LYCEE CHARLEMAGNE 2022 2023

Lundi 19 septembre

M.P.S.I.2

TD02

∘0∘ ♡ Le réel θ de $[0, \pi/2[$ a pour tangente $1/3$. Calculez son sinus et son cosinus.

Son cosinus vaut $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ *(en utilisant* $\dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$ *et en surveillant le signe).*

Et son sinus vaut $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ *(par* $\sin = \tan \times \cos$*).*

∘1∘ Pour tout a de $\mathbb{C}$, montrez $|a| = \Re e(a) \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$.
Montrez pour z et w dans $\mathbb{C}$: $(|z| + |w|)^2 - |z + w|^2 = 2.(|z.\overline{w}| - \Re e(z.\overline{w}))$.
Déduisez l'inégalité $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ et montrez qu'il y a égalité si et seulement si z et w sont sur la même demi droite issue de l'origine.

L'implication $(a \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow (|a| = \Re e(a))$ est triviale.

Réciproquement, on se donne a et on suppose $|a| = \Re e(a)$.
Déjà, sa partie réelle est positive car égale à un module.
Sa partie imaginaire est ensuite nulle, puisque en élevant au carré :
l'équation donne $|a|^2 = (\Re e(a))^2$ alors que la définition donne $|a|^2 = (\Re e(a))^2 + (\Im m(a))^2$.

Inutile de poser $z = x + i.y$ et $w = x' + i.y'$. On cherche le plus joli.

La clef est $|z + w|^2 = (z + w).\overline{(z + w)}$
$|z + w|^2 = (z + w).(\overline{z} + \overline{w})$
$|z + w|^2 = z.\overline{z} + w.\overline{w} + z.\overline{w} + \overline{z}.w$
$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + (z.\overline{w}) + \overline{(\overline{z}.w)}$
$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2.\Re e(z.\overline{w})$ pour z et w « orthogonaux », c'est le théorème de Pythagore sinon c'est la formule d'Al-Kashi

On soustrait : $(|z| + |w|)^2 - |z + w|^2 = 2.|z|.|w| - 2.\Re e(z.\overline{w})$.
Or, w et $\overline{w}$ ont le même module.

Comme nous la fait penser la première question, on affirme : pour tout complexe a, le réel $|a| - \Re e(a)$ est positif.
En effet, on a $\Re e(a) \leqslant |\Re e(a)| \leqslant |a|$ quitte à écrire cette fois effectivement $x \leqslant |x| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$.
On a donc en particulier $|z.\overline{w}| - \Re e(z.\overline{w}) \geqslant 0$.
On reporte dans la question (ou la réponse) précédente : $(|z| + |w|)^2 - |z + w|^2 \geqslant 0$.
Comme ce sont des réels positifs, ils sont dans le même ordre que leurs carrés : $(|z| + |w|) - |z + w| \geqslant 0$.

C'est l'inégalité triangulaire qui est ainsi prouvée.

Pour conclure : dans quel cas est ce une égalité ?
Il faut et il suffit que $|z.\overline{w}| - \Re e(z.\overline{w})$ soit nul.
Ceci revient à demander « réel positif ».
On écrit $z.\overline{w} = k$ avec k dans $\mathbb{R}^+$.
On reconnaît que z et w ont le même argument. Ils sont colinéaires, de même sens.

Pardon, comment on passe de $z.\overline{w} = k$ à « colinéaires de même sens » ? J'ai deux chemins.

$z.\overline{w} = k$ puis on multiplie par w $z.\overline{w}.w = k.w$ puis on simplifie $z.|w| = k.w$ et on divise par k : $w = \dfrac{|w|}{k}.z$	en posant $z = \rho.e^{i.\alpha}$ et $w = r.e^{i.\beta}$ on obtient $z.r.e^{i.(\alpha-\beta)} = k$ et en passant aux arguments : $\alpha - \beta$ est multiple de $2.\pi$.

∘2∘ Montrez que ni $x \longmapsto x^2$ ni $x \longmapsto (x + 1)^2$ n'est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, tandis que $x \longmapsto (x^2, (x + 1)^2)$ est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

1 et -1 ont la même mage par $x \longmapsto x^2$. Défaut d'injectivité.

0 et -2 ont la même image par $x \longmapsto (x + 1)^2$. Défaut d'injectivité.

Mais ensuite,à un réel, on associe un couple : $1 \longmapsto (1,\ 4)$

$$\begin{array}{l} 1 \longmapsto (1,\ 4) \\ -1 \longmapsto (1,\ 0) \\ 0 \longmapsto (0,\ 1) \\ -2 \longmapsto (4,\ 1) \end{array}$$

Deux réeles différents vont avoir des images différentes.
Par contraposée, prenons a et b ayant la même image (objectif : $a = b$).
On traduit : $(a^2,\ (a+1)^2) = (b^2,\ (b+1)^2)$.
On sépare : $a^2 = b^2$ et $(a+1)^2 = (b+1)^2$.

On obtient : $\begin{array}{ccc} a = b & & a+1 = b+1 \\ ou & et & ou \\ a = -b & & a+1 = -b-1 \end{array}$.

Par distributivité, ceci donne quatre possibilités : $\begin{array}{lccccl} & (a = b & et & a+1 = b+1) & & solution\ 1 \\ ou & (a = b & et & a+1 = -b-1) & & solution\ 2 \\ ou & (a = -b & et & a+1 = b+1) & & solution\ 3 \\ ou & (a = -b & et & a+1 = -b-1) & & solution\ 4 \end{array}$

On résout à chaque fois $\begin{array}{lcl} & (a = b) & solution\ 1 \\ ou & (a = b = -1) & solution\ 2 \\ ou & (a = b = 0) & solution\ 3 \\ ou & impossible & solution\ 4 \end{array}$. Dans tous les cas qui survivent : $a = b$.

∘3∘ Trouvez a et b sachant : $a + b = 15$ et $a^2 + b^2 = 30$.

$\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 15 \\ a^2 & + & b^2 & = & 30 \end{array}$ équivaut à $\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 15 \\ a^2 & + & b^2 & = & 30 \\ a^2 & +2.a.b+ & b^2 & = & 225 \end{array}$ puis à $\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 15 \\ a^2 & + & b^2 & = & 30 \\ & a.b & & = & 195/2 \end{array}$.

a et b sont les deux racines de $X^2 - 15.X + \frac{195}{2}$.

On trouve $\dfrac{15 + i.\sqrt{165}}{2}$ et son conjugué. On peut conclure en

$\boxed{S = \left\{\left(\dfrac{15+i.\sqrt{165}}{2},\ \dfrac{15-i.\sqrt{165}}{2}\right),\ \left(\dfrac{15-i.\sqrt{165}}{2},\ \dfrac{15+i.\sqrt{165}}{2}\right)\right\}}$ une paire de couples.

∘4∘ ♡ Montrez que $x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$ est injective sur son domaine de définition, sauf si $a.d$ est égal à $b.c$.

On se donne x et y et on suppose $\dfrac{a.x+b}{c.x+d} = \dfrac{a.y+b}{c.y+d}$.
Par produit en croix : $(a.x+b).(c.y+d) = (a.y+b).(c.x+d)$.
On développe, les $b.d$ et les a.c.x.y s'en vont.
Il reste en simplifiant $(a.b - d.c).(x-y) = 0$.
Par intégrité, si $a.d - b.c$ est non nul : $x = y$.

Sinon, on a une application constante comme $x \longmapsto \dfrac{4.x+6}{2.x+3}$ *(de domaine* $]-\infty,\ -2/3[\cup]-2/3,\ +\infty[$*).*

Remarque : Le passage par « la dérivée est positive » n'est pas une preuve.
La positivité de la dérivée ne donne que la croissance par intervalle.
L'application est strictement croissante (donc injective) sur $]-\infty,\ -d/c[$,
puis que $]-d/c,\ +\infty[$.
Mais qui dit qu'elle ne repasse pas aux mêmes endroits d'un intervalle à l'autre ?

∘5∘ ♡ Expliquez pourquoi les non mathématiciens acceptent sans difficulté les deux premières lignes, mais pas la troisième.

1/7	= 0,142857 142857142857142857142857...
6/7	= 0,857142 857142857142857142857142...
1	= 0,999999 999999999999999999999999...

Pour moi, c'est la preuve la plus limpide de $0,999\ldots = 1$.
Sinon, il y a sur internet l'article complet de Jean-Paul Delahaye sur $0,999\ldots = 1$.

∘6∘ Montrez que $x \longmapsto x^2 + \pi.x + 2$ est injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser sans preuve que π est irrationnel)..

On se donne a et b rationnels.
On suppose $f(a) = f(b)$ (objectif : $a = b$).

On obtient $(a-b).(a+b+\pi) = 0$ après calculs.

Le terme $a+b+\pi$ ne peut être nul *(sinon π serait le rationnel $-a-b$)*.
Par intégrité, $a-b$ est nul.

On a utilisé ici la forme « $f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$ ».
Elle est bien équivalente à « $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ ».

◦7◦

Montrez que l'application $n \longmapsto [n]$ n'est ni injective ni continue sur $\mathbb{R}^+$.
Montrez que l'application $n \longmapsto (n-[n]).([n]+1-n)$ est continue mais non injective sur $\mathbb{R}^+$.
Montrez $n \longmapsto n.(n-[n]).([n]+1-n)+n^2$ est continue et injective sur $\mathbb{R}^+$.

La fonction partie entière prend plusieurs fois la même valeur : $[0]=[0,1]$. Ceci est un contre-exemple pour l'injectivité.

Elle est continue en bien des points, mais elle n'est pas continue en 1 par exemple.
On a en effet $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}[x]=0 \neq [1]=1$ *(égale quand même à $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}[x]$)*.

On dira que la partie entière est une application càdlàg (en tout point elle est continue à droite et ademt une limite à gauche, éventuellement différente de sa limite à gauche).

C'est quoi ce $n \longmapsto (n-[n]).([n]+1-n)$?
Déjà, ce qui est trompeur, c'est que la variable réelle s'appelle n (nom qu'on réserve plutôt aux entiers).
Si le réel n s'écrit $n=p+d$ avec p entier et d entre 0 et 1, on a alors
$f(p+d)=(p+d-[p+d]).([p+d]+1-p-d)$
$f(p+d)=(p+d-p).(p+1-p-d)$
$f(p+d)=d.(1-d)$ (pourquoi pas).
Par exemple : $f(1,1)=0,1\times 0,9=0,09$
$f(3,1)=0,1\times 0,9=0,09$
$f(2,4)=0,4\times 0,6=0,24$
et ainsi de suite.
La disparition de p nous incite à dire que cette application est périodique, donc non injective.
D'ailleurs, $f(1,1)=f(3,1)$ est un contre-exemple.

> Si vous avez pris le même que moi, c'est vraiment le hasard.
> En général, les élèves se contentent de dire « priodique donc non injective ». Mais un vrai contre-exemple est toujours attendu par le matheux, car il est rigoureux.

Cette application est continue en tout point, alors même qu'elle contient une partie entière.
Plaçons nous en un point p entier. A droite, on a $f(x)=d.(1-d)$ avec $x=p+d$ et d qui va tendre vers 0.
$f(x)$ tend vers 0.
A gauche, on a $f(x)=f(p-1+d)$ avec d qui va tendre vers 1 par valeur inférieure.
On a quand même $f(x)=d.(1-d)$ et $f(x)$ tend vers 0.
La limite à droite est égale à la limite à gauche, et elles coïncident avec la valeur de la fonction, elle est continue.

En un point x non entier, l'application est localement définie par une formule simple et continue. L'application est continue.

Le seul problème était en effet aux points de raccordement.

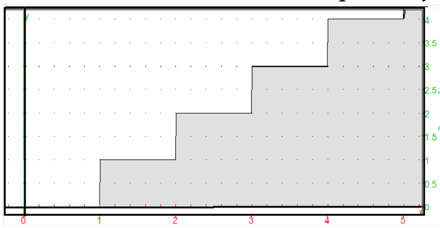
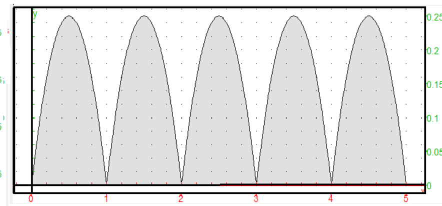
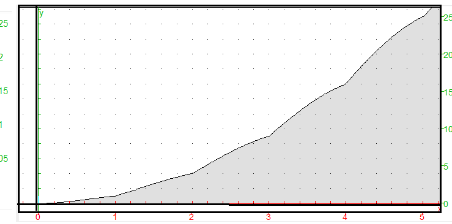
Et à présent $n \longmapsto n.(n-[n]).([n]+1-n)+n^2$.
gardonc nos notations $n=p+d$ avec p entier et d dans $[0,\ 1[$.
On a alors (en l'appelant encore f) : $f(x)=f(p+d)=(p+d).d.(1-d)+(p+d)^2$.
On développe et il reste un truc laid.
Mais il suffit de regarder intervalle par intervalle.
Sur $[p,\ p+1[$, on a $x \longmapsto x.(x-p).(p+1-x)+x^2$.

On constate que cette application est strictement croissante sur $[p,\ p+1[$.
En p, elle vaut p^2.
En $p+1$ à gauche, elle tend vers $(p+1)^2$.

La continuité sur chaque $]p,\ p+1[$ est acquise.

La continuité en $p+1$ est acquise aussi : limite à gauche $(p+1)^2$
valeur et limite à droite $(p+1)^2$ aussi.

Par raccoredement en chaque entier, la croissante « sur chaque intervalle » se transmet à croissante sur tout $\bigcup_p [p,\ p+1[$ qui donne $\mathbb{R}^+$.
Pour s'en convaincre en comparant $f(3,5)$ et $f(5,7)$: $f(3,5) < f(4) < f(5) < f(5,7)$.

∘8∘ * ♡ Simplifiez $\dfrac{\cos(a)+\cos(b)}{\sin(a)+\sin(b)}$ et $\dfrac{\cos(a)-\cos(b)}{\sin(a)-\sin(b)}$ puis $\dfrac{\cos(a)+\cos(b)}{\sin(a)-\sin(b)}$ (sans préciser les domaines).

Si l'on ne s'occupe pas (à tort) des domaines :

$$\frac{\cos(a)+\cos(b)}{\sin(a)+\sin(b)} = \frac{2.\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right).\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}{2.\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right).\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)} = \tan\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

On rappelle en effet :

$$\begin{array}{rcl} \cos(a) & = & \cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) - \sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(b) & = & \cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) + \sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \textit{on somme}\quad \cos(a)+\cos(b) & = & 2.\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \end{array}$$

en ayant juste la bonne idée d'écrire $a = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}$ et $b = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2}$.

Pareillement

$$\begin{array}{rcl} \sin(a) & = & \sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) + \cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(b) & = & \sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) - \cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \textit{on somme}\quad \sin(a)+\sin(b) & = & 2.\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \end{array}$$

De même $\dfrac{\cos(a)-\cos(b)}{\sin(a)-\sin(b)} = \dfrac{-2.\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right).\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}{2.\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right).\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)} = -\tan\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$.

Enfin $\dfrac{\cos(a)+\cos(b)}{\sin(a)-\sin(b)} = \dfrac{-2.\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right).\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}{2.\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right).\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)} = -\tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

∘9∘ ♡ Démontrez $\tan(\pi/8) = \sqrt{2}-1$ et calculez $\tan(3.\pi/8)$.
♡ Démontrez $\tan(\pi/12) = 2-\sqrt{3}$ et calculez $\tan(k.\pi/12)$ pour k de 0 à 12 (tableau).

Première méthode : on sait pour θ convenable : $\tan(2.\theta) = \dfrac{2.\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$.

On a donc en particulier : $1 = \tan(\pi/4) = \dfrac{2.\tan(\pi/8)}{1-\tan^2(\pi/8)}$.
Par produit en croix, $\tan(\pi/8)$ est racine de l'équation $T^2+2.T-1=0$ d'inconnue réelle T.

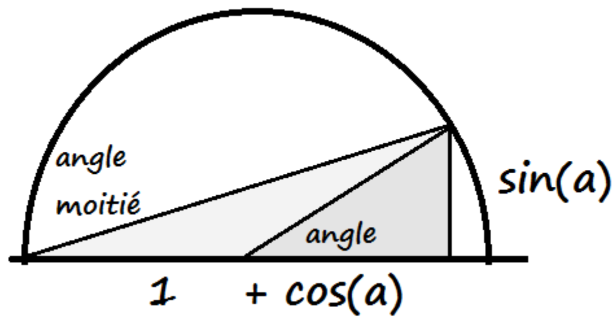
Le bourrin résout l'équation (moquons nous tous de lui).
Il trouve deux racines : $-1+\sqrt{2}$ et $-1-\sqrt{2}$.
Il élimine la racine négative car $\tan(\pi/8)$ est positive.
Par élimination : $\tan(\pi/8) = -1+\sqrt{2}$.

L'élève plus fin dit « je sais déjà qu'il y a une recaine positive et une racine négative (produit des racines), or $\tan(\pi/8)$ est positif, donc il conïncide avec la récaine positive.
Il ne reste qu'à vérifier que $\sqrt{2}-1$ est bien racine (et donc LA racine positive).

Deuxième méthode. On sait : $\cos(2.\theta) = \dfrac{1-\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}$.

Avace $\pi/8$, on obtient cette fois l'équation $\dfrac{1-T^2}{1+T^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
On résout : $\sqrt{2}.(1-T^2)=1+T^2$ puis $T^2=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.
On multiplie par la quantité conjuguée : $T^2=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}$.
Surtout, on ne développe pas (halte aux réflexes de calcul trop rapide). De $T^2=(\sqrt{2}-1)^2$ on déduit $T=\sqrt{2}-1$ (au signe près).
Comme $\tan(\pi/8)$ est positif, il reste $\sqrt{2}-1$.

Troisième méthode. On connaît ses formules de trigonométrie :
$\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}=\dfrac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.
Elles donnent immédiatement
$\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}-1$.
C'est bien sûr celle ci que choisit le mathématicien.



Pour $\tan(3.\pi/8)$, on reprend les mêmes idées avec $2.\dfrac{3.\pi}{8}$.
Ou alors : $\tan\left(\dfrac{3.\pi}{8}\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{1-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right).\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1+\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}+1}$.
Après conjugaison : $\tan\left(\dfrac{3.\pi}{8}\right)=1+\sqrt{2}$ (plus grande que $\tan(\pi/4)$).

A terminer.

◦10◦ On veut résoudre $216.x^3-432.x^2+270.x=52+\sqrt{2}$ d'inconnue réelle x. Calculez la somme des racines, la somme de leurs carrés, la somme de leurs inverses *(inutile d'utiliser les quantités conjuguées, gardez les dénominateurs laids...)*.
En ajustant α et β dans le changement de variable $c=\alpha.x+\beta$, mettez l'équation sous la forme $4.c^3-3.c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Démontrez : $4.\cos^3(\theta)-3.\cos(\theta)=\cos(3.\theta)$ pour tout réel θ.
Calculez $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.
Résolvez l'équation initiale.

L'équation n'est pas sous forme unitaire. Pour pouvoir identifier avec $(X-\alpha).(X-\beta).(X-\gamma)$, il faut écrire en fait $x^3-\dfrac{432}{216}.x^2+\dfrac{270}{216}.x-\dfrac{52+\sqrt{2}}{216}=0$.

Les formules du cours donnent

$\alpha+\beta+\gamma$	$\alpha.\beta+\beta.\gamma+\gamma.\alpha$	$\alpha.\beta.\gamma$
$\dfrac{432}{216}$	$\dfrac{270}{216}$	$\dfrac{52+\sqrt{2}}{216}$

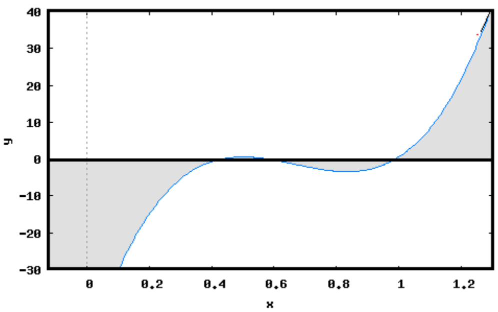
On applique *(avec $S^2-2.D$ pour la somme des carrés et $\dfrac{D}{P}$ pour la somme des inverses)*

$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{432}{216}$	$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{270}{52+\sqrt{2}}$

On part de $216.x^3-432.x^2+270.x=52+\sqrt{2}$ et on pose $x=\dfrac{c-\beta}{\alpha}$.
On obtient $216.\dfrac{c^3-3.c^2.\beta+3.c.\beta^2+\beta^3}{\alpha^3}-432.\dfrac{c^2-2.c.\beta+\beta^2}{\alpha^2}+270.\dfrac{c-\beta}{\alpha}=52+\sqrt{3}$.

On calcule le coefficient de c^2 : $-\dfrac{3.216.\beta}{\alpha^3}-\dfrac{432}{\alpha^2}$. On le veut nul :

$\boxed{\beta=-\dfrac{2}{3}.a}$



On calcule le coefficient de c^3 et celui de c :
$\dfrac{216}{\alpha^3}$ et $\dfrac{3.216.\beta^2}{\alpha^3}+\dfrac{2.432.\beta}{\alpha^2}+\dfrac{270}{\alpha}$
On les veut dans un rapport 4 à 3. On en déduit la valeur de α : 2.
Le changement est finalement $\boxed{c=3.x-2}$
On aboutit à l'équation $8.c^3-6.c=\sqrt{2}$.
Il faut encore la diviser par 2. *L'erreur consistait à imposer d'arriver à tout prix à* $4.c^3-3.c=\sqrt{2}/2$.

La formule $\cos(3.\theta)=4.\cos^3(\theta)-3.\cos(\theta)$ se démontre de plusieurs manières :

• $\cos(3.\theta)+\cos(\theta)=2.\cos\left(\dfrac{3.\theta+\theta}{2}\right).\cos\left(\dfrac{3.\theta-\theta}{2}\right)=2.\big(2.\cos^2(\theta)-1\big).\cos(\theta)$

• $\cos(3.\theta)=\dfrac{e^{3.i.\theta}+e^{-3.i.\theta}}{2}=\dfrac{(c+i.s)^3+(c-i.s)^3}{2}=\dfrac{(c^3+3.i.c^2.s-3.c.s^2-i.c^3)+(c^3-3.i.c^2.s-3.c.s^2+i.c^3)}{2}$
$\cos(3.\theta)=c^3-3.c.s^2=c^3-3.c.(1-c^2)$

• $4.\cos^3(\theta)-3.\cos(\theta)=4.\left(\dfrac{e^{i.\theta}+e^{-i.\theta}}{2}\right)^3-3.\dfrac{e^{i.\theta}+e^{-i.\theta}}{2}=\dfrac{(e^{i.\theta})^3+(e^{-i.\theta})^3}{2}=\cos(3.\theta)$

L'équation devient, en posant $c=\cos(\theta)$: $\cos(3.\theta)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
On en déduit les valeurs possibles pour θ : $\varepsilon.\left(\dfrac{\pi}{6}+2.k.\pi\right)$ avec k dans $\mathbb{Z}$ et ε dans $\{-1,\ 1\}$ *(pour le signe)*.

On divise par 3 : $\theta\in\left\{\varepsilon.\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2.k.\pi}{3}\right)\mid k\in\mathbb{Z},\ \varepsilon\in\{-1,\ 1\}\right\}$

On revient à c : $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2.k.\pi}{3}\right)\text{ avec } k \text{ décrivant } \mathbb{Z}}$

On doit calculer $\cos(\pi/12)$. On dispose de deux méthodes :

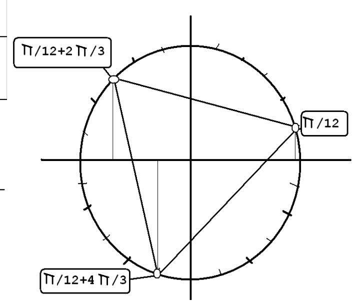
• $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1+\cos(\pi/6)}{2}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ et $\cos(\pi/12)>0$: $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

• $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

On préfèrera la méthode encadrée. De même, $\boxed{\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

On peut donc calculer les trois valeurs utiles :

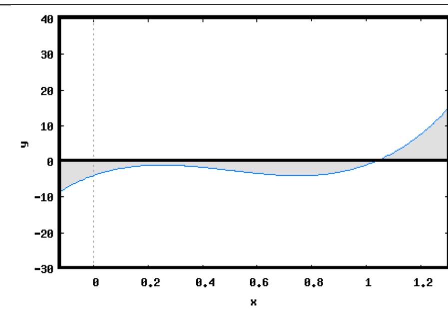
k	0	1	2
$\cos(\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2.k.\pi}{3}\right)$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
racine x $(=\dfrac{c+2}{3})$	$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+4}{12}$	$\dfrac{4-\sqrt{2}}{6}$	$\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+4}{12}$



On a de la chance : $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2.\pi}{3}=\dfrac{3.\pi}{4}$ dont le cosinus est simple.
En revanche, pour $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{4.\pi}{3}\right)$, on passe par $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right).\cos\left(\dfrac{4.\pi}{3}\right)-\sin(\dfrac{\pi}{12}\Big).\sin\left(\dfrac{4.\pi}{3}\right)$.
On peut vérifier la somme des racines...

Le professeur pose cette fois l'équation d'inconnue réelle x $48.x^3 - 72.x^2 + 27.x - 4 = 0$. L'élève Tonku de Tachaiz applique la méthode précédente et dit qu'il arrive à $\cos(3.\theta) = \dfrac{5}{3}$. Prouvez qu'il a raison *(en expliquant le changement de variable)*.
Vous vous seriez sans doute arrêté là, perplexe. Mais Tonku de Tachaiz ne connaît pas ses formules de Moivre et Euler et cherche à résoudre $\dfrac{e^{3.\theta} + e^{-3.\theta}}{2} = \dfrac{5}{3}$ (quelle est son erreur ?). Résolvez son équation en l'inconnue $e^{3.\theta}$.
Déduisez la valeur de θ.
Trouvez la racine réelle de l'équation initiale.

On trouve une translation pour effacer le terme de degré 2 :
$48.x^3 - 72.x^2 + 27.x - 4 = 0$ avec $x = y + \dfrac{1}{2}$:
$48.\left(y^3 + 3.\dfrac{y^2}{2} + 3.\dfrac{y}{4} + \dfrac{1}{8}\right) - 72.\left(y^2 + y + \dfrac{1}{4}\right) + 27.\left(y + \dfrac{1}{2}\right) - 4 = 0$ équivaut à $48.y^3 - 9.y - \dfrac{5}{2} = 0$.
On dilate : $y = a.c$: $48.a^3.c^3 - 9.a.c = \frac{5}{2}$. On ajuste $a = \frac{1}{2}$ pour avoir $\dfrac{48.a^3}{9.a} = \dfrac{4}{3}$. L'équation devient $6.c^3 - \dfrac{9}{2}.c = \dfrac{5}{2}$.
On multiplie par $\dfrac{2}{3}$ on arrive à $4.c^3 - 3.c = \frac{5}{3}$ comme Tonku de Tachaiz.



Le problème est que si on pose $c = \cos(\theta)$, on aboutit à $\cos(3.\theta) = \dfrac{5}{3} > 1$. C'est problématique pour un cosinus. La méthode "du cours" n'est donc pas valable.

On applique la fausse formule *(la vraie, c'est* $\cos(t) = \dfrac{e^{i.t} + e^{-i.t}}{2}$ *et pas* $\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$*)*. L'équation devient $\dfrac{e^{3.t} + \dfrac{1}{e^{3.t}}}{2} = \dfrac{5}{3}$ soit encore $3.e^{3.t} - 10 + 3.e^{-3.t} = 0$.
On pose $\varepsilon = e^{3.t}$ comme proposé. L'équation devient $3.\varepsilon - 10 + = 0$ ou encore $3.\varepsilon^2 - 10.\varepsilon + 3 = 0$. C'est une équation du second degré qui admet deux racines réelles : $\varepsilon_1 = 3$ et $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{3}$.
Ayant posé $\varepsilon = e^{3.t}$, on trouve $t = \dfrac{\ln(3)}{3}$ ou $t = -\dfrac{\ln(3)}{3}$.
On reporte dans $c = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ puisque l'élève Tonku de Lachaiz a oublié les i. On trouve $c = \dfrac{e^{\ln(3)/3} + e^{-\ln(3)/3}}{2} = \dfrac{\sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}{2}$.
Mais au fait, c'est légitime ? Si on pose $c = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$*, a-t-on bien* $4.c^3 - 3.c = \dfrac{e^{3.t} + e^{-3.t}}{2}$ *? La réponse est oui.*

Ayant c, on remonte à $y = \dfrac{c}{2} = \dfrac{\sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}{4}$. On termine par translation : $\boxed{x = y + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2 + \sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}{4}}$

On a utilisé ici non pas le cosinus, mais le cosinus hyperbolique : $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$*. Il existe aussi le sinus hyperbolique et la tangente de la même famille.*

∘11∘ * ♡ Montrez que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
(injective : deux éléments différents ont des images différentes).

On suppose f et g injective. Deux éléments différents ont des images différentes.
On montre que $g \circ f$ l'est aussi.
On prend a différent de b et on écrit des implications, même si ce n'est pas cohérent de les enchaîner :

$$\begin{array}{lll} a \neq b & \Rightarrow & f(a) \neq f(b) & car\ f\ injectivie \\ & \Rightarrow & g(f(a)) \neq g(f(b)) & car\ g\ injectivie \end{array}.$$

◦12◦ Vrai ou faux :

a	$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(\theta)\in\mathbb{Q}\Rightarrow\cos(2.\theta)\in\mathbb{Q}$
b	$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(\theta)\in\mathbb{Q}\Rightarrow\cos(\theta/2)\in\mathbb{Q}$
c	$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(\theta)\in\mathbb{Z}\Rightarrow\sin(\theta)\in\mathbb{Z}$
d	$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(\theta)\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sin(\theta)\in\mathbb{Q}$
e	$(\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(\theta)\in\mathbb{Q})\Rightarrow(\forall\theta\in\mathbb{R},\ \sin(\theta)\in\mathbb{Q})$
f	$\forall\theta\in]-\pi/2,\pi/2[,\ \tan(\theta)\in\mathbb{Q}\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ \tan(n.\theta)\in\mathbb{Q}$

a vrai, utiliser $\cos(2.\theta)=2.\cos^2(\theta)-1$ et les stabilités de $(\mathbb{Q},+,\times)$.

b faux : donner un contre-exemple tel que $\pi/2$.

c vrai : passer par $(\cos(\theta)\in\mathbb{Z})\Rightarrow(\cos(\theta)\in\{-1,0,1\})\Rightarrow(|\sin(\theta)|\in\{0,\ 1\})$.

d faux : contre-exemple avec $\pi/3$.

e vrai : du type Faux implique ce qu'on veut.

f vrai : on se donne θ, on suppose que $\tan(\theta)$ est rationnelle, et on montre par récurrence sur n que chaque $\tan(n.\theta)$ l'est aussi, en utilisant $\tan((n+1).\theta)=\dfrac{\tan(\theta)+\tan(n.\theta)}{1-\tan(\theta).\tan(n.\theta)}$.
Mais il reste un problème d'existence. Si on part de $\tan(\theta)=1$ (rationnel), on arrive à $\tan(2.\theta)$ n'existe même pas...

◦13◦ ♡ Sachant $\tan(\theta)=1/2$, calculez $\tan(2.\theta)$, $\tan(4.\theta)$, $\tan(8.\theta)$, $\tan(16.\theta)$ et enfin $\tan(20.\theta)$.
♣ En combien d'étapes pensez vous accéder à $\tan(2021.\theta)$?

En utilisant la formule $\tan(2.x)=\dfrac{2.\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$ autant de fois qu'il faut, on trouve

$\tan(\theta)$	$\tan(2.\theta)$	$\tan(4.\theta)$	$\tan(8.\theta)$	$\tan(16.\theta)$	$\tan(20.\theta)$
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{-24}{7}$	$\frac{336}{527}$	$\frac{354144}{164833}$	$\frac{-1476984}{9653287}$

Pour $\tan(20.\theta)$ on passe par $\tan(4.\theta+16.\theta)$.

Pour $\tan(2021.\theta)$, on peut monter pas à pas avec $\tan((n+1).\theta)=\dfrac{\frac{1}{2}+\tan(n.\theta)}{1-\frac{\tan(n.\theta)}{2}}$

$\tan(\theta)$	$\tan(2.\theta)$	$\tan(3.\theta)$	$\tan(4.\theta)$	$\tan(5.\theta)$	...	$\tan(2020.\theta)$	$\tan(2021.\theta)$

C'est long.

En utilisant $\tan(2^{n+1}.\theta)=\dfrac{2.\tan(2^n.\theta)}{1-\tan^2(2^n.\theta)}$, on trouve les valeurs de

$\tan(\theta)$	$\tan(2.\theta)$	$\tan(4.\theta)$	$\tan(8.\theta)$	$\tan(16.\theta)$	...	$\tan(512.\theta)$	$\tan(1024.\theta)$

Il suffit ensuite d'applier la formule $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}$ pour obtenir

avec	$\tan(36.\theta)$	et	$\tan(\theta)$	on a	$\tan(37.\theta)$
avec	$\tan(64.\theta)$	et	$\tan(37.\theta)$	on a	$\tan(101.\theta)$
avec	$\tan(128.\theta)$	et	$\tan(101.\theta)$	on a	$\tan(229.\theta)$
avec	$\tan(256.\theta)$	et	$\tan(229.\theta)$	on a	$\tan(485.\theta)$
avec	$\tan(512.\theta)$	et	$\tan(485.\theta)$	on a	$\tan(997.\theta)$
avec	$\tan(1024.\theta)$	et	$\tan(997.\theta)$	on a	$\tan(2021.\theta)$

Aurez vous un chemin plus rapide ?

◦14◦ Posez les opérations suivantes (on est en base 8) :

$$\begin{array}{rcccc} & & 2 & 4 & 7 \\ + & 1 & 3 & 5 & 7 \\ + & 6 & 1 & 5 & 3 \\ + & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline = & & ? & & \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & & 2 & 4 & 7 \\ \times & 4 & 2 & 2 & 1 \\ \hline = & & ? & & \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 1 & 2 & 4 & 7 \\ \times & 3 & 6 & 0 & 1 \\ \hline = & & ? & & \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 5 & 2 & 4 & 7 \\ - & 1 & 7 & 5 & 7 \\ \hline = & & ? & & \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & & 2 & 4 & 7 \\ - & 1 & 7 & 5 & 7 \\ \hline = & & ? & & \end{array}$$

Rappel : $7+7=8+6$ donc, je pose 6 et je retiens une huitaine.

$7+7+3+1 = 8+6+3+1 = 8+8+2$ je pose 2 et je retiens deux huitaines.

		1	2	2	
			2	4	7
+		1	3	5	7
+		6	1	5	3
+		1	2	1	1
=	1	1	2	1	2

A continuer.

∘15∘

♡ Démontrez $\tan(\pi/8) = \sqrt{2}-1$ et calculez $\tan(3.\pi/8)$.
♡ Démontrez $\tan(\pi/12) = 2-\sqrt{3}$ et calculez $\tan(k.\pi/12)$ pour k de 0 à 12 (tableau).

Il y a deux sortes de professeurs :
• ceux qui posent plusieurs fois la même question
• et ceux qui posent plusieurs fois la même question.

∘16∘

♡ Montrez que l'application tan est injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (indication : π est irrationnel).
Est elle bijective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$?
Montrez que l'application sin est injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$?
Montrez que l'application cos n'est pas injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Si on part de $\tan(a) = \tan(b)$ avec a et b rationnels (donc différents des irrationnels $\dfrac{\pi}{2}+k.\pi$), on aboutit à l'existence de k dans $\mathbb{Z}$ vérifiant $a-b = k.\pi$.
Si k est non nul, le membre de droite est irrationnel et celui de gauche rationnel. C'est impossible.
Il ne reste que $k=0$ et donc $a=b$.

Elle n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ puisque la valeur 1 n'est pas atteinte *(il faudrait qu'un rationnel $\dfrac{p}{q}$ soit égal à un irrationnel $\dfrac{\pi+4.k.\pi}{4}$ avec k entier).*

Pour le sinus, on part de $\sin(a) = \sin(b)$.
Ceci conduit à deux possibilités : $a = b+2.k.\pi$ ou $a = \pi - b + 2.k.\pi$ avec k entier.
La première donne ($a=b$ et $k=0$) ou alors $\pi = \dfrac{a-b}{2.k}$ qui est impossible.
La deuxième donne $\pi = \dfrac{a+b}{2.k+1}$ qui est impossible *(irrationnel à gauche, rationnel à droite).*
Éliminez l'impossible, il ne reste que $a=b$.

Pour le cosinus, un contre-exemple suffit : 1 et -1 ont la même image *(parité).*

∘17∘

♡ Exprimez $\tan(7.\theta)$ comme polynôme en $\tan(\theta)$ *(indication développer $(\cos + i.\sin)^7$, identifier, diviser, et simplifier haut et bas pour avoir des tangentes).*
Déduisez la factorisation de $X^3 - 21.X^2 + 35.X - 7$.

On développe : $e^{7.i.\theta} = (e^{i.\theta})^7 = (c+i.s)^7 = c^7 + 7.c^6.i.s - 21.c^5.s^2 - 35.c^4.i.s^3 + 35.c^3.s^4 + 21.c^2.i.s^5 - 7.c.s^6 - i.s^7$.
On identifie partie réelle et partie imaginaire :

$$\begin{array}{llllllll} \Re\mathrm{e} & \cos(7.\theta) & = & \cos^7(\theta) & & -21.\cos^5(\theta).\sin^2(\theta) & & +35.\cos^3(\theta).\sin^4(\theta) \quad -7.\cos(\theta).\mathrm{si} \\ \Im m & \sin(7.\theta) & = & & 7.\cos^6(\theta).\sin(\theta) & & -35.\cos^4(\theta).\sin^3(\theta) & +21.\cos^2(\theta).\sin^5(\theta) \end{array}$$

On effectue le quotient : $\tan(7.\theta) = \dfrac{c^7 - 21.c^5.s^2 + 35.c^3.s^4 - 7.c.s^6}{7.c^6.s - 35.c^4.s^3 + 21.c^2.s^5 - s^7}$ avec toujours notre notation.

On divise haut et bas par c^7 : $\tan(7.\theta) = \dfrac{1 - 21.\dfrac{s^2}{c^2} + 35.\dfrac{s^4}{c^4} - 7.\dfrac{s^6}{c^6}}{\dfrac{7.c^6.s - 35.c^4.s^3 + 21.c^2.s^5 - s^7}{c^7}} = \dfrac{1 - 21.T^2 + 35.T^4 - 7.T^6}{7.T - 35.T^3 + 21.T^5 - T^7}$ avec $T = \tan(\theta)$.

Pour l'équation $X^3 - 21.X^2 + 35.X - 7$, on se pose finalement la question « pour quelles valeurs de $\tan(\theta)$ est ce que $\tan(7.\theta)$ n'existe pas !

∘18∘

♡ Montrez qu'il existe une suite de polynômes (P_n) à coefficients entiers vérifiant $\forall n,\ \tan^{(n)} = P_n(\tan)$.
(juste l'existence, ne tentez pas de trouver une formule explicite !)

On initialise : $P_0 = X$, $P_1 = 1 + X^2$ puisque $\tan^{(0)} = \tan$ et $\tan' = 1 + \tan^2$.

Pour un entier n donné quelconque, on suppose qu'on opeut écrire $\tan^{(n)}(\theta) = P_n(\tan(\theta))$ pour tout θ, et on redérive (tout est dérivable ici) :
$\tan^{(n+1)}(\theta) = P_n'(\tan(\theta)).\tan'(\theta) = P_n'(\tan(\theta)).(1+\tan^2(\theta))$.
On pose donc $P_{n+1}(X) = P_n'(X).(1+X^2)$ et on dit que c'est bien un polynôme.
L'existence est prouvée par récurrence, et la formule ci dessus permet de les calculer de proche en proche.

∘19∘

♡ Calculez $\int_2^3 \frac{\log_x(2)}{x}.dx$.

Cette fois, l'application est $x \longmapsto \frac{\ln(2)}{x.\ln(x)}$. Et on a mine de rien une forme en $\frac{u'}{u}$ avec $u = \ln$.

On intègre en $x \longmapsto \ln(\ln(x))$ et on trouve $\boxed{\ln(2).\Big(\ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2))\Big)}$

∘20∘

♡ Qui est le plus grand ? $3^{\ln(2)}$ ou $2^{\ln(3)}$?

Ils sont égaux. Calculez leur logarithme.

∘21∘

Que pensez vous de : • cos est paire, donc pour tout x, $\cos(-x) = \cos(x)$
• $\cos(x)$ est pair, donc x est congru à $\pi/2$ modulo π.

cos est paire. Au féminin. En tant qu'application.

En revanche, $\cos(x)$ est un réel.
Si on dit qu'il est pair, c'est que c'est un entier. Et la seule solution est $\cos(x) = 0$.
ceci implique que x est de la forme $\frac{\pi}{2} + k.\pi$ avec k entier.
Gagné.

∘22∘

Le retour de ALI et BEN *(un menteur, un sincère)*.
a- Quelle question poser pour savoir si c'est ALI qui est en face de vous ?
b- Vous croisez les deux frères. Vous demandez à l'un de demander à l'autre si c'est lui ALI. Que déduisez vous de la réponse ?
c- Vous croisez les deux frères. L'un dit "De nous deux, c'est ALI le menteur" et l'autre ajoute "ALI, c'est moi".

a- Euh... « Tu es Ali ? » n'est pas la bonne question.

Ali est en face de vous	Ali ment et Ben est sincère	Non
	Ali est sincère et Ben ment	Oui
Ben est en face de vous	Ali ment et Ben est sincère	Non
	Ali est sincère et Ben ment	Oui

Il aurait fallu avoir la même éponse pour les deux premières lignes, et l'autre réponse pour les deux dernières.

On essaye avec « Ali ment il ? »

Ali est en face de vous	Ali ment et Ben est sincère	Non
	Ali est sincère et Ben ment	Non
Ben est en face de vous	Ali ment et Ben est sincère	Oui
	Ali est sincère et Ben ment	Oui

(un menteur ne dira jamais qu'il ment)

C'est la bonne question. Si on vous dit « non », vous savez que c'est Ali. Mais vous ne savez pas si il est sincère ou menteur d'ailleurs...
Si on vous dit « oui », vous savez que c'est Ben.

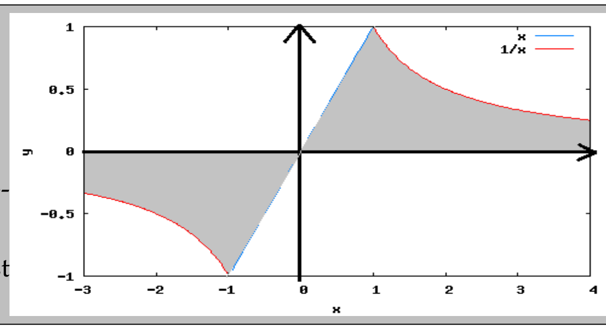
---

b- Vous saurez (en fonction de la réponse de l'autre frère) qui est en face de vous.

Ali est en face de vous	Ali ment et Ben est sincère	Il demande à l'autre s'il est Ben	Ben dit « oui »
	Ali est sincère et Ben ment	Il demande à l'autre s'il est Ali	Ben dit « oui »
Ben est en face de vous	Ali ment et Ben est sincère	Il demande à l'autre s'il est Ali	Ali dit « non »
	Ali est sincère et Ben ment	Il demande à l'autre s'il est Ben	Ali dit « non »

c- A compléter.

◦23◦ ♡ On pose $f = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} x & si & |x| \leqslant 1 \\ 1/x & sinon & \end{array} \right|$. Représentez graphiquement.
f est elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Déterminez $f \circ f$. Est elle injective ?



f est définie partout mais pas injective : $f(2) = f(1/2)$.
$f \circ f$ ne peut pas être injective.

On montre pour tout x $f(f(x)) = f(x)$.
En effet, $f(f(x))$ est de la forme $f(y)$ avec $y = f(x)$. Et ce y est entre -1 et 1 (graphe ou tableau de variations). On a donc $f(f(x)) = f(y) = y = f(x)$.
Un exemple : $f(f(2)) = f(1/2) = 1/2$.

Et bien sûr, $f \circ f$ n'est pas injective non plus.

◦24◦ ♠ On se propose de résoudre l'équation $x^4 + 11.x^3 - 92.x + 80 = 0$ d'inconnue complexe x, sans passer par la recherche de racines évidentes.
Dérivez deux fois, déduisez ses variations. déduisez que l'équation admet quatre racines réelles que l'on peut ordonner : $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$. Précisez le signe de chacune.
Calculez $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$, calculez $r_1.r_2.r_3.r_4$, calculez $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} + \dfrac{1}{r_4}$.
Prouvez $(r_1)^2 + (r_2)^2 + (r_3)^2 + (r_4)^2 = 121$.
On pose alors : $s_1 = r_1.r_2 + r_3.r_4$, $s_2 = r_1.r_3 + r_2.r_4$ et $s_3 = r_1.r_4 + r_2.r_3$.
Calculez $s_1 + s_2 + s_3$. Montrez : $s_1.s_2 + s_1.s_3 + s_2.s_3 = -1332$ et aussi $s_1.s_2.s_3 = 18144$.
Donnez l'équation de racines s_1, s_2 et s_3 sous la forme $z^3 = p.z + q$ chère à Tartaglia.
Appliquez les formules de Cardan pour trouver que s_1, s_2 et s_3 valent 42, -18 et -24.
Justifiez que c'est s_1 *(c'est à dire $r_1.r_2 + r_3.r_4$)* qui vaut 42. Que vaut alors $r_1.r_2.r_3.r_4$?
Trouvez alors $r_1.r_2$ et $r_3.r_4$.
On pose à présent : $y = r_1 + r_2 - r_3 - r_4$. Montrez : $y^2 = 289$. Trouvez alors y (attention au signe).
Déduisez : $r_1 + r_2 = -14$ et $r_3 + r_4 = 3$.
Trouvez alors les valeurs de r_1, r_2,r_3 et r_4. Enfin, félicitez Ludovico Ferrari.

◦25◦ ♡ Justifiez : $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(\theta).d\theta}{1 + \cos^2(\theta)} = \frac{\pi}{2}$.

L'existence ne pose pas de problème. Ensuite, on a une forme en $\dfrac{u'}{1 + u^2}$.

$$\int_0^\pi \frac{\sin(\theta).d\theta}{1 + \cos^2(\theta)} = \Big[- Arctan(\cos(\theta)) \Big]_0^\pi = -(Arctan(-1) - Arctan(1))$$

Il faut évidemment connaître déjà $Arctan$ et sa dérivée...

◦26◦ Vrai ou faux :

a	$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \geqslant 1$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant 0$	e
b	$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1 \Rightarrow x^2 \geqslant 0$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leqslant 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 1$	f
c	$\forall n \in \mathbb{N},\ n\ pair \Rightarrow n!\ pair$	$\forall n \in \mathbb{N},\ n\ impair \Rightarrow n!\ impair$	g
d	$\forall n \in \mathbb{N},\ n!\ pair \Rightarrow n\ pair$	$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)!\ impair \Rightarrow n!\ impair$	h

Les preuves sont directes, ou reposent sur des contre-exemples.

non : $x = 0,5$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \geqslant 1$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant 0$	non : -2
oui : $x^2 \geqslant 0$ toujours vrai	$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1 \Rightarrow x^2 \geqslant 0$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leqslant 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 1$	oui : seul 0
non : 0	$\forall n \in \mathbb{N},\ n\ pair \Rightarrow n!\ pair$	$\forall n \in \mathbb{N},\ n\ impair \Rightarrow n!\ impair$	non : 5
non : 3	$\forall n \in \mathbb{N},\ n!\ pair \Rightarrow n\ pair$	$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)!\ impair \Rightarrow n!\ impair$	oui : seul 0

◦27◦ t est dans $]0,\ \pi[$. Prouvez l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x - \cos(t)}{x^2 - 2.x.\cos(t) + 1}.dx$ et calculez cette intégrale.

Le seul problème serait l'annulation du dénominateur.
Est il possible que $x^2-2.x.\cos(t)+1$ s'annule pour un x entre 0 et 1.
On calcule le discriminant de ce trinôme en x : $4.\cos^2(t)-4$ ce qui fait $-4.\sin^2(t)$.
Et comme t n'est pas un multiple de π ce discriminant est strictement négatif.
Le trinôme ne s'annule pas.

Le dénominateur n'est jamais nul, $x \longmapsto \dfrac{x-\cos(t)}{x^2-2.x.\cos(t)+1}$ est continue, donc intégrable.

Rappel
dérivable
$\Downarrow$
continue
$\Downarrow$
intégrable

On a une forme en $\dfrac{u'}{u}$. On intègre en $x \longmapsto \dfrac{1}{2}.\ln(x^2-2.x.\cos(t)+1)$ ou même $x \longmapsto \ln(\sqrt{x^2-2.x.\cos(t)+1})$ pour tromper l'adversaire.

Finalement $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-\cos(t)}{x^2-2.x.\cos(t)+1}.dx = \frac{1}{2}.\ln(1-2.\cos(t)+1) = \frac{1}{2}.\ln(4.\sin^2(t/2)) = \ln(2)+\ln(\sin(t/2))$ puisque $\sin(t/2)$ est strictement positif.

Remarque : c'est encore plus beau de compacter à la fin si on a demandé $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x-\cos(t)}{x^2-2.x.\cos(t)+1}.dx$.
la réponse doit dépendre de t, et seulement de t, soyons logique sur les variables.

◦0◦

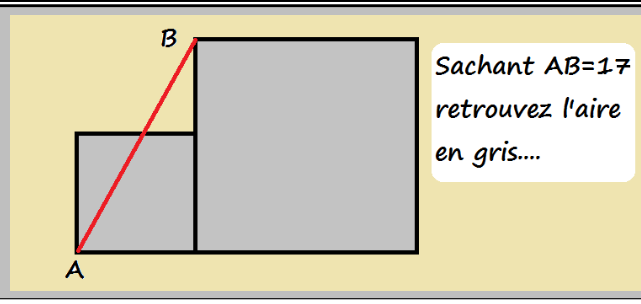
♡ Calculez $(x \longmapsto x^a)'$ *(a positif fixé)* et $(a \longmapsto x^a)'$ *(x positif fixé)*.
♡ Donnez le maximum de $x \longmapsto x^{1/x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$(x \longmapsto x^a)' = (x \longmapsto a.x^{a-1})$ classiquement .
$(a \longmapsto x^a)' = (a \longmapsto e^{a.\ln(x)})' = (a \longmapsto \ln(x).x^a)$ ne pas oublier le logarithme.

On écrit $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$.
Comme l'exponentielle est croissante, le maximum de $x \longmapsto x^{\frac{1}{x}}$ est atteint quand $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ atteint son maximum. On dérive, on dresse un tableau de variations. le maximum est en e. Et il vaut $\sqrt[e]{e}$ dont on n'a pas grand chose à dire.

◦1◦

Sachant $x = 45678^3 - 45676^3$,
calculez $\sqrt{\dfrac{x-2}{6}}$.
Les deux figures en gris sont des carrés.



Posons $a = 45677$ pour centrer les choses.
On a alors $x = 45678^3 - 45676^3 = (a+1)^3-(a-1)^3 = (a^3+3.a^2+3.a+1)-(a^3-3.a^2+3.a-1)$.
On simplifie : $x = 6.a^2+2$.
On soustrait, on divise par 6 : $\dfrac{x-2}{6} = a^2$.
La racine cherchée vaut donc $\boxed{45\,677}$

Le problème de géométrie utilise simplement le théorème de Pythagore.
On note a et b les côtés des deux carrés. Dans le triangle rectangle d'hypoténuse AB, on a $B^2 = a^2+b^2$.
Mais les aires des deux carrés sont justement a^2 et b^2. La somme des aires est donc $\boxed{17^2}$

◦2◦

Calculez $\cos(\pi/12)$ et ensuite prouvez $\cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = \dfrac{\sqrt{\sqrt{16}+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\sqrt{8}}$.

On écrit $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

La formule de duplication $\cos(2.\theta) = \cos^2(\theta)-1$ donne $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = \dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)}{2} = \dfrac{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$.
Comme $\cos(\pi/24)$ est positif, on a juste à passer à la racine, sans signe moins. Et on rappelle $\sqrt{16} = 4$, si si !

∘3∘ ♡ Complétez : $e^{i.a}+e^{i.b} = e^{i.(a+b)/2}.(\ldots+\ldots)$. Prenez la partie réelle et la partie imaginaire. Que retrouvez vous.

On factorise $e^{i.a}+e^{i.b} = e^{i.\frac{a+b}{2}+i.\frac{a-b}{2}} + e^{i.\frac{a+b}{2}-i.\frac{a-b}{2}} = e^{i.\frac{a+b}{2}}.\left(e^{i.\frac{a-b}{2}}+e^{-i.\frac{a-b}{2}}\right) = 2.\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).e^{i.\frac{a+b}{2}}$.

On identifie les parties des deux membres

	premier membre		*second membre*
$\Re e$	$\cos(a)+\cos(b)$	=	$\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right).\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
$\Im m$	$\sin(a)+\sin(a)$	=	$\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right).\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

Ce sont les formules de transformation de sommes en produits.
On les retrouve aussi en développant $\cos(a) = \cos\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)$...

∘4∘ ♡ On donne $\alpha = Arctan(2)$. Calculez $\tan(3.\alpha)$. Exprimez $Arctan(2/11)$ à l'aide de α.

On trouve $\tan(2.\alpha) = \dfrac{4}{1-4} = \dfrac{-4}{3}$ puis $\tan(3.\alpha) = \dfrac{2-\frac{4}{3}}{1+2.\frac{4}{3}} = \frac{2}{11}$.

Mais on n'a pas $3.\alpha = Arctan\left(\dfrac{2}{11}\right)$. L'égalité n'a lieu que modulo π.

$3.\alpha$ est dans $\left[\dfrac{3.\pi}{4}, \dfrac{3.\pi}{2}\right[$ (encadrez déjà α) et $Arctan\left(\dfrac{2}{11}\right)$ est dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

On a donc $\boxed{3.\alpha - \pi = Arctan\left(\dfrac{2}{11}\right)}$

∘5∘ Montrez que $n \longmapsto n+(-1)^n$ est une bijection de $\mathbb{N}$.

On prend un entier naturel, et on associe un nouvel entier naturel ($n+(-1)^n$ est positif, même pour « n petit »).

Pour tout entier naturel b il existe un unique entier a vérifiant $a+(-1)^a = b$.

Raisonnons par analyse, pour trouver la seule solution possible a.
Après, on fera la synthèse et on montrera que c'est bien la solution.

Analyse (condition nécessaire)
Il faut bien choisir a, pour avoir $a+1 = b$ ou $a-1 = b$.
On constate que a est de parité opposée à celle de b (ajouter ou soustraire 1, ça vous change la congruence modulo 2).
On disjoncte les cas.
b pair. Alors a est impair. Mais $(-1)^a$ vaut donc -1. L'équation devient $a-1 = b$ soit $a = b+1$.
b impair. Alors a est pair. Mais $(-1)^a$ vaut donc 1. L'équation devient $a+1 = b$ soit $a = b-1$.
On synthétise $a = f^{-1}(b) = b+(-1)^b$.

Synthèse.
On vérifie alors $f(a) = b$. Par disjonction de cas.

En fait, c'est un peu con, mais $f^{-1} = f$.

Et voici f :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	2.p	2.p+1	...
$f(a)$	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8		2.p+1	2.p	

On échange les éléments deux à deux. Normal que l'opération inverse soit « on recommence ».

∘6∘

Rappel des règles : une maison de n cases contient les nombres de 1 à n, deux nombres égaux ne peuvent pas être côte à côte sur la grille, même en diagonale.

Exemple :

2	1	3	1
5	4	2	4
3	1	5	1
2	4	2	3
1	3	1	5

à vous :

4			2
	5		
			?
2			3
		5	

-

						3		2
				5				
	4				4			
			3				1	
1		5		4				2

Au choix :

4	3	1	2
2	5	4	3
4	1	2	1
2	3	4	3
5	1	5	1

-

						3		2
		3		5				
	4				4			
2	3		3		1		1	
1	4	5	1	4				2

Ou alors `https://replit.com/@redrapious/TektonikSolver2000#main.py`
Antoine G. propose un solveur de Tektonic, en Python.

∘0∘

Encore des stations de métro (des terminus de lignes) :
`Plan d'égout incorrect. Médailles à iris. Démolirait une rime. Dirigé au métronome. Ponte des vers. Découpons le bandit glouton. Thé lacté. Le pot-de-vin consolable. Soleil adulé téléchargé. Suivant en déchéance.`
Et en cadeau : Un con rose, Frais bordel virtuel.

Porte de Clignancourt.
Mairie des Lilas.
Mairie de Montreuil.
Mairie de Montrouge.
Pont de Sèvres.
Boulogne pont de Saint-Cloud.
Châtelet.
Pont de Levallois-Becon.
Charles de Gaulle-Etoile.
Château de Vincennes.

Et sur `http://metromap.fr/assets/img/Paris_Metro_map_04_2020.pdf` vous avez un plan de métro « anamorphosé ».

∘1∘

L'application f associe à un entier naturel n la somme des carrés de ses chiffres en base 10.
f est elle injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? f est elle surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? f est elle croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$?

Elle va certes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, mais elle n'est pas injective : 1 et 10 ont la même image.
Et plus fin : 34 et 50 ont la même image (c'est 25).

Vous voulez atteindre 0 ? Prenez $0 \longmapsto 0$.
Vous voulez atteindre 1 ? Prenez $1 \longmapsto 1$.
Vous voulez atteindre 2 ? Prenez $11 \longmapsto 2$.
Vous voulez atteindre 3 ? Prenez $111 \longmapsto 3$.
Et ainsi de suite, avec ce qu'on appelle un rep-unit (l'unité 1 répétée).

Pour la non croissance, on donne un contre-exemple : 9 est plus petit que 10, mais leurs images sont 81 et 1, dans cet ordre inverse.

∘2∘

Quantifiez : "*il suffit que je prenne une douche pour que le téléphone sonne*".
Je vous dis : "*quand les andouilles voleront, tu seras chef d'escadrille*". Que déduisez vous si

vous avez vu une andouille qui vole	aucune andouille ne vole	vous êtes chef d'escadrille

Quantifiez : "pour être diplomate, il ne suffit pas d'être bête, il faut aussi être poli" *(citation attribuée je crois à Clemenceau)*.

(je me douche)⇒(ça sonne).

vous avez vu une andouille qui vole	aucune andouille ne vole	vous êtes chef d'escadrille
mais volent elles toutes ?	rien à déduire	rien à déduire

(mais qui utilise encore cette citation d'une chanson de Georgius en 1930 ?)

$\overline{(bete \Rightarrow diplomate)}$ et $(diplomate \Rightarrow poli)$.
On a donc $(\exists A,\ A\ bete\ et\ A\ non\ diplomate)$ et $(\forall x,\ (x\ dimplomate) \Rightarrow (x\ poli))$

Mc Mahon (autre homme politique d'il y a un siècle et demi) disait aussi :
la fièvre typhoïde, on en meurt ou on reste idiot ; je le sais, je l'ai eue. »

∘3∘

♡ Voici un lexique de mots anglais du vocabulaire mathématique. Retrouvez leur signification en français :

whole number	countable set	significant figure	right hand side
slope	floor	join of sets	rhombus
cuboïd	nondecreasing function	sequence	by induction on n
one to one correspondance	x raised to the power of y	thus	w.l.o.g.
law of cosines	assume that	hence	intermediate mean value
squeeze theorem	proof by contradiction	therefore	brackets

nombre entier	ensemble dénombrable	chiffre significatif	membre de droite
taux	partie entière	réunion d'ensembles	losange
parallélépipède rectangle	fonction croissante	suite	par récurrence sur n
bijection	x puissance y	donc	sans perte de généralité
formule d'Al kashi	supposons que	donc	T.V.I.
théorème d'encadrement	preuve par l'absurde	donc	crochets

∘4∘

On rappelle : $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)}$. On déduit $\sin(\pi/6) = \sqrt{3}$ et $\cos(\pi/6) = 3$.
Vrai ou faux : $(1 = 2\ et\ 4 = 3) \Rightarrow (5 = 5)$, en additionnant.
Vrai ou faux : $(1 + 4 = 2 + 3) \Rightarrow (1 = 2\ et\ 4 = 3)$, en identifiant.
Vrai ou faux :$(a\ et\ \overline{a}) \Rightarrow a$.
Vrai ou faux :$(a\ ou\ \overline{a}) \Rightarrow a$.
Vrai ou faux : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1 \Rightarrow (x^2 > -1)$.
« Il avala le poison et mourut sur le champ » = « il mourut sur le champ et avala le poison ».

L'identification de la première ligne est une ânerie, comme toute identification. On a en fait $\sin(\pi/6) = \dfrac{\sqrt{3}}{2.\sqrt{3}}$ et $\cos(\pi/6) = \dfrac{3}{2.\sqrt{3}}$.

$(1 = 2\ et\ 4 = 3) \Rightarrow (5 = 5)$ est du type « Faux implique vrai ». C'est Vrai.

L'identification $(1 + 4 = 2 + 3) \Rightarrow (1 = 2\ et\ 4 = 3)$ est une ânerie.

$(a\ et\ \overline{a}) \Rightarrow a$ est du type Faux implique quelquechose. C'est Vrai.

$(a\ ou\ \overline{a}) \Rightarrow a$ est du type « Vrai implique a ». Tout dépend de la valeur de a.

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1 \Rightarrow (x^2 > -1)$ est en « Faux implique Vrai ». On accepte encore.

Enfin, le « et » de la langue française n'est pas si commutatif que ça.

∘5∘

Un élève affirme pour les applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que c'est faux :

$\left.\begin{array}{ll} f & \textit{injective} \\ g & \textit{injective}\end{array}\right\} \Rightarrow f+g \textit{ injective}$	$f \textit{ injective} \Rightarrow f' \textit{ injective}$	$\left.\begin{array}{ll} f & \textit{injective} \\ g & \textit{injective}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow g\circ f \textit{ bijective}$
$\left.\begin{array}{ll} f & \textit{injective} \\ g & \textit{injective}\end{array}\right\} \Rightarrow f\times g \textit{ injective}$	$f' \textit{ injective} \Rightarrow f \textit{ injective}$	

En général, il suffit de donner le nom de l'élève pour prouver que c'est faux, non ?

On va quand même préférer donner des contre-exemple. Les applications vérifieront la première partie (avant l'implication) mais pas le seconde (après l'implication).

assertion	contre-exemple
$\left.\begin{array}{ll} f & \textit{injective} \\ g & \textit{injective}\end{array}\right\} \Rightarrow f+g \textit{ injective}$	$f = x \longmapsto x$ $g = x \longmapsto -x$
vérification	L'application identité est injective ainsi que ses multiples non nuls. Une application constante ne l'est plus.

assertion	contre-exemple
$f \textit{ injective} \Rightarrow f' \textit{ injective}$	$f = x \longmapsto x$
vérification	L'application identité est injective. Une application constante ne l'est plus.

assertion	contre-exemple
$\left.\begin{array}{ll} f & \textit{injective} \\ g & \textit{injective}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow g\circ f \textit{ bijective}$	$f = x \longmapsto x$ de $[-1,\ 1]$ dans lui même. $g = x \longmapsto x$ de $[-1,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$
vérification	Bijective n'a pas de sens si on ne dit pas de quoi dans quoi.

assertion	contre-exemple
$\left.\begin{array}{ll} f & \textit{injective} \\ g & \textit{injective}\end{array}\right\} \Rightarrow f\times g \textit{ injective}$	$f = x \longmapsto x$ $g = x \longmapsto x$
vérification	L'application identité est injective. $x \longmapsto x^2$ ne l'est plus (même valeur en 1 et -1).

assertion	contre-exemple
$f' \textit{ injective} \Rightarrow f \textit{ injective}$	$f = x \longmapsto x^2$
vérification	Toujours la parabole et Id. Un jour, Jésus dit à ses disciples « $a.x^2 + b.x + c$ ». C'était une parabole.

∘6∘

♡ Dérivez $x \longmapsto x^{\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right)}$ (simplifiez la d'abord ?).

On simplifie : $x^{\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right)} = e^{\ln(x).\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right)} = e^{\ln(\ln(x))} = \ln(x)$.

On peut dériver : $\left(x \longmapsto x^{\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right)}\right)' = \left(x \longmapsto \dfrac{1}{x}\right)$.

Mais on précise le domaine : $]1,\ +\infty[$.

∘7∘

Simplifiez $(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (-a+b+c)^2$.
Simplifiez $(a+b+c)^4 + (a+b-c)^4 + (a-b+c)^4 + (-a+b+c)^4$.
Simplifiez $\displaystyle\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)\in\{-1,1\}^n} (\varepsilon_1.\alpha_1 + \ldots + \varepsilon_n.\alpha_n)^3$ où les α_k sont des réels donnés.

$(a+b+c)^2 =$	$a^2+b^2+c^2$	$+2.a.b + 2.a.c + 2.b.c$
$(a+b-c)^2 =$	$a^2+b^2+c^2$	$+2.a.b - 2.a.c - 2.b.c$
$(a-b+c)^2 =$	$a^2+b^2+c^2$	$-2.a.b + 2.a.c - 2.b.c$
$(-a+b+c)^2 =$	$a^2+b^2+c^2$	$-2.a.b - 2.a.c + 2.b.c$

La somme vaut $4.(a^2+b^2+c^2)$. Tous les double-produits se sont effacés.

En partant de $(a+b+c)^4 = a^4+b^4+c^4+4.(a.b^3+a^3.b+a.c^3+a^3.c+b.c^3+b^3.c)+6.(a^2.b^2+a^2.c^2+b^2.c^2)$ $+12.(a.b.c^2+a.c.b^2+b.c.a^2)$ et en changeant des signes, on aboutit à :
$(a+b+c)^4+(a+b-c)^4+(a-b+c)^4+(-a+b+c)^4 = 4.(a^4+b^4+c^4)+24.(a^2.b^2+a^2.c^2+b^2.c^2)$

Il n'y a pas de belle généralisation.
En revanche, en attaquant par récurrence, on peut montrer :
$(a)^2+(-a)^2 = 2.a^2$
$(a+b)^2+(a-b)^2+(-a-b)^2+(-a+b)^2 = 4.(a^2+b^2)$
$(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(-a+b+c)^2+(-a+b-c)^2+(-a-b+c)^2+(-a-b-c)^2+(a-b-c)^2 = 8.(a^2+b^2+c^2)$
$$\sum_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in\{-1,1\}^n} (\varepsilon_1.\alpha_1+\ldots+\varepsilon_n.\alpha_n)^3 = 2^n.((a_1)^2+(a_2)^2+\ldots+(a_n)^2)$$
avec 2^n termes dans la première somme.

◦8◦

Comparez pour l'ordre usuel : $3.\log_2(1000)$ et $10.\log_{10}(1024)$.

On a $\log_2(1024) = 10$ car $2^{10} = 1024$ *(principe bien connu en informatique)*.
On a $\log_{10}(1000) = 3$ car $10^3 = 1000$ *(principe bien connu en physique et appris par coeur en chimie)*.

On met but à bou par croissance du logarithme de base plus grand que 1 :
$\boxed{3.\log_2(1000) < 3.\log_2(1024) = 3.10 = 10.3 = 10.\log_{10}(1000) < 10.\log_{10}(1024)}$

◦9◦

Pour tout réel a, $\sin(2.a)$ est positif. La preuve : on se donne a, on calcule $\cos(a)$ et $\sin(a)$. on sait alors $\cos(a) = \varepsilon.\sqrt{1-\sin^2(a)}$ avec $\varepsilon \in \{-1,\ 1\}$ et $\sin(a) = \varepsilon.\sqrt{1-\cos^2(a)}$ avec $\varepsilon \in \{-1,\ 1\}$. On a alors $\sin(2.a) = 2.\sin(a).\cos(a) = 2.\sqrt{1-\cos^2(a)}.\sqrt{1-\sin^2(a)}$ puisque $\varepsilon^2 = 1$.
Où est l'erreur ?

$\cos(a) = \varepsilon_1.\sqrt{1-\sin^2(a)}$ avec $\varepsilon_1 \in \{-1,\ 1\}$ et $\sin(a) = \varepsilon_2.\sqrt{1-\cos^2(a)}$ avec $\varepsilon_2 \in \{-1,\ 1\}$
Quand on multiplie, le facteur $\varepsilon_1.\varepsilon_2$ vaut 1 ou -1.

◦10◦

Regroupez en trois familles :

p implique q	p donc q	p est condition nécessaire et suffisante de q
si p alors q	il faut avoir q pour avoir p	p est une condition suffisante pour q
p car q	il suffit d'avoir q pour avoir p	p est une condition nécessaire pour q
p donc q	les solutions de l'équation p sont des solutions de q	pour avoir p il faut avoir q
sans p, pas de q	pour avoir p il fait et il suffit d'avoir q	p seulement si q
p si q	p si et seulement si q	p a besoin de q

p implique q	p donc q	
si p alors q	il faut avoir q pour avoir p	p est une condition suffisante pour q
		pour avoir p il faut avoir q
p donc q	les solutions de l'équation p sont des solutions de q	
		p seulement si q
		p a besoin de q

ensuite

q implique p		
p car q	il suffit d'avoir q pour avoir p	p est une condition nécessaire pour q
sans p, pas de q		
p si q		

et enfin

p équivalent à q		p est condition nécessaire et suffisante de q
	pour avoir p il fait et il suffit d'avoir q	
	p si et seulement si q	

∘11∘ L'élève A dit $\int_{4.\pi/3}^{5.\pi/3}\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.d\theta$ n'existe pas puisque la primitive $\theta \longmapsto \ln(\sin(\theta))$ n'existe ni en $4.\pi/3$ ni en $5.\pi/3$.

L'élève B dit $\int_{\pi/3}^{9.\pi/4}\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.d\theta = \ln(\sin(9.\pi/4)) - \ln(\sin(\pi/3)) = \ln(\sqrt{6}/3)$.

Montrez que les deux ont tort.

Le premier parle de LA primitive. L'erreur à se faire tuer.

Ensuite, ce n'est une primitive que par intervalle.
Et sur l'intervalle de $[4.\pi/3,\ 5.\pi/3]$, celle qui sert est $\theta \longmapsto \ln(-\sin(\theta))$.

Sinon, avec le cours, on écrit $\int_{4.\pi/3}^{5.\pi/3}\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.d\theta = \ln\left(\frac{\sin(5.\pi/3)}{\sin(4.\pi/3)}\right)$ et les deux signes moins s'en vont.

Le second élève n'est pas totalement en tort.
C'est celui qui lui a posé la question qui mérite d'être radié.
L'intégrale n'existe pas, car en π et en $2.\pi$, la fonction n'existe pas, et explose même.

∘12∘ ♡ Comparaison des moyennes par la méthode de Cauchy.

Montrez pour tout couple de réels positifs : $\sqrt{a.b} \leqslant \frac{a+b}{2}$.

C'est du cours.
On part de $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$ et on arrive au résultat.

Montrez pour tout quadruplet de réels positifs : $\sqrt[4]{a.b.c.d} \leqslant \frac{\sqrt{a.b}+\sqrt{c.d}}{4} \leqslant \frac{a+b+c+d}{4}$.

On a déjà : $\sqrt{a.b} \leqslant \frac{a+b}{2}$ mais aussi $\sqrt{c.d} \leqslant \frac{c+d}{2}$.

Mais on a aussi $\sqrt{\sqrt{a.b}.\sqrt{c.d}} \leqslant \frac{\sqrt{a.b}+\sqrt{c.d}}{2}$ en donnant à $\sqrt{a.b}$ et $\sqrt{c.d}$ les rôles de a et b.

On a donc $\sqrt[4]{a.b.c.d} \leqslant \frac{\sqrt{a.b}+\sqrt{c.d}}{2}$ car $\sqrt{\sqrt{x}} = (x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$.

Il ne reste qu'à enchainer : $\sqrt[4]{a.b.c.d} \leqslant \frac{\sqrt{a.b}+\sqrt{c.d}}{2} \leqslant \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}$.

On accèdera de la même façon à $\sqrt[8]{a_1.a_2.a_3.a_4.a_5.a_6.a_7.a_8} \leqslant \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}$.

Déduisez pour tout triplet de réels positifs : $\sqrt[3]{a.b.c} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$ (pensez à prendre $d = \frac{a+b+c}{3}$).

La ruse de fou diront certains.

En effet, on obtient alors $\sqrt[4]{a.b.c.\frac{a+b+c}{3}} \leqslant \frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}$.

Le second membre est juste $\frac{a+b+c}{3}$ tous calculs faits.

Non ! Pas « tous calculs faits ». Aucun calcul bordel.
Vous avez eu trois notes a, b et c.
Vous avez pour moyenne $\frac{a+b+c}{3}$.
Et voilà que vous avez une nouvelle note égale justement à $\frac{a+b+c}{3}$.
Comment voulez vous que votre moyenne change !
C'est du bon sens, pas du calcul.

Ecrivons avec des puissances : $(a.b.c)^{\frac{1}{4}}.\Big(\dfrac{a+b+c}{3}\Big)^{\frac{1}{4}} \leqslant \Big(\dfrac{a+b+c}{3}\Big)$.
Elevons à la puissance 4 : $(a.b.c).\Big(\dfrac{a+b+c}{3}\Big) \leqslant \Big(\dfrac{a+b+c}{3}\Big)^4$.
Simplifions par le réel positif $\dfrac{a+b+c}{3}$: $(a.b.c) \leqslant \Big(\dfrac{a+b+c}{3}\Big)^3$.
Revenons en aux racines cubiques : $\sqrt[3]{a.b.c} = (a.b.c)^{\frac{1}{3}} \leqslant \Big(\dfrac{a+b+c}{3}\Big)$.
C'est le résultat demandé.

On pouvait aussi jouer directement avec les exposants et des $1-\dfrac{1}{4}$ *puis des* $\dfrac{1}{3}$.

Finalement, le coup de $d = \dfrac{a+b+c}{3}$ est génial mais il se comprend avec « la nouvelle note ne change pas la moyenne arithmétique ».

Montrez pour tout quintuplet de réels positifs : $\sqrt[5]{a.b.c.d.e} \leqslant \dfrac{a+b+c+d+e}{5}$.

Reprendre la même idée.
Partir de $\sqrt[3]{a.b.c} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$ et $\sqrt[3]{d.e.f} \leqslant \dfrac{d+e+f}{3}$ et $\sqrt{\sqrt[3]{a.b.c}.\sqrt[3]{d.e.f}} \leqslant \dfrac{\sqrt[3]{a.b.c}+\sqrt[3]{d.e.f}}{2}$.
Aboutir à $\sqrt[6]{a.b.c.d.e.f} \leqslant \dfrac{a+b+c+d+e+f}{6}$ par transitivité.

Prendre le cas particulier $f = \dfrac{a+b+c+d+e}{5}$ et simplifier les exposants.

∘13∘ On définit $f = x \longmapsto \left\{\begin{array}{ccc} x & si & x\ rationnel \\ \sqrt{2}-x & si & x\ irrationnel \end{array}\right\updownarrow$. Un élève affirme après calcul : $f \circ f = Id$ (pour x rationnel, c'est évident, et pour x irrationnel, c'est $\sqrt{2}-(\sqrt{2}-x)$). Il en déduit que f est bijective *(de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)*.
Montrez que f n'est pas injective, ni surjective, pourtant.

L'erreur de l'élève : si x est rationnel, on a bien $x \longmapsto x \longmapsto x$.
Mais pour x irrationnel, la première étape est bien $x \longmapsto \sqrt{2}-x$.
Mais la question est ensuite $\sqrt{2}-x$ est il rationnel.
Et la réponse est « ça dépend ».
$\sqrt{2} \longmapsto 0 \longmapsto 0$
$\sqrt{3} \longmapsto \sqrt{2}-\sqrt{3} \longmapsto \sqrt{2}-(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

En fait on a déjà un défaut d'injectivité : $\begin{array}{cccc} 0 & \to & 0 & car\quad rationnel \\ \sqrt{2} & \to & \sqrt{2}-\sqrt{2} & car\quad irrationnel \end{array}$. Le réel 0 a deux antécédents (au moins).

On a un défaut d'injectivité : $\sqrt{2}$ n'a pas d'antécédent.

En effet, si on écrit $f(x) = \sqrt{2}$, on a deux (im)possibilités :

x rationnel	et $x = \sqrt{2}$	incohérent
x irrationnel	et $\sqrt{2}-x = \sqrt{2}$	incohérent

∘14∘ ♡ Soit f de E dans E. Montrez que f est injective si et seulement si $f \circ f$ est injective.

Sens direct. Si f est injective, alors par composition, $f \circ f$ l'est aussi.

Réciproque. Si f n'est pas injective, il existe a et b avec a différent de b vérifiant $f(a) = f(b)$.
On compose : $f(f(a)) = f(f(b))$. Ceci montre par contre-exemople que $f \circ f$ n'est pas injective non plus.

On peut aussi utiliser $g \circ f$ injective implique f injective dans un cas particulier ici.

∘15∘ Montrez que l'application $n \longmapsto \cos(n+\sqrt{2})$ est injective sur $\mathbb{Q}$. Montrez que $\theta \longmapsto \cos(\theta)$ n'est pas injective dsur $\mathbb{Q}$.

On se donne a et b (rationnels) et on suppose $\cos(a+\sqrt{2}) = \cos(b+\sqrt{2})$.
Les cas d'égalité des cosinus donnent $\exists k \in \mathbb{Z},\ a+\sqrt{2} = b+\sqrt{2}+k.\pi$ ou $\exists k \in \mathbb{Z},\ a+\sqrt{2} = -b-\sqrt{2}+k.\pi$.

Le premier cas donne si k est non nul $\pi = \dfrac{a-b}{k} \in \mathbb{Q}$; impossible, la seule solution est $k=0$, et donc $a=b$.

Le second cas donne $\exists k \in \mathbb{Z},\ a+\sqrt{2} = -b-\sqrt{2}+k.\pi$ soit $a+b = k.\pi - 2.\sqrt{2}$. Que k soit nul ou non, le second membre est irrationnel. C'est donc impossible.

On a éliminé les fausses pistes : $a=b$ est la seule porte de sortie.

Le défaut d'injectivité de cos sur $\mathbb{Q}$ repose sur la parité, avec un contre-exemple tel que $\cos(1) = \cos(-1)$.

∘16∘

L'application $trinome \longmapsto (nombre\ de\ filles,\ nombre\ de\ lunettes)$ est elle injective de l'ensemble des trinômes de MPSI2 vers $\mathbb{N}^2$? Et l'application $trinome \longmapsto (nombre\ de\ filles,\ nombre\ d'eleves\ dont\ le\ nom\ commence\ par\ B)$?

La réponse dépend vraiment des années.

∘17∘

Le produit de deux applications injectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est injective : la preuve

$\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \neq b) \Rightarrow \begin{pmatrix} f(a) & \neq & f(b) \\ & et & \\ g(a) & \neq & g(b) \end{pmatrix} \Rightarrow \big(f(a).g(a) \neq f(b).g(b)\big).$

Le produit de deux applications surjectives de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ est surjective. La preuve :

je prends b dans $\mathbb{R}^+$, alors par surjectivité de f : $\exists a \in \mathbb{R},\ f(a) = \sqrt{b}$ et par surjectivité de g : $\exists a \in \mathbb{R},\ g(a) = \sqrt{b}$.

On multiplie : $f(a).g(a) = \sqrt{b}.\sqrt{b} = b$.

Où sont les erreurs ?

C'est quoi cette idée de multiplier membre à membre des non égalités ?
On a certes $2 \neq 12$ et $18 \neq 3$ mais en multipliant membre à membre...

J'ai encore plus rigolo : $0 \neq \sqrt{2}.\pi$ et $e^{\sqrt{184}} \neq 0$. Multipilons membre à membre...

Sinon, certes ont a $\exists a \in \mathbb{R},\ f(a) = \sqrt{b}$ et $\exists a' \in \mathbb{R},\ g(a') = \sqrt{b}$.
Mais rien ne permet de prendre le même a !

Rappelons que Id et Id sont bijectives de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Mais le produit $x \longmapsto x^2$ n'est ni injectif (deux réels opposés ont la même image)
ni surjectif (aucun réel négatif n'est atteint)

∘18∘

Un cadeau des frères Deslandes[a] : tous les jours de la semaine, un garçon sort de l'école à 16 heures, et sa mère vient le chercher en voiture (elle arrive à seize heures pile et le ramène à la maison). Un jour, le garçon finit à 15 heures et n'a pas envie d'attendre. Il avance sur le chemin du retour. Sa mère qui n'était pas au courant part normalement en voiture (vitesse constante), le croise et le ramène alors immédiatement à la maison. Ils arrivent dix minutes plus tôt que d'habitude. Combien de temps le garçon a-t-il marché ?

a. il y a eu trois frères Deslandes, venant de Blomet, passées par la MPSI2, ayant intégré ENS, Mines de Nancy et ENS encore ; l'ainé ayant collé en MPSI2, exercé dans les banques puis devenu prof, et les deux extrêmes ayant publié un livre d'exercices de mathématiques originaux chez Ellipses avec préface de Cédric Villani

Solution telle que rédigée justement par Guillaume ou Clément :
La bonne question à se poser : à quelle heure le petit garçoon a-t-il rencontré sa maman sur la route ?
Sa maman a fait un trajet de dix minutes plus court que d'habitude.
Elle a donc fait demi-tour cinq minutes plus tôt que d'habitude, c'est à dire non plus à $16h00$ mais à $15h55$.
Le petit garçon a donc marché 55 minutes.

∘19∘

♡ Factorisez $X^3 + (-6-4.i).X^2 + (15+20.i).X + 2 - 36.i$ sachant qu'une des racines est le double d'une autre.

On note a, $2.a$ et b le strois racines.
On a alors $3.a + b = 6 + 4.i$
$3.b + 2.a^2 = 15 + 20.i$
$2.a^2.b = -2 + 36.i$
A finir.

∘20∘ L'application $(a,\ b) \longmapsto (a+b,\ a^2+b^2,\ 1_{a<b})$ est elle injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$?
Est elle surjective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \{0,\ 1\}$?
Rappel : $1_{a<b} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & si & a<b \\ 0 & sinon & \end{array} \right|$.

Sens direct, à un couple de réels, on associe leur somme et la somme des carrés, plus un indicateur de « qui est le plus petit ».
C'est une application.

Sens réciproque.
Injectivité : si on connaît la somme et la somme des carrés, connaît on les deux nombres sans ambiguïté, ou y a-t-il plusieurs solutions ?

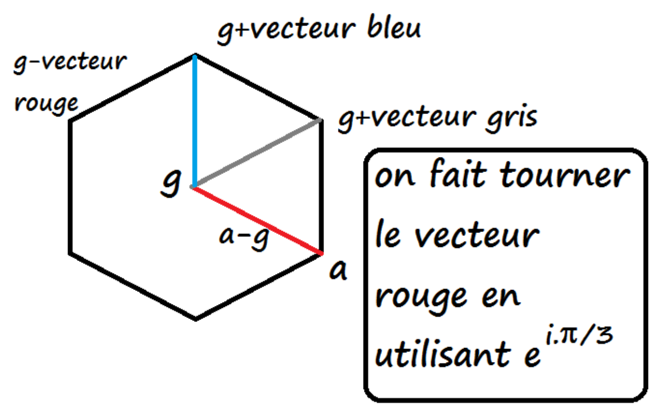
Surjectivité : peut on atteindre tout couple de $\mathbb{R}^2$, ou bien est ce il y a des contraintes du stryle « si la somme vaut 12, la somme des carrés ne pourra jamais atteidnre 1 ! ».

Injectivité.
On suppose que $(a,\ b)$ et $(\alpha,\ \beta)$ ont le même triplet image.
On déduit $a+b = \alpha+\beta$, $a.b = \alpha.\beta$ et $1_{a<b} = 1_{\alpha<\beta}$.
Le couple $(a,\ b)$ est formé des deux racines de l'équation $X^2 - (a+b).X + (a.b)$.
Et $(\alpha,\ \beta)$ est solution de la même équation.
Mais on pourrait avoir $(a,\ b) = (\beta,\ \alpha)$ et pas seulement $(a,\ b) = (\alpha,\ \beta)$.
Mais l'égalité des deux indicatrices impose que a et b soient dans le même ordre que $(,\ \beta)$.
On ne garde que $(a,\ b) = (\alpha,\ \beta)$.

Sans cette « indicatrice », $(1,\ 2)$ et $(2,\ 1)$ auraient la même image $(3,\ 2)$.
Mais ici, l'un pour image $(3,\ 2,\ 1)$ et l'autre $(3,\ 2,\ 0)$.
Ou si vous préférez $(3,\ 2,\ True)$ et $(3,\ 2,\ False)$.

∘21∘ Un hexagone régulier a pour centre de gravité A d'affixe $2+i$ et pour sommet A d'affixe $2+3.i$. Trouvez les autres sommets.

On fait des rotations d'angle $\pi/3$ autour du centre dont l'affixe sera notée plus généralement g, tandis que celle de A sera notée a :



point	A	B	C
affixe	a	$g+e^{\frac{i.\pi}{3}}.(a-g)$	$g+j.(a-g)$
point	D	E	F
affixe	$g-(a-g)$	$g+j^2.(a-g)$	$g+e^{-\frac{i.\pi}{3}}.(a-g)$

Pour ce type d'exercices, la clef est bien de faire de la géométrie dynamique (« je passe d'un sommet à l'autre par une rotation donc par multiplication par un complexe de module 1 bien choisi »),
et surtout pas de la géométrie à la française de collège mal foutu (« je mets tout en équation pour dire que des longueurs sont égeles »).

∘22∘ * Donnez l'écriture décimale de $\frac{355}{113}$.
Donnez l'écriture binaire de $\frac{1}{5}$.
On sait : $0,9999\ldots = 1$. Mais si on remplace un 9 sur dix par un 8, qui est le nombre obtenu ?

On pose la division de 355 par 133 jusqu'à retomber sur un reste déjà croisé. On sait alors que tout se met en boucle.
Ça peut être très long... et ça l'est.
3,14159292035398230088495575221238938053097345132743362831858407079646017699115044247787610619469026548672566371
Après 121 divisions, on retrouve le même motif :
0353982300884955752212389380530973451327433628318584070796460176991150442477876106194690265486725663716814159292

car on retombe sur le même reste : 230 déjà croisé plus haut.
3.14159292 0353982300884955752212389380530973451327433628318584070796460176991150442477876106194690265486725
03539823008849557522123893805

Oui, le début de notre nombre rappelle beaucoup π.

Il faut écrire $\frac{1}{5}$ uniquement avec des $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ et autres $\frac{1}{2^n}$. En quantité infinie si nécessaire.

0,	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	$\frac{1}{4096}$			

L'écriture (en binaire) : $0,001100110011001100\dots$ est faite du motif répétitif 0011.

Vérification : on note ce réel $x = 0,001100110011001100\dots$.
On calcule : $2.x = 0,01100110011001100\dots$ (tout est décalé d'un chiffre).
puis $4.x = 0,110011001100110011\dots$
et $8.x = 1,1001100110011001\dots$ et enfin $16.x = 11,001100110011001100\dots$.
On reconnaît : $16.x - x = 11$ puisque après le motif se retrouve chaque fois face à lui même.
$15.x = 2 + 1$ (et pas $10 + 1$, puisque c'est du binaire).
On a $15.x = 3$ ce qui se simplifie en $x = \frac{1}{5}$.

On regarde le nombre $0,999999999899999999998999999998\dots$.
On l'écrit x. On calcule $10^{10}.x = 9999999998,99999999989999999998\dots = 9999999998 + x$.
On équilibre : $\boxed{x = \frac{9999999998}{9999999999}}$ (non simplifiable)

∘23∘ α est un réel fixé. Résolvez l'équation $x^2 - (e^\alpha + e^{-\alpha}).x + 1 = 0$ d'inconnue complexe x.

La somme vaut $e^\alpha + e^{-\alpha}$ et le produit vaut 1 ? les deux racines sont e^α et $e^{-\alpha}$.
Comme pour $e^{i.\theta}$ et $e^{-i.\theta}$quand l'équation est $x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1 = 0$.

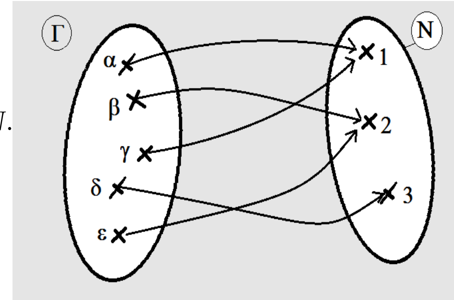
∘24∘ Vrai ou faux : si f est injective de $]-\infty,\ 0]$ dans $\mathbb{R}$ et de $]0,\ +\infty[$, alors elle est injective de $]-\infty,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$

Evidemment totalement faux.
Prenons la valeur absolue.
- Elle est injecticve sur $]-\infty,\ 0[$ (c'est $-Id$)
- Elle est injecticve sur $[0,\ +\infty[$ (c'est Id)
- Elle n'est pas injective sr $\backslash R$ (1 et -1 ont la même image).

C'est évident. mais alors dites moi pourquoi quand ce n'est pas la question explicitement posée, des élèves trouvent le moyen de dire
« f est injective sur A et sur B, donc sur $A \cup B$ ».
J'ai bien ma petite idée, mais elle serait désobligeante.
- Ces élèves sont cons.
- Ces élèves rédigent des trucs qui ont l'air de maths, sans chercher à savoir ce qu'ils font, juste « ça ressemble à ce que dit un livre ».
- Ces élèves croient que faire des maths, c'est aligner des formules qui sonnent bien, et pas raisonner.
- Ces élèves veulent conclure à tout prix, quitte à écrire n'importe quoi.

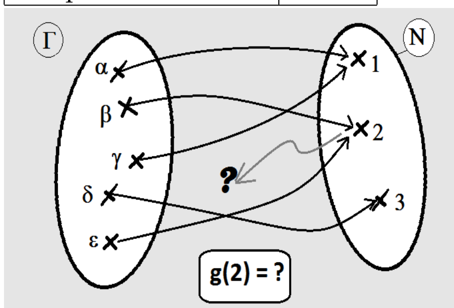
Bref ce sont des élèves. mais pas des ingénieurs.

∘25∘ On pose $f(\alpha) = 1$, $f(\beta) = 2$, $f(\gamma) = 1$, $f(\delta) = 2$ et $f(\varepsilon) = 3$. Combien existe-t-il d'applications g de $\{1,2,3\}$ (noté N) dans $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ (noté Γ) vérifiant $f \circ g = Id_{\{1,2,3\}}$? Combien existe-t-il d'applications h de $\{1,2,3\}$ dans $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ vérifiant $h \circ f = Id_{\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}}$?

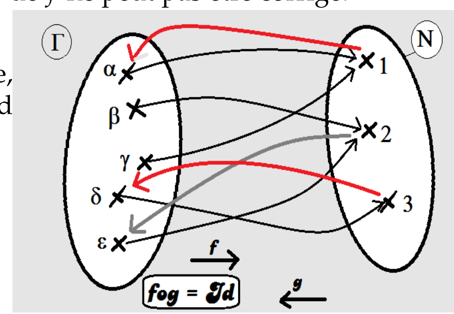


On a défini une application f que l'on peut représenter de G dans N.
Elle n'est pas injective puisque α et γ ont la même image.
Elle est surjective, car chaque nombre a au moins un antécédent.

1 a pour antécédents	α et γ
2 a pour antécédents	β et ε
3 a pour antécédent	δ



Il y a une question à laquelle on peut répondre tout de suite. Il ne peut existe h vérifiant $h \circ f = Id_N$. Non pas parce qu'on ne pourrait pas composer. Mais parce que si une telle application existant, $h \circ f$ serait injective, et f le serait aussi.
Mais on peut aussi se poser la question de la valeur de $h(2)$. On aurait $h(2) = h(f(\beta)) = \beta$ et en même temps $h(2) = h(f(\varepsilon)) = \varepsilon$.
On ne peut pas définir $h(2)$, h n'existe pas.
Le défaut d'injectivité de f ne peut pas être corrigé.



On cherche g vérifiant $f \circ g = Id_N$ (on prend un élément numérique, de N, on le monte dans Γ sur une lettre grecque, puis on redescend par f. On s'interroge sur les images par g :
$g(1)$ vérifie $f(g(1)) = 1$
$g(1)$ est un antécédent de 1 par f : α ou γ.
$g(2)$ vérifie $f(g(2)) = 2$
$g(2)$ est un antécédent de 2 par f : β ou ε.
$g(3)$ vérifie $f(g(3)) = 3$.

$g(3)$ est l'antécédent de 3 par f : δ. On a donc les valeurs possibles

$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$
α ou γ	β ou ε	δ

.

On peut raisonner avec un arbre de possibilités. On a $\boxed{2 \times 2 \text{ applications possibles}}$

$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$
α	β	δ

$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$
α	ε	δ

Représentée plus haut.

$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$
γ	β	δ

$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$
γ	ε	δ

∘26∘ **Qui est le rationnel d'écriture décimale $3,\overline{14159}14159...$?**

On le note $a = 3,\overline{14159}1415914159....$
On calcule $10^5.a = 3\overline{14159},1415914159....$
On soustrait : $10^5.a - a = 314159 - 3$ et tout le reste s'en va.
$\boxed{a = \dfrac{314\,156}{99\,999}}$

∘27∘ **♡ L'application $n \longmapsto (n \quad mod \quad 5,\ n \quad mod \quad 13)$ est elle injective sur range(64) ?
L'application $n \longmapsto (n \quad mod \quad 11,\ n \quad mod \quad 13)$ est elle injective sur range(143) ?**

La première question demande : peut on trouver a et b dans range(64) vérifiant $(a\%5,\ a\%13) = (b\%5,\ b\%13)$.
Ceci vient à demander que $b - a$ soit à la fois multiple de 5 et de 13.
$b - a$ est multiple de 65 (car 5 et 13 sont premiers entre eux).
Mais dans range (65), la différence de deux éléments ne peut pas atteindre 65 ni m^me ses multiples.
Sauf 0.
On aboutit à $a = b$.

De même $(a\%11,\ a\%13) = (b\%11,\ b\%13)$ donne $a = b\ [11]$ et $a = b\ [13]$ (je reprendrs le formalisme matheux et pas Python).
$b - a$ est multiple de 11 et de 13. C'est un multiple de 143.
Mais si on a pris $0 \leqslant a \leqslant 142$ et $0 \leqslant b \leqslant 142$ (donc $-142 \leqslant -a \leqslant 0$), on a $-142 \leqslant b - a \leqslant 142$.
Le seul multiple de 143 disponible est 0.

$f(a) = f(b)$ implique $a = b$.

◦28◦

Donnez module et argument de $1 + e^i$ et $1 - e^{i.\pi/3}$.

On prend la formule $1 + e^{i.\theta} = 2.\cos(\theta/2).e^{i.\theta/2}$ et on exprime $1 - e^{i.\pi/3}$ sous forme cartésienne $1 - \dfrac{1 + i.\sqrt{3}}{2}$:

	module	argument
$1 + e^i$	$2.\cos(1/2)$	$1/2$
$1 - e^{i.\pi/3}$	1	$-\pi/3$

◦29◦

L'application $x \longmapsto x^x - x$ est elle injective (sur $\mathbb{N}$ ou sur $\mathbb{R}^+$? oui, c'est à la question).

Sur $\mathbb{N}$, on calcule les valeurs :

n	0	1	2	3	4	5	et ainsi de suite
n^n	1	1	4	27	256	beaucoup	
$n^n - n$	1	0	2	24	252		

Les premières valeurs sont toutes distinctes.
Et ensuite, elle croît strictement.
Elle ne reprendra jamais les mêmes valeurs.
Elle est injective.

J'espère que vous avez calculé des valeurs au lieu de vous lancer dans la résolution de $a^a - a = b^b - b$ qui est quasiment impossible.
La définition du cours directement appliquée, c'est bien, mais quand ça semble trop lourd, on essaye des trucs à la main.
On remplace les équations « $f(a) = f(b)$ » par des raisonnements « peut on retrouver la même valeur ».
C'est en ce sens que les maths sont peut être plus difficiles que les matières où le chemin est balisé par des théorèmes et principes à appliquer qui conduisent toujours au résultat.

Dérivons la.
$(x \longmapsto e^{x.\ln(x)} - x)' = (x \longmapsto (1 + \ln(x)).e^{x.\ln(x)} - 1)$
C'est moche.
Mais en tout cas, elle est dérivable et continue.
En 0 elle commence par la valeur 1.
Entyre 1 et 2 elle repasse de 0 à 2. Par théorème des valeurs intermédiaires, elle repassera par la valeur 1.
On a donc un a de $[1,\ 2]$ vérifiant $f(a) = 1 = f(0)$. Défaut d'injectivité sur $\mathbb{R}$.

Là encore, du raisonnement, et pas de calcul.
La meilleure chose à faire était de déjà représenter le graphe sur une calculatrice.

Avouez que la langue française est ambigüe : Les poules du couvent couvent. Il est de l'Est. Nous portions les portions de fils de fer à leurs fils. Les gens au caractère violent violent leur promesses. Dans cet affluent, les poissons affluent. Peut on se fier à un homme fier ?

◦30◦

On va prouver que i (de carré -1) est en fait un réel. Considérons l'équation $x = e^{x.\pi/2}$.
le complexe i en est évidemment racine.
Mais si x est racine de $x = e^{x.\pi/2}$, on a donc $x = e^{e^{x.\pi.2}.\pi/2}$ puis $x = e^{e^{e^{x.\pi/2}.\pi.2}.\pi/2}$ et recommencer.
On va donc poser $a = e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\cdots}}}}}$ avec une infinité de termes. Sachant $\infty = \infty + 1$, a est solution de l'équation.
On identifie : $a = i$. Et i se construit donc avec uniquement des réels...

Première objection : il se peut qu'il y ait une autre solution (réelle) à l'équation $x = e^{x.\pi/2}$, et que notre nombre a soit celle ci.

Il se peut que a n'existe pas.
a est la limite (si elle existe) de la suite $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = e^{u_n.\pi/2}$. Et si cette suite diverge, ça n'a pas de sens de nommer a.

D'ailleurs en mettant ensemble les deux idées : $\infty = e^{\infty.\pi/2}$ donc $a = e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\cdots}}}}} = +\infty$.

○31○ Vrai ou faux : $(1=0) \Rightarrow \Big((i^2+1=0) \Rightarrow (1<0)\Big)$ puis $\Big((1=0) \Rightarrow (i^2+1=0)\Big) \Rightarrow (1<0)$.

$Faux \Rightarrow (qu'importe)$: c'est vrai.
$(Faux \Rightarrow Vrai)$ est vrai. Et $Vrai \Rightarrow Faux$ est faux.
Finalement, l'implication n'est pas associative.

Extraits de « How to solve it » de George Pólya (1887 - 1985)

Comprendre le problème

— En premier lieu, il faut comprendre le problème et son énoncé.

— Quelle est l'inconnue ?

— Quelles sont les données ?

— Quelle est la condition ?

— Est-il possible de satisfaire à la condition ?

— La condition est-elle suffisante pour déterminer l'inconnue.
Est-elle insuffisante ?
Redondante ?
Contradictoire ?

— Dessinez une figure.

— Introduisez la notation appropriée.

— Distinguez les diverses parties de la condition.

— Pouvez-vous les formuler ?

Concevoir un plan

— Avez-vous déjà rencontré ce problème ?

— Ou bien avez-vous rencontré le même problème sous une forme légèrement différente ?

— Connaissez-vous un problème qui s'y rattache ?

— Connaissez-vous un théorème qui puisse être utile ?

— Regardez bien l'inconnue et essayez de penser à un problème qui vous soit familier et qui ait la même inconnue ou une inconnue similaire.

— Voici un problème qui se rattache au vôtre et que vous avez déjà résolu.

— Pourriez-vous vous en servir ?

— Pourriez-vous vous servir de son résultat ?

— Pourriez-vous vous servir de sa méthode ?

— Pourriez-vous énoncer le problème différemment ?

— Reportez-vous aux définitions.

— Pourriez-vous imaginer un problème qui s'y rattache et qui soit plus accessible ?
Un problème plus général ?
Un problème plus particulier ?
Un problème analogue ?

— Pourriez-vous résoudre une partie du problème ?
Ne gardez qu'une partie de la condition, négligez l'autre partie ; dans quelle mesure l'inconnue est-elle alors déterminée, comment peut-elle varier ?

— Pourriez-vous tirer des données un élément utile ?

— Pourriez-vous penser à d'autres données qui pourraient vous permettre de déterminer l'inconnue ?

— Vous êtes-vous servi de toutes les données ?

— Vous êtes-vous servi de la condition toute entière ?

— Avez-vous tenu compte de toutes les notions essentielles que comportait le problème ?

Mettre le plan à exécution

— Il faut donc savoir faire preuve de patience, ne pas se décourager et si vraiment cela est nécessaire, changer de méthode.

— En mettant votre plan à exécution, vérifiez-en chaque détail l'un après l'autre.

— Pouvez-vous voir clairement si ce détail est correct ?

— Pouvez-vous démontrer qu'il est correct ?

— N'oubliez pas d'écrire clairement la réponse à la question posée !

— Mettez-la bien en évidence.

— Revenir sur sa solution

— Pouvez-vous vérifier le résultat ?

— Pouvez-vous vérifier le raisonnement ?

— Pouvez-vous obtenir le résultat différemment ?

— Pouvez-vous le voir d'un coup d'œil ?

— Pouvez-vous vous servir du résultat ou de la méthode pour quelque autre problème ?

.