D.S.7.	M.P.S.I.2. Lycée Charlemagne vendredi 6 janvier Année 05/06	D.S.7.

................• CESARO POINTÉ • ....

I- 1) *On rappelle que si a est une suite suite réelle ou complexe, on définit sa moyenne de Cesaro, nouvelle suite notée ici a^*, définie par $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{k=n} a_k$. On sait que si a converge, alors a^* converge vers la même limite. On a démontré dans un devoir précédent (*et on peut donc utiliser sans preuve*) que si a est périodique de période p, alors a^* converge vers la moyenne de a sur une période, c'est à dire vers a_{p-1}^*.*
On note E l'ensemble des suites complexes à valeurs dans $\{1, j, j^2\}$, E' l'ensemble des suites a de E telles que a^* converge.
On note F l'ensemble des suites complexes a telles que $((a_n)^3)$ converge vers 1. Quelle inclusion a-t-on entre E et F ? **[1 pt.]**
Enfin, on note F' l'ensemble des suites a de E telles que a^* converge.
On pose alors $A = \{\lambda \in \mathbb{C} \big|\ \exists\ a\ \in\ E',\ a_n^* \mapsto_{n\mapsto+\infty} \lambda\}$ et $A^* = \{\lambda \in \mathbb{C} \big|\ \exists\ a\ \in\ F',\ a_n^* \mapsto_{n\mapsto+\infty} \lambda\}$.
I- 2) Montrez que 1, j et j^2 sont dans A. **[3 pt.]**
I- 3) Montrez à l'aide par exemple de la suite $(j^n)_n$ que 0 est dans A. **[3 pt.]**
I- 4) *On note Δ le triangle de sommets 1, j et j^2 dans le plan complexe.* Montrez qu'il est équilatéral. Montrez : $\forall\ a\ \in\ E,\ \ \forall\ n\ \in\ \mathbb{N},\ a_n^* \in \Delta$. Quelle inclusion avec vous entre A et Δ.

II- 1) *Pour tout couple de suites (a, b), on définit la suite $a\sharp b$ par $(a\sharp b)_{2.n} = a_n$ et $(a\sharp b)_{2.n+1} = b_n$ pour tout n.* Pourquoi écrit on $(a\sharp b)_n$ et non $a_n\sharp b_n$? **[2 pt.]**
II- 2) Montrez que E et F sont stables par $\sharp$. **[3 pt.]**
II- 3) La loi $\sharp$ est elle commutative ? **[2 pt.]**
II- 4) La loi $\sharp$ est elle associative ? **[2 pt.]**
II- 5) Soient a et b deux suites, calculez $(a\sharp b)_{2.n}^*$ et $(a\sharp b)_{2.n+1}^*$ à l'aide de a_n^*, b_n^* et n. Montrez que $(a\sharp b)^*$ converge si a^* et b^* convergent, et donnez sa limite. **[5 pt.]**
II- 6) E' et F' sont ils stables par $\sharp$? **[2 pt.]**
II- 7) Construisez deux suites complexes a et b telles que a^* et b^* divergent, tandis que $(a\sharp b)^*$ converge. **[5 pt.]**

> • Si vous êtes assez crétins pour penser qu'il suffit de les donner sans justification, allez en labo de physique ou de biologie, ne passez pas par la case départ, ne touchez pas trois mille euros. Vous toucherez quand même une partie des points pour chaque proposition intéressante.•

II- 8) Montrez, à l'aide de $\sharp$, que si α et β sont dans A, alors $(\alpha + \beta)/2$ est dans A. **[3 pt.]**

III- 1) *On se donne α et β dans A, limites de a^* et de b^* pour deux suites a et b de E. On se donne t entre 0 et 1. On pose alors $\gamma = t.\alpha + (1-t).\beta$. On veut montrer que γ est dans A. Pour tout n, on pose : $p_n = [2^n.t]$, $q_n = 2^n - p_n$, $P_n = \sum_{i=0}^{n-1} p_i$ et $Q_n = \sum_{i=0}^{n-1} q_i$. On définit c par : si $\exists\ (n, r)\ \in\ \mathbb{N},\ k = 2^n + r$ et $1 \leqslant r \leqslant p_n$* alors $c_{k-2} = a_{P_n+r}$ *si $\exists\ (n, r)\ \in\ \mathbb{N},\ k = 2^n + p_n + r$ et $1 \leqslant r \leqslant q_n$ alors $c_{k-2} = a_{Q_n+r}$.*
Montrez que c est dans E. **[8 pt.]**
III- 2) Montrez que c^* converge vers γ. **[10 pt.]**
III- 3) Concluez : $A = \Delta$. **[5 pt.]**

........................• COURS • ....

[♡(1)] Déterminez la limite de la forme indéterminée $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$. **[2 pt.]**

.../...

................• SUITE SENSIBLE • ....

On se propose de faire ici l'étude théorique d'une suite qui sert à faire planter les calculatrices.

a est un réel strictement supérieur à 1. On définit u par u_0 donné et $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N},\ u_{n+1} = a.u_n - \dfrac{1}{n+1}$.

On va trouver une formule explicite pour u_n et donner la valeur de u_0 qui la fait converger. Vous pourrez ensuite voir qu'avec les arrondis que fait une calculatrice, ce n'est pas du tout ce qui semble surgir quand on fait des simulations.

Complétez la formule : $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N},\ u_n = a^n.u_0 - \sum\limits_{k=0}^{n-1}\ldots$ ou $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N},\ u_n = a^n.u_0 - \sum\limits_{k=1}^{n}\ldots$. **[3 pt.]**

Montrez alors : $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N},\ u_n = a^n.u_0 - \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n - a^n}{x-a}.dx$ **[3 pt.]**

puis $u_n = a^n.\left(u_0 - \ln\left(\dfrac{a}{a-1}\right)\right) + o(1) \quad (n \mapsto +\infty)$ **[2 pt.]**

Montrez que u converge si et seulement si u_0 est égal à $\ln\left(\dfrac{a}{a-1}\right)$, et donnez sa limite. **[2 pt.]**

...• ÉQUATION FONCTIONNELLE • ...

On se propose de déterminer toutes les applications f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\boxed{\forall\ (x,y)\ \in\ \mathbb{R}^2,\ f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x).f(y)}$$

• Pour Élie, on enlèvera l'hypothèse "continue", et on l'autorisera à utiliser des bases de Hamel (c'est son choix) ; le barème final sera multiplié par le plus petit nombre parfait.•

[♣(1)] Trouvez les solutions constantes de notre problème. **[1 pt.]**

On suppose à présent que f est une solution de notre problème, non constante.

[♣(2)] En prenant x et y nuls, puis y nul tout seul, montrez que $f(0)$ vaut 1. **[4 pt.]**

[♣(3)] Déduisez que f est paire. **[2 pt.]**

[♣(4)] Montrez : $\forall\ t\ \in\ \mathbb{R},\ f(t) = f(t/\sqrt{2})^2$. Déduisez que f est positive en tout point. **[2 pt.]**

[♣(5)] *On suppose que f est nulle en un certain point t.* Trouvez une contradiction à l'aide de la suite $\left(f(t/2^{n/2})\right)_n$. **[3 pt.]**

[♣(6)] Déduisez que f est strictement positive sur tout $\mathbb{R}$. **[1 pt.]**

[♣(7)] *On pose alors : $g = x\ \mapsto\ \ln(f(\sqrt{x})$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.* Calculez $g(0)$ et simplifiez $g(a)+g(b)$ pour tout couple de réels positifs (a,b). **[4 pt.]**

[♣(8)] Montrez : $\forall\ p\ \in\ \mathbb{N},\ g(p) = p.g(1)$ puis : $\forall\ (p,q)\ \in\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ g(p/q) = p.g(1)/q$. **[5 pt.]**

[♣(9)] Montrez : $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}^+,\ g(x) = x.g(1)$. **[3 pt.]**

[♣(10)] Donnez toutes les solutions f de l'équation initiale. **[3 pt.]**

....................• EXERCICES • ....

[♡(2)] Calculez le carré du déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **[2 pt.]**

[♡(3)] On note Γ, Δ et Λ les trois propriétés suivantes, qui parlent de rectangles dans le plan affine euclidien usuel : $\Gamma :=$ "*si on allonge un côté du rectangle d'une unité et qu'on réduit l'autre d'une unité, alors son aire ne change pas*" ; $\Delta :=$ "*si on allonge un côté du rectangle d'une unité et qu'on réduit l'autre d'une unité, alors son aire diminue de deux unités*" ; $\Lambda :=$ "*si on allonge un côté du rectangle de dix pour cent et qu'on réduit l'autre de dix pour cent, alors son aire ne change pas*". On note α et β les deux propriétés suivantes : $\alpha :=$ "*le rectangle est un carré*", $\beta :=$ "*le rectangle n'est pas un carré*"

Lesquelles des propriétés suivantes sont alors vraies, lesquelles sont fausses (argumentez, évidemment, y'a pas écrit S.I., là haut) : $(?\ \Rightarrow\ \alpha)$, $(?\ \Rightarrow\ \beta)$, $(\Delta\ \Rightarrow\ \alpha)$, $(\Delta\ \Rightarrow\ \beta)$, $(\Lambda\ \Rightarrow\ \alpha)$, $(\Lambda\ \Rightarrow\ \beta)$. **[4 pt.]**

D.S.7. barème : 100pt.

D.S.7. Correction	Lycée Charlemagne Année 05/06 M.P.S.I.2.	D.S.7. Correction

Déterminez la limite de la forme indéterminée $(1+2/n))^n$.

C'est la forme indéterminée $1^{+\infty}$, dont on perçoit l'indétermination en passant au logarithme. On lève l'indétermination en passant justement au logarithme.

On regarde $n.\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ que l'on met sous la forme $2.\dfrac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)-\ln(1)}{\frac{2}{n}}$. On y reconnaît un taux d'accroissement du logarithme en 1 (accroissement $2/n$). Il tend vers le nombre dérivé en 1 du logarithme : 1. On n'oublie pas le facteur 2, on remonte par continuité de l'exponentielle, et on trouve une limite égale à e^2.

Calculez le carré du déterminant de ...

Pourquoi le carré du déterminant ? Parce que c'est le déterminant du carré (formule $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$)

On effectue : $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$.

La matrice est diagonale, son déterminant est le produit des termes diagonaux (développement par rapport à ce que vous voulez appliqué trois fois), il vaut 4^4, c'est à dire $\boxed{256}$

On pouvait aussi faire des combinaisons entre lignes, en soustrayant la première à toutes, puis développer par rapport à la première colonne : $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-2&-2\\0&-2&0&-2\\0&-2&-2&0\end{vmatrix}$*. Dans le déterminant de taille 3, on sort trois facteurs 2 par tri-linéarité, et on trouve un déterminant égal à -16. Élevé au carré, il redonne bien 216.*

$\forall\ (x,y)\ \in\ \mathbb{R}^2,\ f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x).f(y)$

En général, dans ce type d'exercice, on passe son temps au début à prendre des cas particuliers pour x et y, afin de lui faire avouer le maximum de choses.

Ici, si f est constante égale à a, on trouve donc $a = a.a$. On en déduit que $\boxed{a \text{ vaut } 0 \text{ ou } 1}$

On vérifie ensuite par mesure de sécurité que les applications constantes égales à 0 et à 1 sont bien solutions de notre problème.

• On prend donc f non constante, et on prend x égal à y égal à 0. On a donc : $f(\sqrt{0^2+0^2}) = f(ø^2$.

On retombe sur l'équation $a^2 = a$.

On a donc deux possibilités : $\boxed{f(0) \text{ vaut } 0 \text{ ou } 1}$ Il faut éliminer la première, afin qu'il n'en reste qu'une (je crains d'avoir ici des réponses fantaisistes dues au manque de logique de la matière molle qui vous sert de cerveau).

• Si $f(0)$ est nul, on a alors pour tout x : $f(\sqrt{x^2+0^2}) = f(x).f(0) = 0$.

On en déduit : $f(|x|) = 0$ pour tout réel x. f est identiquement nulle sur $[0,\ +\infty[$.

Il faut encore obtenir la nullité de f sur $\mathbb{R}^-$.

On se donne un réel x négatif. On a alors $f(x).f(x) = f(\sqrt{x^2+x^2})$. Le membre de droite est l'image par f d'un réel positif, elle est nulle. Par intégrité, on passe de $f(x)^2 = 0$ à $f(x) = 0$.

f est donc nulle tant sur $\mathbb{R}^+$ que sur $\mathbb{R}^-$.

Or, on a mis de côté cette solution.

• Par élimination donc, $f(0)$ vaut 1.

• Mais on a alors : $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R},\ f(\sqrt{x^2+0^2}) = f(x).1$, d'où $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R},\ f(|x|) = f(x)$.

On a alors immédiatement aussi $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R},\ f(|-x|) = f(-x)$, puis par transitivité : $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$.

• Je croiserai sans doutes encore des $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R},\ f(|x|) = f(x)\ \Rightarrow\ f(-x) = f(x)$ qui font perdre tout sens à votre argument et la moitié des points. En effet, votre phrase mathématique ne se lira pas "comme pour tout x on a $f(|x|) = f(x)$, on peut déduire $f(-x) = f(x)$ pour tout x", mais "si pour des x on a $f(|x|) = f(x)$, alors on peut déduire $f(-x) = f(x)$ pour ces x là". Et une telle affirmation est vraie, que f soit ou non solution de notre problème, puisqu'il s'agit d'implications. Rappelons que l'implication suivante est parfaitement valable : $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R},\ x^2 = -7\ \Rightarrow\ x \leqslant 7$.•

Montrez : $\forall\ t\ \in\ \mathbb{R},\ f(t) = f(t/\sqrt{2})^2$.

On prend ici, pour t donné, x et y égaux à $t/\sqrt{2}$. Sous la radical, on a alors $t^2/2$ deux fois, c'est à dire t^2. On a donc $f(t/\sqrt{2})^2 = f(|t|) = f(t)$ par parité.
Chaque $f(t)$ est le carré d'un réel, il est positif.

• Quand vous écrivez qu'un carré est toujours positif, pensez à y mettre le mot "réel", sinon on a des contre-exemples.•

Si $f(t)$ est nul pour un certain t, alors par la relation précédente, on a $f(t/\sqrt{2})^2 = 0$, d'où $f(t/\sqrt{2}) = 0$ par intégrité.
En recommençant avec $t/\sqrt{2}$, on déduit $f(t/2) = 0$.
Par récurrence immédiate sur n, on a donc $f\left(\frac{t}{\sqrt{2}^n}\right) = 0$ pour tout n entier naturel.
C'est précisément $f(t/2^{n/2})$.
Mais que fait la suite $(t/2^{n/2})_n$? Elle tend vers 0. Et la suite des images est constante égale à 0.
Dans le même temps, par continuité de f en 0, cette suite des images doit tendre vers $f(0)$. On aboutit à $f(0) = 0$, ce qui contredit ce qui a été établi plus haut.
On déduit de ce petit **raisonnement par l'absurde** que f ne s'annule jamais.
Comme elle était déjà positive, elle est strictement positive.

On pose alors : $g = x\ \mapsto\ \ln(f(\sqrt{x}))$ **de** $\mathbb{R}^+$ **dans** $\mathbb{R}$.

L'existence de g est assurée, car pour x positif, $\sqrt{x}$ existe, et a une image strictement positive par f. On peut en prendre le logarithme.

• Qui a oublié de montrer l'existence de g et a ainsi perdu un des points du barème ? Tous les physiciens de la classe.•

On calcule : $g(0) = \ln(f(\sqrt{0})) = \ln(1) = 0$.
On regarde ensuite : $g(a) + g(b) = \ln(f(\sqrt{a}).f(\sqrt{b}))$ par propriété du logarithme. On reconnaît $\ln\left(f\left(\sqrt{\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2}\right)\right)$, c'est à dire $g(a + b)$.

La propriété utile est donc : $\boxed{\forall\ (a, b)\ \in\ (\mathbb{R}^+)^2,\ g(a + b) = g(a) + g(b)}$

Montrez : $\forall\ p\ \in\ \mathbb{N},\ g(p) = p.g(1)$.

On fait une récurrence sur p. Elle démarre par $g(0) = 0$, et pour l'hérédité, on utilise : $g(p + 1) = g(p) + g(1)$.
Ensuite, on se donne p et q avec q non nul. On pose $g(p/q) = a$, *a priori* inconnu. Par récurrence sur n, on montre alors $g(n.p/q) = n.a$.
Quand n atteint la valeur q, on a $g(q.p/q) = q.a$.
Comme $g(p)$ vaut $p.g(1)$, on trouve $p.g(1) = q.g(p/q)$. Une division par q suffit à obtenir le résultat cherché.

Montrez : $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}^+,\ g(x) = x.g(1)$.

On a le résultat pour tout x rationnel. Il faut le prouver pour tout x réel. Il reste un peu de chemin à faire (beaucoup si on songe à la quantité d'irrationnels).

On se donne un réel x. On sait, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, qu'il est limite d'une suite de rationnels (r_n). Par continuité de g (composée d'applications continues), $g(r_n)$ converge vers $g(x)$.
Mais comme les r_n sont rationnels, on a $g(r_n) = r_n.g(1)$ pour tout n.
La suite $\Big(g(r_n)\Big)$ converge donc à la fois vers $g(x)$ et vers $x.g(1)$. Par unicité de la limite, $g(x)$ vaut $x.g(1)$.

• Ce raisonnement par densité est un classique qu'il faut connaître. Rappelons que pour le connaître, il faut et suffit avant tout de le comprendre. L'apprendre par coeur ne servirait à rien tant que vous ne l'avez pas assimilé. C'est peut être en cela que d'anciens bons élèves de Terminable peuvent devenir de médiocres élèves de Prépas (en maths en tout cas, je ne garantis rien pour la physique), parce qu'ils auront gardé leurs mauvaises méthodes...•

Donnez toutes les solutions f de l'équation initiale.

On a donc pour tout x réel : $\ln(f(\sqrt{x}) = x.g(0)$.
On note a le réel $g(0)$, on exponentialise : $f(\sqrt{x}) = e^{a.x}$ pour tout x réel strictement positif.
On change de variable, en posant $x = t^2$ avec t réel quelconque : $f(t) = e^{a.t^2}$.
Les applications cherchées sont donc de la forme $t \mapsto e^{a.t^2}$.
On a raisonné par conditions nécessaires. Il reste à voir si toutes les valeurs de a conviennent, ou si il reste encore des conditions dessus.

• Vous comprenez le sens des conditions nécessaires, des implications ? La condition $f(0) = 1$ était nécessaire, mais pas suffisante, puisque la fonction cosinus n'est pas solution de notre problème. C'est pour cela que les questions continuaient après. Ici, le sujet s'arrête, on doit être au bout du chemin.•

On prend donc une application $x \mapsto e^{a.x^2}$ et on vérifie : $e^{a.(\sqrt{x^2+y^2})^2} = e^{a.x^2}.e^{a.y^2}$. C'est vrai pour tous les couples, indépendamment du choix de a.

• On constate que pour a égal à 0, on retrouve la solution constante égale à 1.•

Les solutions de notre problème sont donc toutes les applications de la forme $\boxed{x \mapsto e^{a.x^2}}$ avec a réel, et la fonction nulle.

• Ça fait une infinité de solutions, mais une fois choisi a, on n'en change pas dans la solution décrite, entre le côté $f(\sqrt{x^2+y^2})$ et le côté $f(x).f(y)$ du signe égale... Je dis ça pour celles et ceux qui n'ont toujours pas compris qu'en maths il y a avant toutes des variables et pas des calculs.•

*Attention, quand on regarde $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel (*où les λ sont donc pris dans $\mathbb{Q}$ *), on peut construire des bases infinies, dites de Hamel (*en utilisant l'axiome du choix, et c'est là toute la philosophie de notre ami Élie*). On peut alors construire des applications qui vérifient $\forall\ (x, y)\ \in\ \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)+f(y)$ sans être de la forme $x \mapsto a.x$. De telles applications ont alors le mauvais goût d'être discontinues partout.*

"si on allonge un côté du rectangle d'une unité et qu'on réduit l'autre d'une unité, alors son aire ne change pas"

Comme les assertions ne concernent que les longueurs et aires, on peut se contenter de dire qu'on prend un rectangle de côtés a et b. On sait que son aire est $a.b$. On ne dit pas si a est plus grand que b, c'est sans importance.
On regarde ensuite chacune des propositions. Par exemple, α est $a = b$ et β est $a \neq b$.
Sinon, les opérations sont les suivantes :
allonger un côté d'une unité et diminuer l'autre d'une unité : remplacer a par $a+1$ et b par $b-1$,
allonger un côté de dix pour cent et réduire l'autre de dix pour cent : remplacer a par $1,1\times a$ et b par $0,9\times b$.
Les conditions sont donc les suivantes :

$$? : a.b = (a+1).(b-1), \quad \Delta : a.b-2 = (a+1).(b-1), \quad \Lambda : a.b = (1,1.0,9)\times a.b$$

On les simplifie : ? : $b-a=1$, Δ : $b-a=-1$, λ : $a=0$ ou $b=0$.
On a donc ? $\Rightarrow \beta$, puisque $b-a$ est non nul. On n'a donc pas ? $\Rightarrow \alpha$.

• Le mauvais sens commun dit qu'une augmentation de dix pour cent suivie d'une diminution de dix pour cent équivaut à aucun changement. C'est faux, puisque $1,1\times 0,9$ ne vaut pas 1.•

On a aussi $\Delta \Rightarrow \beta$, puisque $b-a$ ne peut être nul. On n'a donc pas $\Delta \Rightarrow \alpha$.
Enfin, Λ n'implique pas α, ni β (on peut dire qu'il implique α ou β). La proposition Λ n'est applicable qu'aux rectangle dégénérés, réduits à un segment.
Pour invalider ? $\Rightarrow \alpha$, on donne le contre-exemple d'un segment : (A,B,B,A).
Pour invalider ? $\Rightarrow \beta$, on donne le contre-exemple d'un point : (A,A,A,A).

Complétez la formule suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n.u_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\ldots$.

On tente une étude rapide pour émettre la conjecture attendue.
$u_0=u_0$, $u_1=a.u_0-1$, $u_2=a.(a.u_0-1)-\frac{1}{2}=a^2.u_0-\left(a-\frac{1}{2}\right)$, $u_3=a^3.u_0-\left(a^2-\frac{a}{2}-\frac{1}{3}\right)$, $u_4=a^4.u_0-\left(a^3-\frac{a^2}{2}-\frac{a}{3}-\frac{1}{4}\right)$

On généralise avec des points de suspension : $u_n=a^n.u_0-\left(a^{n-1}-\dfrac{a^{n-2}}{2}-\dfrac{a^{n-3}}{3}-\dfrac{a^{n-4}}{4}-\ldots-\dfrac{1}{n}\right)$

On réécrit proprement avec un sigma : $u_n=a^n.u_0-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a^{n-k}}{k}$. La seule difficulté est de deviner l'exposant en lien avec le dénominateur.
Une fois devinée cette formule, on la démontre par récurrence sur n, déjà initialisée.
Supposons la formule valable pour un n donné. On calcule alors $a.\left(a^n.u_0-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a^{n-k}}{k}\right)-\frac{1}{n+1}$. On distribue, on trouve $a_{n+1}=a^{n+1}.u_0-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a^{n+1-k}}{k}-\frac{1}{n+1}$, et ceci donne la formule de rang $n+1$.

Montrez alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n=a^n.u_0-\int_0^1 \frac{x^n-a^n}{x-a}.dx$.

On triche, puisque la réponse est donnée. On part du membre de droite, dans lequel on reconnaît une série géométrique dans l'intégrale :
$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+a.x^{n-2}+a^2.x^{n-3}+\ldots+a^{n-1}$$
• Oui, James, c'est la "formule fluo" des Prépas H.E.C. que tu côtoies encore.•
$$\int_0^1\frac{x^n-a^n}{x-a}.dx=\int_{x=0}^{x=a}\sum_{k=1}^{n}x^{n-k}.a^{k-1}.dx$$
On sépare en n intégrales par linéarité (chacune existe, de même que l'intégrale initiale, car a est plus grand que 1) :
$$\int_0^1\frac{x^n-a^n}{x-a}.dx=\sum_{k=1}^{n}a^{k-1}.\int_{x=0}^{x=a}x^{n-k}.dx$$
On calcule chaque intégrale : $\displaystyle\int_0^1\frac{x^n-a^n}{x-a}.dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^{k-1}.}{n-k+1}$.
On se rend compte qu'on aurait pu mieux choisir sa variable de sommation. Pour revenir à la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{a^{n-p}}{p}$, il convient de poser $p=n-k+1$. On le fait et on constate la belle coïncidence.

---

puis $u_n=a^n.\left(u_0-\ln\left(\frac{a}{a-1}\right)\right)+o(1)$.

On sépare cette nouvelle intégrale $\int_0^1 \frac{x^n-a^n}{x-a}.dx$ en deux intégrales : $\int_{x=0}^{x=1}\frac{x^n}{x-a}.dx - a^n.\int_{x=0}^{x=1}\frac{dx}{x-a}$.

La seconde intégrale donne, après intégration en $\ln(a-x)$: $a^n.\ln\left(\frac{1-a}{-a}\right)$. ON rétablit les signes moins dans le logarithme et on accole ce terme avec $a^n.u_0$.

> • Rappelez vous que $\int_{t=a}^{t=b}\frac{u'_t}{u_t}$ se calcule en $\ln(u_b/u_a)$ et non en $\ln(|u_b|)-\ln(|u_a|)$ qui est lourd comme ce n'est pas permis. Pire encore est bien sûr $\ln(u_b)-\ln(u_a)$. Rappelons que pour que l'intégrale existe, il faut que u ne s'annule as entre a et b. Dès lors, par continuité, u reste de signe constante entre a et b. Il s'ensuite que u_b/u_a est positif à coup sûr.•

Il ne reste donc qu'à prouver que $\int_{x=0}^{x=1}\frac{x^n}{x-a}.dx$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini (ce sera ce terme le $o(1)$).

Pour écraser une intégrale, la meilleure chose à faire est de l'encadrer. Ici, cette intégrale est négative, car x reste positif mais plus petit que a (il y a 1 qui vient se glisser entre les deux). On change son signe pour conserver de bonnes habitudes.

$$0 \leqslant \int_{x=0}^{x=1}\frac{x^n}{a-x}.dx \leqslant \int_{x=0}^{x=1}\frac{x^n}{a-1}.dx = \frac{1}{(n+1).(a-1)}$$

Le majorant tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et le minorant reste égal à 0. Par théorème d'encadrement l'intégrale tend vers 0 et est affublée du sobriquet de $o(1)$ par le mathématicien.

Montrez que u converge si et seulement si u_0 est égal à $\ln\left(\frac{a}{a-1}\right)$, et donnez sa limite.

Si u_0 est égal au logarithme cité, alors il ne reste que le terme intégrale qui tend vers 0. La suite u converge, et on sait que c'est vers 0.

Si u_0 n'est pas égal au logarithme indiqué, la suite est de la forme $u_n = \lambda.a^n + o(1)$, avec λ non nul. Comme a est plus grand que 1, la suite $\lambda.a^n$ tend vers l'infini (celui du signe de λ). Le terme de limite nulle n'y peut rien, et la suite diverge.

On a traité l'équivalence.

On en déduit qu'il y a juste une valeur précise de u_0 qui fait converger cette suite.

Si u_0 est un peu trop petit, la suite part vers $-\infty$, comme une suite géométrique.

Si u_0 est un peu trop grand, la suite part vers $+\infty$, comme une suite géométrique.

Et on peut alors faire des expériences avec sa calculatrice, en sachant qu'avec la meilleure volonté du monde, elle ne fait que des calculs approchés.

Ce que je vous livre donc ensuite est la synthèse d'un article du Bulletin de l'A.P.M.E.P. (revue des professeurs de mathématiques, qui servira beaucoup en T.I.P.E.) datant de 1995. Je vous laisse le soin de regarder avec vos propres calculatrices si les choses ont changé depuis.

On prend a égal à 20 et on cherche à estimer u_{12}. On se donne donc $u_0 = \ln(20/19)$.

La formule théorique établie en fin d'exercice donne $u_n = \int_{x=0}^{x=1}\frac{dx}{20-x}$. La majoration en $1/(a-1).(n+1)$ donne que a_{12} est de l'ordre de 4.10^{-3}.

En utilisant "bêtement" la formule $u_{n+1} = 20.u_n - 1/(n+1)$ vingt fois de suite en calcul numérique approché à 10^{-13} près, les erreurs s'accumulent vite, et on trouve $a_{12} = -1435$ environ. Pour une suite qui tend vers 0, c'est assez louche.

> • Pauvre physicien qui fait confiance à sa calculatrice... Il a beau savoir que les incertitudes s'accumulent au fil des calculs, il reste gêné par ce résultat.•

On peut aussi faire appel à la fonction "calcul formel" de la machine, et estimer la somme $20^n.\ln(20/19) - \sum_{k=1}^{n}\frac{20^{n-k}}{k}$. Mais là encore, la déception vient : $u_{20} = 4096.10^{12}.\ln(20/19) - \frac{582\ 389\ 809\ 325\ 220\ 151}{2\ 772}$ n'est pas très maniable. Et si on ne force pas le logiciel à travailler avec une grande précision en calcul approché, on reste un peu loin des 10^{-3} de la valeur réelle. Un calcul à douze chiffres exacts donne -0.1875 au lieu des 0.004 attendus.

Quelle inclusion a-t-on entre E et F ?

E est inclus dans F. En effet, les suites a de E sont à valeurs dans $\{1, j, j^2\}$ et vérifient donc $(a_n)^3 = 1$ pour tout n. On a donc bien $(a_n)^3$ qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini.
En revanche, la suite $(1+\frac{1}{n})_n$ est dans F mais pas dans E.
On voit que A est l'ensemble des limites des moyenne de Cesaro de suites à valeurs dans $\{1, j, j^2\}$. Enfin, plus précisément de celles dont la moyenne de Cesaro converge...

• Tiens, avec $\{0, 1\}$ à la place de $\{1, j, j^2\}$, ça rappelle un bout du T.D. de mardi dernier...•

Montrez que 1, j et j^2 sont dans A.

Pour 1, on prend pour a la suite constante égale à 1. Elle est dans E. Sa moyenne de Cesaro est aussi constate égale à 1, elle est donc dans E'. Et la limite de sa moyenne de Cesaro est 1. Bref, 1 est dans A.
Avec les suites constantes égales à j et à j^2, on a la présence de j et j^2 dans A.

• Trois points pour ça, c'est un cadeau ! Non, parce qu'il faut que vous ayez assimilé les notations. Et souvent, les plus mauvais d'entre vous sont ceux et celles qui ne prennent pas le temps de lire les définitions, de les mâchouiller pour comprendre avec des mots ce qu'elles signifient. Et ensuite, pendant des pages, ils ou elles racontent n'importe quoi et ne gagnent pas de points...•

Montrez à l'aide par exemple de la suite $(j^n)_n$ que 0 est dans A.

Cette suite $(1, j, j^2, 1, j, j^2, 1, j, j^2 \ldots)$ est dans E. On va voir si sa moyenne de Cesaro converge. Si c'est le cas, elle sera dans E', et la limite obtenue sera dans A.
On regarde donc $\displaystyle\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} j^k$. On reconnaît une série géométrique de raison différente de 1. On trouve $\displaystyle\frac{1-j^{n+1}}{(1-j).(n+1)}$. Le $1-j$ est une constante. Le $1-j^{n+1}$ reste borné. Le $n+1$ fait tendre cette suite vers 0.

• On n'écrit pas d'encadrements dans $\mathbb{C}$, on majore en valeur absolue.•

On note Δ le triangle de sommets 1, j et j^2 dans le plan complexe.

On mesure les longueurs des trois côtés : $|1-j|$, $|j-j^2|$ et $|j^2-1|$. Inutile de les calculer vraiment.
On factorise : $|j-j^2| = |j|.|1-j| = |1-j|$ et $|j^2-1| = |j^2|.|1-j| = |1-j|$.
Les trois côtés sont égaux, le triangle est équilatéral.
On peut aussi encore plus joliment écrire : $j^2 - 1 = e^{i.\pi/3}.(j-1)$, ce qui prouve qu'on passe d'un côté au suivant par rotation d'angle $\pi/3$.
On se donne une suite à valeurs dans $\{1, j, j^2\}$. On se fixe n et on calcule sa moyenne de Cesaro de rang n. Le numérateur est une somme où il y a un certain nombre de 1, de j et de j^2. Au total, $n+1$ termes. En notant p le nombre de 1, q le nombre de j et r le nombre de j^2 (entiers naturels éventuellement nuls), on a $a_n^* = \dfrac{p.1+q.j+r.j^2}{p+q+r}$. On reconnaît un barycentre à coefficients positifs des trois sommets. Ce point est donc dans le triangle.
Si vous n'aimez pas cette preuve géométrique, il faut détailler un peu différemment.
On note A, B et C les trois sommets d'affixes respectives 1, j et j^2.
On calcule : $\Re e(a_n^*) = \displaystyle\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\Re e(a_k)$. Chaque $\Re e(a_k)$ est plus grand que $-1/2$ (elle vaut $-1/2$ ou 1).

On somme, on divise : $\Re e(a_n^*) \geqslant -1/2$. Le point a_n^* est dans le demi plan "à droite de la droite d'équation $x = -1/2$", c'est à dire dans le demi plan défini par la droite (B, C), contenant A.
On fait ensuite une rotation d'angle $2.\pi/3$ pour voir de quel côté de la droite (A, B) se trouve a_n^*. Cette droite a pour équation $\Re e(j.z) = -1/2$. Le demi plan cherché a pour équation $\Re e(j.z) \geqslant -1/2$.
On calcule $\Re e(j.a_n^*)$, on trouve une somme de $n+1$ termes qui valent $-1/2$ ou 1, que l'on divise par $n+1$.
On a donc bien $\Re e(j.a_n^*) \geqslant -1/2$.
De même, $\Re e(j^2.a_n^*) \geqslant -1/2$.
Notre point est dans l'intersection des trois demi-plans, il est dans le triangle.
Si chaque a_n^* est dans Δ, la limite de la suite y est encore, car Δ est un ensemble fermé.
Dans la démonstration par demi-plans, on voir que par passage à la limite, l'inégalité $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \Re e(a_n^*) \geqslant -1/2$ donne $\Re e(\alpha) \geqslant -1/2$. On fait de même avec les autres demi-plans.
Tout point de A est donc dans Δ : $A \subset \Delta$.

• Rien ne dit pour l'instant qu'il n'y ait pas l'inclusion réciproque.•

$(a\sharp b)_{2.n} = a_n$ et $(a\sharp b)_{2.n+1} = b_n$ pour tout n.

Explicitement : $a\sharp b = (a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \ldots)$.

• Les élèves qui n'ont pas commencé par écrire ça ne méritent pas mon estime. Ils s'entêtent à croire que les maths ne sont faites que de formules barbares. Ils finiront gardiens de prison ou profs de physique à Valenciennes.•

On $(a\sharp b)_n$ car c'est le $n^{ième}$ terme de la suite $a\sharp b$. Et la suite $a\sharp b$ est bien construite à l'aide des suites a et b.
Si on écrivait $a_n\sharp b_n$, cela voudrait dire que ce nombre se calcule à l'aide de a_n et b_n. Or, il n'en est rien, il se calcule à l'aide de termes d'indice différent dans a et b. Ainsi, $(a\sharp b)_5$ vaut b_2 et n'a rien à voir avec a_5 ou b_5. Or, un objet appelé $a_5\sharp b_5$ se détermine à l'aide de a_5 et b_5.

• Cette question d'apparence anodine devrait être notée sur cent, afin de faire du tri entre ceux qui persistent à lire des formules de maths comme des incantations pour (al)chimistes et ceux qui cherchent d'abord à comprendre. Et c'est encore une histoire de variables. Mais je n'ai pas posé cette question pour faire le tri entre vous. Elle est plutôt là pour que certains de ceux qui n'ont pas compris la différence entre (a_n) et a_n ou entre f et $f(x)$ puissent peut être d'un seul coup avoir leur déclic. Mais je crains que ce ne soit peine perdue pour plusieurs...•

On prend deux suites dont les termes valent 1, j ou j^2. Comme les termes de$a\sharp b$ viennent de a et de b, ils sont encore dans $\{1, j, j^2\}$. Pour tout n, $(a\sharp b)_n$ est dans $\{1, j, j^2\}$, puisque c'est un a_p ou un b_q.

• Oui, le tout sans symboles. Sans les mains, avec la bouche, mais pas sans le cerveau.•

On suppose ensuite que a et b sont dans F. Les suites $((a_n)^3)$ et $((b_n)^3)$ tendent vers 1 quand n tend vers l'infini. En posant $c = (a\sharp b)^3$, on voit donc que $(c_{2.n})$ et $(c_{2.n+1})$ sont deux suites qui tendent vers 1 quand n tend vers l'infini. Un théorème du cours garantit que (c_p) converge aussi vers 1.

• On pose des définitions en ε et on introduit un certain $Max(2.P_\varepsilon, 2.I_\varepsilon + 1)$.•

La loi $\sharp$ est elle commutative ?

On doit comparer $a\sharp b$ et $b\sharp a$. De grands discours avec des symboles partout ne servent à rien, surtout si ils sont suivis de "il n'y a pas de raison que" ou autres preuves sans contre-exemple.
On regarde déjà pour comprendre : $(a_0, b_0, a_1, b_1 \ldots)$ et $(b_0, a_0, b_1, a_1 \ldots)$. Il n'y a pas égalité entre ces suites.
On donne un contre-exemple : a est la suite constante égale à 1 et b est la suite constante égale à j.
$(a\sharp b)_0$ vaut 1, tandis que $(b\sharp a)_0$ vaut j. C'est tout.

• Les élèves naïfs pensent que cette preuve aussi bébête n'en est pas une, ou ne vaut pas des choses avec des $(a\sharp b)_{2.n}$ partout qui fait plus frime. Il n'en est rien, et c'est même tout le contraire...•

La loi $\sharp$ est elle associative ?

On se donne trois suites, et on construit peu à peu les $\sharp$:
$\Big((a\sharp b)\sharp c\Big) = (a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots)\sharp(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 \ldots) = (a_0, c_0, b_0, c_1, a_1, c_2, b_1, c_3, a_2, c_4, b_2, c_5 \ldots)$
$\Big(a\sharp(b\sharp c)\Big) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots)\sharp(b_0, c_0, b_1, c_1, b_2, c_2 \ldots) = (a_0, b_0, a_1, c_0, a_2, b_1, a_3, c_1, a_4, b_2, a_5, c_2 \ldots)$
On voit qu'il n'y a pas égalité du tout. On prend un contre-exemple avec des suites constantes égales respectivement à 1, j et j^2, et on compare le terme d'indice 1.

Calculez $(a\sharp b)^*_{2.n}$ et $(a\sharp b)^*_{2.n+1}$ à l'aide de a^*_n, b^*_n et n. Montrez que $(a\sharp b)^*$ converge si a^* et b^* convergent, et donnez sa limite.

On met de côté le dénominateur de $(a\sharp b)_{2.n}$. Au numérateur, on a la somme de $2.n+1$ termes. Ils viennent pour une bonne moitié de a et pour l'autre petite moitié de b. On y trouve donc a_0 jusqu'à a_n et b_0 jusqu'à b_{n-1}.
Ce numérateur vaut donc $(n+1).a^*_n + n.b^*_{n-1}$. On divise :

$$(a\sharp b)^*_{2.n} = \frac{(n+1).a^*_n + n.b^*_{n-1}}{2.n+1} = \frac{n+1}{2.n+1}.a^*_n + \frac{n}{2.n+1}.b^*_{n-1}$$

• On convient : $b^*_{-1} = 0$, en tant que somme vide.•

De manière similaire, mais avec b_n en plus : $(a\sharp b)^*_{2.n+1} = \frac{(n+1).a^*_n+(n+1).b^*_n}{2.n+2} = \frac{a^*_n+b^*_n}{2}$.
Si on suppose que (a^*_n) converge vers α quand n tend vers $+\infty$ tandis que (b^*_n) converge vers β, on voit que les deux suites extraites $\Big((a\sharp b)^*_{2.n}\Big)$ et $\Big((a\sharp b)^*_{2.n+1}\Big)$ convergent vers $(\alpha+\beta)/2$. Par recollement, $(a\sharp b)^*$ converge vers $(\alpha+\beta)/2$.

E' et F' sont ils stables par $\sharp$?

Oui, c'est ce qui vient d'être obtenu à la question précédente. Si a et b sont dans E, leur battement $a\sharp b$ y est aussi. Si en plus a^* et b^* convergent, alors $(a\sharp b)^*$ converge aussi.
Le raisonnement est le même avec F'.

Construisez deux suites complexes a et b telles que a^* et b^* divergent, tandis que $(a\sharp b)^*$ converge.

Il faut que la convergence de la moyenne ne puisse se faire que parce qu'on intercale les deux suites entre elles. On va jouer sur les signes, en prenant pour a et b deux suites opposées.
• On tente sa chance avec $a = (1, 1, 1, \ldots)$ et $b = (-1, -1, -1 \ldots)$.
Le mélange est $(a\sharp b = ((-1)^n)$, elle nous manquait. On a convergence vers 0 de sa moyenne de Cesaro mais a^* et b^* convergeaient aussi.
• On essaye alors avec $a = (0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$ et $b = (0, -1, -2, -3 \ldots)$. La moyenne de Cesaro de a se calcule alors : $\dfrac{0+1+2+\ldots+n}{n+1} = \dfrac{n.(n+1)}{2.(n+1)}$, on a la divergence. Le changement de signe pour b donne aussi la divergence.
On bat les suites comme on bat les cartes : $a\sharp b = (0, 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 \ldots)$. Sa moyenne de Cesaro vaut souvent 0 (quand on prend un nombre pair de termes). Mais le reste du temps, elle vaut $n/(2.n+1)$, et on a alors la convergence vers 1/2. En recollant, $(a\sharp b)^*$ ne converge pas.
• On fait plus fin, avec $a = (0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots)$ et $b = -a$.
La suite mélangée a pour moyenne de Cesaro une suite qui vaut 0 une fois sur deux et $\sqrt{n}/(2.n+1)$ les autres fois. Cette fois, les croissances comparées et le recollement donnent une convergence vers 0.
En revanche, la moyenne de Cesaro de a diverge. Son numérateur est une somme de racines. On le compare avec une intégrale : $\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n} \geqslant \displaystyle\int_0^n \sqrt{t}.dt = 2.n^{3/2}/3$. On minore donc a^*_n

par $\dfrac{2.n^{3/2}}{3.(n+1)}$. La comparaison des exposants fait diverger cette moyenne de Cesaro vers l'infini.

Montrez, à l'aide de $\sharp$, que si λ et μ sont dans A, alors $(\lambda+\mu)/2$ est dans A.

C'est ce qui a été fait ci dessus.
On prend α dans A. C'est donc qu'il est la limite de la moyenne de Cesaro a^* d'une suite a de E.
On fait de même avec β qui est la limite de la moyenne de Cesaro d'une suite b.
On crée la suite $a\sharp b$. Elle est encore dans E, et même dans E'. Sa moyenne de Cesaro a été étudié ci dessus, elle converge, vers le milieu $(\alpha+\beta)/2$. Ce milieu est donc dans A.

• Si α et β sont limites gentilles, on obtient leur milieu en mélangeant les deux suites gentilles, comme on mélange un jeu de cartes, c'est tout simple.•

On va généraliser à une quantité qui n'est pas le milieu de deux points de A, mais un de leurs barycentres à coefficients positifs.

On se donne α et β dans A et t entre 0 et 1. On pose alors $\gamma = t.\alpha+(1-t).\beta$. On veut montrer que γ est dans A.

Déjà, on sait que a et b sont dans A, donc dans le triangle Δ. Leur barycentre γ y est aussi.
Les termes de la suite c sont des a_i ou des b_j. Ils sont donc dans $\{1, j, j^2\}$.
Allons bon, en une ligne j'aurais gagné tant de points ?
Non, car il reste des choses à surveiller : tous les termes de la suite c sont ils bien définis ? Si ce n'est pas le cas, que pose-t-on pour ces termes ? Certains ne sont ils pas définis deux fois par deux formules différentes ?
Il faut donc vérifier que chaque entier k s'écrit d'une des deux manières, et d'une seule.
On va étudier sommairement les nombres de la forme $k = 2^n + r$ *avec* $1 \leqslant r \leqslant p_n$ et $k = 2^n + p_n + r$ *avec* $1 \leqslant r \leqslant q_n$.
Dans le premier type, pour n égal à 0, on trouve les entiers de 2 à p_0+1.
Dans le second type, pour n égal à 0, on trouve les entiers de p_0+2 à p_0+q_0+1 (ce qui fait 2, c'est peu).
Dans le premier type, pour n égal à 1, on trouve les entiers de 3 à p_1+2.
Dans le second type, pour n égal à 1, on trouve les entiers de p_1+3 à p_1+q_1+2 (ce qui fait 4).
Dans le premier type, pour n égal à 2, on trouve les entiers de 5 à p_2+4.
Dans le second type, pour n égal à 2, on trouve les entiers de p_1+5 à p_2+q_2+4 (ce qui fait 8).

• Certains de ces segments sont peut être vides. Qu'importe, ils sont bien "jointifs".•

Plus généralement, dans le premier type, pour n donné, on trouve les entiers de $[2^n+1,\ 2^n+p_n]$, et dans le second type, pour n égal à 2, on trouve les entiers de $[2^n+p_n+1,\ 2^{n+1}]$.
En notant I_n et J_n les intervalles ainsi définis, on voit que I_n est suivi de J_n lui même suivi de I_{n+1} et ainsi de suite.
Chaque I_n est inclus dans un segment en $[2^n+1,\ 2^{n+1}]$ et ne rencontre aucun autre I_m. Chaque J_n est inclus dans le même segment en $[2^n+1,\ 2^{n+1}]$ et ne rencontre aucun autre J_m. Mais avec cette remarque, aucun I_n ne peut rencontrer non plus un J_m d'indice différent. Et même pour des indices égaux, il n'y a pas de rencontre.
Bref, les I_n et les $J_{ù}$ sont deux à deux disjoints et leur réunion fait $\mathbb{N}$.
Chaque entier est concerné par une et une seule des formules.
La suite c est bien définie, à termes dans $\{1, j, j^2\}$.
<u>*Bilan*</u> : la suite c est dans E.
Ce qu'on doit encore regarder, c'est ce que fait cette suite et sa moyenne de Cesaro .
Ici, je vais juste donner l'idée de ce qu'il se passe.
On a découpé $\mathbb{N}$ en tranches par les puissances de 2. Dans chaque tranche de 2^n+1 à 2^{n+1}, on prend p_n termes de la suite a et q_n termes de la suite b. Ceci fait globalement une proportion $p_n/2^n$ de termes de a, et

$q_n/2^n$ termes de b. Or, le rapport $p_n/2^n$ tend vers t et le rapport $q_n/2^n$ tend vers $1-t$ (encadrement sur les parties entières et passage à la limite).
Les "accumulateurs" P_n et Q_n sont là pour qu'on prenne bien tous les termes de la suite a et tous les termes de la suite b.
On peut faire une estimation de la moyenne de Cesaro au rang 2^n, et y trouver une quantité comparable à $t.a^*_{P_n}+(1-t).b^*_{Q_n}$. Quand n tend vers l'infini, ceci tend vers $t.\alpha+(1-t).\beta$, c'est à dire vers γ.
Dans les temps intermédiaires de la tranche, on a des choses plus lourdes à exprimer, mais la convergence est quand même la même.

• Les détails de cette démonstration prendraient plus qu'une page, assez imbitable à lire.•

La moyenne de Cesaro c^* converge vers γ.
On reconnaît la définition de "c^* est dans A".
On reformule : quand deux points α et β sont dans A, tous les points en $t.\alpha+(1-t).\beta$ (t entre 0 et 1) sont dans A.
Quand t varie de 0 à 1, le point γ va de β à α, en décrivant tout le segment.
Donc, **quand deux points sont dans A, le segment qui les joints est encore dans A.**
Comme les trois sommets 1, j et j^2 sont dans A, chaque segment qui les joints est dans A (prendre 1 et j par exemple dans les rôles de α et β).
Le bord du triangle est donc dans A.
Mais en prenant α sur le côté vertical du triangle et β en 1, on obtient des segments qui décrivent finalement tout l'intérieur du triangle.
Tous les points du triangle Δ sont dans A.
Comme déjà tous les points de A sont dans D, on a égalité entre A et D.
Bilan : **l'ensemble des limites des moyennes de Cesaro des suites à valeurs dans $\{1,j,j^2\}$ est le triangle dont les sommets sont les points de $\{1,j,j^2\}$.**
*On peut ensuite généraliser. C'est d'ailleurs ce que faisait l'exercice de l'oral de Polytechnique dont j'ai extrait ce sujet (*oui, je collabore avec cette école militaire pour leur piquer des sujets, ne me dénoncez pas...*).*
On se donne des points du plan complexe d'affixes z_1 à z_q. On prend les suites complexes qui sautillent entre ces valeurs. On prend les moyennes de Cesaro de ces suites. On regarde les limites de ces moyennes de Cesaro quand elles en ont. On obtient un ensemble de complexes qui coïncide avec l'enveloppe convexe de z_1 à z_q.
L'enveloppe convexe d'une famille de points, c'est le plus petit polygone qui les contienne tous. Ici, un triangle.
Si on n'avait pris que deux points, on aurait eu un segment.
Certains ont compris en T.D. qu'avec des suites de 0 et de 1, on pouvait faire converger les moyennes de Cesaro vers n'importe quel point donné de $[0,\ 1]$, et uniquement vers ces points là. C'est le cas $(z_1,z_2)=(0,1)$.
Dans le sujet d'oral de l'X, il y avait six points : les sommets d'un hexagone régulier, solutions de l'équation $z^6=1$.
Mais à quoi servait alors l'ensemble F' ?
C'est pour l'autre variante du sujet de l'X.
On y prenait les suites (a_n) telles que $(a_n)^6$ converge vers 1. On montrait en gros qu'il s'agissait de suites se rapprochant des sommets de l'hexagone pré-cité, et on montrait que les limites éventuelles de leurs moyennes de Cesaro décrivaient le même hexagone.
Avec toujours cette remarque : l'interrogateur ne compte pas que l'élève aille au bout de l'exercice dans le temps imparti, mais plutôt qu'il fasse preuve d'initiatives intelligentes, qu'il sache profiter des indications, et qu'il montre qu'il sait traiter avec rigueur certains passages.

D.S.7. barème : 100pt.