrow{u}), f(\overrightarrow{v}))\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

On simplifie : $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est nul.

Existe-t-il un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ dont tous les éléments...

• "...sont de rang 1 ?" : **Non.**
Un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ doit toujours contenir la matrice nulle, élément neutre additif. Et cette matrice est de rang 0, donc pas de rang 1.

• "...sont de rang inférieur ou égal à 1 ?" : **Oui.**
On se donne une matrice A de rang 1, et on en prend tous les multiples. On a bien un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$, de la forme $Vect(A)$. Toutes les matrices de la forme $\lambda.A$ sont de rang 1, sauf pour λ égal à 0, où on trouve une matrice de rang 0.
Encore plus explicitement : $\left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

• "...sont de rang 0, 1, 3 ou 4 ?" : **Oui.**
On veut un sous-espace ne contenant aucune matrice de rang 2, mais des matrices de rang 1, de rang 3 (inversibles).

> On note au passage qu'il n'existe pas de matrices de rang 4 dans $M_3(\mathbb{R})$. les matrices de taille 3 ont au rang au maximum égal à 3.

On considère par exemple l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. On a bien un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$, engendré par I_3 et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On note $M(a, b)$ cette matrice, et on cherche son rang.
Son déterminant vaut a^3. On a donc les cas suivants :

- $a \neq 0$: rang égal à 3
- $a = 0$, $b \neq 0$: rang égal à 1
- $a = 0$, $b = 0$: rang égal à 0.

Aucun des éléments de cet ensemble n'a un rang égal à 2.
Cela dit, l'ensemble réduit à la matrice nulle convient bien, puisque toutes ses matrices sont de rang 0, donc *a fortiori* de rang 0, 1, 3 ou 4.