♣ cos(a+b) = cos(a).cos(b) - sin(a).sin(b) ♣ Ln(a.b) = Ln(a) + Ln(b) ♣ tan(a+b) = (tan(a)+tan(b)) / (1-tan(a).tan(b)) ♣ (Ln(u))' = u'/u ♣ sin(x) = x - x³/6 + x⁵/120 +o(x⁵) ♣ sin(a+b) = sin(a).cos(b) + cos(a).sin(b) ♣ Ln(1+u) = u - u²/2 + u³/3 - u⁴/4+o(u⁴) ♣ Arctan'(x) = 1 / (1+x²) ♣

Algèbre bilinéaire

Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (E,+,.) est une forme bilinéaire symétrique, positive, défini-positive. On lui associe naturellement une norme $|u|=\sqrt{<u|u>}$. On peut remonter de la norme au produit scalaire par les identités de polarisation telles que $<u|v> = (|u+v|^2 - |u-v|^2)/4$. Une norme issue d'un produit scalaire vérifie l'identité du parallélogramme $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2.|u|^2 + 2.|v|^2$.

Identités de Parseval

$\vec{u} = \sum_k <\vec{u}|\vec{e}_k>.\vec{e}_k$

$|\vec{u}|^2 = \sum_k <\vec{u}|\vec{e}_k>^2$

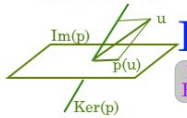
si les $\vec{e}_k$ forment une base orthonomée

Inégalité(s) de Cauchy-Schwarz

$<u|v> \leqslant ||u||.||v||$

Egalité si et seulement si les vecteurs sont colinéaires de même sens

Cette formule s'applique pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}$ mais aussi pour des produits scalaires "intégrale" sur des espaces de fonctions, ou sur des espaces de matrices.



Projecteurs

$p \circ p = p$

$E = Ker(p) \oplus Ker(Id-p)$

Fonctions de plusieurs variables

$f(a+h, b+k) = f(a, b) + p.h + q.k + o(\sqrt{h^2+k^2})$

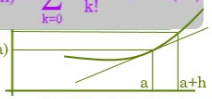
avec $p = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}$ et $q = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}$

Développements limités

$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.h^k + o(h^n)$

$f(a+h) = f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2}.f''(a)+o(h^2)$

quand h tend vers 0



$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2}.f''(a) + ... + \frac{h^n}{n!}.f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{n!}\int_{t=0}^{t=1}(1-t)^n.f^{(n+1)}(a+t.h).dt$

Algèbre linéaire

$f(\lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}) = \lambda.f(\vec{u}) + \mu.f(\vec{v})$

Le noyau d'une application linéaire f de (E,+,.) dans (F,+,.) est l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est le vecteur nul de F. C'est un sous-espace vectoriel de (E,+,.).

Théorème des accroissements finis

Si f est continue de [a, b] dans R et dérivable au moins sur]a, b[alors il existe au moins un c de]a, b[vérifiant

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Corollaire : f est croissante sur unintervalle I si et seulement si f ' est positive.

Théorème de Bolzano/Weierstrass

De toute suite réelle bornée on peut extraire au moins une sous-suite convergente.

Polynômes de Lagrange

$\left(\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

Une famille liée est une famille où au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
Une famille libre est une famille où aucun vecteur n'est combinaison des autres ; la seule combinaison linéaire donnant le vecteur nul est la combinaison triviale où tous les coefficients sont nuls.

Une fois fixées des bases de E et F, il existe un isomorphisme entre L(E, F) et $M_{n,p}(R)$ (avec n = dim(E) et p = dim(F)).

Noyau

$c_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.b_j^k$

Algèbre générale

Division euclidienne

$a.\mathbb{Z} \cap b.\mathbb{Z} = ppcm(a,b).\mathbb{Z}$

$a.\mathbb{Z} + b.\mathbb{Z} = pgcd(a,b).\mathbb{Z}$

$\exists\ \alpha, \beta,\ d = \alpha.a + \beta.b$

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} q_k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}$

d est le dernier reste non nul

Dividende | Diviseur
Reste | Quotient

pour les entiers et aussi les polynômes

$a = b.q+r$ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ r \end{bmatrix}$

Gauss Euclide Bézout

Si a divise b.c et est premier avec b, alors a divise c.

$n = 2^{\alpha}.3^{\beta}.5^{\gamma}...p_k^{\nu_k}...$

Un groupe (E,*) est un ensemble E muni d'une loi de composition * qui doit être :
Interne : $\forall a,b \in E^2,\ a*b \in E$
Associative : $\forall a,b,c \in E^3,\ (a*b)*c = a*(b*c)$
dotée d'un Neutre : $\exists e \in E,\ \forall a \in E,\ a*e = e*a = a$
avec des Symétriques : $\forall a \in E,\ \exists b \in E,\ a*b = b*a = e$
(le neutre est unique, et chaque élément n'a qu'un symétrique)
la loi est éventuellement commutative : $\forall a, b \in E^2,\ a*b = b*a$

Dimension d'un espace vectoriel

Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs toute famille de n+1 vecteurs est liée

La dimension d'un espace vectoriel est le cardinal d'une de ses bases (et donc de toutes ses bases).

Card(libre) ⩽ Card(base) ⩽ Card(génératrice)

Cas d'égalité (libre de bon cardinal implique base)

Formule de Grassman

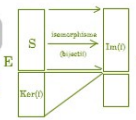
$dim(A+B) = dim(A) + dim(B) - dim(A \cap B)$

A et B sous-espaces vectoriels de (E,+,.)

Formule du rang

Un morphisme réalise une bijection d'un supplémentaire du noyau vers l'ensemble image

$dim(Im(f)) = dim(E) - dim(Ker(f))$



Les isomorphismes transforment les bases en bases, ils conservent les dimensions.

Groupes Anneaux Corps

Les sous-groupes de (Z,+) sont monogènes.

(S_n,o) est le groupe des n! permutations de {1, 2,...n} (bijections de {1,..n} dans lui même). A partir de n=3, il n'est plus commutatif.

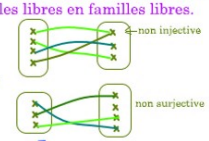
Un corps (K,+,x) est un anneau dans lequel tout élément non nul admet un inverse pour la loi multiplicative x.
(K^*,x) est alors un groupe.

$(\mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}, +, .)$ est un corps si et seulement si p est un nombre premier.

Un anneau est muni de deux lois : une "addition" qui en fait un groupe commutatif, et une "multiplication" interne, associative, distributive sur l'addition. La "multiplication" peut être acommutative, intègre.

Injectivité Surjectivité Bijectivité

Une application linéaire est injective si et seulement si elle transforme les familles libres en familles libres.



Une application est injective de E dans F si deux éléments différents de de E ont nécessairement des images différentes (f(a)=f(b) implique a=b).

Déterminants

Une fois fixée une base B sur un espace de dimension n (E,+,.), il existe une unique forme n-linéaire antisymétrique (ou alternée) qui vaut 1 pour cette base. On l'appelle déterminant relatif à la base B. Le déterminant usuel en dimension 2 ("ad-bc") mesure l'aire algébrique d'un parallélogramme. En dimension 3, il mesure un volume algébrique et se calcule par la règle de Sarrus.

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a.b'.c''+a'.b''.c+a''.b.c'-a.b''.c'-a'.b.c''-a''.b'.c$

La formule en dimension n sur n contient n! termes.

$A.{}^tCom(A) = {}^tCom(A).A = det(A).I_n$

Deux matrices semblables ont la même trace et le même déterminant (nécessaire mais pas suffisant).

$M^n = P.D^n.P$

$$\begin{array}{ccc} (E, B) & \xrightarrow{f} & (E, B) \\ Id_E \downarrow & & \uparrow Id_E \\ (E, \beta) & \xrightarrow{f} & (E, \beta) \end{array}$$

Une famille de vecteurs est liée si et seulement si son déterminant est nul.

$det(\lambda.M) = \lambda^n.det(M)$ attention à $\lambda = -1$

Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Intégration par parties

$\int_a^b u'(t).v(t).dt = \left[u(t).v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t).v'(t).dt$

pour u et v de classe C^1 de [a, b] dans $\mathbb{R}$.

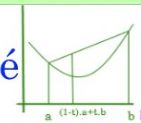
Convexité

Inégalités de convexité

$exp(a) \geqslant 1+a$

$Ln(1+x) \leqslant x$

$\sqrt[n]{x_1.x_2..x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$



Inégalité de Jensen

$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t).dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(t)).dt$

pour f continue et g convexe

Une fonction numérique f est dite convexe si l'image d'une moyenne est plus petite que la moyenne des images.
Elle est alors continue en tout point, dérivable à droite et à gauche, et son graphe est au dessus de ses tangentes.

Théorème de Heine

Toute application numérique continue sur un segment est uniformément continue

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall (a,b) \in I^2,\ |b-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(b)-f(a)| \leqslant \varepsilon$

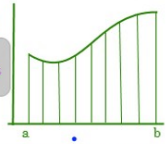
Intégration

$\int_a^b \frac{u'(t)}{u(t)}dt = Ln\left(\frac{u(b)}{u(a)}\right)$

Sommes de Riemann

$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f(t).dt$

pour f continue de [a, b] dans R



Comparaison série/intégrale

$\int_n^{N+1} f(t).dt \leqslant \sum_{k=n}^{N} f(k) \leqslant \int_{n-1}^{N} f(t).dt$

pour f décroissante.

Séries numériques

La série de terme général 1 / n^a converge si et seulement si a est strictement plus grand que 1.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \zeta(a)$

zéta de Riemann

$\zeta(2) = \pi^2/6$

La série harmonique diverge vers +oo alors même que son terme général 1/n tend vers 0. Ses sommes partielles sont équivalentes à Ln(n).

Si la série de terme général $|a_n|$ converge, alors la série de terme général a_n converge.

Espérance

$E(X) = \sum_{a \in \mathbb{R}} a.P(X=a)$

La variance est le carré de l'écart-type.

$Var(X) = E\left((X-E(X))^2\right)$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Formule de Bayes

$P(B|A) = \frac{P(A|B).P(B)}{P(A|B).P(B)+P(A|\overline{B}).P(\overline{B})}$

Inégalité de Markov

A variable aléatoire positive

$P(A \geqslant a) \leqslant E(A)/a$

$P(|X-m| \geqslant s) \leqslant V/s^2$

avec m = E(X) et V = Var(X)

Inégalité de Tchebychev

Série géométrique

$1+r+r^2+...+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

$a^n - b^n = (a-b).\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}.b^k$

$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ si $|r|<1$

Formule du binôme

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k$

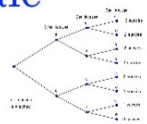
$(a+b+c)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{a!.j!.k!}a^i.b^j.c^k$

Loi binomiale

$P(X=k) = \binom{n}{k}p^k.(1-p)^{n-k}$

Chaines de Markov

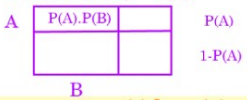
$\begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{bmatrix} = ... = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix}$



Evénements indépendants

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

et donc P(A | B) = P(A).



Dénombrement

Il y a $(Card(F))^{Card(E)}$ applications de E dans F.

Il y a $\binom{Card(F)}{Card(E)}$ applications injectives de E dans F.

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

Si E a n éléments, alors P(E) a 2^n parties, allant de Ø à E.

Triangle de Pascal

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ \ 1 \\ 1\ \ 2\ \ 1 \\ 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \\ 1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1 \\ 1\ \ 5\ \ 10\ \ 10\ \ 5\ \ 1 \\ 1\ \ 6\ \ 15\ \ 20\ \ 15\ \ 6\ \ 1 \\ 1\ \ 7\ \ 21\ \ 35\ \ 35\ \ 21\ \ 7\ \ 1 \end{array}$$

Décomposition en éléments simples

$\frac{P(X)}{(X-a).(X-b)} = R(X) + \frac{\alpha}{X-a} + \frac{\beta}{X-b}$

$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_k \frac{1}{X-a_k}$

Sommes d'entiers

$1 + 2 + 3 + ... + n = n.(n+1) / 2$

$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = n.(n+1).(2n+1) / 6$

Sommes télescopiques

$\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_0$

Probabilités

Calcul

$t = tan(\theta/2)$

$cos(\theta) = (1 - t^2) / (1+t^2)$

$sin(\theta) = 2.t / (1+t^2)$

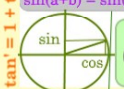
$tan(\theta) = 2.t / (1 - t^2)$

$d\theta = 2.dt / (1+t^2)$

Trigonométrie

$cos(a+b) = cos(a).cos(b) - sin(a).sin(b)$

$sin(a+b) = sin(a).cos(b) + cos(a).sin(b)$



$tan' = 1 + tan^2 = 1 / cos^2$ ♣ $(\vec{a}.\vec{b}).\vec{c} = det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ ♣ (u.v)'' = u''.v + 2.u'.v' + u.v'', (u.v)$^{(3)}$ = u$^{(3)}$.v + 3.u''.v' + 3.u'.v'' + u.v$^{(3)}$ ♣ cos(Arcsin(x)) = sin(Arccos(x)) =$\sqrt{1 - x^2}$ ♣ exp(i.π) = -1

exp(x) = ch(x) + sh(x) ♣ exp(-x) = ch(x) - sh(x) ♣ cos(x) = 1 - x²/2 + x⁴/24 - x⁶/120 + o(x⁷) ♣ a^b = exp(b.Ln(a)) ♣ tan(Arctan(x)) = x ♣ (g∘u)' = (g'∘u).u' ♣ ch' = sh ♣ sh' = ch ♣ i^2 = -1

Tr(A.B) = Tr(B.A) ♣ exp' = exp ♣ det(A.B) = det(A).det(B) ♣ exp(x) = 1 + x + x²/2 + x³/6 + x⁴/24 + x⁵/120 + o(x⁵) ♣ Arctan(tan(θ)) = θ modulo π ♣ Arcsin'(x) = 1 / $\sqrt{1-x^2}$ ♣ n!~(n / e)^n.$\sqrt{2.\pi.n}$ ♣ Argch(x) = Ln(x + $\sqrt{1+x^2}$) ♣ j = exp(2.i.π/3), j³ = 1, 1 + j + j² = 0 ♣