LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 5 septembre
M.P.S.I.2

2022 2023

TD00

∘0∘ ♡ On a un jeu de cartes. Chaque carte a un chiffre sur une face, une lettre sur l'autre. On aligne devant vous quatre cartes dont les faces visibles sont $\boxed{A}$ $\boxed{7}$ $\boxed{4}$ $\boxed{B}$ On vous dit "*quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre*". Quelles cartes retournez vous pour vous assurer que l'affirmation est correcte ?

On a quatre cartes avec une face visible chacune : $\boxed{A}$ $\boxed{7}$ $\boxed{4}$ $\boxed{B}$
On a une affirmation à valider ou invalider : *"quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre".*

Bien évidemment, on doit retourner $\boxed{4}$ pour voir si il y a bien une voyelle sur l'autre face.

Il est inutile de retourner $\boxed{7}$ puisque rien ne parle des cartes ayant une face impaire.

Il est inutile de retourner $\boxed{A}$ en effet, si on trouve un nombre pair, on sera content, mais si on trouve un nombre impair, ça ne prouvera rien puisque personne n'a parlé de ce qu'il devait y avoir derrière une nombre impair.

En revanche, il faut retourner $\boxed{B}$ et si l'on trouve un nombre pair de l'autre côté, on aura un contre-exemple à l'affirmation *"quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre".*

En termes de logique pure, la phrase est $\boxed{\text{“pair} \Rightarrow \text{voyelle”}}$ Il faut donc vérifier le dos des faces paires.

Mais c'est aussi sa contraposée $\boxed{\text{“consonne} \Rightarrow \text{impair”}}$ Il faut donc vérifier au dos des consonnes.

Que penser de l'élève qui me dira "je retourne toutes les cartes", et tant pis si j'en ai retourné trop ; l'énoncé ne me demandait pas de minimiser".

Même question sur les retournements si l'affirmation est "*il y a un nombre pair sur une face si et seulement si il y a une voyelle sur l'autre*".

Cette fois, c'est une équivalence. Il faut retourner toutes les cartes.

Cette fois, les cartes peuvent avoir deux lettres. Ou deux chiffres. Ou une lettre et un chiffre. On voit les mêmes quatre faces, et l'affirmation à vérifier est encore "*quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre*". Que retournez vous ?

Pour finir, les cartes peuvent avoir deux lettres. Ou une lettre et un chiffre. Mais pas deux chiffres. On voit les mêmes quatre faces, et l'affirmation à vérifier est encore "*quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre*". Que retournez vous ?

∘1∘ Résolvez l'équation $n! = 6.(k!)$ d'inconnues n et k dans $\mathbb{N}$.

L'application factorielle étant croissante, il faut que n soit plus grand que k (strictement).
En simplifiant alors par $k!$ il reste $(k+1).(k+2)\dots n = 6$.
Mais 6 n'a que peu de facteurs. Et de surcroit consécutifs : 1.2.3 ou juste 2.3 ou même 6 en une seule fois.
La première solution donne $3! = 6.(0!)$.
La deuxième solution donne $3! = 6.(1!)$.
La troisième possibilité : $k+1 = n = 6$ donne $6! = 6.(5!)$.

Pour conclure proprement : $\boxed{S_{(k,n)} = \{(0,3),\ (1,3),\ (5,6)\}}$

∘2∘ ♡ On pose $f = x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$ et $g = x \longmapsto \dfrac{\alpha.x+\beta}{\gamma.x+\delta}$, puis $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.
Comparez le calcul de $f \circ g$ et de $M.N$.
On pose $h = x \longmapsto \dfrac{2.x-1}{x+21}$. Déterminez rapidement $h \circ h \circ h \dots \circ h$ (11 termes h, le résultat contiendra de grands nombres, dommage).

$f \circ g$ est l'application $x \longmapsto f(g(x))$.

On calcule $f(g(x)) = \dfrac{a.g(x)+b}{c.g(x)+d} = \dfrac{a.\dfrac{\alpha.x+\beta}{\gamma.x+\delta}+b}{c.\dfrac{\alpha.x+\beta}{\gamma.x+\delta}+d}$.

On simplifie : $f(g(x)) = \dfrac{a.g(x)+b}{c.g(x)+d} = \dfrac{\dfrac{a.(\alpha.x+\beta)+b.(\gamma.x+\delta)}{\gamma.x+\delta}}{\dfrac{c.(\alpha.x+\beta)+d.(\gamma.x+\delta)}{\gamma.x+\delta}} = \dfrac{a.(\alpha.x+\beta)+b.(\gamma.x+\delta)}{c.(\alpha.x+\beta)+d.(\gamma.x+\delta)}$.

Trop fort : encore une application en $x \longmapsto \dfrac{A.x+B}{c.x+D}$.

Précisément : $\dfrac{(a.\alpha+b.\gamma).x+(a.\beta+b.\delta)}{(c.\alpha+d.\gamma).x+(c.\beta+d.\delta)}$.

Si on regarde juste les quatre coefficient :

f			g			$f \circ g$	
a	b		α	β		$a.\alpha+b.\gamma$	$a.\beta+b.\delta$
c	d		γ	δ		$c.\alpha+d.\gamma$	$c.\beta+d.\delta$
$\frac{a.x+b}{c.x+d}$			$\frac{\alpha.x+\beta}{\gamma.x+\delta}$			voir plus haut	

Et ceci rappelle le produit matriciel : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.\alpha+b.\gamma & a.\beta+b.\delta \\ c.\alpha+d.\gamma & c.\beta+d.\delta \end{pmatrix}$.

Bref, non seulement la composée de deux homographies [1] est une homographie.
Mais en plus, composer des homographies, c'est muliplier des matrices.

Pour calculer $f \circ f$, il suffit d'élver la matrice au carré.
Et de recommncer.
La question$h \circ h \circ h \ldots \circ h$ se ramène à $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 21 \end{pmatrix}$ multipliée par elle même.
C'est quand même moche (surtout à cause d'un 1 qui est resté intempestivement).
Disons qu'on va calculer M^{11} le plus vite possible.

$M^2 = M.M = \begin{pmatrix} 3 & -23 \\ 23 & 440 \end{pmatrix}$.

$M^4 = M^2.M^2 = \begin{pmatrix} -520 & -10189 \\ 10189 & 193071 \end{pmatrix}$

$M^5 = M^4.M = \begin{pmatrix} -11229 & -213449 \\ 213449 & 4044302 \end{pmatrix}$

On continue avec M^6 puis on multiplie M^5 par M^6.

Le terrible 21 à la place de 1 ou 2 a rendu le calcul indigeste. Mea culpa.

∘3∘ ♡ Résolvez l'équation $(n!)^2 \geqslant (2.n)!$ d'inconnue entière n.

Au fait, n pourrait être autre chose qu'un entier ?
Quitte à simplifier par $n!$ non nul (et même positif), ceci revient à demander : $1.2.3\ldots n \geqslant (n+1)\ldots(n+1)$.

Ou plus proprement $\prod_{k=1}^{n} k \geqslant \prod_{k=1}^{n}(n+k)$.

Or, comme n est entier, chaque $n+k$ dépasse chaque k. Terme à terme, on a donc pour tout n : $\prod_{k=1}^{n} k \leqslant \prod_{k=1}^{n}(n+k)$.

La seule façon de s'en sortir est d'avoir égalité, avec $n = 0$.
Et en effet : $S_n = \{0\}$, avec $(0!)^2 \geqslant (2.0)!$. Et sinon, $(1!)^2 < (2.1)!$ et ainsi de suite.

On pouvait aussi passer au quotient (tout est positif). L'équation $(n!)^2 \geqslant (2.n)!$ devient $\dfrac{(2.n)!}{n!.n!} \leqslant 1$. Et avec de l'habitude, on reconnaît un coefficient binomial : $\dbinom{2.n}{n} \leqslant 1$. Or, un coefficient binomial est un entier naturel. La seule solution est qu'il vaille 1 et ce n'est le cas que pour $n = 0$.

Résolvez l'équation $(n!)^3 \geqslant (2.n)!$ d'inconnue entière n.

1. les homographies ce sont les $x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$, avec entre autre $x \longmapsto x$ pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cette fois, on veut $\prod_{k=1}^{n} k^2 \geqslant \prod_{k=1}^{n}(n+k)$. Le carré nous laisse un peu de marge ?
Ça marche pour 0.
Mais pour 1 c'est déjà raté. Encore pire pour 2 et ainsi de suite.
En fait la seule solution est 0.
Prouvons le. On a initialisé. Mais l'hérédité ne semble pas bien passer.
Et même, elle ne passe pas.

Et si on regarde plus en détails :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$(n!)^3$	1	1	8	216	13824	1728000	373248000	128024064000	65548320768000
$(2.n)!$	1	2	24	720	40320	3628800	479001600	87178291200	20922789888000
équation	True	False	False	False	False	False	False	True	True

Et en fait, à partir de 7, le basculement se fait.
Et il se conserve.
Le tableau laborieux ci dessus indique que l'inéquation $(n!)^3 \geqslant (2.n)!$ pour n égal à 7.
Prenons un entier n quelconque et supposons $(n!)^3 \geqslant (2.n)!$.
On veut établir $((n+1)!)^3 \geqslant (2.(n+1))!$.
Comment a évolué le premier membre : $((n+1)!)^3 = (n!)^3.(n+1)^3$
le second membre : $(2.(n+1))! = (2.n)!.(2.n+1).(2.n+2)$

Il suffit donc d'écrire deux inégalités entre réels positifs :

$(n!)^3$	$\geqslant$	$(2.n)!$	hypothèse de rang n
$(n+1)^3$	$\geqslant$	$(2.n+1).(2.n+2)$	vrai pour $n \geqslant 3$

On multiplie membre à membre et c'est fini.

∘4∘ Une comptine enfantine dit *(ou plutôt chante)* : "*Promenons nous dans les bois, pendant que le loup n'y est pas ; si le loup y était, il nous mangerait, mais comme il n'y est pas, il ne nous mangera pas*". Commentez d'un point de vue logique.

L'implication énoncée est « il y est implique il nous mange » (forme $p \Rightarrow q$)
Au mieux, par contraposée, on peut déduire : : « il ne nous mange pas implique il n'y est pas » (forme $non(q) \Rightarrow non(p)$)

Mais ceci ne nous renseigne pas sur « il n'y est pas implique il ne nous mange pas » (forme $non(p) \Rightarrow non(q)$).
La seule obligation pour le loup est en cas de présence, il doit nous manger.
Le loup absent a le droit de quand même nous manger. Même si la chose semble physiquement peu cohérente.

En fait, la comptine énonce deux résultats sans rapports entre eux : « il y est implique il nous mange »
« il n'y est pas implique il ne nous mange pas »

∘5∘ ♡Prouvez que $1.3.5.7\ldots(2.n-1)$ (produit de n entiers impairs) est égal à $\dfrac{(2.n)!}{2^n.n!}$.

On peut faire une récurrence sur n.
Initialisation : $1 = \dfrac{(2.0)!}{2^0.0!}$ et même $1 = \dfrac{(2.0)!}{2^0.0!}$
Hérédité : on se donne un entier n quelconque. On suppose $1.3.5.7\ldots(2.n-1) = \dfrac{(2.n)!}{2^n.n!}$.
On veut passer au rang suivant. Regardons ce qu'il advient du premier membre. Il a un entier de plus :
on étudie $1.3.5.7\ldots(2.n-1).(2.n+1)$
on remplace : $1.3.5.7\ldots(2.n-1).(2.n+1) = \dfrac{(2.n)!}{2^n.n!}.(2.n+1)$ par hypothèse de récurrence

On étudie ensuite le second membre au rang $n+1$:
$\dfrac{(2.(n+1))!}{2^{n+1}.(n+1)!} = \dfrac{(2.n)!.(2.n+1).(2.n+2)}{2^n.2.n!.(n+1)} = \dfrac{(2.n)!.(2.n+1)}{2^n.n!}$ en simplifiant par $2.n+2$.
On a donc bien $1.3.5.7\ldots(2.n-1).(2.n+1) = \dfrac{(2.n)!}{2^n.n!}.(2.n+1) = \dfrac{(2.(n+1))!}{2^{n+1}.(n+1)!}$.
Et la récurrence s'achève.

On peut aussi se lancer dans une preuve directe.
On part du produit des entiers impairs et on glisse le produit des entiers pairs :

numérateur	1	$\times 2$	$\times 3$	$\times 4$	$\times 5$	$\times 6$	$\times 7$	$\ldots$	$\times(2.n+1)$	$\times(2.n)$
denominateur		2		$\times 4$		$\times 6$		$\ldots$		$\times(2.n)$

Le numérateur est devenu $(2.n)!$.
Et chaque terme du dénominateur donne un 2 :

numérateur	1	$\times 2$	$\times 3$	$\times 4$	$\times 5$	$\times 6$	$\times 7$	$\dots$	$\times(2.n+1)$	$\times(2.n)$
denominateur		2×1		$\times 2\times 2$		$\times 2\times 3$		$\dots$		$\times 2\times n$

Le dénominateur est fait de n facteurs 2 et du produit $1\times 2\times 3\times n$. C'est donc bien $2^n.n!$.

Et pour le faire avec rigueur ?
Partons de $(2.n)!$, produit de tous les entiers. Séparons en fonction de leur parité :
$$(2.n)! = \prod_{i=1}^{2.n} i = \Big(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2.n\\ i\ pair}} i\Big).\Big(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2.n\\ i\ pair}} i\Big)$$
Écrivons les $2.k$ ou $2.k+1$ avec k n'allant pas trop loin.
$$(2.n)! = \Big(\prod_{k=1}^{n}(2.k)\Big).\Big(\prod_{k=1}^{n}(2.k-1)\Big)$$
Factorisons un peu les 2 comme tout à l'heure :
$$(2.n)! = \Big(\prod_{k=1}^{n}2\Big).\Big(\prod_{k=1}^{n}k\Big).\Big(\prod_{k=1}^{n}(2.k-1)\Big)$$
Reconnaissons des choses :
$$(2.n)! = \Big(2^n\Big).\Big(n!\Big).\Big(\prod_{k=1}^{n}(2.k-1)\Big)$$
Il ne reste qu'à diviser.

Quelle est pour vous la meilleure des trois démonstration ?

◦6◦ Peut on choisir b réel pour que $(1+i.b)^5$ soit un imaginaire pur ?

Oui.
Il suffit par exemple que l'argument de $1+i.b$ soit $\dfrac{\pi}{10}$.
C'est jouable avec justement $\tan(\pi/10)$.
On a en effet : $1+i.\tan(\pi/10) = 1+i.\dfrac{\sin(\pi/10)}{\cos(\pi/10)} = \dfrac{\cos(\pi/10)+i.\sin(\pi/10)}{\cos(\pi/10)} = \dfrac{e^{i.\pi/10}}{\cos(\pi/10)}$
On élève à la puissance 5 : $(1+i.b)^5 = \Big(\dfrac{e^{i.\pi/10}}{\cos(\pi/10)}\Big)^5 = \dfrac{e^{5.i.\frac{\pi}{10}}}{(\cos(\pi/10))^5} = \dfrac{e^{i.\pi/2}}{(\cos(\pi/10))^5} = \dfrac{i}{(\cos(\pi/10))^5}$.
Que demande le peuple ? Imaginaire pur au pouvoir.

◦7◦ ♡ Calculez $(1+i)^2$. Résolvez $z^2+2.i.z+2.i = 1$ d'inconnue complexe z.

Facile : $(1+i)^2 = 2.i$.
Ce calcul est juste là pour penser ensuite à $(2.(1+i))^2 = 4.2.i = 8.i$ puis $(2.i.(1+i))^2 = 4.(-1).2.i = -8.i$.

Pour $z^2+2.i.z+2.i-1=0$, on a une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.

On la résout classiquement :

$a=1$	$b=2.i$	$c=-1+2.i$
$\Delta = b^2-4.a.c = -8.i$		
$\delta = 2.i.(1+i)$		
$z_1 = \dfrac{-2.i+2.(i-1)}{2}$	$S=\{-1,\ 1-2.i\}$	$z_2 = \dfrac{-2.i-2.(i-1)}{2}$

Et même encore plus classiquement : $z^2+2.i-1+2.i=0 \Leftrightarrow (z+i)^2+2.i=0$
$z^2+2.i-1+2.i=0 \Leftrightarrow (z+i)^2=-2.i$
$z^2+2.i-1+2.i=0 \Leftrightarrow (z+i)^2=(i.(1+i))^2$
$z^2+2.i-1+2.i=0 \Leftrightarrow (z+i)^2=(i-1)^2$
$z^2+2.i-1+2.i=0 \Leftrightarrow (z+i)^2-(i-1)^2=0$
$z^2+2.i-1+2.i=0 \Leftrightarrow \big((z+i)-(i-1)\big).\big((z+i)+(i-1)\big)=0$
$z^2+2.i-1+2.i=0 \Leftrightarrow (z+1).(z-1+2.i)=0$
par intégrité, on a les deux solutions : -1 et $1-2.i$.

Plus rapide : on devine une solution évidente : -1 puisque $(-1)^2+2.i.-1)+2.i-1=0$.
On trouve l'autre en factorisant ou par la somme ou le produit des racines.

Encore plus rapide : on propose les deux solutions, et on vérifie, puisqu'on sait qu'il y en a deux, et seulement deux.

∘8∘

♡ a, b et c sont entre 0 et $\pi/2$ et vérifient $\cos(a) = 0,4$, $\sin(b) = 0,8$ et $\tan(c) = 1,3$. Classez a, b et c par ordre croissant. *(là encore, si votre preuve repose sur les valeurs approchées de la calculatrice, vous vous êtes trompé de salle ; ce ne peut être qu'une aide, mais pas une preuve).*

Pour trier ces nombres, il suffit de trier leurs tangentes. En effet, par croissance de l'application tangente sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, si on arrive à $\tan(a) > \tan(b) > \tan(c)$ on déduira $a > b > c$.
Vu l'intervalle sur lequel on est, on va calculer les sinus et cosinus par la formule de Pythagore : $\sin(a) = \sqrt{1-\cos^2(a)}$ (pas de signe moins, sinus et cosinus sont positifs).
Reste ensuite à calculer les tangentes. On résume tout dans un tableau :

données			
	a	b	c
sin		$0,8$	
cos	$0,4$		
tan			$1,3$

Et on calcule donc, en gardant si possible des dénominateurs lisibles :

Pythagore			
	a	b	c
sin	$\frac{\sqrt{84}}{10}$	$\frac{8}{10}$	
cos	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	
tan	$\frac{\sqrt{84}}{4}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{13}{10}$

Pour simplifier et bien trier, on regarde même les carrés de tangentes :

Pythagore			
	a	b	c
$\tan^2$	$\frac{21}{4} = \frac{4725}{900}$	$\frac{16}{9} = \frac{1600}{900}$	$\frac{169}{100} = \frac{1521}{900}$

On a donc $a > b > c$.

∘9∘

On définit $f = x \longmapsto \frac{x+1}{x-2}$ et $g = x \longmapsto |x| - 1$.
Résolvez $f(x) \geqslant 0$ | $f(g(x)) \geqslant 0$ | $g(f(x)) \geqslant 0$ | $f(f(x)) \geqslant 0$ | $g(g(x)) \geqslant 0$ d'inconnue réelle x.

$f(x) \geqslant 0$	$\frac{x+1}{x-2} \geqslant 0$	exclure 2	tableau de signes	$]-\infty, -1] \cup]2, +\infty[$

Le tableau de signes, c'est bien pour les produits, mais aussi pour les quotients !

$f(g(x)) \geqslant 0$	$\frac{\|x\|-1+1}{\|x\|-1-2} \geqslant 0$	$\|x\| - 3 > 0$	$]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$

Une valeur absolue est toujours positive. On regarde donc juste le signe du dénominateur (jamais nul !).

$g(f(x)) \geqslant 0$	$\left\|\frac{x+1}{x-2}\right\| \geqslant 1$	$\|x+1\| \geqslant \|x-2\|$

On peut faire le produit en croix sans changer le sens, mais ensuite, il faut distinguer les cas.
On trouve $[1/2, +\infty[$

$f(f(x)) \geqslant 0$	$\frac{2.x-1}{-x+5} \geqslant 0$	tableau de signes	$[1/2, 5[$

On a composé f avec elle même en calculant $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

$g(g(x)) \geqslant 0$	$\|\|x\|-1\| \geqslant 1$	sur $\mathbb{R}^+$: $\|x-1\| \geqslant 1$	$\mathbb{R}^+ -]0, 2[$	$]-\infty, -2] \cup \{0\} \cup [2, +\infty[$
		sur $\mathbb{R}^-$: $\|x+1\| \geqslant 1$	$\mathbb{R}^- -]-2, 0[$	

∘10∘

Pour tout n, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrez : $\sum_{n=1}^{9} H_n = 10.H_{10} - 10$.

$H_1 =$	1									
$H_2 =$	1	$+1/2$								
$H_3 =$	1	$+1/2$	$+1/3$							
$H_4 =$	1	$+1/2$	$+1/3$	$+1/4$						
$H_5 =$	1	$+1/2$	$+1/3$	$+1/4$	$+1/5$					
$H_6 =$	1	$+1/2$	$+1/3$	$+1/4$	$+1/5$	$+1/6$				
$H_7 =$	1	$+1/2$	$+1/3$	$+1/4$	$+1/5$	$+1/6$	$+1/7$			
$H_8 =$	1	$+1/2$	$+1/3$	$+1/4$	$+1/5$	$+1/6$	$+1/7$	$+1/8$		
$H_9 =$	1	$+1/2$	$+1/3$	$+1/4$	$+1/5$	$+1/6$	$+1/7$	$+1/8$	$+1/9$	
on va sommer en colonnes										
$\sum_{n=1}^{9} H_n =$	9	$+8/2$	$+7/3$	$+6/4$	$+5/5$	$+4/6$	$+3/7$	$+2/8$	$+1/9$	

Surtout, on garde sous cette forme, on ne somme pas tout de suite. On compte juste combien de fois on a chaque $\frac{1}{k}$.

On a $10-k$ fois chaque $\frac{1}{k}$. La somme est donc $\sum_{k=1}^{9} \frac{10-k}{k}$.

On la sépare en $\sum_{k=1}^{9} \frac{10}{k} - \sum_{k=1}^{9} 1$.

Mais on pouvait même l'écrire $\sum_{k=1}^{10} \frac{10-k}{k}$ (le seul terme ajouté en 0)

et la séparer en $\sum_{k=1}^{10} \frac{10}{k} - \sum_{k=1}^{10} 1$.

Et ceci donne exactement (factorisation et compteur) : $10.H_{10} - 10$.

Méthode du physicien : je calcule tout, pourquoi se prendre la tête avec ce tableau et cette sommation en lignes ou en colonnes !

J'utilise même un logiciel de calcul forme :

```
sum(sum(1/k,k=1..n), n=1..10)
```

et `sum(1/k, k=1..10)*10-10`

Et si on généralisait ? On pose $A_N = \sum_{n=1}^{N} H_n$. On veut montrer $A_N = (N+1).H_{N+1} - (N+1)$.

N est variable globale. n et ensuite k seront des variables muettes.

On écrit la définition : $A_N = \sum_{n=1}^{N} H_n = \sum_{n=1}^{N} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Big)$.

On fusionne en un seul sigma : $A_N = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n \leqslant N}^{N} \frac{1}{k}$ (triangle visible plus haut).

On somme d'abord sur k : $A_N = \sum_{k=1}^{N} \Big(\sum_{n=k}^{N} \frac{1}{k} \Big)$ (on va sommer en colonnes).

On factorise : $A_N = \sum_{k=1}^{N} \Big(\sum_{n=k}^{N} 1 \Big) . \frac{1}{k}$ (sur chaque colonne c'est le même k).

On simplifie : $A_N = \sum_{k=1}^{N} (N+1-k).\frac{1}{k}$ (n est un compteur, gare au nombre de termes).

On ajoute un terme nul : $A_N = \sum_{k=1}^{N+1} (N+1-k).\frac{1}{k}$ (là, c'est joli/rusé).

On sépare : $A_N = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{N+1}{k} - \sum_{k=1}^{N+1} 1$ (k/k vaut 1).

On sort le $N+1$ et k est un compteur dans la seconde.

On a enfin : $A_N = (N+1).H_{N+1} - (N+1)$.

Pour qui n'a pas vu le coup de « je somme jusqu'à $N+1$ car le terme ajouté vaut 0 », on peut quand même voir un 1 sortir de $(N+1).H_{N+1}$ dans le dernier terme de $(N+1).\Big(\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}\Big)$.

Petit conseil : n'essayez pas de simplifier $H_n$qui sera un de nos objets classiques, il est trop moche.

∘11∘

♡ Ajustez $(a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3)$ pour avoir

$(t \longmapsto a_1.t.\ln(t)+b_1.t)' = \ln$	$(t \longmapsto a_2.t^2.\ln(t)+b_2.t^2)'' = \ln$	$(t \longmapsto a_3.t^3.\ln(t)+b_3.t^3)^{(3)} = \ln$

$\Big(t \longmapsto t.\ln(t)-t\Big)' = \ln$	$\Big(t \longmapsto \dfrac{t^2.\ln(t)}{2}-\dfrac{3.t^2}{4}\Big)'' = \ln$	$\Big(t \longmapsto \dfrac{t^3.\ln(t)}{6}-\dfrac{11.t^3}{36}\Big)^{(3)} = \ln$

Tout ce qu'on a besoin de faire, c'est de dériver justement par exemple deux fois $t \longmapsto a.t^2.\ln(t)+b.t^2$
en $t \longmapsto 2.a.t.\ln(t)+a.t^2.\frac{1}{t}+2.b.t$
puis $t \longmapsto 2.a.\ln(t)+3.a+2.b$.
Et surtout, ensuite, il fat réagir en matheuse...
Le sens pertinent pour l'exercice est $\Big((t \longmapsto a_2.t^2.\ln(t)+b_2.t^2)'' = \ln\Big) \Leftarrow \Big(2.a=1\ et\ 3.a+2.b=0\Big)$.
Certes, l'implication $\Big((t \longmapsto a.t^2.\ln(t)+b.t^2+c.e^t)'' = \ln\Big) \Rightarrow \Big(2.a=1\ et\ 3.a+2.b=0\Big)$ est ici correcte aussi (de fait, on a une équivalence), mais elle n'apporte rien à notre exercice.

Tenez : $\Big((t \longmapsto a.t^2.\ln(t)+b.t^2+c.e^t)'' = \ln\Big) \Rightarrow \Big(2.a=1\ et\ 3.a+2.b=0\Big)$ *est vrai. En effet, il est nécessaire d'avoir* $2.a=1\ et\ 3.a+2.b=0$ *mais ça ne suffit pas. Il faut aussi avoir* $c=0$*, non ?*

∘12∘

♡ Qui a raison :
-a- $n!$ est divisible par 2019 dès que n a dépassé 2019 lui même.
-b- $n!$ est divisible par 2019 dès que n a dépassé 673.
-c- si n est premier, alors $n!$ n'est pas divisible par n^2.
-d- si n n'est pas premier, alors $n!$ est divisible par n^2.

-a- $n!$ est divisible par 2019 dès que n a dépassé 2019 lui même.
$\forall n\in\mathbb{N},\ (n\geqslant 2019)\Rightarrow(2019\mid n!)$: oui car dans le produit, il y a un 2019.

-b- $n!$ est divisible par 2019 dès que n a dépassé 673.
$\forall n\in\mathbb{N},\ (n\geqslant 673)\Rightarrow(2019\mid n!)$: oui car dans le produit, il y a un 673 et un 3..

-c- si n est premier, alors $n!$ n'est pas divisible par n^2.
On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers (2, 3, 5 et ainsi de suite).
$\forall n\in\mathbb{N},\ (n\in\mathbb{P})\Rightarrow(\forall k,\ n!\neq n^2.k)$: oui.
En effet, $n!$ est divisible par n, mais ensuite $\dfrac{n!}{n}$ ne contient plus de facteur n. Plus de brique pour reformer n puisque n est premier.

-d- si n n'est pas premier, alors $n!$ est divisible par n^2.
$\forall n\in\mathbb{N},\ (n\notin\mathbb{P})\Rightarrow(\exists k,\ n!=n^2.k)$: non.
L'entier 4 est un contre-exemple (et il suffit d'un pour tout gâcher).
24 n'est pas divisible par 16.
En revanche, avec 6, c'est bon : $6! = 1.2.3.4.5.6 = (1.4.5).(2.3).(6)$. On a un facteur 6^2.
Et ensuite, on peut reconstruire n dans $(n-1)!$ car n est composé (c'est à dire non premier).

∘13∘

♣ Ce jeu s'appelle Jump. Vous pouvez en deviner par vous même la règle si je vous dis « démarche du cavalier aux échecs » :

	.	1	.	
.	11	⊠	7	.
5	⊠	15	⊠	13
.	17	⊠	3	.
	.	9	.	

		5	20		
	1	.	13	.	
17	.	⊠	⊠	19	.
.	9	⊠	⊠	.	7
	.	3	.	11	
		.	15		

		17	12		
		.	.		
1	.	.	.	.	6
14	.	.	.	.	19
		.	20		
		8	3		

			7	14
1		11	⊠	3
	⊠		13	
5		9		

		1		11
14	5		⊠	
9	⊠	3		7
	13			

1	10		36	7	
22					
				13	
34				28	19
	16	25			
	31	4			

	6	1	12	
18	11	⊠	7	2
5	⊠	15	⊠	13
10	17	⊠	3	8
	4	9	14	

		5	20		
	1	18	13	6	
17	4	⊠	⊠	19	12
2	9	⊠	⊠	14	7
	16	3	8	11	
		10	15		

		17	12		
		10	5		
1	16	13	18	11	6
14	9	2	7	4	19
		15	20		
		8	3		

		2	7	14
1	6	11	⊠	3
10	⊠	4	13	8
5	12	9		

		1	6	11
14	5	10	⊠	2
9	⊠	3	12	7
4	13	8		

1	10	21	36	7	12
22	33	8	11	20	27
9	2	35	26	13	6
34	23	32	17	28	19
3	16	25	30	5	14
24	31	4	15	18	29

Le premier est facile, on n'a pas le choix pour aller de 1 à 3 et ainsi de suite.
De même pour les suivants directs.
Mais pour le dernier, je vous recommande de commncer par les coins.

∘14∘

♡ Calculez module et argument de $(2+i)^{10}.(3+i)^{10}$.

Déjà $(2+i)^{10}.(3+i)^{10} = ((2+i).(3+i))^{10} = (5+5.i)^{10}$

On écrit alors $5+5.i = 5.(1+i) = 5.\sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{2}+i.\sqrt{2}}{2}\right) = 5.\sqrt{2}.e^{i.\pi/4}$.

On élève à la puissance 10 : le module est élevé à la puissance 10
l'argument est multiplié par 10

(généralisation de $|a \times b| = |a| \times |b|$)
$Arg(a \times b) = Arg(a) + Arg(b)\ [2.\pi]$

$(2+i)^{10}.(3+i)^{10}$ a pour module $5^{10}.2^5$ et pour argument $10.\frac{\pi}{4}$ (on réduit à $\frac{\pi}{2}$).
C'est $312500000.i$.

∘15∘

♣ Un professeur un peu pervers a défini la loi suivante sur $\mathbb{N}$: $a * b = \left\{ \begin{array}{lll} a+b & si & a \leqslant b \\ a \times b & sinon & \end{array} \right|$. Montrez que cette loi n'est ni commutative, ni associative. Donnez son neutre à gauche.
Calculez $a * (a * (a * (a \ldots * a)) \ldots)$ (n termes) et $((\ldots (a * a) * a) \ldots) * a$ (n termes aussi).
Avec dix nombres 1, neuf symboles $*$ et des parenthèses, quel est le plus grand nombre que vous puissiez obtenir (mieux que $((1 * 1) * (1 * (1 * 1))) * (1 * (1 * ((1 * 1) * 1))))$ par exemple).
Peut on avoir $a * 5 = b * 5$ avec a différent de b ?
Peut on avoir $5 * a = 5 * b$ avec a différent de b ?

Une loi de composition[a] est dite
commutative si $\forall (a, b),\ a * b = b * a$ *(comme l'addition, la multiplication, mais pas la soustraction, ni l'exponentiation)*
associative si $\forall (a, b, c),\ (a * b) * c = a * (b * c)$*, comme l'addition, la multiplication, mais toujours pas les autres*

a. c'est à dire « un truc qui à partir de deux nombres en calcule un nouveau, comme l'addition, la soustraction, la division, l'exponentiation ou que sais je encore)

Il peut certes y avoir des cas où l'on a $a * b = b * a$. Mais il suffit d'un cas où ça ne marche pas pour tout casser.
$2 * 3 = 2 + 3 = 5$ alors que $3 * 2 = 3 \times 2 = 6$.
Il ne faut pas hésiter à prendre des valeurs.

On y va au hasard :

$(1$	$*2)$	$*3$		$1*$	$(2 \quad *3)$
3		$*3$		1	$*5$
6				6	
raté, il y a égalité					
$(2$	$*1)$	$*3$		$2*$	$(1 \quad *3)$
2		$*3$		2	$*4$
5				6	
là c'est un contre-exemple					

∘16∘

♡ On définit $y = \log_a(x)$ (logarithme de base a) par $a^y = x$. Montrez : $\log_a(b) = \dfrac{1}{\log_b(a)}$.
Justifiez $\log_2(125) < 7$.

Le physicien dit « j'ai appris par cœur : $\log_a(b) = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$ (quotient de deux logarithmes néperiens[2])..

On a alors $\log_a(b). \log_b(a) = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}.\dfrac{\ln(a)}{\ln((b)} = 1$.

L'élève de Prépas retrouve $\log_a(b) = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$ en repartant de $a^y = b$.
Il passe au logarithme usuel : $\ln(a^y) = \ln(b)$.
Il utilise une propriété du logarithme : $y. \ln(a) = \ln(b)$.
Il divise par $\ln(a)$ non nul : $y = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$.

En ayant toujours ce petit raisonnement en tête, il retrouve toujours la formule sans perte de temps et sans ambiguïté, et aussi sans encombrer son cerveau de formules pas forcément comprises ou mal assimilées. Retenir le chemin en plus de la destination permet de mieux voir où on est et où on va.

L'élève de pur esprit matheux qui abuse[3] pose : $y = \log_a(b)$ et $x = \log_b(a)$.
Il traduit : $a^y = b$ et $b^x = a$.
Il reporte : $a^y = b$ et $(a^y)^x = a$.
Il simplifie : $a^y = b$ et $a^{x.y} = a$.
Dans la seconde, il identifie que $x.y$ vaut nécessairement 1.
Il a donc $x.y = 1$ c'est à dire $\log_a(b). \log_b(a) = 1$.

On ne connaît pas $\log_2(3)$ ni $\log_3(2)$ mais on sait qu'ils sont inverse l'un de l'autre.
On sait aussi que $\log_2(3)$ est entre $\log_2(2)$ et $\log_2(4)$ c'est à dire entre 1 et 2.

On veut montrer $\log_2(125) < 7$ autrement que par « c'est $6,9657$ et des poussières ».
Posons $y = \log_2(125)$. On a donc $2^y = 125$.
Et on sait aussi $2^7 = 128$ (qui n'a jamais compté 2,4, 8, 16, 32, 64, 128 et ainsi de suite, en jouant sur son smartphone

2. ce qui explique que a ne peut valoir 1, et logiquement, il n'y a pas de logarithme de base 1, ni de logarithme de base négative
3. celui qui dit « pourquoi je retiendrais ça, je peux le retrouver sans effort »

à 2048 ?).
On a donc $2^y < 2^7$, d'où par croissance de l'exponentielle de base 2 : $y < 7$.

∘17∘

Résolvez $\int_0^{\ln(7)} \frac{e^x}{a+e^x}.dx = \ln(3)$ d'inconnue a réelle (trouvez la forme en $\frac{u'}{u}$ cachée).

Souhaitons de tout cœur que a soit positive pour ne pas avoir de dénominateur nul.

L'équation devient vite $\ln\left(\frac{a+e^{\ln(7)}}{a+e^0}\right) = \ln(3)$.

Par injectivité du logarithme[4] : $\frac{a+7}{a+1} = 3$.

On résout par produit en croix : $a + 7 = 3.a + 3$. La solution unique est $\boxed{a = 2}$

∘18∘

♠ Le critère de divisibilité par 7 est le suivant :
« pour savoir si un nombre donné est divisible par 7, efface le chiffre, soustrais le double du chiffre des unités ; ton nombre initial est multiple de 7 si et seulement si l'entier obtenu est multiple de 7 »
Par exemple partant de 456239, on construit $45623 - 2.9$ qui vaut 45605.
Tiens, d'ailleurs, plutôt que 45605, regardons $4560 - 2.5$ (qui vaut 4550).
Et pour 4550, on va regarder $455 - 2.0$. Et ensuite $45 - 2.5$.
Comme 35 est multiple de 7, tous les entiers concernées sont multiples de 7.
Justifiez la validité de ce test.
Appliquez le pour trouver le chiffre qui manque pour faire de 1#4321765 soit un multiple de 7, sans poser la division.

On part donc d'un nombre N qui s'écrit « un entier a suivi d'un chiffre b ».
C'est quoi « un entier a suivi du chiffre b » ? C'est $10.a + b$.
On a donc $n = 10.a + b$.

Et on construit « l'entier moins de double du chiffre », c'est à dire $n' = a - 2.b$.

L'histoire est « n est multiple de 7 si et seulement si n' est multiple de 7 ».

Premier sens.
On suppose que n est multiple de 7. On veut montrer que n' l'est aussi.
On traduit : $10.a + b$ est multiple de 7.
On multiplie par 5 : $50.a + 5.b$ est multiple de 7.
On enlève $49.a$ qui est assurément multiple de 7 : $a + 5.b$ est multiple de 7.
On soustrait $7.b$ qui est multiple de 7 : $a - 2.b$ est multiple de 7. C'est lui n'. Gagné.

Second sens.
On suppose que n' est un multiple de 7.
On traduit : $a - 2.b$ est multiple de 7.
On multiplie par 10 : $10.a - 20.b$ est multiple de 7.
On ajoute $21.b$ qui est multiple de 7 par construction : $10.a + b$ est multiple de 7.

On a passé notre temps à utiliser que l'ensemble des multiples de 7 est stable par addition. Et que certains nombres sont multiples évidents de 7.
Et on n'a pas écrit partout des 7.k qui ne sont pas des maths...

∘19∘

♡ *ou* ♣ L'élève Ach-Sethprof a écrit $128 + 257 = 381$. Vous voulez lui dire que c'est faux. Mais vous constatez qu'il n'a pas le même nombre de doigts que vous et compte dans une autre base... Laquelle ?

En base 8 par exemple, les chiffres vont de 0 à 7 , et le nombre s'écrivant 143 c'est $1.8^2 + 4.8^1 + 3.8^0$.

En base 8, on a donc $346 + 127 = 475$ *puisque* $\begin{array}{cccc} & 3 & {}^1 4 & 6 \\ + & 1 & 2 & 7 \\ \hline & 4 & 7 & 5 \end{array}$ *avec une belle retenue :* $6 + 7 = 13$ *donc* 5 *et je retiens* 1 *(une huitaine).*

En notant b la base, les nombres concernés sont

128	257	381
$b^2 + 2.b + 8$	$2.b^2 + 5.b + 7$	$3.b^2 + 8.b + 1$

L'équation permettant de trouver b devient $3.b^2 + 7.b + 15 = 8.b + 1$.

4. ou en passant à l'exponentielle

On trouve $b = 14$. Et c'est cohérent d'y trouver des chiffres 8.

La lise des chiffres en base 14 est

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D

∘20∘ ♣ Sachant qu'on a posé $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i.\theta} + e^{-i.\theta}}{2}$, montrez qu'il est quand même possible d'avoir $\cos(\theta) = 2$, mais à condition d'aller chercher θ dans $\mathbb{C}$.

On résout donc $e^{i.\theta} + e^{-i.\theta} = 4$ d'inconnue θ.

Quitte à changer de variable, résolvons $X + \dfrac{1}{X} = 4$ avec $X = e^{i.\theta}$.

On résout même $X^2 + 1 = 4.X$ de discriminant 12 : X peut valoir $2 + \sqrt{3}$ ou $2 - \sqrt{3}$.

On commence par $e^{i.\theta} = 2 + \sqrt{3}$.i.

On écrit $\theta = a + i.b$ avec a et b réels. On obtient $e^{i.a}.e^{-b} = 2 + \sqrt{3}$.

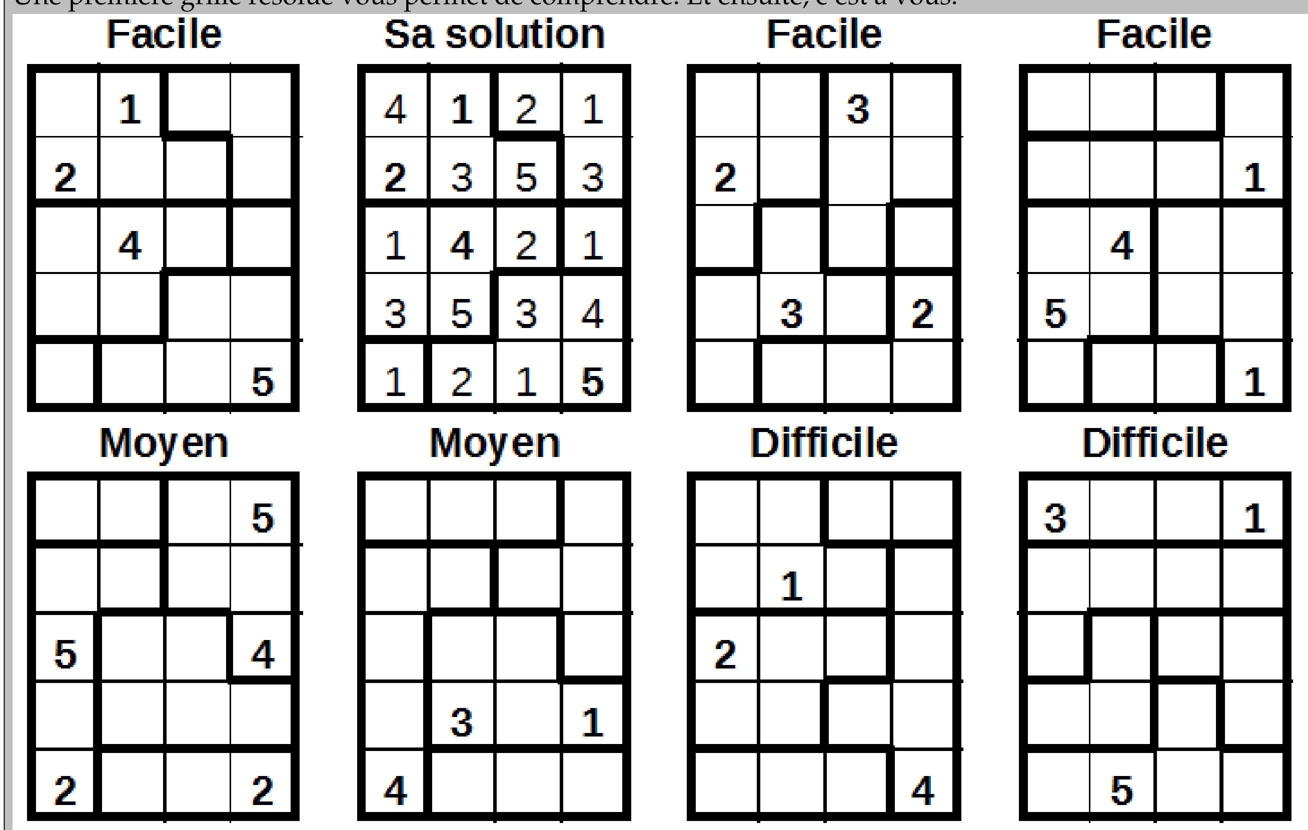
En identifiant module et argument : $e^b = (2 + \sqrt{3})^{-1}$ et $a = 0[2.\pi]$.

Allez, au final : $\boxed{S_\theta = \{2.k.\pi - i.\ln(2+\sqrt{3}) + \mid k \in \mathbb{Z}\} \bigcup \{2.k.\pi - i.\ln(2-\sqrt{3}) + \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

∘21∘ Sommes de trois carrés. On constate : $4^2 + 6^2 + 11^2 = 10^2 + 8^2 + 3^2$; $5^2 + 7^2 + 15^2 = 13^2 + 11^2 + 3^2$
$9^2 + 11^2 + 4^2 = 7^2 + 5^2 + 12^2$; $20^2 + 31^2 + 15^2 = 24^2 + 13^2 + 29^2$.

On généralise. Prendre trois entiers dont la somme est multiple de 3 (exemple : 4, 6 et 11). Calculer les deux tiers de cette somme (exemple : 14). Soustraire chaque entier à ce nombre (exemple : $14 - 4 = 10$, $14 - 6 = 8$ et $14 - 11 = 3$). La somme des carrés des trois premiers est égale à la somme des carrés des trois derniers (exemple : $4^2 + 6^2 + 11^2 = 10^2 + 8^2 + 3^2$).
Démontrez ce résultat en toute généralité.

∘22∘ ♣ Tectonic est un jeu développé depuis quelques années maintenant. Il s'agit de compléter une grille. La règle : une maison de taille n contient les entiers de 1 à n. Deux cases voisines ne peuvent pas contenir la même valeur. Une première grille résolue vous permet de comprendre. Et ensuite, c'est à vous.



Facile

	1		
2			
	4		
			5

Sa solution

4	1	2	1
2	3	5	3
1	4	2	1
3	5	3	4
1	2	1	5

Facile

3	1	3	1
2	5	2	5
4	1	4	1
2	3	5	2
4	1	4	3

Facile

2	1	3	4
3	5	2	1
1	4	3	4
5	3	5	2
2	1	2	1

Moyen

1	2	1	5
3	4	3	2
5	2	1	4
1	4	5	3
2	3	1	2

Moyen

1	2	3	2
3	5	1	4
1	4	2	3
2	3	5	1
4	1	2	3

Difficile

2	3	2	1
4	1	5	3
2	3	4	1
1	5	2	5
2	3	1	4

Difficile

3	4	2	1
2	1	5	3
4	3	2	1
2	1	4	3
3	5	2	1

◦23◦

Posez ces opérations, sachant qu'on travaille en base 8 : $\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 5 \\ + & 4 & 3 & 7 \\ + & 1 & 2 & 1 \\ + & 6 & 5 & 0 \\ \hline = & & ? & \end{array}$ et $\begin{array}{ccccc} & & 1 & 2 & 5 \\ \times & & 7 & 2 & 1 \\ \hline & & & & \\ + & & & & * \\ + & & & * & * \\ \hline = & & ? & & \end{array}$ et $\begin{array}{ccccc} & 7 & 4 & 6 & 5 \\ - & 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline = & & ? & & \end{array}$

$\begin{array}{ccccc} & 1 & 1 & 1 & \\ & & 1 & 2 & 5 \\ + & & 4 & 3 & 7 \\ + & & 1 & 2 & 1 \\ + & & 6 & 5 & 0 \\ \hline & 1 & 5 & 5 & 5 \end{array}$ et aussi $\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & 2 & 5 \\ \times & & & & 7 & 2 & 1 \\ \hline & & & & 1 & 2 & 5 \\ + & & & 2 & 5 & 2 & * \\ + & 1 & 1 & 2 & 3 & * & * \\ \hline = & 1 & 1 & 5 & 1 & 4 & 5 \end{array}$ car $\begin{array}{ccccc} & & 2 & 4 & \\ & & 1 & 2 & 5 \\ \times & & & & 7 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}$

Passons à la soustraction.

Tout commence bien au début : $\begin{array}{ccccc} & 7 & 4 & 6 & 5 \\ - & 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline = & & & 5 & 1 \end{array}$

Mais tout à coup : $4-6$ n'est pas possible. Mais ce qui est possible, c'est $8+4-6$. On va piquer une huitaine au dessus.

$\begin{array}{ccccc} & 6 & 8+4 & 6 & 5 \\ - & 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline = & & & 5 & 1 \end{array}$ c'est bon, on peut continuer : $\begin{array}{ccccc} & 6 & 8+4 & 6 & 5 \\ - & 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline = & 4 & 6 & 5 & 1 \end{array}$

Et on peut vérifier : $\begin{array}{ccccc} & 1 & & & \\ & 4 & 6 & 5 & 1 \\ + & 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline = & 7 & 4 & 6 & 5 \end{array}$

◦24◦

A partir de quelle valeur de n l'entier $n!$ est il divisible par 2021 ?

Pour quelles valeur de n l'entier $\dfrac{(2.n)!}{n!}$ est il divisible par 2021 ?

On peut écrire $n \geqslant 2021 \Rightarrow 2021$ *divise* $n!$.

Mais la chose a lieu avant. En effet, $2021 = 43 \times 47$.

Il faut et il suffit qu'il y ait un facteur 43 et un facteur 47 dans le produit.

C'est vrai si et seulement si (équivalence) n dépasse 47.
$(n \geqslant 47) \Leftrightarrow (2021 \mid n!)$.

La notation pour « a divise b » est « $a \mid b$.
La quantification est $\exists k \in \mathbb{Z},\ b = k.a$.
Et si vous écrivez juste $b = k.a$ sans avoir quantifié k, c'est que vous n'avez jamais fait de maths... Ce n'est pas grave, on est là pour ça...

On veut ensuite que le produit $(n+1).(n+2)\dots(2.n)$ contienne 43 et 47 ou même un de leurs multiples.
A compléter.

∘25∘ On sait : $\cos(\theta) = \dfrac{2}{5}$. Calculez $\cos(2.\theta)$ et $\cos(4.\theta)$.
On sait aussi $\cos(\varphi) = \dfrac{1}{5}$. Quelles sont les valeurs possibles de $\sin(\theta+\varphi)$?

On a sans effort : $\cos(2.\theta) = 2.\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{17}{25}$ (on est passé dans un autre quadrant).

De même : $\cos(4.\theta) = 2.\left(-\frac{17}{25}\right)^2 - 1 = \frac{-47}{625}$.

Ensuite, $\sin(\theta+\varphi) = \sin(\theta).\cos(\varphi) + \cos(\theta).\sin(\varphi)$.

On connaît (presque) : $|\sin(\theta)| = \sqrt{1 - \dfrac{4}{25}} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$

$|\sin(\varphi)| = \sqrt{1 - \dfrac{1}{25}} = \dfrac{\sqrt{24}}{5}$

Le sinus peut prendre quatre valeurs

$\dfrac{\sqrt{21}.1}{25}$	$+\dfrac{2.\sqrt{24}}{25}$
$\dfrac{\sqrt{21}.1}{25}$	$-\dfrac{2.\sqrt{24}}{25}$
$-\dfrac{\sqrt{21}.1}{25}$	$+\dfrac{2.\sqrt{24}}{25}$
$-\dfrac{\sqrt{21}.1}{25}$	$-\dfrac{2.\sqrt{24}}{25}$

∘26∘ a, b et c sont les trois longueurs des côtés d'un triangle. On pose alors : $x = a+b-c$, $y = a-b+c$ et $z = -a+b+c$. Montrez qu'ils sont tous positifs.
Montrez pour α et β positifs : $\alpha + \beta \geqslant 2.\sqrt{\alpha.\beta}$.
En l'appliquant à x et y puis x et z puis y et z, déduisez : $a.b.c \geqslant (a+b-c).(a-b+c).(-a+b+c)$.

Quitte à noter A, B et C les sommets du triangle et à poser $\boxed{AB = c \mid BC = a \mid CA = b}$, on doit prouver $a+b \geqslant c$ par exemple.
Ceci se ramène à $AB \leqslant AC + CB$. C'est qu'on appelle inégalité triangulaire *(on va plus vite de A à B en ligne droite qu'en passant par C)*.

On note ici l'intérêt qu'il y a eu à introduire des notations en plus.

Pour prouver $\sqrt{\alpha.\beta} \leqslant \alpha + \beta$ *(qui reviendra souvent cette année)*, on lit une indication plus loin dans le devoir : $(\sqrt{a} - \sqrt{\beta})^2$.
Ce nombre est un carré de réel ; il est positif.
Ce nombre se développe en $\alpha - 2.\sqrt{\alpha}.\sqrt{\beta} + \beta$.
On a donc $\alpha - 2.\sqrt{\alpha}.\sqrt{\beta} + \beta \geqslant 0$.
On fait passer de l'autre côté : $\alpha - 2.\sqrt{\alpha}.\sqrt{\beta} + \beta \geqslant 2.\sqrt{\alpha.\beta}$.

Cette formule est un classique, on l'appelle comparaison des moyennes, et on se souvient de sa démonstration...

Puisque l'on nous dit de l'écrire pour quelques couples, on le fait :
$2.\sqrt{x.y} \leqslant x + y = a+b-c+a-b+c = 2.a$
$2.\sqrt{y.z} \leqslant y + z = a-b+c-a+b+c = 2.c$
$2.\sqrt{z.x} \leqslant z + x = -a+b+c+a+b-c = 2.b$.
On multiplie terme à terme ces inégalités entre réels positifs :
$8.\sqrt{x.y.y.z.z.x} \leqslant 2.a.2.c.2.b$
On simplifie par 8 sans changer le sens des inégalités : $\sqrt{x^2.y^2.z^2} \leqslant a.b.c$.
C'est ce qui était attendu.

Extrait d'un sujet d'Olympiade ou de truc de ce genre.
Simple question : qui d'entre vous y serait parvenu sans les questions intermédiaires.
Et même avec...

◦27◦ Calculez $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$. Justifiez : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $\cos\left(\frac{17.\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et calculez $\sin\left(\frac{17.\pi}{12}\right)$.
Représentez graphiquement $\left(\theta \longmapsto \cos\left(\theta+\frac{\pi}{12}\right)\right) + \left(x \longmapsto \cos\left(x+\frac{3.\pi}{4}\right)\right) + \left(t \longmapsto \cos\left(t+\frac{17.\pi}{12}\right)\right)$.

Pour $\cos(\pi/12)$, toute l'astuce est d'écrire $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$	$=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$ $+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$	$=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$ $-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\left(\frac{17.\pi}{12}\right)$	$=\cos\left(\frac{2.\pi}{3}+\frac{3.\pi}{4}\right)$	$=\cos\left(\frac{2.\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{3.\pi}{4}\right)$ $-\sin\left(\frac{2.\pi}{3}\right).\sin\left(\frac{3.\pi}{4}\right)$	$=\frac{-1}{2}.\frac{-\sqrt{2}}{2}$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\left(\frac{17.\pi}{12}\right)$	$=\sin\left(\frac{2.\pi}{3}+\frac{3.\pi}{4}\right)$	$=\sin\left(\frac{2.\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{3.\pi}{4}\right)$ $+\cos\left(\frac{2.\pi}{3}\right).\sin\left(\frac{3.\pi}{4}\right)$	$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{-\sqrt{2}}{2}$ $+\frac{-1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ensuite, on peut en profiter pour développer chaque application, en prenant la peine de mettre le même nom sur les variables muettes
. Rappelons en effet : $f = (t \longmapsto f(t)) = (x \longmapsto f(x)) = (u \longmapsto f(u))$ et ainsi de suite.

$\left(\theta \longmapsto \cos\left(\theta+\frac{\pi}{12}\right)\right)$	$=\left(\theta \longmapsto \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\cos(\theta)\right)$	$-\left(\theta \longmapsto \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\sin(\theta)\right)$
$\left(\theta \longmapsto \cos\left(\theta+\frac{3.\pi}{4}\right)\right)$	$=\left(\theta \longmapsto \frac{-\sqrt{2}}{2}.\cos(\theta)\right)$	$-\left(\theta \longmapsto \frac{\sqrt{2}}{2}.\sin(\theta)\right)$
$\left(\theta \longmapsto \cos\left(\theta+\frac{17.\pi}{12}\right)\right)$.	$=\left(\theta \longmapsto \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\cos(\theta)\right)$	$-\left(\theta \longmapsto \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\sin(\theta)\right)$
la somme	$=\left(\theta \longmapsto 0.\cos(\theta)\right)$	$-\left(\theta \longmapsto 0.\sin(\theta)\right)$

Il ne reste plus rien. La somme est la fonction nulle.
Son graphe est un trait horizontal qui coïncide avec l'axe des abscisses.

Comme quoi il valait mieux simplifier avant de se lancer dans des calculs de dérivée... On est en maths.

Et si on est en physique, on reconnaît le principe du courant triphasé. je vous en reparlerai avec $j = e^{2.i.\pi/3}$, la célèbre racine cubique de l'unité.

◦28◦ * On veut résoudre l'équation $z^2 + (i-3).z + (32+4.i) = 0$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$. Calculez le discriminant Δ de ce trinôme.
On cherche alors un complexe δ de la forme $\alpha + i.\beta$ avec αet β réels vérifiant $\delta^2 = \Delta$ (qu'on ne peut pas noter $\delta = \sqrt{\Delta}$ car on est dans $\mathbb{C}$ [a]). Calculez $\alpha^2-\beta^2$, $2.\alpha.\beta$ et aussi $\alpha^2+\beta^2$ (pensez au module...).
Déduisez les valeurs possibles pour le couple $(\alpha,\ \beta)$.
Trouvez les solutions de l'équation.

a. dans $\mathbb{R}$,on choisit de prendre comme racine carrée le réel positif, mais dans $\mathbb{C}$, poseriez vous $\sqrt{-2.i} = 1-i$ ou $\sqrt{-2.i} = i-1$

On pose donc $a = 1$, $b = (i-3)$ et $c = 32+4.i$.
On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4.a.c = (i-3)^2 - 4.(32+4.i) = i^2 + 3^2 - 6.i - 128 - 16.i$.
Le discriminant vaut $\boxed{-120-22.i}$

Une question de simple calcul sur les complexes. Tout le monde pouvait la traiter, même ceux qui auront jugé que c'était se dévaloriser d'aller chercher un point si facilement acquis.
Rappelons qu'à vaincre sans péril, on triomphe sans gloire... mais ce qui est important c'est qu'on triomphe...

Ensuite, il ne faut pas parler du signe de $-120-22.i$, ça n'a aucun sens.

On cherche un couple de réels vérifiant $(a+i.b)^2 = -120-22.i$.
On développe et identifie : $\boxed{a^2-b^2 = -120 \quad 2.a.b = -22}$
On passe aussi au module : $|(a+i.b)^2| = |-120-22.i|$.*
Or, le module du carré est le carré du module. On se ramène à $|a+i.b|^2 = \sqrt{120^2+22^2}$.

On a comme suggéré alors : $a^2+b^2=\sqrt{14400+484}$. C'est cadeau, c'est $a^2+b^2=122$.

On résume $\boxed{a^2-b^2=-120 \quad a^2+b^2=122}$.
On somme : $2.a^2=2$, donc $|a|=1$.
On soustrait : $b^2=121$ donc $|b|=11$.
On choisit alors le signe de chacun en sachant que $2.a.b$ vaut -22.
On fixe par exemple $a=1$ et $b=-11$.

On peut vérifier : $\boxed{(1-11.i)^2=1^2+11^2.i^2-2.11.i=-120-22.i}$

On utilise alors la formule pour l'équation du second degré, issue de calculs algébriques valables tout autant dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{-b+\delta}{2.a}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2.a}$.
On trouve $\boxed{2-6.i \text{ et } 1+5.i}$

Même si ça ne sert ici à rien, on place les deux points dans le plan complexe et on interprète géométriquement le vecteur δ qui les sépare...

∘29∘

Classez du plus petit au plus grand : $(3!)^{2!}$, $(3^2)!$, $(2^3)!$ et $(2!)^{3!}$.
On est en mathématiques et non dans le domaine de la foi, il faut évidemment argumenter.

On calcule les quatre nombres :

$(3!)^{2!}$	$(3^2)!$	$(2^3)!$	$(2!)^{3!}$
6^2	$9!$	$8!$	2^6
36	beaucoup	un peu moins	64

On trie : $\boxed{36=(3!)^{2!}<64=(2!)^{3!}<8!=(2^3)!<9!=(3^2)!=362\,880}$

Et pour avoir de la rigueur, on intercale 100 entre 2^6 et $8!$.

∘30∘

♡ Simplifiez $\exp\Big(\ln\Big(\sqrt{7}-1)+\ln(\sqrt{7}+1)+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\ln(\sqrt{3}-\sqrt{2})\Big)$.

On aboutit sans effort à 6.

∘31∘

On rappelle la notation : $\prod_{k=1}^{n} a_k=a_1\times a_2\times a_3\ldots\times a_n$ (par exemple : $\prod_{k=1}^{n} k=n!$).
Simplifiez : $\prod_{k=1}^{n} k^2$ et $\prod_{k=1}^{n} 2^k$ et $\prod_{k=1}^{n} 2^n$.
Simplifiez pour tout n $\prod_{k=-n}^{n} k$.
Montrez que $\dfrac{27!}{(9!)^3}$ est entier ; est il multiple de 3 ?

Le produit $\prod_{k=1}^{n} k^2$ est un produit de carrés. C'est le carré d'un produit. Quel produit ? $\prod_{k=1}^{n} k=n!$. On a donc $\prod_{k=1}^{n} k^2=(n!)^2$.

Le produit $\prod_{k=1}^{n} 2^k$ s'écrit $2^1.2^2.2^2\ldots 2^n$. On réunit avec la règle $x^a.x^b=x^{a+b}$ et il reste $\prod_{k=1}^{n} 2^k=2^s$ avec s égal à la somme des exposants : $s=1+2+\ldots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\dfrac{n.(n+1)}{2}$. On a donc et $\prod_{k=1}^{n} 2^k=2^{\frac{n.(n+1)}{2}}$ ou même $\prod_{k=1}^{n} 2^k=\sqrt{2}^{n.(n+1)}$.

Dans le produit $\prod_{k=1}^{n} 2^n$, tous les termes sont égaux. C'est $2^n.2^n.2^n\ldots 2^n$. Il y a n termes. On trouve donc $(2^n)^n$. On compacte en $2^{(n^2)}$.

$\prod_{k=1}^{n} k^2 = (n!)^2$	$\prod_{k=1}^{n} 2^k = \sqrt{2}^{n.(n+1)}$	$\prod_{k=1}^{n} 2^n = 2^{(n^2)}$

Le produit $\prod_{k=-n}^{n} k$ est simple comme pas permis. Il vaut 0. Puisque au milieu il y a 0 parmi les facteurs.

Si l'on n'avait pas mis le facteur 0*, on aurait eu* $(-n).(-n+1)\dots(-3).(-2).(-1).1.2\dots n$ *et ceci aurait donné* $(n!)^2.(-1)^n$.

Le nombre $\dfrac{27!}{(9!)^2}$ est-il déjà un entier ? Rien n'est évident.

On l'écrit explicitement : $\dfrac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27}{(1.2.3.4.5.6.7.8.9)^3}$.

On arrange en $\dfrac{10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27}{2.3.4.5.6.7.8.9.2.3.4.5.6.7.8.9}$.

On simplifie ce qu'on peut : 10 et 2.5 ; 12 et 3.4 : $\dfrac{11.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27}{6.7.8.9.2.3.4.5.6.7.8.9}$.

On simplifie encore : 24 et 6.4 ; 21 et 7.3 : $\dfrac{11.13.14.15.16.17.18.19.20.22.23.25.26.27}{8.9.2.5.6.7.8.9}$.

On continue avec 18 et 2.9 ; 16.27 avec 8.6.9 : $\dfrac{11.13.14.15.17.19.20.22.23.25.26}{5.7.8}$.

On termine avec 20.14 contre 5.8.7 : $\dfrac{11.13.15.17.19.22.23.25.26}{1}$.

C'est un entier, et il est multiple de 3 : $2^2.3.5^3.11^2.13^2.17.19.23$.

∘32∘ On pose $f = x \longmapsto 8.x^4 - 8.x^2 + 1$ et $g = x \longmapsto 4.x^3 - 3.x$. Montrez : $f \circ g = g \circ f$.

Sachant $f = x \longmapsto 8.x^4 - 8.x^2 + 1$ et $g = x \longmapsto 4.x^3 - 3.x$, on doit se donner x et calculer $f(g(x))$ puis $g(f(x))$ et les comparer.
Pour $f(g(x))$ on a besoin de $(g(x))^2 = (4.x^3 - 3.x)^2 = 16.x^6 - 24.x^4 + 9.x^2$ et de son carré.
On n'invente pas de formule toute prête, mais on calcule efficacement :

	$16.x^6$	$-24.x^4$	$9.x^2$
$16.x^6$	$256.x^{12}$	$-384.x^{10}$	$+144.x^8$
$-24.x^4$	$-384.x^{10}$	$+576.x^8$	$-216.x^6$
$9.x^2$	$+144.x^8$	$-216.x^6$	$+81.x^4$

On regroupe tout : $2048.x^{12} - 6144.x^{10} + 6912.x^8 - 3584.x^6 + 840.x^4 - 72.x^2 + 1$.

On doit faire un calcul similaire avec $4.(8.x^4 - 8.x^2 + 1)^3 - 3.(8.x^4 - 8.x^2 + 1)$.
On l'écrit même $\Big(4.(8.x^4 - 8.x^2 + 1)^2 - 3\Big).(8.x^4 - 8.x^2 + 1)$ pour s'épargner des calculs lourds.

On a

	$8.x^4$	$-8.x^2$	$+1$
$8.x^4$	$64.x^8$	$-64.x^6$	$+8.x^4$
$-8.x^2$	$-64.x^6$	$+64.x^4$	$-8.x^2$
$+1$	$+8.x^4$	$-8.x^2$	$+1$

d'où $(8.x^4 - 8.x^2 + 1)^2 = 64.x^8 - 128.x^6 + 80.x^4 - 16.x^2 + 1$

Ensuite, que préférez vous entre

	$256.x^8$	$-512.x^6$	$+320.x^4$	$-64.x^2$	$+1$
$8.x^4$	$1024.x^{12}$	$-2048.x^{10}$	$+1280.x^8$	$-256.x^6$	$+4$
$-8.x^2$	$-1024.x^{10}$	$+2048.x^8$	$-1280.x^6$	$+256.x^4$	-4
$+1$	$256.x^8$	$-512.x^6$	$+320.x^4$	$-64.x^2$	$+1$

et $(256.x^8 - 512.x^6 + 320.x^4 - 64.x^2 + 1).(8.x^4 - 8.x^2 + 1) = 1024.x^{12} - 2048.x^{10} + 1280.x^8 - 256.x^6 + 4 - 1024.x^{10} + 2048.x^8 - 1280.x^6 + 256.x^4 - 4256.x^8 - 512.x^6 + 320.x^4 - 64.x^2 + 1$
On a bien $f(g(x)) = g(f(x))$ à l'issue de tous ces calculs rébarbatifs.

Représentez graphiquement : $\dfrac{(x^2-1).f''(x) + x.f'(x)}{f(x)}$.

On calcule ensuite $(x^2-1).f''(x) + x.f'(x) = (x^2-1).(96.x^2 - 16) + x.(32.x^3 - 16.x)$.
On trouve $128.x^4 - 128.x^2 + 16$.
Le hasard (ou le professeur) fait bien les choses :

$$\boxed{\frac{(x^2-1).f''(x) + x.f'(x)}{f(x)} = \frac{128.x^4 - 128.x^2 + 16}{8.x^4 - 8.x^2 + 1} = 16}$$

C'est un cadeau ! L'application à tracer est constante ! Le graphe est une droite horizontale !

Mais il y a un piège : le domaine de définition.
En effet, pour simplifier $\dfrac{128.x^4 - 128.x^2 + 16}{8.x^4 - 8.x^2 + 1}$ en 16 il faut quand même qu'il ne s'agisse pas de $\dfrac{0}{0}$.
Il faut donc évincer les racines du polynôme f pour le graphe :
$-\dfrac{\sqrt{4+2.\sqrt{2}}}{8}$, $-\dfrac{\sqrt{4-2.\sqrt{2}}}{8}$, $\dfrac{\sqrt{4-2.\sqrt{2}}}{8}$ et $\dfrac{\sqrt{4+2.\sqrt{2}}}{8}$

Le graphe est une droite, privée des quatre points correspondant à ces abscisses.

∘33∘ ♡ Sachant que 4 et -3 sont solutions, résolvez : $x^4 - 8.x^3 - 3.x^2 + 82.x - 24 = 0$ d'inconnue complexe x.

On factorise par $(x-4)$ puisque 4 est racine $x^4 - 8.x^3 - 3.x^2 + 82.x - 24 = (x-4).(x^3 - 4.x^2 - 19.x + 6$.
On recommence avec $(x+3)$: $x^4 - 8.x^3 - 3.x^2 + 82.x - 24 = (x-4).(x+3).(x^2 - 7.x + 2)$

Par intégrité [5], on a quatre solutions :

$$S_x = \left\{4,\ -3,\ \frac{7-\sqrt{41}}{2},\ \frac{7+\sqrt{41}}{2}\right\}$$

∘34∘ ♡ Résolvez $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{a+\cos(t)}.dt = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ d'inconnue a.

On calcule l'intégrale. On reconnaît une forme en $\dfrac{u'}{u}$.
L'équation devient $\Big[-\ln(a+\cos(t))\Big]_{t=0}^{t=\pi/2} = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.
On simplifie en $\ln(1+a) - \ln(a) = \ln(3/2)$.
On arrange en $\ln\left(\dfrac{1+a}{a}\right) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.
Quitte à passer aux exponentielles (bijectivité) : $\dfrac{1+a}{a} = \dfrac{3}{2}$.
Par produit en croix, l'unique solution est $a = 2$.

Mais ne peut on avoir aussi $\Big[-\ln(-a-\cos(t))\Big]_{t=0}^{t=\pi/2} = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ *? Bonne question.*

∘35∘ ♡ Sachant $\cos(a) = \dfrac{3}{5}$, $\cos(b) = \dfrac{20}{29}$ et $\cos(c) = \dfrac{7}{25}$, combien de valeurs différentes peut avoir $\cos(a+b+c)$?

On peut développer en deux étapes :
$\cos(a+b+c) = \cos(a).\cos(b).\cos(c) - \sin(a).\sin(b).\cos(c) - \sin(a).\cos(b).\sin(c) - \cos(a).\sin(b).\sin(c)$.
Les cosinus sont connus.
Les sinus aussi. Aux signes près. $|\sin| = \sqrt{1-\cos^2}$.
On a huit choix de signes pour les sinus.

$\sin(a) = 4/5$	$\sin(b) = 21/29$	$\sin(c) = 24/25$
$\sin(a) = 4/5$	$\sin(b) = 21/29$	$\sin(c) = -24/25$
$\sin(a) = 4/5$	$\sin(b) = -21/29$	$\sin(c) = 24/25$
$\sin(a) = 4/5$	$\sin(b) = -21/29$	$\sin(c) = -24/25$
$\sin(a) = -4/5$	$\sin(b) = 21/29$	$\sin(c) = 24/25$
$\sin(a) = -4/5$	$\sin(b) = 21/29$	$\sin(c) = -24/25$
$\sin(a) = -4/5$	$\sin(b) = -21/29$	$\sin(c) = 24/25$
$\sin(a) = -4/5$	$\sin(b) = -21/29$	$\sin(c) = -24/25$

Mais en regroupant les produits, on a quatre valeurs possibles pour $\cos(a+b+c)$.

∘36∘ ♡ Dérivez $x \longmapsto \ln(\sqrt[3]{x^4 - 4.x^3 + 6.x^2 - 4.x + 1})$ [a]

a. le résultat doit être très simple ; le raisonnement aussi...

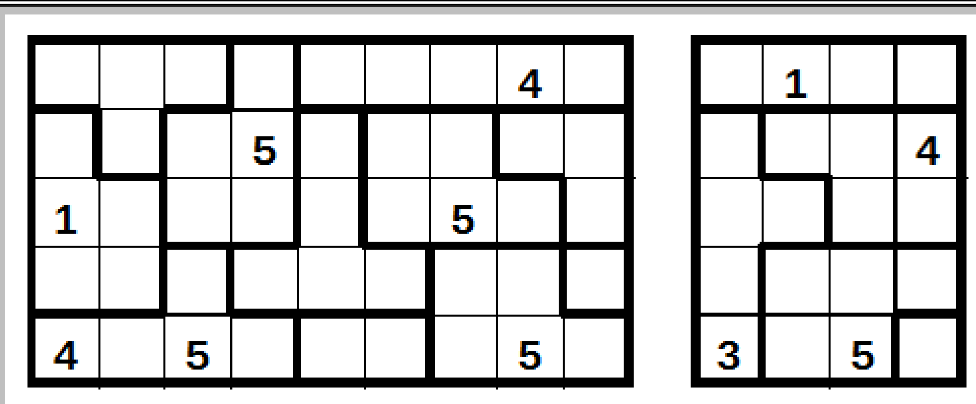
Facile : $x^4 - 4.x^3 + 6.x^2 - 4.x + 1 = (x-1)^4$ (formule du binôme de Newton).
L'application est donc $x \longmapsto \ln(\sqrt[3]{(x-1)^4})$ et même $x \longmapsto \ln((x-1)^{4/3})$ puis $x \longmapsto \dfrac{4}{3}.\ln(x-1)$.
On dérive et on trouve $x \longmapsto \dfrac{4}{3.(x-1)}$.

5. « un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul »

Avec un domaine égal à $]-\infty,\ 1[$ ou $]1,\ +\infty[$.

En effet, la vraie formule était même $x \longmapsto \ln(\sqrt[3]{|x-1|^4})$ et même $x \longmapsto \ln(|x-1|^{4/3})$ puis $x \longmapsto \dfrac{4}{3}.\ln(|x-1|)$.
Avec la même dérivée.

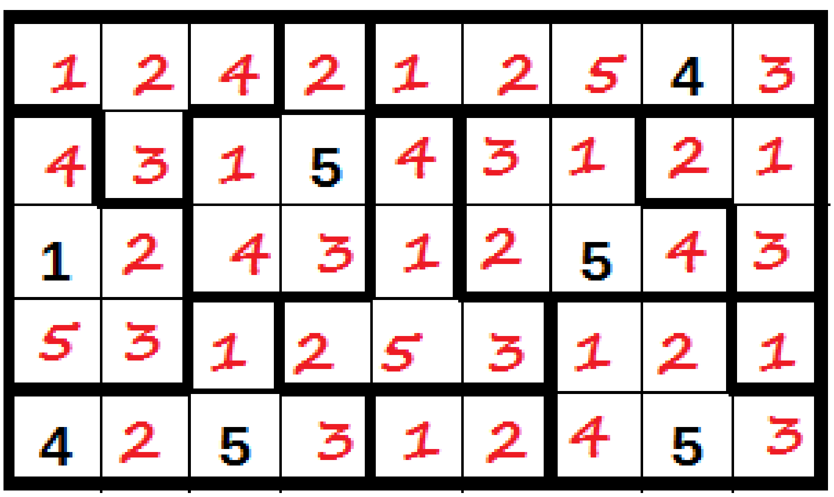
∘37∘

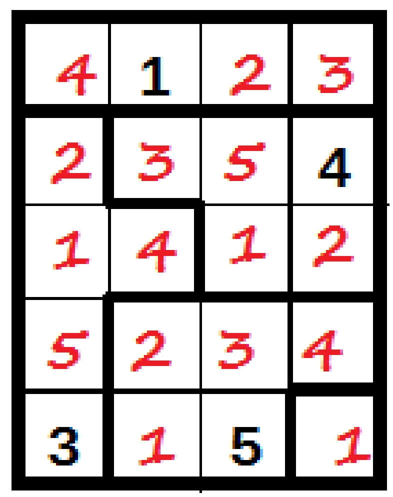


On rappelle : $-3 \leqslant 1 \leqslant 2$. Qu'obtenez vous en élevant cette inégalité au carré comme le font certains élèves ?

Tectonic est un jeu développé depuis quelques années maintenant. Il s'agit de compléter une grille. La règle : une maison de taille n contient les entiers de 1 à n. Deux cases voisines ne peuvent pas contenir la même valeur. Une première grille résolue vous permet de comprendre. Et ensuite, c'est à vous

On ne passe pas de $-3 \leqslant 1 \leqslant 2$ à $(-3)^2 \leqslant 1^2 \leqslant 2^2$.
L'application $x \longmapsto x^2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
Elle l'est juste sur $[0,\ +\infty[$.
La bonne formule sera dans le cours (et vos copies) : $\forall(a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant a \leqslant b \Rightarrow a^2 \leqslant b^2$.





∘38∘ ♡ Montrez : $\forall\theta \in \mathbb{R},\ \cos(2.\theta) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(\theta) \notin \mathbb{Q}$.

Au lieu de $\forall\theta \in \mathbb{R},\ \cos(2.\theta) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(\theta) \notin \mathbb{Q}$, on prouve sa contraposée :

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(2.\theta) \in \mathbb{Q}$$

Il suffit d'écrire $\cos(\theta) = \dfrac{p}{q}$ et d'utiliser la formule « $2.c^2 - 1$ » : $\cos(2.\theta) = \dfrac{2.p^2 - q^2}{q^2}$.

∘39∘ ♡ Retrouvez les coefficients : $\dfrac{X^2 + X + 1}{X^3 - \ldots X^2 - \ldots X + 6} = \dfrac{\ldots}{X-1} + \dfrac{\ldots}{X+2} + \dfrac{\ldots}{X-3}$.

$X^3 - \ldots X^2 - \ldots X + 6 = (X-1).(X+2).(X-3)$.
Ensuite, on nomme les trois coefficients cherchés et on réduit au dénominateur commun :

$$\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{X-3} = \frac{a.(X+2).(X-3) + b.(X-1).(X-3) + c.(X-1).(X+2)}{(X-1).(X+2).(X-3)}$$

Raisonnons par condition nécessaire et suffisante :
$X^2 + X + 1 = a.(X+2).(X-3) + b.(X-1).(X-3) + c.(X-1).(X+2)$.

Puis par condition nécessaire : en 1 : $1^2+1+1=a.(1+2).(1-3)+b.0.(1-3)+c.0.(1+2)$
en -2 : $(-2)^2-2+1=a.0.(-2-3)+b.(-2-1).(-2-3)+c.(-2-1).0$
en 3 : $3^2+3+1=a.(3+2).0+b.(3-1).0+c.(3-1).(3+2)$
On trouve a, b et c par conditions nécessaires. On vérifie en développant.

Finalement : $\boxed{\dfrac{X^2+X+1}{X^3-2.X^2-5.X+6}=\dfrac{-1/2}{X-1}+\dfrac{1/5}{X+2}+\dfrac{13/10}{X-3}}$

∘40∘ ♡ Calculez $(-1)^{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.(k+1)}$ en fonction de n.

L'entier $(-1)^{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.(k+1)}$ vaut 1 ou -1 suivant la parité de l'exposant.

On ne connaît pas la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.(k+1)$? Qu'importe. C'est une somme d'entiers qui sont tous pairs.

En effet, si k est pair, $k.(k+1)$ est de la forme $pair \times impair$
si k est impair, $k.(k+1)$ est de la forme $impair \times pair$

La somme d'entiers pairs est paire. L'exposant étant pair, $\boxed{(-1)^{\sum_{k=0}^{n}k.(k+1)} \text{ vaut toujours } 1}$

∘41∘ ♡ Trouvez les coefficients b et c (complexes) pour que l'équation $z^2+b.z+c=0$ admette pour racine $2+3.i$ et pour discriminant $2.i$.

Déjà $b^2-4.c$ vaut $2.i$.
Ensuite, $(2+3.i)^2+b.(2+3.i)+c$ est nul.
Ceci donne $c=5-12.i-(2+3.i).b$.

Attention, on n'identifie pas bêtement « partie réelle et partie imaginaire ». b et c ne sont pas forcément réels...

On a juste, en reportant : $b^2+(8+12.i).b-20+46.i=0$.

On résout en passant par le discriminant : $\Delta=(8+12.i)^2-4.(-20+46.i)=8.i=(2.e^{i.\pi/4})^2$.
b peut valoir $-5-7.i$ ou $-3-5.i$.

On reporte et on trouve c. Et on a deux équations.

D'autres approches sont possibles.

∘42∘ Quarante élèves attendent d'aller en TD d'informatique, répartis en trois groupes A, B et C.
Quelques élève passent du groupe A au groupe B. Et le nombre d'élèves du groupe C double car quelques élèves qu'on attendait encore reviennent de la cantine.
Il y a maintenant autant d'élèves dans chacun des trois groupes ? Combien d'élèves au total ? (ne comptez pas dans la salle, il ne s'agit pas forcément de notre classe).

On part des effectifs des trois groupes : a, b et c. On sait $a+b+c=40$.

On regarde ce qu'il se passe

	groupe A	groupe B	groupe C
début	a	b	c
certains passent de A à B	$a-k$	$b+k$	c
certains reviennent de la cantine	$a-k$	$b+k$	$2\times c$
ils sont autant dans chaque groupe	$a-k=b+k=2\times c$		

On somme les effectifs
On extrait des deux premières : $k=\dfrac{a-b}{2}$. On reporte dans la troisième : $b+\dfrac{a-b}{2}=2.c$. On obtient $a+b=4.c$.
Mais $a+b$ est égal à $40-c$ (nombre initial d'élèves).
On trouve $40-c=4.c$. On trouve $c=8$.
Il y a 48 élèves dans la classe, trois groupes de 16. C'est réaliste.

	groupe A	groupe B	groupe C
début	32	0	8
certains passent de A à B	16	16	8
certains reviennent de la cantine	16	16	16

ou

	groupe A	groupe B	groupe C
début	21	11	8
5 passent de A à B	16	16	8
certains reviennent de la cantine	16	16	16

Ou encore

	groupe A	groupe B	groupe C
début	23	9	8
7 passent de A à B	16	16	8
certains reviennent de la cantine	16	16	16

	groupe A	groupe B	groupe C
début	43	-11	8
17 passent de A à B	16	16	8
certains reviennent de la cantine	16	16	16

Il y a beaucoup de possibilités. Mais 48 élèves !

∘43∘ La somme de ses chiffres est la différence entre le nombre et 94. Qui est ce nombre ?

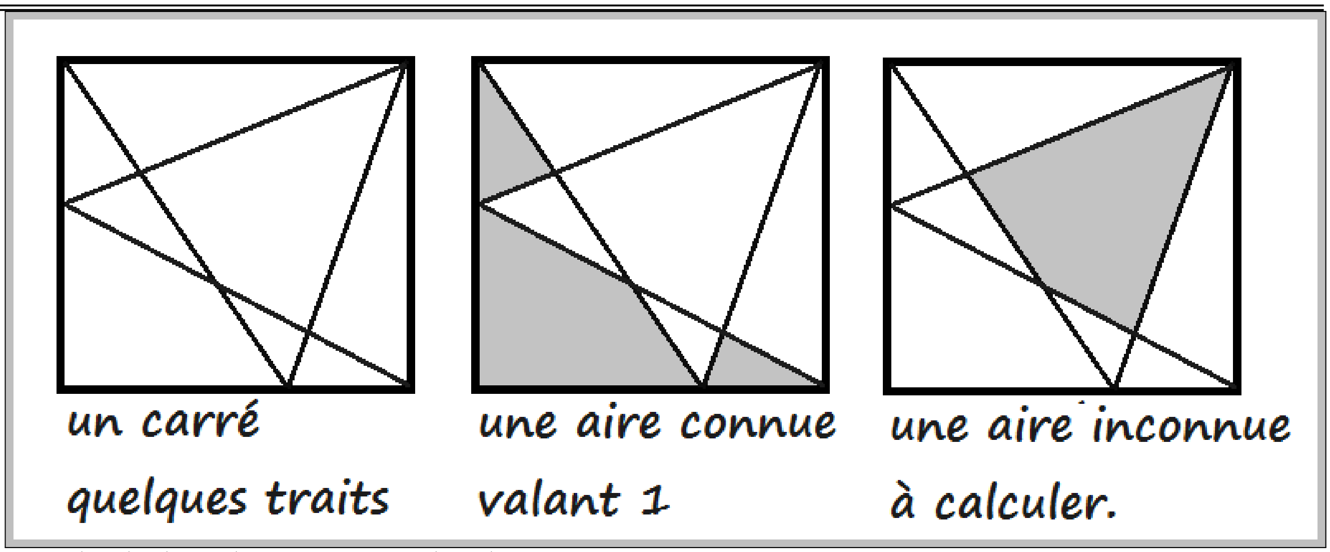
Ecrivons ce nombre $n = \overline{ab}$. C'est $n = 10.a + b$ avec a et b deux chiffres.
Un chiffre c'est entre 0 et 9.
La somme de ses chiffres, c'est $a + b$.
La différence entre le nombre et 94, c'est $94 - n$ ou $n - 94$.
On nous dit donc $a + b = 94 - (10.a + b)$ ou $(10.a + b) - 94 = a + b$.

Résolvons déjà $a + b = 94 - (10.a + b)$. On trouve $9.a + 2.b = 94$.
Moi j'extrais $11.a = 94 - 2.b$ qui prouve que $11.a$ est pair.
C'est donc que a est pair.
Mais j'ai aussi : $a = \dfrac{94 - 2.b}{11}$.
Comme b est entre 0 et 9, a est entre $\dfrac{94}{11}$ et $\dfrac{76}{11}$ (environ $6,9$ et $8,5$).
On n'a plus le choix : l'entier pair a vaut 8.
On reporte pour trouver : $b = \dfrac{94 - 11.a}{2} = 3$. On confirme : $n = 83$. Et $\boxed{94 - 83 = 8 + 3}$

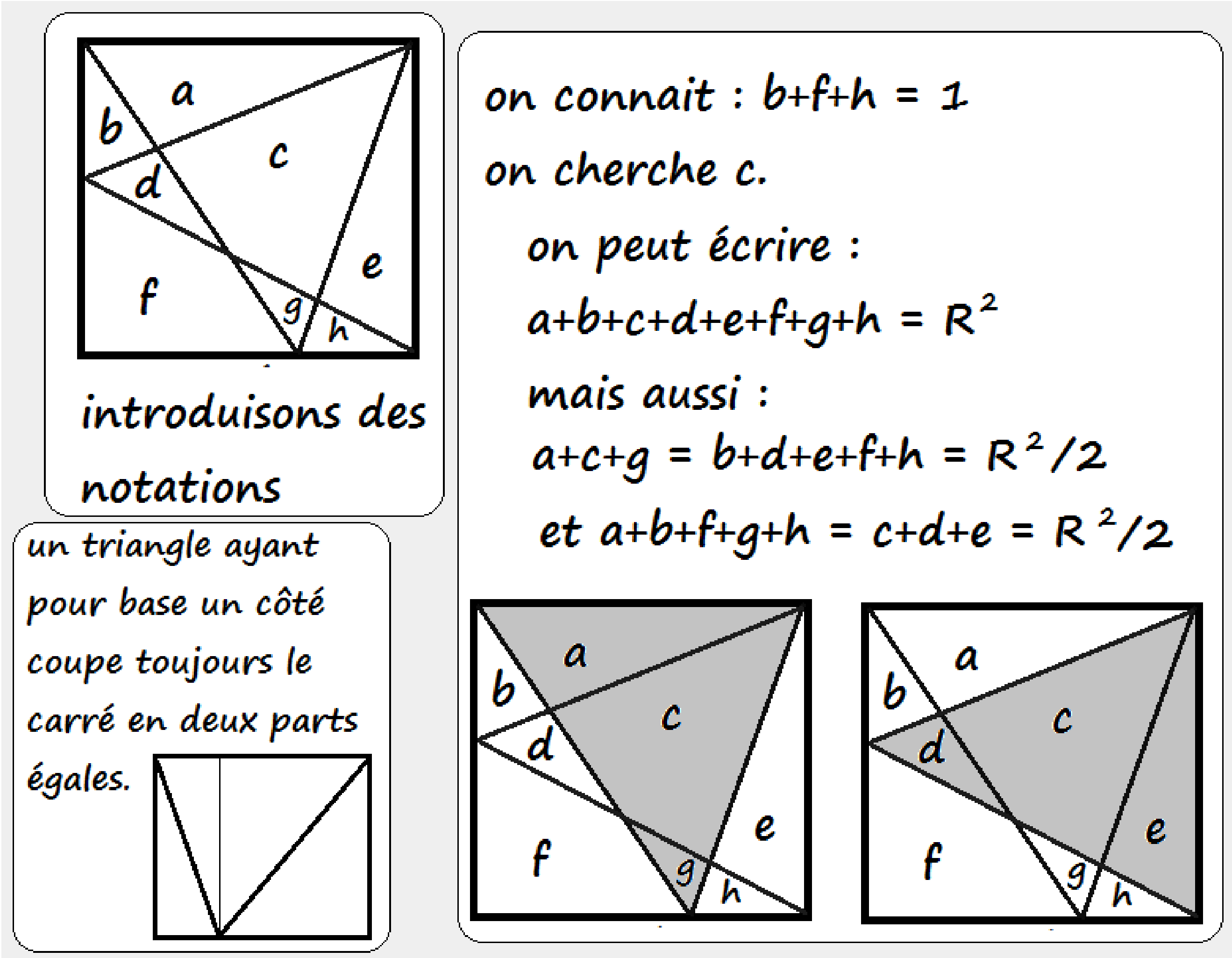
Résolvons donc cette fois $10.a - 94 = a + b$.
On trouve $9.a - b = 94$.
Ceci impose à a de dépasser 10. Impossible.

Il n'y a qu'une solution.

∘44∘



On traduit les hypothèses et on introduit des notations.
On rappelle ensuite que le découpage d'un carré par un triangle donne deux morceaux de même aire R^2 (en fait, quatre morceaux qui se regroupent justement deux à deux ; ou alors on écrit « base fois hauteur sur 2 »).



En combinant alors les informations $a+b+c+d+e+f+h = R^2$

$$\begin{aligned} a+c+g &= b+d+e+f+h = R^2/2 \\ a+b+f+g+h &= c+d+e = R^2/2 \end{aligned}$$

et l'hypothèse $b+f+h=1$
on arrive à $c = b+f+h$ et donc $c=1$.

Je me demande si on ne peut pas utiliser directement le « carpet theorem » (voir You-Tube).
Mais justement, si il faut le prouver, il faut exactement suivre le raisonnement ci dessus avec
$a+c+g = b+d+e+f+h$
$a+b+f+g+h = c+d+e$.

Sujet extrait de « Mind your decisions ».

◦45◦ Résolvez $x^2+\sqrt{2} \leqslant (1+\sqrt{2}).x$ d'inconnue réelle x.

On résout $x^2+\sqrt{2} \leqslant (1+\sqrt{2}).x$ en étudiant le signe du trinôme $x^2-(1+\sqrt{2}).x+\sqrt{2}$.
Pas besoin de calculer Δ ! On voit la somme et le produit, comme dans tout exercice de maths qui se respecte. [6]
$x^2-(1+\sqrt{2}).x+\sqrt{2} = (x-1).(x-\sqrt{2})$.
Le signe ne se retient pas par des formules par cœur « du signe de $-a$ entre les racines », mais par un tableau de signes et surtout par la vision de la parabole...
Ici, $\boxed{S = [1,\ \sqrt{2}]}$

◦46◦ Montrez $\left(e^{\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)}-1\right)^2 = 2$.

6. dans un exercice de maths, les racines sont issues d'un choix de l'esprit d'un humain, donc les racines sont « simples » ; dans les exercices de physique, c'est la prétendue réalité qui dicte les valeurs, et les racines sont... des trucs à calculer

Remarque : *Si la calculatrice était autorisée, vous calculeriez* $\left(e^{\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)}-1\right)^2$ *mais ça ne prouverait rien. Enfin, si, ça prouverait que vous placez une confiance aveugle en votre calculatrice et que donc les cours de maths, d'informatique, de physique et de S.I.I. n'ont servi à rien...*

Attaquons à partir du plus profond : $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}$ par conjugaison

$$\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)=2.\ln(\sqrt{2}+1)$$
$$\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)=\ln(\sqrt{2}+1)$$
$$e^{\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)}=\sqrt{2}+1$$

On soustrait 1 et on élève au carré et c'est fini.

Remarque : *Votre tort aura peut être été de développer* $(\sqrt{2}+1)^2$ *et de rester ensuite gêné devant* $\frac{1}{2}.\ln(3+2.\sqrt{2})$ *....*

◦47◦ On définit : $f=x\longmapsto\dfrac{x^2}{x^2-x}+\dfrac{x^3}{x^3+x^2}-\dfrac{2.x^2}{x^3-x}$. Représentez la graphiquement, après l'avoir simplifiée...
Représentez aussi le graphe de $f\circ f\circ f\circ f$.

On définit $f=x\longmapsto\dfrac{x^2}{x^2-x}+\dfrac{x^3}{x^3+x^2}-\dfrac{2.x^2}{x^3-x}$ sur un domaine convenable :

éviter 0, 1 et -1 puisque $x^2-x=x.(x-1)$
$x^3+x^2=x^2.(x+1)$
$x^3-x=x.(x-1).(x+1)$

Cette recherche permet de trouver un dénominateur commun autre que le gros produit[7], et aussi de simplifier par x

$$f(x)=\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{2.x}{(x-1).(x+1)}=\frac{(x^2+x)+(x^2-x)-2.x}{(x-1).(x+1)}=\frac{2.x^2-2.x}{(x-1).(x+1)}=\frac{2.x}{x+1}$$

Bref, une simple homographie $\boxed{x\longmapsto\dfrac{2.x}{x+1}\text{ à représenter sur }]-\infty,\ -1[\cup]-1,\ 0[\cup]0,\ 1[\cup]1,\ +\infty[}$ car il reste des contraintes de la forme initiale.

Mais alors f se représente par la matrice $\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$ (vous comprenez le 0 ?).

Composer les homographies, c'est multiplier les matrices : $f\circ f$ a pour matrice $\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}^2$ qui fait $\begin{pmatrix}4&0\\3&1\end{pmatrix}$

$(f\circ f)\circ(f\circ f)$ a pour matrice $\begin{pmatrix}4&0\\3&1\end{pmatrix}^2:\begin{pmatrix}16&0\\15&1\end{pmatrix}$

On peut même émettre une conjecture pour la forme générale. Mais ensuite, on n'oublie qu'il faut éviter toutes les valeurs hors du domaine initial de f comme -1, 0 et 0, puis du domaine de $f\circ f$ et ainsi de suite.

◦48◦ J'ai deux informations sur la suite u : voici ses premiers termes

n	0	1	2	3	4	5
u_n	9	-8	46	-2		

et elle est de la forme $\exists(a,\ b)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n,\ u_{n+2}=a.u_{n+1}+b.u_n$.
Trouvez a et b. Retrouvez les termes qui manquent.

On a un système pour la formule $u_{n+2}=a.u_{n+1}+b.u_n$:

n	0	1	2	3	4	5
u_n	9	-8	46	-2		
			$-8.a+9.b=46$	$46.a-8.b=-2$		

Deux équations pour trois inconnues, c'est exactement ce qu'il nous faut : $\begin{pmatrix}-8&9\\46&-8\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}46\\-2\end{pmatrix}$

Erreur : *Pardon, on avait juste deux inconnues, et pas trois comme j'indique ?*
Oui, a et b. Mais il y a aussi cette fille que vous croisez tous les matins dans le métro et qui peut être vous sourit sous son masque, inconnue, mais troublante.

Soit qu'on inverse la matrice : $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&9\\46&-8\end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix}46\\-2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{64-9.46}\begin{pmatrix}-8&-9\\-46&-8\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}46\\-2\end{pmatrix}$

7. une fois de plus, on est en maths, on réfléchit avant de calculer

Soit qu'on combine : $\begin{array}{rrcll} -8.a & +9.b & = & 46 & L1 \\ 46.a & -8.b & = & -2 & L2 \\ 350.a & & = & 8.46-2.9 & 8.L1+9.L2 \end{array}$: $\boxed{a \text{ vaut } 1 \text{ et } b \text{ vaut } 6}$

$\forall n,\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6.u_n$ et on complète « à la main » :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	9	-8				
	6.9	-8	$=46$			
		$6.(-8)$	$+46$	$=-2$		
			6.46	$+(-2)$	$=274$	
				$6.(-2)$	$+274$	$=262$

Trouvez α et β vérifiant $u_n = \alpha.2^n + \beta.(-1)^n$ pour tout n de $\{0,\ 1\}$. A-t-on alors $u_n = \alpha.2^n + \beta.(-1)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$?

Trouvez α et β vérifiant $u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.3^n$ pour tout n de $\{0,\ 1\}$. A-t-on alors $u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.3^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$?

Trouvez α et β vérifiant $u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.(-3)^n$ pour tout n de $\{0,\ 1\}$. A-t-on alors $u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.(-3)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$?

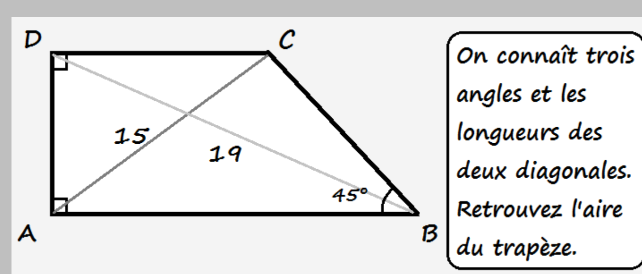
Pour ces trois questions, on résout un système pour trouver α et β, puis on regarde si la propriété est vraie déjà au rang suivant. Si ce n'est pas le cas, inutile de continuer, les deux suites comme (2^n) et $((-1)^n)$ ne sont pas les bonnes.
Si en revanche tout va bien encore pour n égal à 2, voire à 3, on pousse plus avant.

formule	$u_n = \alpha.2^n + \beta.(-1)^n$	$u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.3^n$	$u_n = \alpha.(-2)^n + \beta.(-3)^n$
système	$\alpha+\beta=9$	$\alpha+\beta=9$	$\alpha+\beta=9$
	$2.\alpha-\beta=-8$	$-2.\alpha+3.\beta=-8$	$-2.\alpha-3.\beta=-8$
solution	$\alpha=\dfrac{1}{3}$ et $\beta=\dfrac{26}{3}$	$\alpha=7$ et $\beta=2$	$\alpha=19$ et $\beta=-10$
rang 2	$46=(2)^n/3+26.(-1)^n/3$?	$46=7.(-2)^n+2.(3)^n$?	$46=19.(-2)^n-10.(-3)^n$?
	non	peut-être	non

Sur les trois propositions, s'il y en a une à propager par récurrence, c'est $\boxed{u_n = 7.(-2)^n + 2.3^n}$ pour tout n.
On l'a initialisée aux rangs 0 et 1 *(création du système)* et 2 *(vérification)*.
Supposons la proposition vraie pour deux rangs, et établissons la au rang suivant

$$\begin{array}{cccccc} \text{on suppose} & P_n \text{ vraie} & u_n = & 7.(-2)^n & +2.3^n & \\ \text{et} & P_{n+1} \text{ vraie} & u_{n+1} = & 7.(-2)^{n+1} & +2.3^{n+1} & \\ \hline \text{on somme} & u_{n+2} = & u_{n+1}+6.u_n = & 7.(-2)^{n+1} & +2.3^{n+1} & \\ & & & +6.7.(-2)^n & +6.2.2^n & \\ \hline & \text{on factorise} & u_{n+2} = & 7.(-2)^n.(-2+6) & +2.3^n.(3+6) & \\ & \text{on simplifie} & u_{n+2} = & 7.(-2)^n.4 & +2.3^n.9 & \\ & \text{on confirme :} & u_{n+2} = & 7.(-2)^{n+2} & +2.3^{n+2} & P_{n+2} \text{ est vraie} \end{array}$$

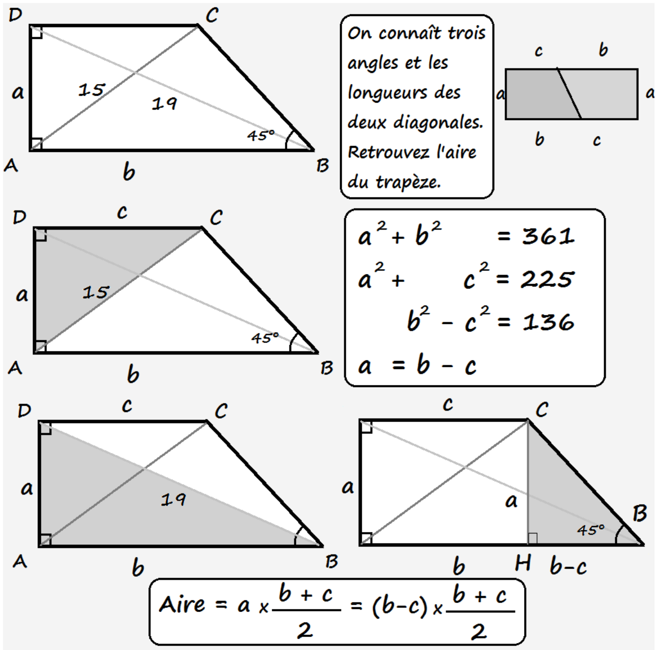
Sur la trapèze semi-rectangle suivant, on connaît les longueurs des deux « diagonales » ($AC = 15$ et $BD = 19$) ; retrouvez son aire (piste : Pythagore deux fois, soustraction, petit triangle isocèle).



Quel est l'exposant de 13 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de

∘49∘ $\displaystyle\prod_{k=0}^{16} \binom{16}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k}$.

Les deux exercices sont sans rapport.
C'est juste pour la mise en page.



On commence par nommer a, b et c les longueurs des trois côtés deux à deux orthogonaux.
Dans le triangle rectangle (DAB), on a $a^2+b^2=19^2$.
Dans le triangle rectangle (CDA), on a $a^2+c^2=15^2$.
On soustrait : $(b-c).(b+c)=136$.

Mais le demi-carré (CHB) (ou triangle rectangle iso-demi-sel) nous renseigne : $a=b-c$.

Or, l'aire d'un trapèze est « hauteur fois moyenne des bases ».
C'est donc ici $a.\dfrac{b+c}{2}$. Ce qui fait $(b-c).\dfrac{b+c}{2}$.
En regroupant $\boxed{Aire=68}$ (unité ?)

Déjà, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{16}{k}$ vaut 2^{16} (développement de $(1+1)^{16}$ par la formule du binôme). L'exposant de 13 est donc 0.

Regardons ensuite ce produit de $\dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$:
$$\frac{16!}{16!.0!}.\frac{16!}{15!.1!}.\frac{16!}{14!.2!}.\frac{16!}{13!.3!}.\frac{16!}{12!.4!}.\frac{16!}{11!.5!}.\frac{16!}{10!.6!}.\frac{16!}{9!.7!}.\frac{16!}{8!.8!}.\frac{16!}{7!.9!}.\frac{16!}{6!.10!}.\frac{16!}{5!.11!}.\frac{16!}{4!.12!}.\frac{16!}{3!.13!}.\frac{16!}{2!.14!}.\frac{16!}{1!.15!}.\frac{16!}{0!.16!}$$
Dans cette énumération, ne regardons que les termes contenant un facteur 13 (et jamais plus de toutes façons) :
$$\frac{13}{13.1}.\frac{13}{13.1}.\frac{13}{13.1}.\frac{13}{13.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.13}.\frac{13}{1.13}.\frac{13}{1.13}.\frac{13}{1.13}$$
On compte : dix sept au numérateur
huit au dénominateur.
Notre produit contient exactement 17^9 (et c'est même $2^{49}.3^6.5^9.7^8.11^5.13^9$).

∘50∘ Calculez $\displaystyle\int_0^{10}[t].dt$. La notation $[t]$ désigne la partie entière de t.

On dit « merci Chasles », et on découpe en chaque entier.
$$\int_0^{10}[t].dt=\int_0^1[t].dt+\int_1^2[t].dt+\ldots+\int_9^{10}[t].dt=\sum_{k=0}^{9}\int_k^{k+1}[t].dt.$$
On calcule : $\displaystyle\int_0^{10}[t].dt=\int_0^1 0.dt+\int_1^2 1dt+\ldots+\int_9^{10}9.dt=\sum_{k=0}^{9}\int_k^{k+1}k.dt.$
On calcule chaque intégrale « aire d'un rectangle de largeur 1 » :
$$\int_0^{10}[t].dt=0+1+\ldots+9=\sum_{k=0}^{9}k.$$
Par une formule toute prête : $\displaystyle\int_0^{10}[t].dt=45.$

Résolvez $\displaystyle\int_0^{x}[t].dt=15$ d'inconnue réelle positive x.

Le raisonnement précédent nous dit ce qu'il advient si on arrête l'intégrale en une abscisse entière.
$$\int_0^{n}[t].dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}[t].dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}k.dt=\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{n.(n-1)}{2}$$
(oh le joli escalier !).

On a d'ores et déjà $\displaystyle\int_0^{6}[t].dt=15.$
On a une solution.

Mais est ce la seule ?
Aucun autre entier ne convient.
Mais un réel ?
Toutefois, si on prend x plus grand que 6, on a $\int_0^x [t].dt = \int_0^6 [t].dt + \int_6^x [t].dt = 15 + \int_6^x [t].dt > 15$.
Et si on prend x plus petit que 6, on a cette fois $\int_0^x [t].dt = \int_0^6 [t].dt + \int_6^x [t].dt = 15 - \int_x^6 [t].dt < 15$.

La subtilité est quand même : il y a une solution avec x négatif, en sachant que la fonction intégrée est négative, mais l'intervalle dans le mauvais sens !

A-t-on : $\forall t \in \mathbb{R},\ [2.t] = 2.[t]$?

Il y a certes des x pour lesquels c'est vrai.
Mais ce n'est pas vrai pour tous (la négation de $\forall$ est $\exists$).
Il suffit d'un contre-exemple tel que $x = \frac{1}{2}$.

A-t-on : $\exists t \in \mathbb{R},\ [-t] = -[t]$?

Cette fois, c'est juste « en existe-t-il un » ? La réponse est « oui ». Par exemple 0.
Ou même tous les entiers, mais un $\exists$xemple suffit !

En revanche, on n'a pas du tout $\forall t \in \mathbb{R},\ [-t] = -[t]$.
Un non entier suffit pour avoir le contre-exemple.

A-t-on : $\forall t \in \mathbb{R},\ [t+\pi] = [t+3]$?

Non. Encore un contre-exemple qui par adjonction de $3,14$ et des poussières nous fait passer à l'entier bien supérieur.
Par exemple : $[0,9+\pi] = [4,14..] = 4$ et $[0,9+3] = [3,9] = 3$.

A-t-on : $\exists t \in \mathbb{R},\ [t+\pi] = [t] + [\pi]$?

Remercions encore 0 pour son rôle exemplaire. Ou même un entier.

A-t-on : $\forall t \in \mathbb{R},\ [t+[t]] = 2.[t]$?

On essaye avec x entier. C'est bon.
Et avec x demi-entier, comme $2,5$. C'est encore bon.
On essaye avec des trucs plus vicieux comme e. Encore bon.
Ça n'est pas une preuve, mais on se dit que ça doit marcher.
Et pour ce type de problème, le mieux est d'introduire des notations.
t donné quelconque, on pose $t = n + d$ avec n dans $\mathbb{Z}$ et d dans $[0,\ 1[$ (en fait, n est la partie entière de t et d sa partie fractionnaire).
On calcule $t + [t] = (n+d) + n = 2.n + d$. C'est un réel de partie entière $2.n$ (et de partie fractionnaire d).
On a donc $[t + [t]] = 2.n = 2.[t]$.

A-t-on : $\forall t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z},\ [t+[-t]] = -1$?

Un teste avec un non entier : $t = 3,2$: $[3,2 + [-3,2]] = [3,2 + (-4)] = [-8,8] = -1$.

Traitons le cas général avec les notations $t = n + d$ avec $n = [t]$ (entier) et $d = t - [t]$ (réel de $]0,\ 1[$).
On a alors $-t = -n - d = -n - 1 + (1 - d)$.
On reconnaît un entier et un réel de $]0,\ 1[$. On a donc $[-t] = -n - 1$.
On passe cette fois à $t + [-t] = (n+d) + (-n-1) = -1 + d$.
C'est un réel de partie entière -1.
On répond donc « vrai ».
Et on regrette le temps où un « exemple bien choisi » tenait lieu de preuve.


ÊTRE VIEUX
C'EST ÊTRE JEUNE DEPUIS PLUS LONGTEMPS QUE LES AUTRES
C'EST TOUT


MOI, SI JE N'AI PAS BU MON PREMIER CAFÉ DU MATIN
JE SUIS INCAPABLE DE FAIRE QUOI QUE CE SOIT
COMME, PAR EXEMPLE, BOIRE MON DEUXIÈME CAFÉ DU MATIN


EN GÉNÉRAL, C'EST QUAND ON EST EN BONNE SANTÉ
QU'ON TOMBE MALADE