LYCEE CHARLEMAGNE 2022 2023

Lundi 17 octobre

M.P.S.I.2

TD06

∘0∘ Vrai ou vrai : $\forall x \in \mathbb{R},\ Arctan(x) = \dfrac{7.\pi}{3} \Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Un arctangente reste entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. On a donc une implication du type « Faux implique ce qu'on veut ».

∘1∘ ♡ Calculez ces trois là $\displaystyle\int_0^1 t^2.Arctan(t).dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{Arctan(t)}{1+t^2}.dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2.Arctan(t)}{1+t^2}.dt$.

Toutes ces intégrales existent. Et la présence d'arctangente fait penser à des intégrations par parties. On doit alors pousser un cran plus loin et passer de « continues » à « C^1 ».

Cela dit, il y a aussi des choses rapides avec $u'.u$:

$$\int_0^1 t^2.Arctan(t).dt = \Big[\frac{t^3}{3}.Arctan(t)\Big]_0^1 - \int \frac{t^3}{3.(1+t^2)}.dt.$$

On décompose ensuite $\dfrac{t^3}{1+t^2} = \dfrac{t^3+t}{1+t^2} - \dfrac{t}{1+t^2} = 1 - \dfrac{t}{1+t^2}$

$$\int_0^1 \frac{Arctan(t)}{1+t^2}.dt = \Big[\frac{(Arctan(t))^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.$$

$$\int_0^1 \frac{t^2.Arctan(t)}{1+t^2}.dt = \int_0^1 \frac{(1+t^2).Arctan(t)}{1+t^2}.dt - \int_0^1 \frac{Arctan(t)}{1+t^2}.dt = \int_0^1 1.Arctan(t).dt - \frac{\pi^2}{32}.$$

La première est un classique « par parties » et s'intègre en $t \longmapsto t.Arctan(t) - \dfrac{\ln(1+t^2)}{2}$.

$\displaystyle\int_0^1 t^2.Arctan(t).dt$	$\displaystyle\int_0^1 \frac{Arctan(t)}{1+t^2}.dt$	$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2.Arctan(t)}{1+t^2}.dt$
$\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{\ln(2)}{6}$	$\dfrac{\pi^2}{32}$	$\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln(2)}{2} - \dfrac{\pi^2}{32}$

∘2∘ ♡ On sait : $\dfrac{X^2+a.X+b}{(X-1).(X-2).(X+3)} = \dfrac{2}{X-1} + \dfrac{1}{X-2} + \dfrac{\alpha}{X+\beta}$. Trouvez α et β. (décomposition en simples éléments ?)

Ceci est un exercice élémentaire sur la décomposition en éléments simples, mais autre que le sempiternel « décomposez ceci en éléments simples ». Puisse-t-il vous aider à comprendre (avant d'apprendre).

Pour que le membre de droite donne après réduction au dénominateur commun celui de gauche, il faut que β soit égal à 3.

On réduit ensuite effectivement $\dfrac{2}{X-1} + \dfrac{1}{X-2} + \dfrac{\alpha}{X+3} = \dfrac{(3+c).X^2 + (4-3.c).X + 2.c - 15}{(X-1).(X-2).(X+3)}$.

c vaut donc -2 et on a même $\boxed{\dfrac{X^2+10.X-19}{(X-1).(X-2).(X+3)} = \dfrac{2}{X-1} + \dfrac{1}{X-2} - \dfrac{2}{X+3}}$

∘3∘ Déterminez

$Sup\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-y}) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$	$Sup\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) \mid x \in \mathbb{R}\}$
$Inf\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-y}) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$	$Inf\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) \mid x \in \mathbb{R}\}$

La borne supérieure d'un ensemble est son plus petit majorant.

Les quatre ensembles avec des arc tangentes sont majorés par $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ et non vides. Ils sont aussi minorés par 0, car ce sont des sommes d'arctangentes positives. Ils ont chacun une borne supérieure et une borne inférieure.

Pour tout x, $Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x})$ vaut toujours $\dfrac{\pi}{2}$ (c'est $Arctan(u) + Arctan(1/u)$ avec u positif, c'est dans le cours de géométrie ; sinon, pour convaincre le physicien, dites lui de dériver $x \longmapsto Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x})$ et il comprendra).

L'ensemble $\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un singleton : $\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ (écrit aussi $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$). Sa borne supérieure

et sa borne inférieure valent $\frac{\pi}{2}$ (atteintes toutes les deux).
Sinon, π majore $Arctan(e^x) + Arctan(e^{-y})$ quand x et y décrivent $\mathbb{R}$.
On fait tendre x vers $+\infty$ et y vers $-\infty$, les deux termes tendent vers $\frac{\pi}{2}$. Le majorant π n'est pas atteint, mais c'est bien le plus petit majorant.
De même, en faisant tendre $-\infty$ et y vers $+\infty$, la borne inférieure vaut 0.

$Sup\Big\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-y}) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\Big\} = \pi$	$Sup\Big\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) \mid x \in \mathbb{R}\Big\} = \frac{\pi}{2}$
$Inf\Big\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-y}) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\Big\} = 0$	$Inf\Big\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) \mid x \in \mathbb{R}\Big\} = \frac{\pi}{2}$

∘4∘

♣ Donnez un sens à $x \longmapsto \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}}}$ et calculez l'intégrale de cette application de 0 à 1.

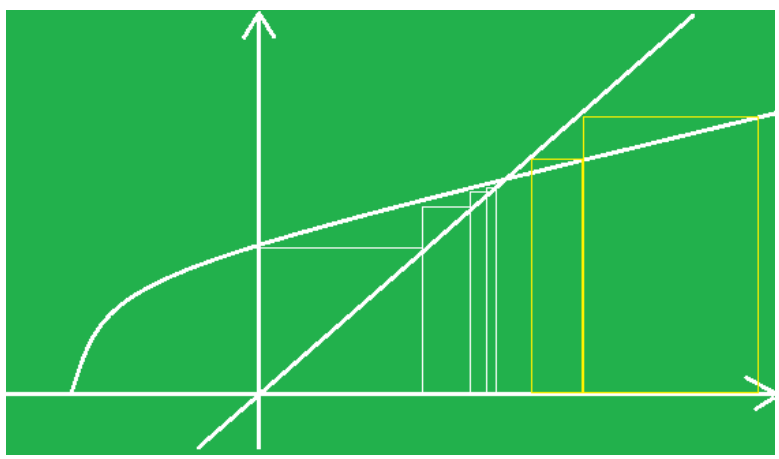
Réflexe pas assez mathématique, mais futé : si $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}}}$ alors $y^2 = x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}} = x + y$.

y est donc clairement défini à partir de x par une équation du second degré $y^2 - y - x = 0$ dont on ne retient que la racine positive : $y = \frac{1 + \sqrt{1 + 4.x}}{2}$.

C'est alors facile d'intégrer $\int_0^1 \frac{1 + \sqrt{1 + 4.x}}{2}.dx = \frac{1}{2} + \Big[\frac{(1 + 4.x)^{\frac{3}{2}}}{6}\Big]_0^1 = \frac{5 + 5.\sqrt{5}}{12}$

Mais on est en maths. On veut bien faire des recherches sur des objets dont l'existence n'a pas été prouvée, se perdre en conjecture plus ou moins étonnantes voire farfelues (comme $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = -1$), mais après, il faut quand même prouver que ce dont on parle existe. Le physicien n'a pas ce problème. Il dit qu'il ne parle que ce ce qui existe. Et vous demande dès lors un acte de foi sur l'univers qui vous entoure (vous faites plus confiance à vos sens ou à votre cerveau, c'est peut être ça qui distingue physique et maths [1])

On a la suite $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{x + u_n}$, dont les termes sont donc 0, $\sqrt{x}$, $\sqrt{x + \sqrt{x}}$, $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ et ainsi de suite.
On étudie donc la suite récurrente, et elle converge.
Attention, sur le dessin, x est fixé, et on compare les graphes de $u \longmapsto u$ et $u \longmapsto \sqrt{x + u}$.



Et si on s'entraînait à TeX ? $x \longmapsto \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}}}$ c'est
\$x \rightarrow \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x+\ldots}}}}\$.
Et cette fois, **\displaystyle** n'apporte rien. **\ldots** c'est les trois petits points.

∘5∘

♡ Simplifiez cette petite somme $5.Arctan\Big(\frac{1}{7}\Big) + 2.Arctan\Big(\frac{3}{79}\Big)$.

Voici un angle pas très grand (c'est vague mais ça va servir), dont on peuyt calculer la tangente.
On pose $\alpha = Arctan(1/7)$ et $\beta = Arctan - 3/79)$.

On calcule $\tan(2.\alpha) = \frac{2.\frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}.\frac{1}{7}} = \frac{2.7}{48} = \frac{7}{24}$.

1. *mais c'est quoi les cinq sens si il n'y a pas un cerveau derrière pour interpréter*

On poursuit : $\tan(4.\alpha) = \dfrac{2.\dfrac{7}{24}}{1-\dfrac{7}{24}.\dfrac{7}{24}} = \dfrac{336}{527}$.

Et même $\tan(5.\alpha) = \dfrac{2879}{3353}$.

De même : $\tan(2.\gamma) = \dfrac{237}{3116}$.

Et c'est magique : $\tan(5.\alpha + 2.\gamma) = 1$.

Plus rapide peut-être : $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{2}{11}$.

$\tan(\alpha+\beta+\alpha) = \dfrac{1}{3}$

$\tan(2.(2.\alpha+\beta)) = \dfrac{3}{4}$

$\tan(\alpha + 2.(2.\alpha+\beta)) = 1$

La tangente de notre angle ne dit pas tout. Encore faut il qu'il soit dans le bon intervalle.
Mais on a $\alpha \leqslant Arctan(1/\sqrt{3})$ et $\beta \leqslant Arctan(1/\sqrt{3})$.
Ceci permet d'avoir α et β entre 0 et $\dfrac{\pi}{6}$.
La somme $4.\alpha + 2.\beta$ est entre 0 et $\dfrac{7.\pi}{6}$.
Et sur cet intervalle, seul $\dfrac{\pi}{4}$ a pour tangente 1.

$\boxed{5.Arctan\left(\dfrac{1}{7}\right) + 2.Arctan\left(\dfrac{3}{79}\right) = \dfrac{\pi}{4}}$ encore une fois.

∘6∘

♡ Pourquoi la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^2+3.X+4}{X^2-3.X+2}$ n'est elle pas $\dfrac{8}{1-X} + \dfrac{14}{X-2}$.

Quelle sera la décomposition de $\dfrac{X^3-2.X^2+5.X+4}{X^2-3.X+2}$?

On propose, on tente de vérifier : $\dfrac{8}{1-X} + \dfrac{14}{X-2} = \dfrac{6.X+2}{X^2-3.X+2}$.
Le dénominateur est le bon, mais pas le numérateur.
D'ailleurs, on aura beau faire, $\dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-2}$ ne pourra faire que des choses en $\dfrac{\alpha.X+\beta}{X^2-3.X+2}$.
Il nous manque le degré 2.

D'ailleurs, vers $+\infty$, $x \longmapsto \dfrac{x^2+3.x+4}{x^2-3.x+2}$ tend vers 1

$x \longmapsto \dfrac{8}{1-x} + \dfrac{14}{x-2}$ tend vers 0

Ajoutons ce 1 qui manque : $1 + \dfrac{8}{1-X} + \dfrac{14}{X-2} = \dfrac{X^2+3.X+4}{X^2-3.X+2}$

On note que les coefficients qu'on auraot obtenu par la méthode des pôles sur la formule erronée $\dfrac{X^2+3.X+4}{X^2-3.X+2} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-2}$ sont quand même les bons.

$\dfrac{X^3-2.X^2+5.X+4}{X^2-3.X+2} = X + 1 - \dfrac{8}{X-1} + \dfrac{14}{X-2}$

Comprenez vous pourquoi ?

∘7∘

♡ Donnez une primitive de $t \longmapsto \sin(\ln(t))$ sur $]0,\ +\infty[$.

La question est « une primitive », c'est à dire « une fonction dont la dérivée est... ».

Je ne sais pas pourquoi des élèves confondent et croient qu'il faut calculer $\int_0^{+\infty} \sin(\ln(t)).dt$.

On doit juste être capable de calculer $\int_a^b \sin(\ln(t)).dt$ *pour a et b dans* $]0,\ +\infty[$.

On intègre par parties :

$\sin(\ln(t))$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{\cos(\ln(t))}{t}$
1	$\hookleftarrow$	t

On a donc $\displaystyle\int_a^b \sin(\ln(t)).dt = \Big[t.\sin(\ln(t))\Big]_a^b - \int_a^b \cos(\ln(t)).dt$.

On recommence :

$\cos(\ln(t))$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{-\sin(\ln(t))}{t}$
1	$\hookleftarrow$	t

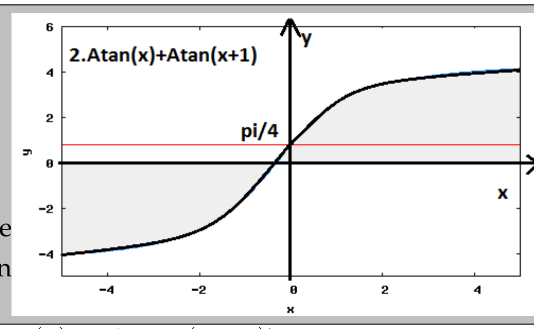
$$\int_a^b \sin(\ln(t)).dt = \Big[t.\sin(\ln(t)) - t.\cos(\ln(t))\Big]_a^b - \int_a^b \sin(\ln(t)).dt$$

On fait passer d l'autre côté, on divise par 2 : $\displaystyle\int_a^b \sin(\ln(t)).dt = \left[\frac{t.\sin(\ln(t)) - t.\cos(\ln(t))}{2}\right]_a^b$.

Une primitive (fonction) est donc $\boxed{t \longmapsto \dfrac{t.\sin(\ln(t)) - t.\cos(\ln(t))\Big]_a^b}{2}}$ *(vérifiez)*.

∘8∘

On demande de résoudre l'équation $2.Arctan(x) + Arctan(x+1) = \dfrac{\pi}{4}$.
Un élève passe à la tangente dans l'équation $2.Arctan(x) + Arctan(x+1) = \dfrac{\pi}{4}$ et trouve une équation de degré 3 dont il donne les trois racines. Résolvez son équation quand même, mais dites aussi pourquoi il a tort.



Le domaine est $\mathbb{R}$ (pas de condition sur x pour qu'existe $Arctan(x)$ et $Arctan(x+1)$).

On passe à la tangente : $\tan(2.Arctan(x) + Arctan(x+1)) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

On obtient $\dfrac{\dfrac{2.x}{1-x^2} + (x+1)}{1 - \dfrac{2.x}{1-x^2}.(x+1)} = 1$ (condition momentanée : x ne vaut pas 1 ni -1, mais 1 n'est pas solution).

On simplifie : $\dfrac{x^3 + x^2 - 3.x - 1}{3.x^2 + 2.x - 1} = 1$. On sent venir le degré 3.
On fait un produit en croix et on regroupe : $x^3 - 2.x^2 - 5.x = 0$.

On a tout de suite une racine nulle $x^3 - 2.x^2 - 5.x = x.(x^2 - 2.x - 5) = x.(x - 1 - \sqrt{6}).(x - 1 + \sqrt{6})$.

Peut on conclure $\boxed{S = \{0,\ 1+\sqrt{6},\ 1-\sqrt{6}\}}$?

Le graphique plus haut donne envie de dire « non ».

Et on le prouve. L'application $x \longmapsto Arctan(x) + Arctan(x+1)$ est strictement croissante, donc injective.
L'équation ne peut pas avoir plus d'une racine.

Pour la croissance, s'il vous plait, faites des maths, pas du calcul.
On a la somme de deux applications croissantes.
Qui a perdu du temps à dériver ?

Alors laquelle des trois est racine ?

Testons 0.
On a $2.Arctan(0) + Arctan(0+1) = \dfrac{\pi}{4}$. C'est bon pour elle.

Testons quand même $1 - \sqrt{6}$:
$2.Arctan(1-\sqrt{6}) + Arctan(2-\sqrt{6})$ est négatif. Chacun des deux nombres dans la fonction $Arctan$ l'est.
De fait, ce réel vaut $-\dfrac{3.\pi}{4}$.

Testons enfin $1 + \sqrt{6}$.
Déjà $Arctan(1+\sqrt{6})$ dépasse $\dfrac{\pi}{4}$. Multiplions par 2, ajoutons un terme positif. Tout déborde.

Si vous voulez, j'ai $2.Arctan(1+\sqrt{6}) + Arctan(2+\sqrt{6}) = \dfrac{5.\pi}{4}$.

Pouvait on prévoir ces erreurs ?

Oui, en passant à la tangente, on n'a pas raisonné par équivalences,mais juste par implications : $\boxed{S \subset \{0,\ 1+\sqrt{6},\ 1-\sqrt{6}\}}$

Il aurait fallul garder $-\pi/2 \leqslant 2.Arctan(x) + Arctan(1+x) \leqslant \pi/2$ pour pouvoir identifier et remonter.

∘9∘

u et v sont deux applications de classe C^2 de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ *(deux fois dérivables, de plus u'' et v'' sont continues)*. Montrez : $\int_a^b u''.v = [u'.v - u.v'] + \int_a^b u.v''$.

Montrez sous hypothèse C^3 : $\int_a^b u^{(3)} v = [u''.v - u'.v' + u.v''] - \int_a^b u.v^{(3)}$.

Donnez la formule à l'ordre n *(et démontrez la)*.

On part de $\int_a^b u''.v = [u'.v]_a^b - \int_a^b u'.v'$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline u'' & \hookleftarrow & u' \\ \hline v & \hookrightarrow & v' \\ \hline\end{array}$ *puis on intègre* $\int_a^b u'.v'$ *en* $[u.v']_a^b - \int_a^b u.v''$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline u' & \hookleftarrow & u \\ \hline v' & \hookrightarrow & v'' \\ \hline\end{array}$

On peut recommencer.
Mais il y a plus intelligent.
On pose $w = u''.v - u'.v' + u.v''$.

On dérive : $w' = \begin{array}{cccccc} (u''.v & & -u'.v' & & +u.v'')' & \\ u'''.v & +u''.v' & -u''.v' & -u'.v'' & +u'.v'' & +u.v''' \end{array}$

On simplifie : $w' = u'''.v + u.v'''$.

On intègre : $[w]_a^b = \int_a^b w' = \int_a^b (u'''.v + u.v''')$.

On bascule : $\int_a^b u^{(3)} v = [u''.v - u'.v' + u.v''] - \int_a^b u.v^{(3)}$

La formule est $\boxed{\int_a^b u^{(n+1)} v = [\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k.u^{(n-k)}.v^{(k)}] + (-1)^n.\int_a^b u.v^{(n+1)}}$

On la prouve par récurrence.

Ou en dérivant $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k.u^{(n-k)}.v^{(k)}$ *et en faisant passer de l'autre côté.*

∘10∘

Montrez que pour tout entier naturel n, $(t.\ln(t))^n$ tend vers 0 quand t tend vers 0.

Pour tout n, on pose $I_n = \int_0^1 (\ln(t))^n.dt$. Calculez I_0, I_1 et I_2.

Calculez I_n pour tout n en intégrant par parties.

$t.\ln(t)$ est en 0^+ une indétermination classique du type $0.(-\infty)$.
C'est un de nos classiques de Sup.

On la lève en posant $t = \dfrac{1}{X}$, on a alors $t.\ln(t) = \dfrac{\ln(1/X)}{X} = -\dfrac{\ln(X)}{X}$.
C'est cette fois une forme indéterminée classique : croissances comparées en $+\infty$.

On encadre donc en grand : $\boxed{t.\ln(t) \longrightarrow_{t\mapsto+\infty} 0}$

On élève à la puissance n, ça ne change rien : $(t.\ln(t))^n$ tend vers 0 en 0.

Aucune des I_n n'a de sens véritable. Il faut poser $I_{n,\varepsilon} = \int_\varepsilon^1 (\ln(t))^n.dt$, calculer et voir si cette intégrale a une limite quand ε tend vers 0.

Tenez : $I_{0,\varepsilon} = \int_\varepsilon^1 (\ln(t))^0.dt = \int_\varepsilon^1 dt = 1 - \varepsilon$.
Bon, l'exemple est mal chosi : $I_0 = 1$ sans difficulté.

Prenons plus classiquement $I_{1,\varepsilon} = \int_\varepsilon^1 (\ln(t))^1.dt = [t.\ln(t) - t]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon.\ln(\varepsilon) + \varepsilon$.

C'est certes indéterminé quand ε tend vers 0, mais c'est la question précédente. Il ne va rester que $I_1 = -1$.

Pour I_2, on intègre $\int_\varepsilon^1 (\ln(t))^2.dt$ par parties :

$(\ln(t))^2$	$\hookrightarrow$	$2.\ln(t).\frac{1}{t}$
1	$\hookleftarrow$	t

$I_{2,\varepsilon} = \int_\varepsilon^1 (\ln(t))^2.dt = [t.(\ln(t))^2]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 2.\ln(t).dt = -\varepsilon.(\ln(\varepsilon))^2 - 2.I_{2,\varepsilon}$
On fait tendre ε vers 0. $I_{1,\varepsilon}$tend vers -1 et $\varepsilon.(\ln(\varepsilon))^2$ tend vers 0.
On a trouvé une limite : $I_2 = 2$.

Bilan provisoire :

I_0	I_1	I_2
1	-1	2

(de là à en déduire tout de suite quelquechose...)

Supposons que I_n existe, en tant que limite des $I_{n,\varepsilon}$, et étudions l'existence(et le calcul) de I_{n+1}.
On intègre $I_{n+1,\varepsilon}$par parties :

$\int_\varepsilon^1 (\ln(t))^{n+1}.dt$:

$(\ln(t))^{n+1}$	$\hookrightarrow$	$(n+1).(\ln(t))^n.\frac{1}{t}$
1	$\hookleftarrow$	t

$I_{n+1,\varepsilon} = \int_\varepsilon^1 1.(\ln(t))^{n+1}.dt = [t.(\ln(t))^{n+1}]_\varepsilon^1 - (n+1).\int_\varepsilon^1 (\ln(t))^n.dt = -\varepsilon.(\ln(\varepsilon))^{n+1} - (n+1).I_{n,\varepsilon}$
On peut faire tendre ε vers 0, le membre de droite a une limite, celui de gauche aussi.
On a même $I_{n+1} = -(n+1).I_n$

En mettant en boucle, on a très vite alternance de signes et la factorielle qui se forme : $\boxed{I_n = (-1)^n.n!}$

Corollaire : je peux définir $(1/2)!$ par $\int_0^1 \sqrt{\ln(t)}.dt$ ou plutôt $\int_0^1 \sqrt{|\ln(t)|}.dt$.

Au fait, on a prouvé que $t.(\ln(t))^n$ tendait vers 0 quand t tendait vers 0 ?

Oui, au dessus, c'est $\varepsilon.(\ln(\varepsilon))^n$, mais ça nechange rien, hormis la rapidité de frappe pour moi.

Ce qu'on a prouvé, c'est $(t.\ln(t))^n$ tend vers 0.
Mais ici, on a un seul t face à $(\ln(t))^n$.
Le résultat reste quand même valable, mais il faut ruser.

On part de $(t.\ln(t))^n$ tend vers 0.
On l'applique à $t = \varepsilon^{1/n}$ avec n fixé et εqui tend vers 0.
On obtient : $(\sqrt[n]{\varepsilon}.\ln(\sqrt[n]{\varepsilon}))^n$ tend vers 0.
On simplifie : $\varepsilon.\Big(\frac{\ln(\varepsilon)}{n}\Big)^n$ tend vers 0 quand εtend vers 0.
La « constante » $\frac{1}{n^n}$ n'y change rien, puisque n est fixé : $\varepsilon.(\ln(\varepsilon))^n$ tend vers 0 quand ε tend vers 0.

∘11∘ Donnez une primitive de $x \longmapsto e^{Arcsin(x)}$ (il faudra peut être intégrer deux fois par parties)..

Tout étant C^1 au moins sur un intervalle inclus dans $]-1, 1[$, on intègre par parties

$e^{Arcsin(t)}$	$\hookrightarrow$	$\frac{e^{Arcsin(t)}}{\sqrt{1-t^2}}$
1	$\hookleftarrow$	t

$\int e^{Arcsin(t)}.dt = [t.e^{Arcsin(t)}] - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}.e^{Arcsin(t)}.dt$

On recommence avec le nouveau terme en répartissant les morceaux différemment :

$e^{Arcsin(t)}$	$\hookrightarrow$	$\frac{e^{Arcsin(t)}}{\sqrt{1-t^2}}$
$\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$	$\hookleftarrow$	$-\sqrt{1-t^2}$

$\int e^{Arcsin(t)}.dt = [t.e^{Arcsin(t)}] - [\sqrt{1-t^2}.e^{Arcsin(t)}] - \int e^{Arcsin(t)}.dt.$

On fait passer de l'autre côté et on divise : $\boxed{\int e^{Arcsin(t)}.dt = \Big[\frac{t.e^{Arcsin(t)} + \sqrt{1-t^2}.e^{Arcsin(t)}}{2}\Big]}$

Mais avez vous trouvé plus rapide ?

◦12◦ Dérivez $x \longmapsto Arcsin\left(\frac{2.x}{1+x^2}\right)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Expliquez.

On dérive déjà $x \longmapsto \frac{2.x}{1+x^2}$ (notée f) comme un quotient : $x \longmapsto \frac{2.(1+x^2)-2.x.(2.x)}{(1+x^2)^2}$.
On compose avec $Arcsin$?

x	$\longmapsto$	$\frac{2.x}{1+x^2}$	$\longmapsto$	$Arcsin\left(\frac{2.x}{1+x^2}\right)$
	f		$Arcsin$	
	$\frac{2-2.x^2}{(1+x^2)^2}$		$\frac{1}{\sqrt{1-(\ldots)^2}}$	

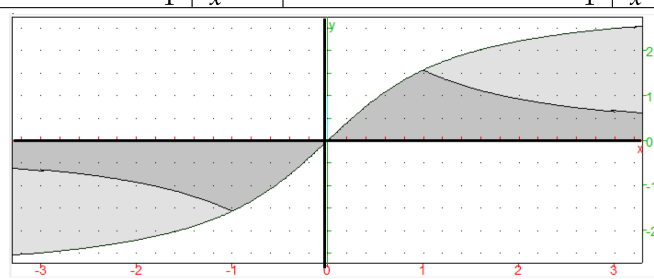
On obtient $\frac{2-2.x^2}{(1+x^2)^2}.\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2.x}{1+x^2}\right)^2}}$.

On simplifie $\frac{2.(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.\frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-4.x^2}{(1+x^2)^2}}}$ puis $\frac{2.(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.\frac{(1+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2-4.x^2}}$ (sans valeur absolue pour le dénominateur ; il est positif).

Il reste $\frac{2.(1-x^2)}{(1+x^2).\sqrt{(1-x^2)^2}}$.
On va simplifier $1-x^2$ en haut et en bas.
Il reste $\frac{2}{1+x^2}$!

En fait, non. Il y a une valeur absolue en bas : $\sqrt{1-2.x^2+x^4} = |1-x^2|$.

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x$
dérivée	$-\frac{2}{1+x^2}$	$\frac{2}{1+x^2}$	$-\frac{2}{1+x^2}$

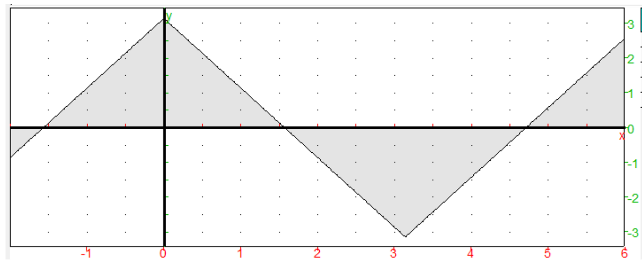


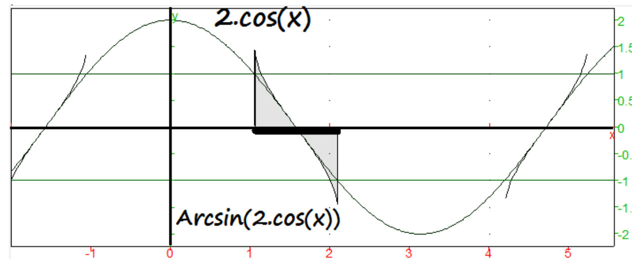
Notre fonction serait donc $2.Arctan(x)$ au signe près et aux constantes près !
Sur ce graphe, reconnaissez notre fonction (qui reste entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ comme tout arcsinus) et $2.Arctan$ (qui peut monter plus haut).

La clef de l'exercice : $\sin(2.\theta) = \frac{2.x}{1+x^2}$ *si on a pose* $x = \tan(\theta)$.

◦13◦ ♡ Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto 2.Arcsin(\cos(x))$.
Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto Arcsin(2.\cos(x))$.
Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto Arcsin(2.\cos(2.x))$.

$x \longmapsto 2.Arcsin(\cos(x))$ est définie sur $\boxed{\mathbb{R}}$





$x \longmapsto Arcsin(2.\cos(x))$ exige que $\cos(x)$ reste entre $-1/2$ et $1/2$.
Intervalle fondamental : $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2.\pi}{3}\right]$.

Domaine véritable : $\boxed{\bigcup_{jk\in\mathbb{Z}} \left[\dfrac{\pi}{3} + k.\pi, \dfrac{2.\pi}{3} + k.\pi\right]}$

$x \longmapsto Arcsin(2.\cos(2.x))$ repose sur la même exigence mais cette fois, c'est $2.x$ qui doit être dans cet ensemble.

$\boxed{\bigcup_{jk\in\mathbb{Z}} \left[\dfrac{\pi}{6} + k.\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2.\pi}{6} + k.\dfrac{\pi}{2}\right]}$

∘14∘

♡ Résolvez $Arctan(x) + \dfrac{\pi}{6} = Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{\pi}{3}$ d'inconnue réelle x *(ne passez pas tout de suite à la tangente).*

x ne peut pas être nul.
Si il est positif, on remplace $Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ par $\dfrac{\pi}{2} - Arctan(x)$.
L'équation devient $2.Arctan(x) = \dfrac{2.\pi}{3}$. On trouve $Arctan(x) = \dfrac{\pi}{3}$.
L'unique solution est $\sqrt{3}$, positive effectivement. On peut vérifier.

Si il est négatif, on remplace par $-\dfrac{\pi}{2} - Arctan(x)$.
Cette fois, on trouve $2.Arctan(x) = -\dfrac{\pi}{3}$.
La solution est $-1/\sqrt{3}$ *(valide après vérification).*

On a donc deux solutions : $\boxed{S = \left\{\sqrt{3}, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right\}}$

Remarque : | *Il valait mieux remplacer effectivement $Arctan(1/x)$ avant de commencer.*

∘15∘

♡ f est une application de classe C^n. On se donne a et h. On définit :
$F = t \longmapsto f(a+t.h) + (1-t).h.f'(a+t.h) + \dfrac{(1-t)^2}{2}.h^2.f''(a+t.h) + \dfrac{(1-t)^3}{6}.h^3.f^{(3)}(a+t.h)$
Calculez $F(0)$ et $F(1)$. Simplifiez $F'(t)$ pour tout t.
Que vous rappelle alors la formule $F(1) - F(0) = \displaystyle\int_0^1 F'(t).dt$.

F est une fonction de la variable t qui intervient dans des compositions et des produits. Dans les compositions telles que $t \longmapsto a + t.h \longmapsto f(a+t.h)$, un h sort. Et dans produits, il y a un signe moins car ce sont des puissances de $1-t$.
On dérive :

$$\begin{array}{llllll} F & = t \longmapsto & f(a+t.h) & +(1-t).h.f'(a+t.h)+ & \frac{(1-t)^2}{2}.h^2.f''(a+t.h) & +\frac{(1-t)^3}{6}.h^3.f^{(3)}(a+t.h) \\ F' & = t \longmapsto & h.f'(a+t.h) & -h.f'(a+t.h) & -(1-t).h^2.f''(a+t.h) & -\frac{(1-t)^2}{2}.h^3.f^{(3)}(a+t.h) \\ & & & +(1-t).h.f''(a+t.h) & +\frac{(1-t)}{2}.h^3.f^{(3)}(a+t.h) & +\frac{(1-t)^3}{6}.h^4.f^{(4)}(a+t.h) \end{array}$$

Il reste $F' = t \longmapsto \dfrac{(1-t)^3}{6}.h^4.f^{(4)}(a+t.h)$.

D'autre part $F(0) = f(a) + h.f'(a) + \dfrac{h^2}{2}.f''(a) + \dfrac{h^3}{6}.f^{(3)}(a)$ et $F(1) = f(a+t.h)$ (tous les autres termes sont nuls en 1).

On écrit $F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(t).dt$ et ceci donne

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2}.f''(a) + \frac{h^3}{6}.f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{6}.\int_{t=0}^1 (1-t)^3.f^{(4)}(a+t.h).dt}$$

C'est le formule de Taylor avec reste intégrale, ici à l'ordre 3.

Remarque | *Dans votre cours de physique, ce sera juste la formule de Taylor* $f(a+h) \simeq f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2}.f''(a) + \frac{h^3}{6}.f^{(3)}(a)$*en tentant de donner à* $\simeq$ *un sens qu'il ne pourra jamais avoir tant que la rigueur sera dans vos pas.*

∘16∘ ♡ Justifiez : $\int_0^\pi \frac{\sin(\theta).d\theta}{4+\cos^2(\theta)} = Arctan(1/2)$ et $\int_0^\pi \frac{2.\sin(\theta).d\theta}{4-\cos^2(\theta)} = \ln(3)$. (oui, un signe a changé)

On change de variable $c = \cos(t))$ dans la première, et on a $\int_1^{-1} \frac{-dc}{4+c^2}$. On renverse, puis on canonise en $\frac{1}{4}.\int_{-1}^1 \frac{dc}{1+(c/2)^2}$.

On intègre explicitement en $\left[\frac{Arctan(c/2)}{2}\right]_{-1}^1$ *(un seul facteur* $\frac{1}{2}$ *car un sort à la dérivation).*

On trouve $Arctan\Big(\frac{1}{2}\Big)$ en double exemplaire à cause de $-Arctan\Big(\frac{-1}{2}\Big)$ (imparité). Deux termes égaux et un facteur $\frac{1}{2}$, on tombe sur ses pattes.

L'autre intégrale s'écrit $\int_1^{-1} \frac{-2.dc}{4+c^2}$ et se décompose en éléments simples $\frac{2}{4}.\int_{-1}^1 \Big(\frac{1}{2-c} + \frac{1}{2+c}\Big).dc$.

On intègre en $\frac{1}{2}.\Big(-\ln\Big(\frac{2-1}{2-(-1)}\Big) + \ln\Big(\frac{2+1}{2+(-1)}\Big)\Big)$.

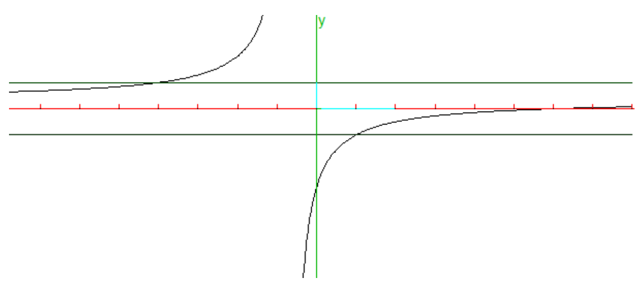
∘17∘ Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto Arcsin\Big(\frac{x-3}{.3.x+1}\Big)$.

On doit déjà éviter $-1/3$.

Ensuite, on veut $\frac{x-3}{3.x+1} \in [-1,\ 1]$, ce ui se lit $\Big(\frac{x-3}{3.x+1}\Big)^2 \leqslant 1$.

On resout donc $9.x^2 + 6.x + 1 \geqslant x^2 - 6.x + 9$ en se plaçant à l'exterieur des racines -2 et $\frac{1}{2}$.

On a donc $\boxed{D_f =]-\infty,\ -[\cup]0.5,\ +\infty[}$



∘18∘ Calculez $\int_1^2 \frac{\ln(\ln(x))}{x}.dx$ et $\int_1^2 \frac{\ln(\ln(x)).\ln(x)}{x}.dx$.

Facile *(une fois qu'on a compris).*

On change de variable dans la première : $u = \ln(x)$ $\int_1^2 \ln(\ln(x)).\frac{dx}{x} = \int_0^{\ln(2)} \ln(u).du$.

On a une primitive classique en $u \longmapsto u.\ln(u) - u$.

$\int_1^2 \frac{\ln(\ln(x))}{x}.dx = \big(\ln(\ln(2)) - 1\big).\ln(2)$

Le même changement ramène l'autre intégrale à $\int_0^{\ln(2)} u.\ln(u).du$.

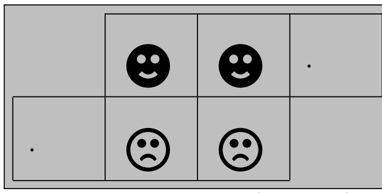
On intègre cette fois par parties :

u	$\hookleftarrow$	$\frac{u^2}{2}$
$\ln(u)$	$\hookrightarrow$	$\frac{1}{u}$

On a une primitive en $\frac{u^2.\ln(u)}{2} - \frac{u^2}{4}$ et la valeur est $\Big(\frac{\ln(2)}{2}\Big)^2.\Big(2.\ln(\ln(2)) - 1\Big)$

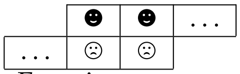
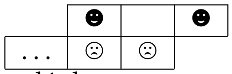
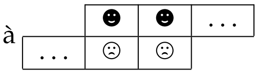
L'essentiel est la méthode, pas la valeur *(ici négative).*

◦19◦



Chaque jeton peut se déplacer d'une case horizontalement ou verticalement. Deux jetons ne peuvent pas occuper la même case. Trois non plus. Il faut échanger les les noirs et les blancs. Pour quelles valeurs de n existe-t-il une solution en n déplacements ?

Comme quatre pions doivent bouger, le nombre de déplacements est forcément au moins égal à 4.
Si on a une solution en n mouvements, alors on a une solution en $n+2$ mouvements.
En effet, il suffit de faire faire un aller retour à un pion avant de commencer

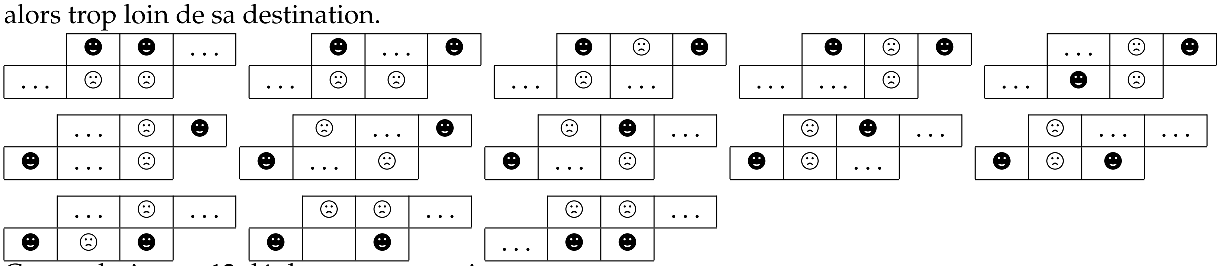
 puis  puis retour à  et là on y va.

. Et ceci compte pour deux déplacements.
Si on trouve une solution en N coups, alors tous les entiers de la forme $N+2.p$ sont aussi solutions.
On notera que si on trouve deux solutions de parité différente, alors on aura tous les entiers à partir d'un certain rang.
Mais les solutions ont forcément un nombre pair de déplacements.
En effet, si on numérote les cases ainsi :

	0	1	0
0	1	0	

- au départ, les deux cases libres ont pour total 0
- à la fin, les deux cases libres ont pour même total 0
- à chaque déplacement, on libère une case d'une parité, et on comble une case de la parité opposée (un pion de case 1 va sur une case 0, ou alors un pion de case 0 va sur une case 1).
- il s'ensuit que si on a déplace $2.p+1$ pions, la somme des deux cases libres est impaire, on ne peut pas avoir gagné.

On élimine donc tous les entiers impairs, ainsi que 0, 2 et 4. sauf à être daltonien et affirmer : c'est bon pour $n=0$.
On montre qu'en six coups, ce n'est pas possible : un pion doit quitter une place pour aller dans un coin, et il est alors trop loin de sa destination.

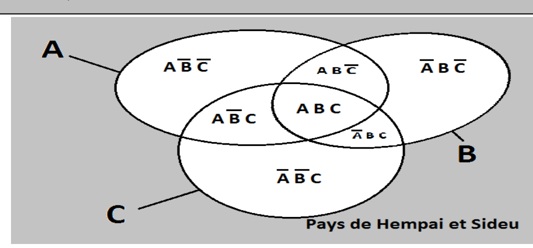


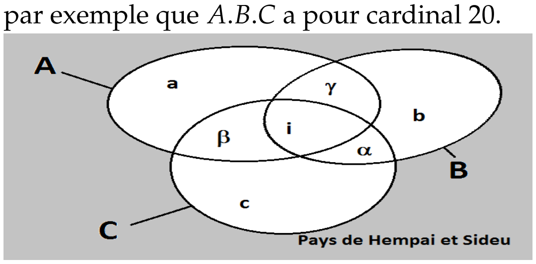
Cette solution en 12 déplacements convient.
Tous les entiers pairs plus grands que 12 conviennent.
Reste à trouver un argument pour éliminer 8 et 10.

◦20◦

Dans le pays de Hempai et Sideu, il y a des Arfs, des Bloutchs et des Crops (et c'est tout, mais on peut être Arfe et Bloutch, et même les trois à la fois, comme d'ailleurs 20 habitants). 50 Arfs sont aussi des Crops. Il y a 90 Bloutchs, dont un tiers sont d'ailleurs aussi des Crops. Parmi les Bloutchs, il y en a autant qui sont Arfs et Crops qu'il n'y en a qui sont Arf ou_e Crops. 40 Crops ne sont ni Arf, ni Bloutch. Il y a 100 Arfs. Alors, combien d'habitants dans ce pays Hempai et Sideu ? Et combien répondront "oui" à la question "*si tu es Arf, alors tu n'es ni Bloutch, ni Crop*" *(sachant qu'ils sont tous bons en logique et sincères)*.

Les Arfs, Bloutchs et les Crops. On ne sait même pas combien ils sont dans chaque catégorie. Mais on a des informations. On va découper les habitants en sept catégories, qu'on peut noter par exemple $A.\overline{B}.C$ ou $\overline{A}.B.\overline{C}$ avec un symbolisme qu'on comprend aisément. On sait par exemple que $A.B.C$ a pour cardinal 20.





On note les différents cardinaux avec des lettres (il va y en avoir sept) et on traduit les sept informations.
Sept informations pour sept inconnues, la chose semble cohérente. On a des chances d'avoir une et une seule solution.

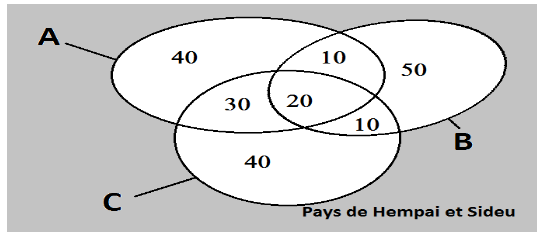
information	équation	numéro
On peut être les trois à la fois, comme d'ailleurs 20 habitants	$i = 20$	1
50 Arfs sont d'ailleurs aussi des Crops	$\beta + i = 50$	2
Il y a 90 Bloutchs...	$b + \gamma + \alpha + i = 90$	3
...dont un tiers sont d'ailleurs aussi des Crops	$i + \alpha = 30$	4
Parmi les Bloutchs autant sont "Arfs et Crops" que "Arf ou_e Crops"	$i = \alpha + \gamma$	5
40 Crops ne sont ni Arf, ni Bloutch	$c = 40$	6
Il y a 100 Crops.	$\alpha + \beta + i + c = 100$	7

On résout peu à peu le système en vérifiant si on utilise toutes les équations

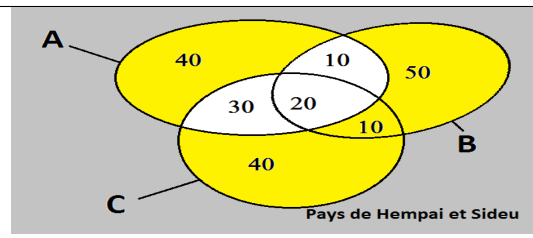
1	2	4	
$i = 20$	$\beta = 30$	$\alpha = 10$	

5	3	6	7
$\gamma = 10$	$b = 50$	$c = 40$	$c = 40$

On a tous les nombres cherchés, il ne reste plus qu'à sommer... Ils sont $\boxed{200}$ individus au total.



Quant à la question "si tu es Arf, alors tu n'es ni Bloutch, ni Crop", elle est de la forme "$A \Rightarrow (\overline{B}\ et\ \overline{C})$. On l'écrit $\overline{A}\ ou\ (\overline{B}\ et\ \overline{C})$. On l'écrit aussi $\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$. On hachure les éléments concernés, et on les compte : ils sont $\boxed{140}$
On peut passer d'ailleurs par le complémentaire : ceux qui sont A mais pas (ni B ni C), c'est à dire ceux qui sont A et (B ou C).



◦21◦

Un explorateur prétend être allé dans un pays étrange où il y a des chats noirs et des chats blancs. Les chats sont des animaux très propres qui passent leur temps à se laver ou même à laver les autres *(j'ai d'abord voulu raconter ça avec des bonobos, mais je ne savais plus trop ce qu'ils faisaient)*. Chaque chat dispose de la liste des chats qu'il peut laver *(lui même peut ou non en faire partie)*. Quelle que soit la liste à laquelle vous pensez, il y a un chat dont c'est la lave-liste *(pas love-list...)*. Il y a donc un chat "sale" qui ne lave personne. Tiens, existe-t-il un chat qui ne lave que lui même ? Deux chats différents ont des listes différentes. Un chat qui se lave lui même est forcément blanc. Un chat qui ne se lave pas lui même est forcément noir..
De quelle couleur est le chat qui ne lave que les chats noirs ?

Normalement, on aboutit à un paradoxe.

◦22◦

Un élève a affirmé : "*dans l'anneau $(A, +, .)$ l'élément a est absorbant pour la seconde loi, c'est donc le neutre de la première*". A-t-il inventé une réciproque farfelue ?

Le cours démontre en effet que dans un anneau $(A, +, .)$, le neutre de la première loi (noté 0) est absorbant pour la deuxième.
Preuve : a donné quelconque, on va prouver $0.a = 0$, même si ça vous semble normal [a]
on écrit $0.a = (0 + 0).a$ car 0 est neutre additif
on développe : $O.a + O.a = 0.a$
on ajoute l'opposé de $0.a$ de chaque côté , qu'on va noter opp : $(O.a + O.a) + opp = 0.a + opp$
on simplifie en profitant de l'associativité $O.a = 0$
car dans le second membre, il ne reste bien que 0

a. mais si c'est normal pour un anneau tel que $(\mathbb{R}, +, .)$, l'est ce encore pour un anneau tel que $(P(\mathbb{N}), \Delta, \cap)$?

Mais la nouvelle question est « peut il exister un autre élément que 0 qui soit absorbant pour la seconde loi (disons α) ?
On a juste à le tester face à 0 puisque chacun est absorbant : $0.\alpha = 0$ car 0 est absorbant (voir ci-dessus)
$0.\alpha = \alpha$ car α est absorbant (hypothèse)

Zéro difficulté, zéro connaissance,
mais des raisonnements à bâtir, sans taper sur des hypothèses, sans écrire des formules avec des variables partout qui ne servent à rien.
La fausse piste consiste en effet à écrire les hypothèses : $\forall a,\ a.\alpha = \alpha$ *et* $\forall a,\ a.0 = 0$ *et à taper dessus avec un a qui ne sert à rien, et dont on se débarrasse sans trop savoir comment.*

Prendre l'initiative de dire »je vais prendre $a = 0$ dans la première et $a = \alpha$ dans la seconde est le début de l'intelligence face à la force brute du tapeur sur les formules. Et mine de rien, c'est ce qui distingue le matheux du reste de la presque humanité présente en Prépas.

∘23∘

♡ Donnez une primitive de $t \longmapsto \sin(\ln(t))$ sur $]0, +\infty[$.

On doit calculer $\int_a^b \sin(\ln(t)).dt$ pour a et b dans $]0, +\infty[$

et pas $\int_0^{+\infty} \sin(\ln(t)).dt$ *comme le croient les élèves qui confondent intégrale et primitive.*

On change de variable : $x = \ln(t)$ (et $t = e^x$) : $\int_{\ln(a)}^{\ln(b)} \sin(x).e^x.dx$.

On intègre deux fois par parties.

Ou on intègre a priori : On propose $x \longmapsto (\alpha.\sin(x) + \beta.\cos(x)).e^x$.

On dérive $x \longmapsto ((\alpha - \beta).\sin(x) + (\alpha + \beta).\cos(x)).e^x$ *(calcul direct, c'est bon, non ?)*

On identifie *(simple condition suffisante)* : $\alpha - \beta = 1$ et $\alpha + \beta = 0$.

On a donc $x \longmapsto \frac{(\sin(x) - \cos(x))}{2}.e^x$ qu'on pouvait proposer et vérifier.

On a notre primitive, mais il faut revenir en variable t : $\boxed{t \longmapsto \frac{\sin(\ln(t)) - \cos(\ln(t))}{2}.t}$

Vérifiable.

∘24∘

♣ Calculez $\prod_{k=2}^{2015} \left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)}$ *(les crochets désignent la partie entière).*

Ecrivons ce produit avec des points de suspension pour comprendre :

k	2	3	4	5	6	7	8			2013	2014	2015
$\left[\frac{k}{2}\right]$	1	1	2	2	3	3	4			1006	1007	1007
$(-1)^k$	1	-1	1	-1	1	-1	1			-1	1	-1
$\left[\frac{k}{2}\right]^{(-1)^k}$	1	$\frac{1}{1}$	2	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$	4			$\frac{1}{1006}$	1007	$\frac{1}{1007}$

Chaque fois qu'il y a un entier au numérateur, il y a le même au dénominateur. Le produit vaut $\boxed{1}$

Proprement, on sépare par parité : $\prod_{k=2}^{2015} \left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} = \prod_{\substack{2\leqslant k\leqslant 2015 \\ k \text{ pair}}} \left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} . \prod_{\substack{2\leqslant k\leqslant 2015 \\ k \text{ impair}}} \left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)}$

$$\prod_{k=2}^{2015} \left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} = \prod_{p=1}^{1007} \left[\frac{2.p}{2}\right]^{((-1)^{2.p})} . \prod_{p=1}^{1007} \left[\frac{2.p+1}{2}\right]^{((-1)^{2.p+1})}$$

$$\prod_{k=2}^{2015} \left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} = \prod_{p=1}^{1007} \left[\frac{2.p}{2}\right] . \prod_{p=1}^{1007} \left[\frac{2.p+1}{2}\right]^{-1}$$

$$\prod_{k=2}^{2015} \left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} = \Big(\prod_{p=1}^{1007} p\Big).\Big(\prod_{p=1}^{1007} \frac{1}{p}\Big)$$

$$\prod_{k=2}^{2015} \left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} = 1007!.\frac{1}{1007!}$$

$$\prod_{k=2}^{2015} \left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} = 1$$

Un livre vous le rédigera ainsi, avec toute la rigueur voulue.

Mais qui, sinon la recherche à la main avec mille points de suspension, vous fera comprendre qu'il fallait passer par là ? Une vidéo peut être.

∘25∘

n est un entier naturel qu'on choisira convenablement à la fin.
On définit $f = x \longmapsto \dfrac{x^n.(1-x)^n}{n!}$. Montrez pour tout x de $]0,\ 1[$: $0 < f(x) < \dfrac{1}{n!}$.
Montrez que chaque $f^{(k)}(0)$ et $f^{(k)}(1)$ est un entier.
On suppose que π^2 est un rationnel de la forme $\dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels.
Quel type de raisonnement se prépare-t-on à faire ?
On définit : $F = (x \longmapsto b^n.(\pi^{2.n}.f(x) - \pi^{2.n-2}.f''(x) + \pi^{2.n-4}.f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n.f^{(2.n)}(x))$ *(écrivez proprement avec un $\sum$).*
Montrez que $F(0)$ et $F(1)$ sont deux entiers.
Montrez : $(x \longmapsto F'(x).\sin(\pi.x) - \pi.F(x).\cos(\pi.x))' = (x \longmapsto \pi^2.a^n.f(x).\sin(\pi.x))$.
Déduisez : $\pi.\displaystyle\int_0^1 a^n.f(x).\sin(\pi.x).dx = F(0) + F(1)$.
Montrez aussi $0 < \pi.\displaystyle\int_0^1 a^n.f(x).\sin(\pi.x).dx \leqslant \dfrac{\pi.a^n}{n!}$.
Choisissez maintenant n pour avoir $\dfrac{\pi.a^n}{n!} < 1$.
Aboutissez à la contradiction attendue.
π est il rationnel ? Et $\sqrt{\pi}$?

Un classique.

Quand x varie entre 0 et 1, le réel $x.(1-x)$ reste entre 0 et 1 (et même entre 0 et $\dfrac{1}{4}$, valeur atteinte au maximum en $x = \dfrac{1}{2}$.
La valeur 0 n'est atteinte qu'en 0.
Pour x dans $]0,\ 1[$, on encadre $0 < x.(1-x) < 1$, on élève à la puissance n et on divise par $n!$.

---

f est nulle en 0 et en 1, mais pas forcément ses dérivées, n'abusez pas.

Toutefois, par exemple : $f'(x) = n.\dfrac{(x.(1-x))^{n-1}}{n!}.(1-2.x)$ nulle en 0 et en 1.

Et si on continue $f'(x) = n.(n-1)\dfrac{(x.(1-x))^{n-2}}{n!}.(1-2.x)^2 - 2.n.\dfrac{(x.(1-x))^{n-1}}{n!}$. Nulle en 0 et en 1.
Mais à force de dériver, il va rester des choses.

Prenons $n = 3$:

$f^{(n)}(x)$	en 0	en 1
$\dfrac{x^3.(1-x)^3}{6}$	0	0
$\dfrac{x^2.(1-x)^2}{2}.(1-2.x)$	0	0
$x.(1-x).(5.x^2-5.x+1)$	0	0
$-20.x^3-30.x^2-12.x+1$	1	−1
$-60.x^2+60.x-12$	−12	−12

Bon, on a quand même des entiers.

Une idée : utiliser la formule de Leibniz, similaire à la formule du binôme :
$(u.v)^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}.u^{(k-i)}.v^{(i)}$ (démontrable par récurrence).
On l'applique à $u = x \longmapsto x^n$ et $v = x \longmapsto (1-x)^n$
A prolonger....

Ce qu'on a établi pour 0, on l'établit aussi par 1, car le graphe de F admet un bel axe de symétrie $x = \dfrac{1}{2}$.
De fait, $F(x) = F(1-x)$.
En dérivant donc : $F^{(n)}(x) = (-1)^n.F^{(n)}(1-x)$.
On a donc $F^{(n}(1) = (-1)^n.F^{(n)}(0)$.
Efficace, non ?

On se prépare à faire un raisonnement par l'absurde.

Proprement $F = (x \longmapsto b^n.(\pi^{2.n}.f(x) - \pi^{2.n-2}.f''(x) + \pi^{2.n-4}.f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n.f^{(2.n)}(x))$ deivient $\displaystyle\sum_{k=0}^{2.n}(-1)^k.b^n.\pi^{2.n-2.k}.f^{(2.k}$

Dans la somme alternée en $x=0$, chaque $(-1)^k.b^n.\pi^{2.n-2.k}.f^{(2.k)}(0)$ est un entier.
En effet, $f^{(2.k)}(0)$ est entier (vu plus hait), et $b^n.\pi^{2.n-2.k}=b^n.(\pi^2)^{n-k}=b^n.(\frac{a}{b})^{n-k}=a^{n-k}.b^k$ avec $n-k$ positif et k aussi.

En 1, c'est pareil.

A terminer.
Le final repose sur une contradiction avec une suite d'entiers strictement positifs qui tend vers 0. Ce qui est un peu contradictoire, non ?

Si on a réussi à prouver que π est irrationnel, alors $\sqrt{\pi}$l'est aussi.
Il suffit de raisonner par contraposée.
Si $\sqrt{\pi}$était rationnel, son carré $(\sqrt{\pi})^2$le serait aussi.

∘26∘ ♡ On pose $f = x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-2.x.\cos(\theta)+1}$. Calculez $f^{(4)}(0)$ *(indication : décomposez en éléments simples sur $\mathbb{C}$ avant de dériver, et souvenez vous que je vous interdit strictement de dériver $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-a)^2}$ en $x \longmapsto -\dfrac{2.(x-a)}{(x-a)^4}$: ; travaillez avec des exposants négatifs ou retournez au collège).*

Pour décomposer en éléments simples, il vaut mieux d'abord factoriser le dénominateur $X-.X.\cos(\theta)+1 = (X-e^{i.\theta}).(X-e^{-i.\theta})$ (factorisation classique à connaître).
On a alors deux complexes à trouver a et b vérifiant $\dfrac{1}{x^2-2.x.\cos(\theta)+1}=\dfrac{a}{x-e^{i.\theta}}+\dfrac{b}{x-e^{-i.\theta}}$.
On réduit au dénominateur commun, on simplifie par le dénominateur : $1=a.(x-e^{-i.\theta})+b.(x-e^{i.\theta})$.
On prend des x particuliers : $1=a.(e^{-i.\theta}-e^{i.\theta})+b.0$ et $1=a.0+b.(e^{i.\theta}-e^{-i.\theta})$.
On fait appel aux formules de Moivre et Euler, et on trouve $\dfrac{1}{x^2-2.x.\cos(\theta)+1}=\dfrac{1}{2.i.\sin(\theta)}.\Big(\dfrac{1}{x-e^{i.\theta}}-\dfrac{1}{x-e^{-i.\theta}}\Big)$ qu'on pouvait proposer et vérifier.

Sous cette forme, il devient aisé de dériver une fois, deux fois, trois fois, quatre fois.
Mais c'est la forme $\dfrac{1}{x^2-2.x.\cos(\theta)+1}=\dfrac{1}{2.i.\sin(\theta)}.\Big((x-e^{i.\theta})^{-1}-(x-e^{-i.\theta})^{-1}\Big)$ qui est la plus pratique :

$$\begin{array}{llcll}
n=0 & f(x) & = & \frac{1}{2.i.\sin(\theta)}. & \Big((x-e^{i.\theta})^{-1} \quad -(x-e^{-i.\theta})^{-1}\Big) \\
n=1 & f'(x) & = & \frac{1}{2.i.\sin(\theta)}. & \Big(-(x-e^{i.\theta})^{-2} \quad +(x-e^{-i.\theta})^{-2}\Big) \\
n=2 & f''(x) & = & \frac{1}{2.i.\sin(\theta)}. & \Big(2.(x-e^{i.\theta})^{-3} \quad -2.(x-e^{-i.\theta})^{-3}\Big) \\
n=3 & f^{(3)}(x) & = & \frac{1}{2.i.\sin(\theta)}. & \Big(-6.(x-e^{i.\theta})^{-4} \quad +6.(x-e^{-i.\theta})^{-4}\Big) \\
n=4 & f^{(4)}(x) & = & \frac{1}{2.i.\sin(\theta)}. & \Big(24.(x-e^{i.\theta})^{-5} \quad -24.(x-e^{-i.\theta})^{-5}\Big)
\end{array}$$

Je vous laisse conjecturer la formule générale.

On calcule en 0 : $f^{(4)}(0)=\dfrac{24}{2.i.\sin(\theta)}.\Big(-e^{5.i.\theta}+e^{-5.i.\theta}\Big)$
Le sinus revient par miracle, avec un $2.i$, mais avec $5.\theta$: $f^{(4)}(0)=24.\frac{\sin(5.\theta)}{\sin(\theta)}$ (généralisez à n)

Je n'ose imaginer que des élèves auront commis l'erreur incroyable : $f(0)=\dfrac{1}{1}$ donc en dérivant : $f^{(4)}(0)=0$!
Cette idiotie vous ramène au rang de... de qui ? Je ne sais pas. Elle veut dire que vous ne savez pas ce qu'est une fonction, une dérivée, un calcul, un cerveau, un être humain...

∘27∘ ♡ On pose pour tout n : $a_n=2^n+2.(-1)^n$ et $b_n=2^{n+1}+(-1)^n$. Trouvez M vérifiant $\forall n$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

La matrice M ne peut pas dépendre de n, c'est l'ordre des quantificateurs qui le dit.

On veut donc pour tout n : $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2^n & +2.(-1)^n \\ 2^{n+1} & +(-1)^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{n+1} & +2.(-1)^{n+1} \\ 2^{n+2} & +(-1)^{n+1} \end{pmatrix}$.

Première ligne : $2^{n+1}+2.(-1)^{n+1}=\alpha.2^n+\beta.2^{n+1}+2.\alpha.(-1)^n+\beta.(-1)^n$
$2.2^n-2.(-1)^n=(\alpha.+2.\beta).2^n+(2.\alpha.+\beta).(-1)^n$
Exigeons simplement : $\alpha+2.\beta=2$ et $2.\alpha+\beta=-2$ [2]
Deuxième ligne : $2^{n+2}+(-1)^{n+1}=\gamma.2^n+\delta.2^{n+1}+2.\gamma.(-1)^n+\delta.(-1)^n$
$4.2^n-1.(-1)^n=(\alpha.+2.\beta).2^n+(2.\alpha.+\beta).(-1)^n$
Exigeons simplement : $\gamma+2.\delta=4$ et $2.\gamma+\delta=-1$

On trouve après résolution : $\boxed{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}}$

Mais j'ai un chemin plus judicieux, et si vous le comprenez, vous avez tout compris de la diagonalisation en un exemple.

Posons donc $U_n=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n & +2.(-1)^n\\ 2^{n+1} & +(-1)^n\end{pmatrix}$.

On a immédiatement $U_n=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2^n\\ (-1)^n\end{pmatrix}$.

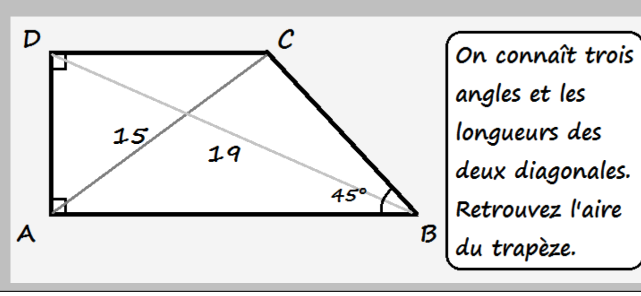
Mais aussi $U_{n+1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2^{n+1}\\ (-1)^{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2^n\\ (-1)^n\end{pmatrix}$.

Et donc sans effort : $U_{n+1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}.U_n$.

La matrice cherchée est donc $\boxed{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}}$ C'est la même, mais c'est plus intelligent et éclairant.

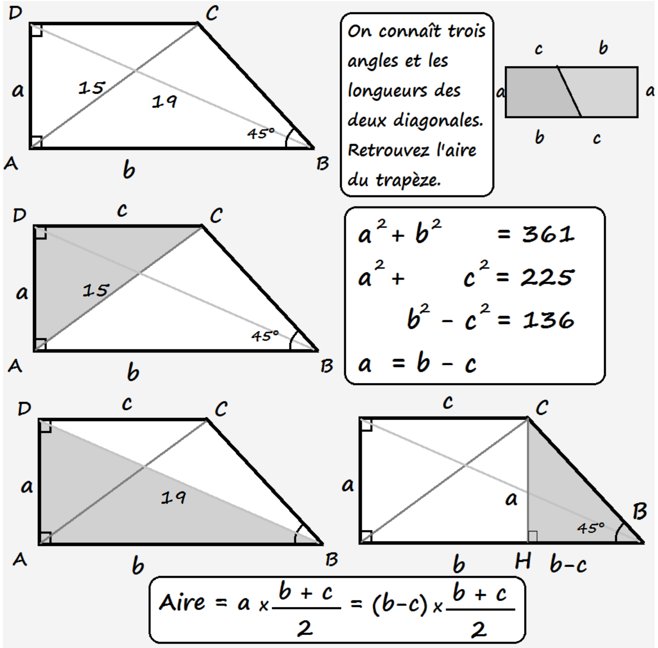
L'attitude à ne pas avoir, à ne plus avoir
« j'ai trouvé une méthode, je la garde, elle me conduit de toutes façons au résultat » (ça marche encore un peu en Terminale, et encore...)
Il faut profiter de tout ce que vous découvrez de nouveau, et ne pas vous en tenir au premier truc croisé dans le cours.
Certes, au « lycée facile », c'était un savoir vertical « apprend ça par cœur,
on le démontrera après
on fera trente exos là dessus
tu auras une évaluation dessus
puis on passera au chapitre suivant.
Quelle pédagogie déplorable pour faire des ingénieurs... on apprend et comprend par couches successives.

Sur la trapèze semi-rectangle suivant, on connaît les longueurs des deux « diagonales » ($AC=15$ et $BD=19$) ; retrouvez son aire (piste : Pythagore deux fois, soustraction, petit triangle isocèle).



Quel est l'exposant de 13 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de
◦28◦ $\prod_{k=0}^{16}\binom{16}{k}$ et $\sum_{k=0}^{16}\binom{16}{k}$.

2. ce n'est pas une identification, c'est une condition suffisante, sachez raisonner dans le bon sens et ne pas sortir des réflexes de rédaction issus de cours de lycée mal assimilés



On commence par nommer a, b et c les longueurs des trois côtés deux à deux orthogonaux.
Dans le triangle rectangle (DAB), on a $a^2 + b^2 = 19^2$.
Dans le triangle rectangle (CDA), on a $a^2 + c^2 = 15^2$.
On soustrait : $(b-c).(b+c) = 136$.

Mais le demi-carré (CHB) (ou triangle rectangle iso-demi-sel) nous renseigne : $a = b - c$.

Or, l'aire d'un trapèze est « hauteur fois moyenne des bases ».
C'est donc ici $a.\dfrac{b+c}{2}$. Ce qui fait $(b-c).\dfrac{b+c}{2}$.
En regroupant $\boxed{Aire = 68}$ (unité ?)

Déjà, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{16}{k}$ vaut 2^{16} (développement de $(1+1)^{16}$ par la formule du binôme). L'exposant de 13 est donc 0.

Regardons ensuite ce produit de $\dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$:

$$\frac{16!}{16!.0!}.\frac{16!}{15!.1!}.\frac{16!}{14!.2!}.\frac{16!}{13!.3!}.\frac{16!}{12!.4!}.\frac{16!}{11!.5!}.\frac{16!}{10!.6!}.\frac{16!}{9!.7!}.\frac{16!}{8!.8!}.\frac{16!}{7!.9!}.\frac{16!}{6!.10!}.\frac{16!}{5!.11!}.\frac{16!}{4!.12!}.\frac{16!}{3!.13!}.\frac{16!}{2!.14!}.\frac{16!}{1!.15!}.\frac{16!}{0!.16!}$$

Dans cette énumération, ne regardons que les termes contenant un facteur 13 (et jamais plus de toutes façons) :

$$\frac{13}{13.1}.\frac{13}{13.1}.\frac{13}{13.1}.\frac{13}{13.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.13}.\frac{13}{1.13}.\frac{13}{1.13}.\frac{13}{1.13}$$

On compte : dix sept au numérateur
huit au dénominateur.
Notre produit contient exactement 17^9 (et c'est même $2^{49}.3^6.5^9.7^8.11^5.13^9$).

∘29∘ **Résolvez $\cos(2.\theta) = 1 + \cos(\theta)$ d'inconnue réelle θ.**

On transforme $\cos(2.\theta) = 1 + \cos(\theta)$ en $2.\cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2 = 0$.

On trouve deux solutions : $\cos(\theta) = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$ et $\cos(\theta) = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$. On élimine la première *(un cosinus ne dépasse pas 1)*.

On vérifie quand même $-1 = \dfrac{1-\sqrt{25}}{4} \leqslant \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \leqslant \dfrac{1-\sqrt{16}}{4} = -\dfrac{3}{4}$.

On trouve cette fois un ensemble de solutions infini *(périodicité et parité)* :

$$\boxed{S_\theta = \left\{Arccos\Big(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\Big) + 2.k.\Pi \mid k \in \mathbb{Z},\ \varepsilon \in \{-1,\ 1\}\right\}}$$

∘30∘ **Résolvez $x^2 - x + 1 = 7$ dans $\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}}$ (entiers de 0 à 6 pour les lois modulo 7).**

On peut tester les sept nombres.
Sinon $\Delta = 1 - 4 = -3 = 4 = 2^2$.
Les deux racines se calculent $(1+2).2^{-1} = 3.4 = 12 = 5$
$(1-2).2^{-1} = -1.4 = -4 = 3$

On vérifie si nécessaire : $\boxed{S = \{3,\ 5\}}$

∘31∘

♡♣ On pose $S=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$.
Citez les arguments qui permettent d'obtenir de ligne en ligne
$S=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n.(n+1)}$
$S=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n.(n+1)}\Big)$
$S=1+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n.(n+1)}\Big)$
$S=1+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{n=k}^{+\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\Big)$
$S=1+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}=1+S$
Le résultat final semble étrange ? Trouvez l'erreur.

$S=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n.(n+1)}$	on isole le terme $n=1$ on décale les indices $\frac{1}{n+1}$ pour n de 1 à l'infini on multiplie haut et bas par n
$S=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n.(n+1)}\Big)$	k est un compteur
$S=1+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n.(n+1)}\Big)$	on permute les sommes $1\leqslant k\leqslant n$
$S=1+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{n=k}^{+\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\Big)$	on décompose en éléments souples
$S=1+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{k}\Big)$	on télescope « à l'infini »
$S=1+S$	les variables sont muettes

L'erreur : on travaille sur quelquechose qui n'existe pas !
La somme S est en fait infinie.

∘32∘

Soient a et b deux réels positifs ; qui est le plus grand : la moyenne arithmétique de leurs inverses ou l'inverse de leur moyenne arithmétique ?

On doit comparer deux nombres : • la moyenne arithmétique de leurs inverses $A=\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$
• l'inverse de leur moyenne arithmétique $B=\dfrac{1}{\frac{a+b}{2}}$.

On soustrait : $B-A=\frac{2}{a+b}-\frac{a+b}{2.a.b}=\frac{4.a.b-(a+b)^2}{2.a.b.(a+b)}=\ldots=\frac{-(a-b)^2}{2.a.b.(a+b)}$.
Le numérateur est négatif, et le dénominateur positif : l'inverse de la moyenne est plus petit que la moyenne des inverses.

Et on peut le prouver avec des résistances en parallèle. Si si !

∘33∘

Vérifiez que

Id	$\overrightarrow{(1\,2\,3)}$	$\overrightarrow{(3\,2\,1)}$	$\overrightarrow{(1\,2)}\circ\overrightarrow{(3\,4)}$
$\overrightarrow{(1\,2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,3\,4)}$	$\overrightarrow{(2\,3,\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,3)}\circ\overrightarrow{(2\,4)}$
$\overrightarrow{(4\,2\,1)}$	$\overrightarrow{(4\,3\,1)}$	$\overrightarrow{(4\,3,\,2)}$	$\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)}$

est un groupe pour a loi de composition.
Montrez qu'il n'est pas commutatif.
Donnez des sous-groupes de cardinal 2 et 3.
Pouvez vous trouver des sous-groupes de cardinal 1 et 12 ?
Pouvez vous trouver des sous-groupes de cardinal 4 et 6 ?

On a douze éléments, on doit dresser une table de taille 12 sur 12.

Pour le caractère interne, il faudra vérifier que quand on les compose, on retrouve une permutation de la famille.

Par exemple $\overrightarrow{(1\,2\,4)} \circ \overrightarrow{(4\,2\,1)} = Id$

$\overrightarrow{(1\,2\,4)} \circ \overrightarrow{(3\,2\,1)} = \overrightarrow{(1\,3\,4)}$

$\overrightarrow{(1\,2\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3\,4)} = \overrightarrow{(1\,2\,3)}$

$\overrightarrow{(1\,2\,4)} \circ \left(\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}\right) = \overrightarrow{(4\,2\,3)}$ (à mémoriser)

$\left(\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}\right) \circ \overrightarrow{(1\,2\,4)} = \overrightarrow{(1\,3\,2)}$ (à mémoriser aussi)

$\left(\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}\right) \circ \left(\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}\right) = Id$

$\left(\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}\right) \circ \left(\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)}\right) = \overrightarrow{(1\,3)} \circ \overrightarrow{(2\,4)}$

En tant que loi de composition, elle est associative.
On dispose d'un neutre, c'est Id.

Et chaque permutation a son symétrique : pour un cycle $\overrightarrow{(a\ b\ c)}$ prendre $\overrightarrow{(a\ c\ b)}$
pour un bi-bycycle prendre lui même

La loi n'est pas commutative (exemple visible plus haut).

Sous groupes de cardinal 2 : $\boxed{Id \quad \overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)}}$ et les deux du même type.

Sous groupes de cardinal 2 : $\boxed{Id \quad \overrightarrow{(1\,2\,3)} \quad \overrightarrow{(3\,2\,1)}}$ et les trois du même type.

Sous groupe de cardinal 1 : $\boxed{Id}$
Et aucun autre,car dans le sous-groupe, il faut qu'il y ait le neutre.

Sous groupe de cardinal 12 : le groupe lui même !

Sous groupe de cardinal 4 :

$g \circ f$	Id	$\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,3)} \circ \overrightarrow{(2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}$	f
Id	Id	$\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,3)} \circ \overrightarrow{(2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}$	
$\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)}$	Id	$\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}$	$\overrightarrow{(1\,3)} \circ \overrightarrow{(2\,4)}$	
$\overrightarrow{(1\,3)} \circ \overrightarrow{(2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,3)} \circ \overrightarrow{(2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}$	Id	$\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)}$	
$\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}$	$\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}$	$\overrightarrow{(1\,3)} \circ \overrightarrow{(2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)}$	Id	
g					

Klein !

Sous groupe de cardinal 6 : impossible *(c'est un peu long à montrer, mais on s'interroge « si on y met deux tricycles, on finit par avoir tout », si on y met un tricycle et un bi-bicyle, c'est pareil au final »).*

∘34∘ La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = F_1 = 1$ et pour tout n : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Montrez pour tout n : $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \leqslant F_n \leqslant 2^n$.

Pour n égal à 0 et même à 1 :

$n = 0$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$	$\leqslant 1$	$\leqslant 1 = 2^0$
$n = 1$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{0} = 1$	$\leqslant 1$	$\leqslant 2 = 2^1$

On se donne n et on suppose

rang n	$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$	$\leqslant F_n$	$\leqslant 2^n$
rang $n+1$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$	$\leqslant F_{n+1}$	$\leqslant 2^{n+1}$

On somme :

rang n	$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$	$\leqslant F_n$	$\leqslant 2^n$
rang $n+1$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$	$\leqslant F_{n+1}$	$\leqslant 2^{n+1}$
	$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n}$	$\leqslant F_n + F_{n+1}$	$\leqslant 2^n + 2^{n+1}$

$= 2^n.(1+2) = 3.2^n \leqslant 4.2^n = 2^{n+2}$

A droite, c'est bon, à gauche, on écrit $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.\left(1+\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.\left(\frac{5}{2}\right) \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.\left(\frac{9}{4}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+2-1}$.

La propriété est héréditaire.

Résolvez : F_n est pair d'inconnue entière n.

On regarde la parité de F_n pour les premiers n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
F_n *mod* 2	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1

On devine très vite le motif | 1 | 1 | 0 | ou si vous préférez | impair | impair | pair |

Le mieux est d'énoncer un propriété par groupes de trois | $F_{3.p}$ impair | $F_{3.p+1}$ impair | $F_{3.p+2}$ pair |

La propriété est initialisée pour p égal à 0 (et même1 et 2).

Supposons la propriété vraie au rang p (donc aux rangs $n = 3.p$, $n = 3.p + 1$ et $n = 3.p + 2$) et calculons au rang $p + 1$ (donc aux rangs $n = 3.p$, $n = 3.p + 1$ et $n = 3.p + 2$).

$n = 3.p$	$n = 3.p + 1$	$n = 3.p + 2$	hypothèse au rang p		
impair	impair	pair			
	impair + pair $\to$		impair		
		pair + impair $\to$		impair	
			impair + impair $\to$		pair
			impair	impair	pair
conclusion au rang $p + 1$			$n = 3.(p + 1)$	$n = 3.(p + 1) + 1$	$n = 3.(p + 1) + 2$

Pas trop de mots, mais un tableau pour expliquer.
Normalement, on comprend au premier coup d'oeil (c'est des maths).
Mais il n'y a pas de symboles partout ni de long calcul (ce n'estpas de la chimie).

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour tout n : $U_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$. Montrez que (U_n) est une suite géométrique de raison (à gauche) M *(c'est à dire $U_{n+1} = M.U_n$ et déduisez $U_n = M^n.U_0$).*

On multiplie $M.U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n + F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = U_{n+1}$.

C'est uen preuve directe.
Vous apsserez pour un crétin si vous avez titré « je fais une récurrence ».
C'est une formule directe qui SERT ensuite POUR DES RECURRENCES.

Maintenant, on peut faire une récurrence sur n pour prouver : $U_n = M^n.U_0$.
C'est vrai pour n égal à 0.
Supposons le résultat vrai pour n. On calcule alors $U_{n+1} = M.U_n, = M.(M^n.U_0) = (M.M^n).U_0 = M^{n+1}.U_0$.

« Monsieur, on fait la récurrence à chaque fois, ou on dit que c'est évident. »
Pas de récurrence.
Vous l'avez faite il y a trois ans.
Et juste un résultat du cours de première : une suite goémétrique caractérisée par $u_{n+1} = m.u_n$ vérifie automatiquement $u_n = m^n.u_0$.
Simplement, ici, on a des éléments dans $M_2(\mathbb{R})$ et pas dans $\mathbb{R}$.
Il faut donc surveiller la non-commutativité.

Montrez : $M^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$ par récurrence sur n *(est ce une convention de poser $M^0 = I_2$ ou bien est ce logique ?).*

Les premières puisssances de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donnent | $M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $M^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ |

On a initialisé.
Supposons pour un n donné : $M^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$.
On calcule alors $M^{n+1} = M^n.M = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_n & F_n + F_{n-1} \end{pmatrix}$
Par propriété de la suite de Léonard : $M^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$.
C'est bien la formule au rang $n + 1$.

On rappelle : $\det(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = a.d - b.c$. Montrez pour tout couple de matrces : $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$.

On se donne deux matrices dont on calcule produit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.\alpha + b.\gamma & a.\beta + b.\delta \\ c.\alpha + d.\gamma & c.\beta + d.\delta \end{pmatrix}$$

On compare ensuite $(a.\alpha + b.\gamma).(c.\beta + d.\delta) - (c.\alpha + d.\gamma).(a.\beta + b.\delta)$
et $(a.d - b.c).(\alpha.\delta - \gamma.\beta)$

Il y a égalité.

Déduisez : $F_{n-1}.F_{n+1} - (F_n)^2 = (-1)^{n-1}$ pour tout n. Oui, il s'agit d'utiliser le déterminant !

En mettant en boucle cette propriété, on a $\det(A^n) = (\det(A))^n$ pour tout n *(récurrence sur n en fait)*.

En particulier, pour la relation $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$ on obtient $(-1)^n = F_{n-2}.F_n - (F_{n-1})^2$.

Pas de grosse récurrence avec des F_n partout, juste un belle « astuce » matricielle !

Déduisez que le seul facteur commun à F_n et F_{n+1} est 1.

On se donne n. On suppose qu'un entier d divise F_n et F_{n+1}.
Alors d divise aussi $F_n.F_{n+2}$ et $F_{n+1}.F_{n+1}$ (si d divise a, il divise tout multiple de a).
Par addition, d divise $F_n.F_{n+2} - (F_{n-1})^2$ (directement, si d divise a et b il divise toute combinaison $a.u + b.v$).
Mais alors d divise $(-1)^{truc}$.
Il ne peut valoir que 1.

F_n et F_{n+1} sont toujours premiers entre eux.

Sinon, on voit que la formule $F_{n-1}.F_{n+1} - (F_n)^2 = (-1)^{n-1}$ est une identité de Bézout de la forme $a.F_{n+1} - b.F_n = \pm 1$ avec a et b entiers.

◦35◦

♡ On pose $f = a.\cos + b.\sin$.
Ajustez a et b pour avoir $f(\pi/3) = f(2.\pi/3) = 0$.
Ajustez a et b pour que f atteigne son maximum égal à 5 en $\pi/3$.
Pouvez vous ajuster a et b pour que le maximum de f soit 3 et son minimum -4.
Ajustez a et b pour avoir $f(0) = 1$ et $Sup\{|f(t)| \ \ t \in \mathbb{R}\} = 2$ (combien de possibilités ?).

La première question demande la résolution d'un système.

Et la seule solution est 0 (le déterminant du système $\left\{ \begin{array}{rcrcl} \frac{1}{2}.a & + & \frac{\sqrt{3}}{2}.b & = & 0 \\ -\frac{1}{2}.a & + & \frac{\sqrt{3}}{2}.b & = & 0 \end{array} \right|$ est non nul, et de toutes façons, par addition...).

La seconde question donne .$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \frac{1}{2}.a & + & \frac{\sqrt{3}}{2}.b & = & 5 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}.a & + & \frac{1}{2}.b & = & 0 \end{array} \right|$ (valeur de la fonction, et dérivée nulle).

On trouve $t \longmapsto 5.\dfrac{\cos(t) + \sqrt{3}.\sin(t)}{2}$.

Et c'est même $t \longmapsto 5..\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$ et là on comprend tout !

Le maximum de $a.\cos + b.\sin$est $\sqrt{a^2 + b^2}$ et son minimum $-\sqrt{a^2 + b^2}$. Impossible donc que l'on passe de 3 à -4.

Pour avoir $f(0) = 1$, on n'a pas le choix : $a = 1$.
Ensuite, $\sqrt{a^2 + b^2}$ vaut 2.
On a deux fonctions : $t \longmapsto \cos(t) + \sqrt{3}.\sin(t)$ et $t \longmapsto \cos(t) - \sqrt{3}.\sin(t)$.

∘36∘

♡ On rappelle la définition de $A+B$ quand A et B sont deux parties d'un groupe $(G,+)$: $A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$.
Pour le groupe $(\mathbb{R},\ +)$, $a-$déterminez $\mathbb{N}+\mathbb{N}$ et comparez avec $2.\mathbb{N}$
$b-$ déterminez $\mathbb{R}^+ + \{0\}$ et comparez avec $\mathbb{R}^*\cup\{0\}$
$c-$ déterminez $\mathbb{Z}+[0,\ 1]$
$d-$ déterminez $\mathbb{Z}+]0,\ 1[$
$e-$ montrez : $\mathbb{Q}+]0,\ \varepsilon[=\mathbb{R}$ pour tout réel strictement positif ε.
Pour le groupe $(\mathbb{Z}_{12},+)$ [a] : $f-$déterminez $\{0,\ 1,\ 3\}+\{1,\ 2,\ 10,\ 11\}$
$g-$ pouvez vous trouver A de cardinal 3 vérifiant $A+A=\mathbb{Z}_{12}$
$h-$ pouvez vous trouver B de cardinal 4 vérifiant $B+B=\mathbb{Z}_{12}$

a. ensemble des entiers de 0 à 11 (inclus) pour l'addition modulo 12

$a-$ Les éléments de $\mathbb{N}+\mathbb{N}$ sont de la forme $a+b$ avec a et b entiers naturels. Ce sont des entiers naturels : $\mathbb{N}+\mathbb{N}\subset\mathbb{N}$. Mais en plus tout élément n de $\mathbb{N}$ est atteint, de la forme $n+0$ par exemple.
On a donc $\mathbb{N}+\mathbb{N}=\mathbb{N}$. Tandis que $2.\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers pairs.

Oui, on doit raisonner par double inclusion.
Dois je même dire « on doit raisonner » ?

$b-$ Prenez un réel non nul quelconque, ajoutez lui 0 (seul élément de $\{0\}$, vous retrouvez x : $\mathbb{R}^*+\{0\}=\mathbb{R}^*$).
$\mathbb{R}^*\cup\{0\}$, ça fait justement $\mathbb{R}$.

$c-$ L'ensemble $\mathbb{Z}+[0,\ 1]$ est inclus dans $\mathbb{R}$, mais il est même égal à $\mathbb{R}$. En effet, tout réel x s'écrit $[x]+(x-[x])$ *(partie entière et partie décimale)* avec $[x]$ dans $\mathbb{Z}$ et $x-[x]$ dans $[0,\ 1[$ *(donc a fortiori dans* $[0,\ 1]$*)*. On a $\mathbb{Z}+[0,\ 1]=\mathbb{R}$.

$d-$ $\mathbb{Z}+]0,\ 1[$ ne donnera pas $\mathbb{R}$. Les entiers ne peuvent pas s'écrire comme somme d'un entier et « d'un truc en $0, quelquechose$ ».
Ce sont d'ailleurs les seuls éléments qu'on n'arrive pas à avoir. $\mathbb{Z}+]0,\ 1[=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.
On l'écrit d'ailleurs aussi $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n,\ n+1[$.

$e-$ $\mathbb{Q}+]0,\ \varepsilon[$ est inclus dans $\mathbb{R}$.mais pourquoi est il égale à $\mathbb{R}$? parce que tout réel est la somme d'un rationne et d'un truc tout petit.
Pour x donné, l'intervalle $]x-\varepsilon,\ x[$ contient au moins un rationnel *(densité de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$*)*. On note q un tel rationnel.
On a alors $x=q+(x-q)$ avec $x-q$ entre 0 et ε.

$f-$ Un tableau :

	1	2	10	11
0	1	2	10	11
1	2	3	11	0
3	4	5	1	2

$\{0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 11\}$

$g-$ Si A n'a que trois éléments a, b et c, l'ensemble $A+B$ n'en contiendra pas plus de 9 (peut-être moins si on a des situations comme $a+b=a+c$). En tout cas, ne rêvons pas d'atteindre $\mathbb{Z}_{12}$.

$h-$ Un exemple ? Mais $B+B$ contient 16 éléments au maximum. Sauf qu'on a une certaine symétrie : a_0+a_1 et a_1+a_0.
On a donc au plus 10 éléments différents. Raté encore.

∘37∘

36 est égal à quatre fois la somme de ses chiffres *(*$36=4.(3+6)$*)*. Trouvez tous les autres nombres entiers vérifiant cette propriété.
Et si je vous demande les entiers qui sont égaux à 2017 fois la somme de leurs chiffres, comme 42 357, comment en appelez vous au `Python` suprême ?

Il y a certes 0. Aucun autre entier à un chiffre ne convient.
On résout ensuite $10.a+b=4.(a+b)$.
Je trouve 12, 24, 36 et 48.

Combien de chiffres peut avoir n ?

On crée une procédure pour récupérer la somme des chiffes d'un entier :

```
def SommeChiffres(n) :
....S = 0
....while n>0 :
........S += n%10
........n = n//10
....return(S)
```

```
def SommeChiffres(n) :
....Mot = list(str(n))
....S = 0
....for lettre in mot :
........S += int(lettre)
....return(S)
```

```
L = [ ]
for n in range(100000) :
....if 2017*n == SommeChiffres(n) :
........L.append(n)
print(L)
```

∘38∘

Soit $(G, *)$ un groupe et A un sous-groupe de G. On définit :
$N(A) = \{x \in G \mid \forall a \in A,\ x * a * x^{-1} \in A\}$ et $C(A) = \{x \in G \mid \forall a \in A,\ x * a * x^{-1} = a\}$.
Montrez que ce sont des sous-groupes de $(G, *)$.
Déterminez $N(A)$ et $C(A)$ pour $A = \{e\}$ *(sous groupe réduit au neutre)*.

$C(A) = \{x \in G \mid \forall a \in A,\ x * a * x^{-1} = a\}$ est formé des éléments x qui commutent avec tous les éléments de A.
On doit montrer inclusion, présence du neutre, stabilité et passage à l'inverse.
Les inclusions se lisent dans la définition : $N(A) = \{x \in G \mid \ldots\}$.
Pour le neutre, on vérifie $\boxed{\forall a \in A,\ e * a * e^{-1} = a}$ $\boxed{\forall a \in A,\ e * a * e^{-1} = a \in A}$
On peut le mettre dans le rôle du x des définitions.

On se donne x et y dans $N(A)$: $\forall a \in A,\ x * a * x^{-1} \in A$ et $\forall a \in A,\ y * a * y^{-1} \in A$.
On pose $z = x * y$ et on regarde si il est dans $N(A)$. On se donne donc un a quelconque dans A et on doit regarder si $z * a * z^{-1}$ est dans A. Cet élément s'écrit $(x * y) * a * (x * y)^{-1} = x * y * a * y^{-1} * x^{-1} = x * (y * a * y^{-1}) * x^{-1}$
Comme y est dans $N(A)$, l'élément $(y * a * y^{-1})$ est dans A. On le note α et $x * \alpha * x^{-1}$ est à son tour dans A puisque x est dans $C(A)$. On a prouvé $\forall a \in A,\ (x * y) * a * (x * y)^{-1} \in A$. On reconnait $x * y \in N(A)$.

On se donne x et y dans $C(A)$: $\forall a \in A,\ x * a * x^{-1} = a$ et $\forall a \in A,\ y * a * y^{-1} = a$.
On pose $z = x * y$ et on calcule pour tout a de A :
$(x * y) * a * (x * y)^{-1} = x * y * a * y^{-1} * x^{-1} = x * (y * a * y^{-1}) * x^{-1} = x * a * x^{-1} = a$
On a établi $\forall a \in A,\ (x * y) * a * (x * y)^{-1} = a$. On reconnait $x * y \in C(A)$. L'ensemble $C(A)$ est stable par la loi $*$.

On se donne x dans $N(A)$. On pose $z = x^{-1}$. On doit vérifier que pour tout a de A, $z * a * z^{-1}$ est dans A.
Or, on constate $z * a * z^{-1} = (x^{-1} * a * x) = (x * a^{-1} * x^{-1})^{-1}$.
Comme a est dans A, a^{-1} est aussi dans A. Comme x est dans $N(A)$, $x * a^{-1} * x^{-1}$ est dans A. Comme A est un groupe, son inverse $(x * a^{-1} * x^{-1})^{-1}$ y est aussi. C'est ce que l'on voulait.

On se donne x dans $C(A)$. On pose $z = x^{-1}$. On doit vérifier que pour tout a de A, $z * a * z^{-1} = a$, c'est à dire $x^{-1} * a * x = a$.
On doit prouver $(x * a^{-1} * x^{-1})^{-1} = a$ soit encore $x * a^{-1} * x^{-1} = a^{-1}$. Mais quand a est dans A, a^{-1} y est aussi. Et comme x est dans $C(A)$, on a $x * a^{-1} * x^{-1} = a^{-1}$. Gagné !

∘39∘

♡ Montrez que $(a,\ b) \longmapsto (2.a + 3.b,\ 3.a + 4.b + 1)$ (notée g) est bijective de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$ par exemple en donnant sa réciproque g vérifiant $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = Id$.
(au fait, qui a oublié de vérifier avant la bijectivité que l'on a bien une application de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$?)
Montrez que pour $(a,\ b) \longmapsto (2.a + 3.b,\ 2.a + 4.b + 1)$ (notée h), il existe une application h de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$ vérifiant $h^{-1} \circ h = Id_{Z^2}$.

Ce qu'on oublie à tous les coups : cette application va-t-elle bien de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$?
Si a et b sont entiers (relatifs), alors $2.a + 3.b$ et $3.a + 4.b + 1$ sont aussi entiers.

Injectivité, parce que c'est le plus simple à faire, juste en calculant.
On se donne a, b, c et d.
On suppose $(2.a + 3.b,\ 3.a + 4.b + 1) = (2.c + 3.d,\ 3.c + 4.d + 1)$.
On égalise : $\begin{array}{cccc} 2.a & +3.b & = & 2.c & +3.d \\ 3.a & +4.b & = & 3.c & +4.d \end{array}$
On effectue des combinaisons : $3.L1 - 2.L2$ et aussi $4.L1 - 3.L2$.
On aboutit à $a = c$ et $b = d$.

Surjectivité. On se donne un couple $(x,\ y)$, il faut lui trouver un antécédent.

On résout donc $\begin{array}{cccccc} 2.a & +3.b & = & a & \\ 3.a & +4.b & = & b & -1 \end{array}$ d'inconnues a et b.

On trouve une unique solution (après calculs) : $a = 3.b - 4.a - 3$ et $b = 3.a - 2.b + 2$.

le fait d'avoir trouvé une solution DANS $\mathbb{Z}^2$ (pas de dénominateur) prouve la surjectivité vers $\mathbb{Z}^2$.
Et le fait de n'avoir qu'une solution re-donne l'injectivité.

Pour la surjectivité seule, on peut proposer/vérifier.

Tiens, on a trouvé l'application réciproque : $(x,\ y) \longmapsto (-4.a + 3.b - 3,\ 3.a - 2.b + 2)$.

Petite subtilité en passant.
L'application de l'anoncé peut aussi être regardée de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^2$.
Elle va bien de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^2$ (que des signes plus).
Elle reste injective.
Mais elle n'est plus surjective. l'antécédent de $(1,\ 0)$ est dans $\mathbb{Z}^2$ mais pas dans $\mathbb{N}^2$.

∘40∘

L'élève Pabokoul-Déba veut décomposer en éléments simples $\dfrac{6.x^4 - 9.x^3 - 22.x - 45}{(x-3).(x^4 + 6.x^2 + 5)}$.

Il écrit $\dfrac{a}{x-3} + \dfrac{b.x+c}{x^2+3} + \dfrac{d.x+e}{x^2+2}$, réduit au dénominateur commun, identifie les numérateurs et obtient le système

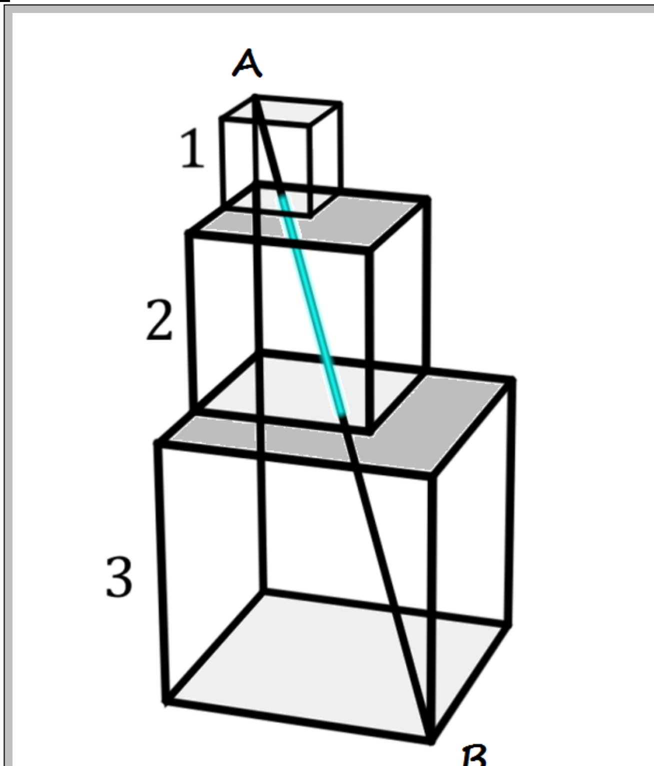
$$\left\{\begin{array}{cccccccc} a & +b & & +d & & = & 6 \\ & -3.b & +c & -3.d & +e & = & -9 \\ 5.a & +2.b & -3.c & +3.d & -3.e & = & 0 \\ & -6.b & +2.c & -9.d & +3.e & = & -22 \\ 6.a & & -6.c & & -9.e & = & -45 \end{array}\right|$$

. Il résout et trouve $(a, b, c, d, e) = (1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 5)$. Mais il a tout faux.

Pourquoi ?

La résolution du système est la bonne.
Mais le dénominateur n'est pas le bon !
Qule con ce Pabokoul !

∘41∘



Quelle est la longueur de la grande diagonale $[A,\ B]$. Quelle est la longueur de sa partie « en bleu » dans le cube du milieu ?

Calculez $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}.dx$ et $\int_0^2 \sqrt{4-2^x}.dx$.

L'une vaudra $2.\dfrac{\ln(2+\sqrt{3}) - \ln(2-\sqrt{3}) - \sqrt{3}}{\ln(2)}$ *et l'autre* π.

Résolvez le système $\log_x(y) + \log_y(x) = \dfrac{50}{7}$ et $x.y = 256$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$ *(rappel* $y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$*).*

Donnez moi un entier ayant exactement 15 diviseurs.

On est dans $rang(53)$ pour l'addition et la multiplication modulo 53. L'équation $x^2 + 2.x + 2 = 0$ a pour discriminant -4. L'élève dit « Δ est négatif, elle n'a donc pas de solution ». Il n'a rien compris ! Δ a une racine carrée assez évidente ! Résolvez l'équation.

Un entier tel que $\boxed{2^{14}}$ a quinze diviseurs : les 2^p pour p allant de 0 à 14 lui même.

[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384]

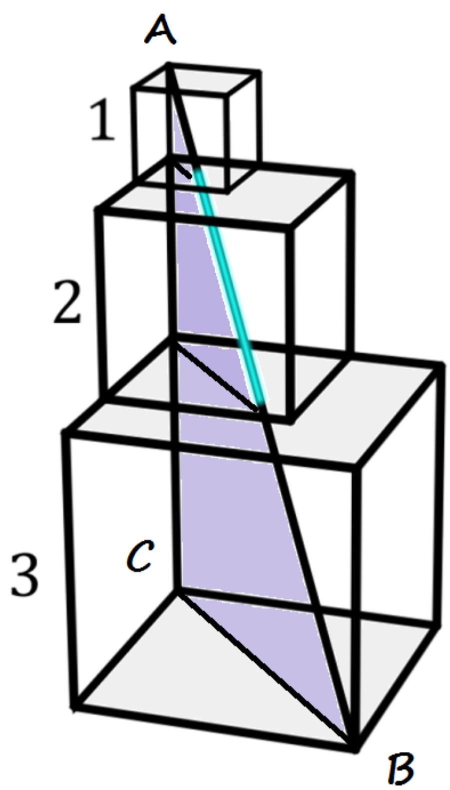
Sinon, il y a 144. [1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144] .

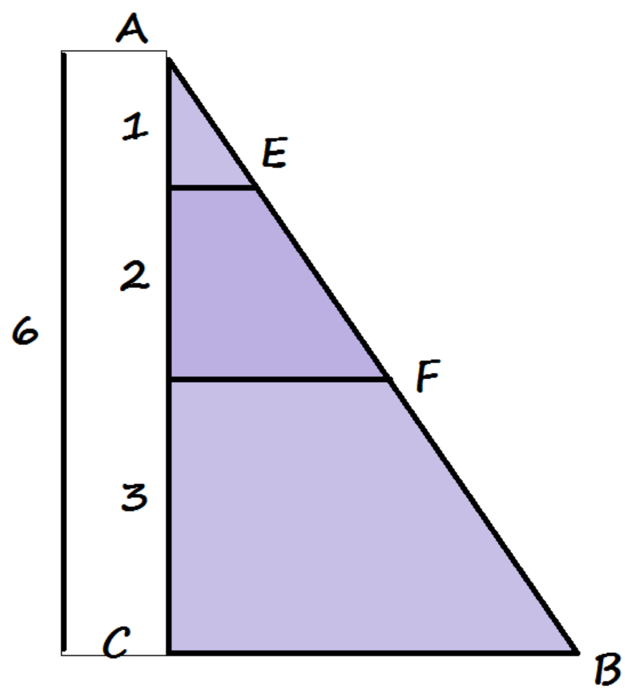
On explique : $\boxed{144 = 2^4.3^2}$
Des diviseurs sont les $2^a.3^b$ avec $a \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ et $b \in \{0,\ 1,\ 2\}$.
Cinq choix pour l'un, et trois pour l'autre. Total (ou produit) : 15.

Le carré qui supporte l'ensemble a pour côté 3 et donc pour diagonale $3.\sqrt{2}$.
On coupe l'empilement de cubes suivant le plan de coupe matérialisé.
On obtient un triangle. Rectangle en un point qu'on va appeler C.

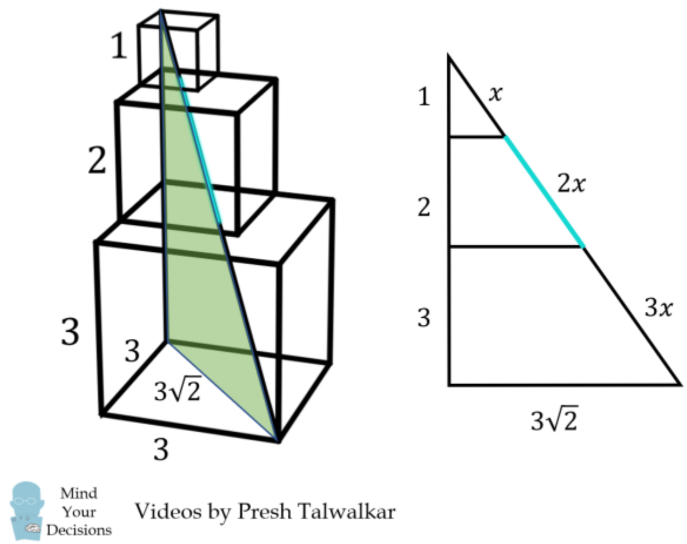
La hauteur totale des trois cubes est 6. On a donc $AC = 6$.
On l'a dit au début : $BC = 3.\sqrt{2}$.

Par théorème de Pythagore : $AB = \sqrt{6^2 + (3.\sqrt{2})^2} = \sqrt{54}$. Simplifiable si on veut.





On va conclure par théorème de Thalès. La section que l'on cherche est à 2 (hauteur du cube du milieu)
ce que $\sqrt{54}$ (grande diagonale)
est à 6 (hauteur totale).



On a donc $\dfrac{EF}{2} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{54}}{6}$.
La longueur cherchée vaut $\dfrac{\sqrt{54}}{3}$ ce qui fait $\sqrt{6}$.
Sinon, il y a aussi ça (source : Mind Your Decisions) :

On rappelle $\begin{array}{rcl} y = \log_a(x) & \Leftrightarrow & a^y = x \\ & \Leftrightarrow & e^{y.\ln(a)} = x \\ & \Leftrightarrow & y.\ln(a) = \ln(x) \\ & \Leftrightarrow & y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}$ (et pour $a = e$, on a le logarithme naturel).

L'équation $\log_x(y) + \log_y(x) = \dfrac{50}{7}$ donne $\dfrac{(\ln(x))^2 + (\ln(y))^2}{\ln(x).\ln(y)} = \dfrac{50}{7}$.
et $x.y = 256$ donne $\ln(x) + \ln(y) = 8\ln(2)$.
On note a et b les deux « vraies inconnues » : $a = \ln(x)$ et $b = \ln(y)$: $\begin{array}{r} 7.(a^2+b^2) = 50.a.b \\ a+b = 8.\ln(2) \end{array}$
La première équation dit $7.(a+b)^2 = 64.a.b$. En y reportant la seconde (et en divisant par 64) : $a.b = 7.(\ln(2))^2$.

a et b sont les deux racines de $X^2 - 8.\ln(2).X + 7.(\ln(2))^2$ de discriminant $25.(\ln(2))^2$ et de racines $7.\ln(2)$ et $\ln(2)$.
On a donc $\{a,\ b\} = \{\ln(2),\ 7.\ln(2)\}$ puis $\{x,\ y\} = \{2,\ 128\}$.
On encadre $\boxed{S_{x,y} = \{(2,\ 128),\ (128,\ 2)\}}$ et on vérifie : $\log_2(128) + \log_{128}(2) = 7 + \dfrac{1}{7}$.

Résolvons $x^2 + 2.x + 2 = 0$ (et c'est $(x+1)^2 + 1 = 0$).
Son discriminant vaut -4. Mais ne dites pas que ce nombre est négatif et n'a donc pas de racine carrée...
La notion de signe n'a pas de sens dans $(\mathbb{F}_{53}, +, .)$. Rappelons que -1 c'est aussi 52. Alors...
La vraie question, dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$ et partout n'est pas « quel est le signe de Δ
elle est Δ est il le carré de quelqu'un.
Et ici, $7^2 = 49 = -4$.
On a de la chance, on n'a pas eu à chercher trop loin...
Sinon, il fallait étudier $d^2 = -4 + p.53$ avec p et d dans $\mathbb{Z}$.
On pose donc $\delta = 7$ (et on fout à la poubelle les cours de Terminale avec $\sqrt{\Delta}$,on est d'accord !).
On a donc deux racines : $(-2+\delta).2^{-1}$ et $(-2-\delta).2^{-1}$.
Mais qui est -2 ? C'est 51.
Et qui est 2^{-1} ? C'est 27 car $2 \times 27 = 54$.

Remarque : | Plein de vos réflexes acquis au collège et lycée sont à étendre.
$-x$ est l'opposé de x. Et ici, c'est modulo 53.
Une division par 2, c'est une multiplication par l'inverse de 2.
Une extraction de racine, c'est une question « de qui est ce le carré ? ».

On trouve $\boxed{S = \{22,\ 29\}}$
Et on vérifie : somme = $22 + 29 = 51 = -2$
produit : $22 \times 29 = 638 = 2$ car 636 est multiple de 53

Les deux intégrales existentent par continuité des fonctions sous le signe somme (tant 2^x que x^2 restent plus petits que 4).
Dans $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}.dx$ on reconnaît une portion de disque. En effet, $y = \sqrt{4-x^2}$ est l'équation de la moitié supé-

rieure du disque de centre $(0,\ 0)$ et de rayon 2 ($x^2+y^2=4$). Le grand disque a pour aire $4.\pi$. Son quart de disque donne π.
Sinon, on pouvait poser $x=2.\sin(t)$ (et en fait $t=Arcsin(x/2)$ pour faire un choix), avec élément différentiel $dx=2.\cos(t).dt$.
L'intégrale devenait $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2(t)}.2.\cos(t).dt$. De par l'intervalle choisi pas de valeur absolue $\int_0^{\pi/2}2.\cos^2(t).dt$.
On linéarise $2.\cos^2(t)=1+\cos(2.t)$.
On intègre et on (re)trouve $\Big[t+\dfrac{\sin(2.t)}{2}\Big]_0^{\pi/2}$.

Pour $\int_0^2\sqrt{4-2^x}.dx$, on va déjà poser $2^x=t$ et donc $t=\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$ et $dt=\dfrac{dx}{x.\ln(2)}$.
L'intégrale devient $\dfrac{1}{\ln(2)}.\int_1^4\dfrac{\sqrt{4-t}}{t}.dt$ (t au dénominateur, mais on ne passe pas par 0).
On pose cette fois $u=\sqrt{4-t}$ (et donc $t=4-u^2$ et $dt=-2.u.du$) : $\dfrac{1}{\ln(2)}.\int_{\sqrt{3}}^0\dfrac{-2.u^2.du}{4-u^2}$.

Remarque : | On est sur la bonne piste, on a $\sqrt{3}$.

On remet les bornes dans l'ordre et on décompose en éléments simples :
$\dfrac{u^2}{4-u^2}=\dfrac{u^2-4+4}{4-u^2}=-1+\dfrac{4}{4-u^2}=-1+\dfrac{1}{2+u}+\dfrac{1}{2-u}$
On en est à $\dfrac{-2}{\ln(2)}.\int_{\sqrt{3}}^0\Big(-1+\dfrac{1}{2+u}+\dfrac{1}{2-u}\Big).du$.

Remarque : | C'est bon signe, on voir venir les logarithmes.

On intègre en logarithmes : $\dfrac{1}{\ln(2)}.\Big[-t+\ln(2+u)-\ln(2-u)\Big]_0^{\sqrt{3}}$.
On trouve bien $\boxed{2.\dfrac{\ln(2+\sqrt{3})-\ln(2-\sqrt{3})-\sqrt{3}}{\ln(2)}}$

∘42∘ Un élève a écrit sur sa copie « pour k dans $\mathbb{N}^*$: $\begin{array}{ccccc}\dfrac{2.k+1}{2.k-1}\geqslant 1 & \Leftrightarrow & \dfrac{2.k+1}{2.k-1}\geqslant\dfrac{2.k}{2.k} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{2.k+1}{2.k}\leqslant\dfrac{2.k}{2.k-1}\end{array}$ « .

Que doit-on en penser ?

$\dfrac{2.k+1}{2.k-1}\geqslant 1$ est vrai pour tout k *(le numérateur est plus grand que le dénominateur, avec des entiers positifs)*.
$\dfrac{2.k+1}{2.k-1}\geqslant\dfrac{2.k}{2.k}$ est vrai aussi *(c'est la même)*.
$\dfrac{2.k+1}{2.k}\leqslant\dfrac{2.k}{2.k-1}$ est vrai aussi *(par produit en croix)*.
On a donc un schéma $\begin{array}{ccc}Vrai & \Leftrightarrow & Vrai\\ & \Leftrightarrow & Vrai\end{array}$. C'est parfait. Et vrai.

En revanche, on ne voit pas de rapport entre $\dfrac{2.k+1}{2.k-1}\geqslant\dfrac{2.k}{2.k}$ et $\dfrac{2.k+1}{2.k}\leqslant\dfrac{2.k}{2.k-1}$ *(produit en croix raté ?)*.
Mais en termes de pure logique, pas de problème...

∘43∘ Montrez qu'on n'a évidemment pas $\forall x,\ Arctan(x)=\dfrac{Arcsin(x)}{Arccos(x)}$.

Trouvez quand même (graphiquement ?) le nombre de solutions de $Arctan(x)=\dfrac{Arcsin(x)}{Arccos(x)}$ d'inconnue réelle x (dans quoi ?).

∘44∘ Montrez : $\int_0^{\pi/3}\sin^2(t).\cos^3(t).dt\in\Big\{\dfrac{11.\sqrt{3}}{160},\ \dfrac{9}{128},\ \dfrac{47}{480}\Big\}$ *(en indiquant laquelle des trois est la bonne ; vous pourrez faire un changement de variable très simple en sinus)*.

L'existence de $\int_0^{\pi/3}\sin^2(t).\cos^3(t).dt$ ne pose pas de problème.
On la sépare en $\int_0^{\pi/3}\sin^2(t).\cos^2(t).\cos(t).dt$ puis avec Pythagore, elle devient $\int_0^{\pi/3}\sin^2(t).(1-\sin^2(t)).\cos(t).dt$.

On peut changer de variable en sinus : $\displaystyle\int_{s=0}^{s=\sqrt{3}/2} s^2.(1-s^2).ds$.

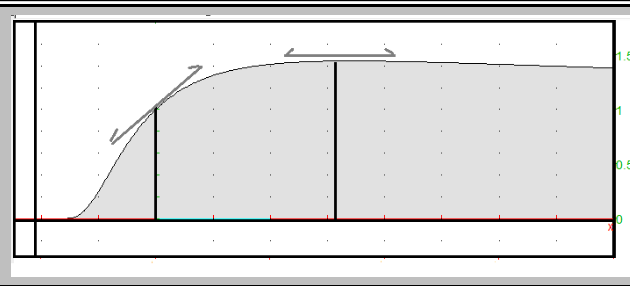
On intègre en $\left[\dfrac{s^3}{3}-\dfrac{s^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}/2}$. Il reste un $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ en facteur, et on a ensuite $\dfrac{3/4}{3}-\dfrac{(3/4)^2}{5}$. C'est $\boxed{\dfrac{11.\sqrt{3}}{160}}$ qui emporte la mise.

La clef est dans les puissances paires qui permettent de convertir des cosinus en sinus (ou des sinus en cosinus). Puis dans la puissance impaire qui permet de mettre de côté un $\cos = \sin'$.

◦45◦

Pouvez vous confirmer que $x \longmapsto x^{1/x}$ admet bien un maximum en $x = e$?

En utilisant le module **random**, simulez un dé dont les six faces ont pour valeur [1, 1, 3, 5, 5, 10].
Simulez l'expérience : lancer ce dé jusqu'à ce que la somme des valeurs obtenues dépasse 100.



Pour ce qui est du maximum, on sait que $x \longmapsto x^{1/x}$a le même sens de variation que son logarithme (composition par exp et ln).

On va donc juste dériver $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. On trouve $x \longmapsto \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.
La dérivée s'annule et change de signe en $x = e$. On confirme.

Pour les très mauvais élèves : $x \longmapsto x^{1/x}$ *ne se dérive pas facilement.*
Pour les élèves normaux : $x \longmapsto x^{1/x}$ *se dérive en passant au logarithme.*
Pour les élèves efficaces : pour le sens de variation de $x \longmapsto Arctan(u(x))$ *ou* $x \longmapsto e^{u(x)}$, *ou* $x \longmapsto \ln(u(x))$ *: inutile de dériver cette chose, dites juste que cette chose a le même sens de variations que u et donc dérivez juste u.*

J'adore simuler.

```
from random import randrange
L = [1, 1, 3, 5, 5, 10]
```

```
def lancer() :
....return(L[randrange(6)])
```

Ou même `return(choice(L))`.

```
def jusquacent() :
....S, n = 0, 0
....while S < 100 :
........S += lancer()
........n += 1
....return(n)
```

◦46◦

Montrez $\displaystyle\int_{t=-1}^{2} \frac{t+7}{t+\sqrt{t+2}-10}.dt = 1+12.\ln\left(\frac{18}{25}\right)$ (changez de variable, décomposez en éléments simples, intégrez en logarithmes).

$\displaystyle\int_{t=-1}^{2} \frac{t+7}{t+\sqrt{t+2}-10}.dt$ existe par continuité *($t+2$ reste positif, et pour annuler $t-10+\sqrt{t+2}$, il faudrait avoir $t^2-20.t+100=t+2$, ce qui n'a lieu qu'en 7 et 14).*

On pose $u=\sqrt{t+2}$ et donc $t=u^2-2$. On différentie : $dt = 2.u.du$.

L'intégrale devient $\displaystyle\int_{u=1}^{u=2} \frac{u^2+5}{u^2-2+u-10}.2.u.du$.

On factorise le dénominateur : $\dfrac{2.u^3+10.u}{(u+4).(u-3)}$ et on décompose en éléments simples.

La méthode des pôles donnerait : $\dfrac{12}{u-3}+\dfrac{24}{u-4}$ et même $\dfrac{12}{u-3}+\dfrac{24}{u+4}$.

Mais la réduction au dénominateur commun n'est pas valable : $\dfrac{12}{u-3}+\dfrac{24}{u+4}=\dfrac{36.u-24}{(u-3).(u-4)}$.

Il manque tout une partie polynomiale : $\dfrac{2.u^3+10.u}{(u+4).(u-3)}=\dfrac{(2.u-2).(u^2+u-12)+36.u-24}{(u-3).(u+4)}$.

Finalement $\boxed{\dfrac{2.u^3+10.u}{(u+4).(u-3)}=(2.u-2)+\dfrac{12}{u-3}+\dfrac{24}{u+4}}$

Il ne reste qu'à intégrer entre 1 et 2 : $\Big[u^2-2\Big]_1^2=1$ et les autres termes donnent un logarithme.

$\displaystyle\int_{t=-1}^{2}\frac{t+7}{t+\sqrt{t+2}-10}.dt=1+24.\ln(3)+12.\ln(2)-24.\ln(5)$.

Et on a bien $1+12.\ln\left(\dfrac{18}{25}\right)$ *(résultat négatif, mais la fonction intégrée l'est).*

∘47∘ Justifiez qu'il y a 1022 applications surjectives de l'ensemble $range(10)$ vers l'ensemble $range(2)$.

L'ensemble de départ a 10 éléments, de 0 à 9.
Et à l'arrivée, on a juste 0 et 1.

Déjà, il y a 2^{10} applications. Deux choix pour l'image de 0, fois deux choix pour l'image de 1 et ainsi de suite.

Et presque toutes ces applications réussissent à être surjectives (c'est à dire à tout atteindre).
D'ailleurs, seulement deux applications échoueront à être surjective.

L'application constante qui envoie tout le monde sur 0 et l'application constante qui envoie tout le monde sur 1.

Il y a donc par élimination $\boxed{2^{10}-2}$ surjections.

∘48∘ .

Trop facile, cet exercice là !

∘49∘ ♡ Pour tout n, on pose $a_n=(1+\sqrt{3})^{2.n+1}$ et $b_n=(1-\sqrt{3})^{2.n+1}$.
a - Montrez : $0\geqslant b_n>-1$.
On pose $S_n=a_n+b_n$ pour tout n.
b - Montrez que la suite (S_n) est une suite d'entiers et vérifie $\forall n,\ S_{n+2}=8.S_{n+1}-4.S_n$.
c - Montrez que S_n est toujours divisible par 2^{n+1}.
d - Montrez : $S_n\leqslant a_n<S_n+1$.
e - Déduisez que la partie entière de a_n est toujours divisible par 2^{n+1}.

a - $1-\sqrt{3}$ est négatif. On l'élève à une puissance impaire. Il reste impair.
$\sqrt{3}-1$ est entre 0 et 1. On l'élève à une puissance positive. Il reste entre 0 et 1. On remet le signe moins, c'est bon.

---

b - Que chaque S_n soit entier ne saute pas aux yeux.

Remarque : Ah oui, tiens, ça fait partie de la question ! Entier.
Combien auraient perdu des points là dessus ?
Et combien d'élèves seraient passés devant vous aux concours ?

Mais changeons l'ordre. Pour n donné, calculons S_{n+2} et $8.S_{n+1}-4.S_n$ en factorisant $a_n$et b_n :
$S_{n+2}=(1+\sqrt{3})^{2.n+5}+(1-\sqrt{3})^{2.n+5}=(1+\sqrt{3})^4.(1+\sqrt{3})^{2.n+1}+(1-\sqrt{3})^4.(1-\sqrt{3})^{2.n+1}$
On simplifie $S_{n+2}=(28+16.\sqrt{3}).(1+\sqrt{3})^{2.n+1}+(28-16.\sqrt{3}).(1-\sqrt{3})^{2.n+1}$

	$-4.S_n$	$=$	$-4.$	$(1+\sqrt{3})^{2.n+1}$	$-4.$	$(1-\sqrt{3})^{2.n+1}$
De même	S_{n+1}	$=$	$(4+2.\sqrt{3}).$	$(1+\sqrt{3})^{2.n+1}$	$+(4-2.\sqrt{3}).$	$(1-\sqrt{3})^{2.n+1}$
	$8.S_{n+1}$	$=$	$(32+16.\sqrt{3}).$	$(1+\sqrt{3})^{2.n+1}$	$+(32-16.\sqrt{3}).$	$(1-\sqrt{3})^{2.n+1}$

On compare, c'est bon. La relation $S_{n+2}=8.S_{n+1}-4.S_n$ est vraie pour tout n.

Remarque : Et s'il vous plait, sans récurrence.
C'est ensuite que ceci servira à des récurrences.
On évite le réflexe « entier n donc récurrence ».

Maintenant, on calcule les premiers : $S_0=2$ et $S_1=20$.
Les deux premiers sont des entiers.
Et ensuite, la formule $S_2=8.S_1-4.S_0$ dit que S_2est entier.
Et de proche en proche, chaque S_k est un entier.

Remarque : C'est là qu'il y a une récurrence. Et la formule liant S_{n+2} et S_{n+1} et S_n est celle qui permet à la récurrence d'avancer.

c - La divisibilité par 2^{n+1} va se démontrer aussi par récurrence.
Il faut montrer que pour tout n, S_ns'écrit $2^{n+1}.s_n$ pour un entier s_n.
C'est à vus de prendre l'initiative de l'écriture et de l'existence de s_n.
On initialise : $S_0 = 2 = 2^{0+1}.1$ et $S_1 = 20 = 2^{1+1}.5$: $s_0 = 1$ et $s_1 = 5$.

On se donne n et on suppose $S_n = 2^{n+1}.s_n$ et $S_{n+1} = 2^{n+2}.s_{n+1}$.
On calcule : $S_{n+2} = 8.S_{n+1} - 4.S_n = 2^{n+5}.s_{n+1} - 2^{n+3}.s_n$.
On factorise : $S_{n+2} = 2^{n+3}.(4.s_{n+1} - s_n)$.
On décide de poser $s_{n+2} = 4.s_{n+1} - s_n$.
C'est un entier. La propriété est héréditaire.

d - La formule $S_n \leqslant a_n < S_n + 1$ se lit aussi $a_n + b_n \leqslant a_n < a_n + b_n + 1$.
C'est donc juste l'encadrement du début sur b_n.

e - a_n est coincé entre un entier (S_n) et le suivant $(1 + S_n)$.
Sa partie entière est donc S_n. Et elle est divisible par 2^{n+1}.
A titre d'exemple : a_7 vaut 3526400.00929 à 10^{-5}. Sa partie entière vaut 3526400 et c'est 2^8.13775.

∘50∘ ♡ Combien l'équation $\cos^2(x) = 2.\cos(x) + 1$ a-t-elle de solutions dans $[0,\ 4.\pi]$? Quelle est la somme de ces solutions ?
Même question avec $\cos^2(x) = 4.\cos(x) + 6$.
Même question avec $6.\cos^2(x) = 4.\cos(x) + 1$.

∘51∘ Comparez l'action de ces quatre scripts pour $n = 5$:

```
def Scooby(n)  :
....a, b = 1, 1
....for k in range(n)  :
........a, b = b, a+b
........return(a, b)
```

```
def ScoobyDoo(n)  :
....a, b = 1, 1
....for k in range(n)  :
........a, b = b, a+b
....return(a, b)
```

```
def ScoobyDooBi(n)  :
....a, b = 1, 1
....for k in range(n)  :
........a, b = b, a+b
....return(a)
....return(b)
```

```
def ScoobyDooBiDoo(n)  :
....a, b = 1, 1
....for k in range(n)  :
........a = b
........b = a+b
.....return(a, b)
```

`Scooby(n)` a un défaut : la position du `return`.
Il est dans la boucle.
`n=5` ne se sert à rien.
Dès `k=0`, on sort.
`0` et `b` valent `1` et `1` avant d'entrer dans la boucle, ils sont modifiés (`1` et `2`).
On sort alors tout de suite, et on retourne le couple $(1,\ 2)$.

On notera que `Scooby(0)` ne retournera rien.

`ScoobyDo(n)` est une vraie procédure qui a deux variables `a` et `b` qu'elle modifie au fil de la boucle, et finit par retourner une foisclose la boucle `for`.

	avant l'instruction `a, b = b, a+b`		après l'instruction `a, b = b, a+b`	
k	a	b	a	b
0	1	1	1	2
1	1	2	2	3
2	2	3	3	5
3	3	5	5	8
4	5	8	8	13

`k` s'arrête avant d'atteindre `n=5`.
On retourne le couple $(8,\ 13)$ (oui, c'est la suite de Fibonacci).

`ScoobyDoBi(5)` fait les mêmes calculs que `Scoobydo(5)`.
Mais il ne retourne que `a`.
L'instruction `return(b)` est après le premier `return(a)`.
Elle ne sera jamais exécutée.
Le programme retourne donc juste 8.

D'ailleurs, mon éditeur interactif Python refuse ScoobyDooBi.
Il valide la fonction dès le premier return.

`ScoobyDoBiDoo(n)` commet une erreur en ne faisant pas une affectation simulatanée. Suivons son exécution pas à pas.

	avant l'instruction `a = b`		avant l'instruction `b = a+b`		après l'instruction `b = a+b`	
`k`	`a`	`b`	`a`	`b`	`a`	`b`
0	1	1	1	1	1	2
1	1	2	2	2	2	4
2	2	4	4	4	4	8
3	4	8	8	8	8	16
4	8	16	16	16	16	32

Ce n'est plus Fibonacci.
C'est une suite de puissances de 2.

∘52∘ Une quantification classique de notre cours sera : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,\ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon$. Il manque des niveaux de parenthèses.

Je propose de disposer ainsi les parenthèses :	$\Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,\ n \geqslant N\Big) \Rightarrow \Big(|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon\Big)$
$\forall \varepsilon > 0,\ \Big(\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,\ n \geqslant N\Big) \Rightarrow \Big(|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon\Big)$	$\forall \varepsilon > 0,\ \Big(\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,\ n \geqslant N\Big) \Rightarrow \Big(|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon\Big)$

Est-ce correct ? Sinon, comment corriger ?
S'agit de la quantification de ((u_p) converge), de ((u_n) converge vers λ), de ((λ) converge vers (u_n)), de ($u_n \simeq \lambda$ à εprès), (toutes les suites convergent vers λ) ?

∘53∘ ♡ Calculez $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+(1+t)^2}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+(2+t)^2}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2+6.t+10}$.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$	$\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+(1+t)^2}$	$\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+(2+t)^2}$	$\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+(3+t)^2}$
$Arctan(t)$	$Arctan(t+1)$	$Arctan(t+2)$	$Arctan(t+3)$
$\dfrac{\pi}{4}$	$Arctan(2) - \dfrac{\pi}{4}$	$Arctan(3) - Arctan(2)$	$Arctan(4) - Arctan(3)$

Trouverez vous vraiment utile de compacter $Arctan(4) - Arctan(3)$ en $Arctan\Big(\dfrac{1}{1+12}\Big)$? Moi non.

∘54∘ Montrez, par récurrence sur n, pour f et g dérivables autant de fois qu'on veut : $(f.g)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.f^{(n-k)}.g^{(k)}$.

En appliquant ce résultat à $f = x \longmapsto 1 + x^2$ et $g = Arctan'$, montrez :
$(1+x^2).Arctan^{(n+1)}(x) + 2.n.x.Arctan^{(n)}(x) + n.(n-1).Arctan^{(n-1)}(x) = 0$.

La première formule est la formule de Leibniz.
Elle commence à $n = 0$ en écrivant $(f.g)^{(0)} = f.g = 1.f^{(0)}.g^{(0)}$.
Mais je préfère à $n = 1$: $(f.g)^{(1)} = f'.g + f.g' = 1.f^{(1)}.g^{(0)} + 1.f^{(0)}.g^{(1)}$.

Supposons la formule vraie à un rang n quelconque donné, et prouvons la au rang $n+1$ en redérivant :

$$(f.g)^{(n+1)} = \Big((f.g)^{(n)}\Big)' = \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.f^{(n-k)}.g^{(k)}\Big)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\Big(f^{(n-k)}.g^{(k)}\Big)'$$

On sépare en deux sommes :

$$(f.g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.f^{(n-k+1)}.g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.f^{(n-k)}.g^{(k+1)}$$

On réindexe la seconde :

$$(f.g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.f^{(n-k+1)}.g^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{p-1}.f^{(n+1-p)}.g^{(p)}$$

On fusionne les deux sommes en vérifiant qu'aux rangs 0 et $n+1$ tout est cohérent quand même :

$$(f.g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right).f^{(n-k+1)}.g^{(k)}$$

La formule de Pascal permet de reconnaître $(f.g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}.f^{(n-k+1)}.g^{(k)}$. La formule est validée à tout ordre.

Prenons $f = x \longmapsto 1 + x^2$ et $g = Arctan'$.
Mais c'est trop bête, leur produit est $x \longmapsto 1$.C'est une fonction constante.
Quand on va la dériver n fois, il ne va rien rester : $(f.g)^{(n)} = (x \longmapsto 0)$.

Mais sinon, quand on dérive trop f il ne reste rien non plus :

$f^{(0)}(x) = 1 + x^2$	$f^{(1)}(x) = 2.x$	$f^{(2)}(x) = 2$	pour $k \geqslant 3$: $f^{(k)}(x) = 0$

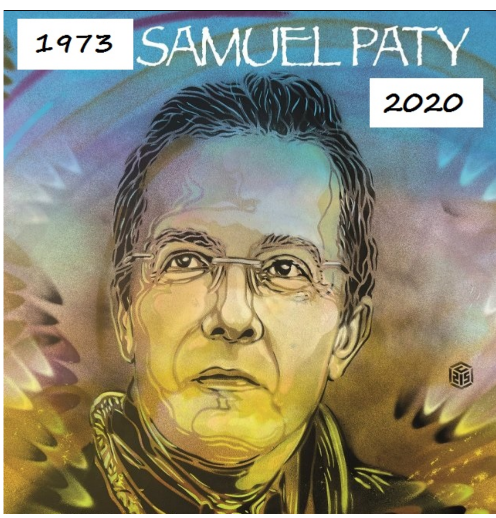
On peut arrêter la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.f^{(k)}.g^{(n-k)}$ à $k = 2$.
Il reste d'un côté 0 et de l'autre $\binom{n}{0}.(1+x^2).g^{(n)}(x) + \binom{n}{1}.2.x.g^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2}.2.g^{(n-2)}(x)$.

On remplace les binomiaux par leur valeur, et $g^{(k)}$ par $Arctan^{(k+1)}$ et c'est la bonne formule.

∘55∘ ♡ Résolvez $Arctan'(e^x) = \dfrac{1}{1+e^{2.x}}$. d'inconnue réelle x.

Enorme confusion pour qui croit savoir faire des maths mais calcule sans réfléchir.
On a $Arctan'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et donc $Arctan'(e^x) = \dfrac{1}{1+(e^x)^2}$.
Dans l'ordre : on dérive, puis on remplace t par e^x.
On a donc ici mS=\R .

La confusion : on n'a pas dérivé $x \longmapsto Arctan(e^x)$.
On a dérivé Arctan puis calculé en e^x.
C'est bien pour ça que $(Arctan((e^x))'$ n'a pas de sens ou en tout cas est un summum d'ambiguïté.
De même $f'(-x)$ est clair. Et $(f(-x))'$ ne l'est pas du tout.
Et ce n'est pas pour rien que le matheux insiste sur $(x \longmapsto f(-x))' = (x \longmapsto -f'(x))$ par exemple.



Dans notre République, être libre, c'est avoir le droit de dire ce que l'on pense, le droit de partager ses connaissances, d'écouter, de débattre, de dessiner, de chanter.

Tout cela fait partie de ce que nous appelons la liberté d'expression, qui est une de nos libertés les plus importantes.

La liberté d'expression signifie aussi que personne n'a le droit de forcer les autres à penser comme lui, à faire comme lui ou à dire la même chose que lui.

Cette liberté d'expression n'est pas sans limites. On peut ne pas être d'accord avec les idées des autres, et on peut en rire, on peut même s'en moquer, mais on n'a pas le droit d'inciter à la violence ou à la haine contre qui que ce soit.

∘56∘ Pouvez vous mettre $x \longmapsto \cos(x) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ sous la forme $x \longmapsto A.\cos(x - \varphi)$?

Oui.
Les quatre termes du premier membre sont de la forme $a_k.\cos(x) + b_k.\sin(x)$.
Leur somme est de la forme $\alpha.\cos(x) + \beta.\sin(x)$.
On peut la mettre sous la forme demandée.

	$\cos(x)$	$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$	$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$	
cosinus	$\cos(x)$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\cos(x)$	$\dfrac{1}{2}.\cos(x)$		$\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\right).\cos(x)$
sinus		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sin(x)$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\sin(x)$	$-\sin(x)$	$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right).\cos(x)$

Le réel positif A est égal à $\sqrt{\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2}$. Et φ est un simple Arctangente.

∘57∘

♡ Calculez $\displaystyle\int_1^2 x^x.(1+\ln(x)).dx$.

Facile en dépit des apparences.

$\displaystyle\int_1^2 x^x.(1+\ln(x)).dx = \int_1^2 e^{x.\ln(x)}.(1+\ln(x)).dx = \left[e^{x.\ln(x)}\right]_{x=1}^2$ (forme $e^u.u'$ ou changement de variable, c'est pareil).

∘58∘

Calculez $\displaystyle\int_0^{Arctan(1/2)} \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)-\sin(\theta)}.d\theta$ par le changement de variable $t=\tan(\theta)$.

L'existence ? cos et sinsont égaux en $\dfrac{\pi}{4}$ (c'est $Arctan(1)$) et ici on s'arrête avant.

Sinon, c'est bien Bioche qui nous le suggère. Par $\theta \longmapsto \theta+\pi$, sinus et cosinus changent de signe, la fraction ne change pas, et de $d\theta$ non plus.

On a alors sur l'intervalle où sinus, cosinus et tangente sont positifs :

on sait $\cos(\theta) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ *(venant de* $1+\tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$*)* et

$\sin(\theta) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ *(puisque* $\sin = \tan.\cos$*)*

On intègre : $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}}.\frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{1/2}\frac{dt}{(1-t).(1+t^2)}$.

Il faut décomposer en éléments simples : $\dfrac{1}{(1-t).(1+t^2)} = \dfrac{a}{1-t}+\dfrac{b.t+c}{1+t^2}$ *(la difficulté quand on n'a pas l'habitude, c'est d'avoir le bon nombre de constantes, la bonne forme).*

$\dfrac{1}{(1-t).(1+t^2)} = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{t+1}{1+t^2}-\dfrac{1}{t-1}\right)$ et on vérifie, puis on propose.

On termine avec du logarithme et de l'arctangente :

$$\boxed{\int_0^{Arctan(1/2)}\frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)-\sin(\theta)}.d\theta = \frac{\ln(5)}{4}+\frac{Arctan(1/2)}{2}}$$

Et pourquoi Bioche avait raison ? parce que tout s'exprime sous le signe somme à l'aide de la tangente, avec sa dérivée en facteur : $\dfrac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)-\sin(\theta)} = \dfrac{1}{1-\frac{\sin(t)}{\cos(t)}} = \dfrac{1}{1-t} = (1+t^2).\dfrac{1}{(1+t^2).(1-t)}$.

∘59∘

Montrez : $\displaystyle\int\frac{6}{1+(x-1)^3}.dx = \sqrt{12}.Arctan\left(\frac{2.x-3}{\sqrt{3}}\right)+\ln\left(\frac{x^2}{x^2-3.x+3}\right)$.

Ne suffirait il pas de dériver $x\longmapsto \sqrt{12}.Arctan\left(\dfrac{2.x-3}{\sqrt{3}}\right)+\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2-3.x+3}\right)$?

Et même $x\longmapsto \sqrt{12}.Arctan\left(\dfrac{2.x-3}{\sqrt{3}}\right)+2.\ln(x)-\ln(x^2-3.x+3)\dfrac{x^2}{x^2-3.x+3}\Big)$?

∘60∘

On rappelle

ou_e	*True*	*False*
True	*False*	*True*
False	*True*	*False*

Complétez les tables de vérité :

a	b	c	$a\ ou_e\ b$	$(a\ ou_e\ b)\ ou_e\ c$	$a\ ou_e\ (b\ ou_e\ c)$	$(a\ ou_e\ b)\ et\ c$	$(a\ et\ c)$	$(b\ et\ c)$	$(a\ et\ c)\ ou_e\ (b\ et\ c)$
False	*False*	*False*							
False	*False*	*True*							
False	*True*	*True*							
False	*True*	*False*							
True	*True*	*False*							
True	*False*	*False*							
True	*False*	*True*							
True	*True*	*True*							

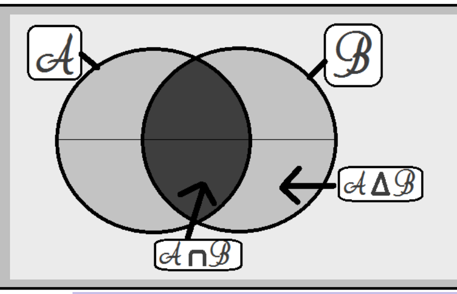
Qu'avez vous prouvé (deux propriétés à nommer).

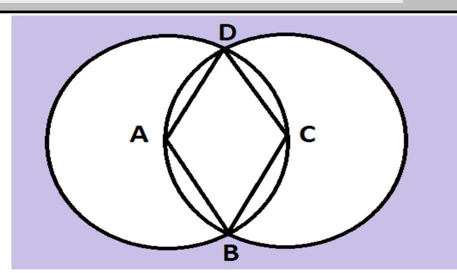
a	b	c	$a\ ou_e\ b$	$(a\ ou_e\ b)\ ou_e\ c$	$a\ ou_e\ (b\ ou_e\ c)$	$(a\ ou_e\ b)\ et\ c$	$(a\ et\ c)$	$(b\ et\ c)$	$(a\ et\ c)\ ou_e\ (b\ et\ c)$
False	*False*	*False*	*False*	*False*	*False*	*False*	*False*	*False*	*False*
False	*False*	*True*	*False*			*False*	*False*	*False*	*False*
False	*True*	*True*		*False*	*False*		*False*		
False	*True*	*False*				*False*	*False*	*False*	*False*
True	*True*	*False*	*False*	*False*	*False*	*False*	*False*	*False*	*False*
True	*False*	*False*				*False*	*False*	*False*	*False*
True	*False*	*True*		*False*	*False*			*False*	
True	*True*	*True*	*False*			*False*			*False*

On a prouvé l'associativité du *ou* exclusif : $a\ ou_e\ (b\ ou_e\ c) = (a\ ou_e\ b)\ ou_e\ c$.
On a prouvé la distributivité du *et* sur le ou_e. C'est *et* qui tient le rôle de $\times$ et ou_e qui tient le rôle de $+$.
On a donc $(a\ ou_e\ (b)\ et\ c = (a\ et\ c)\ ou_e\ (b\ et\ c)$.

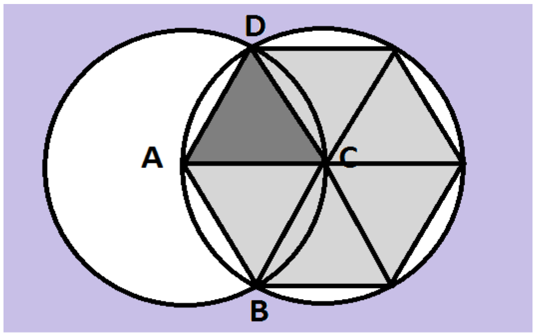
∘61∘

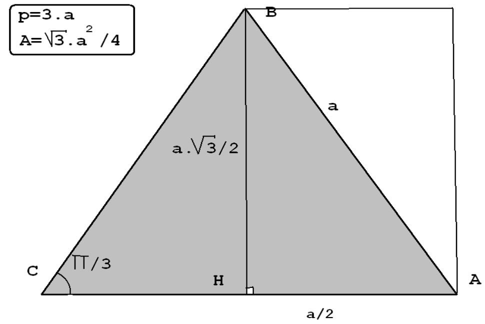
Pour représenter deux ensembles et leur intersection, j'ai tracé deux cercles de même rayon, chacun passant par le centre de l'autre. J'ai noirci l'intersection. J'ai grisé ce qu'on appelle la différence symétrique (celle du *ou exclusif*). Quel est le rapport $\dfrac{aire\ en\ gris}{aire\ en\ noir}$.





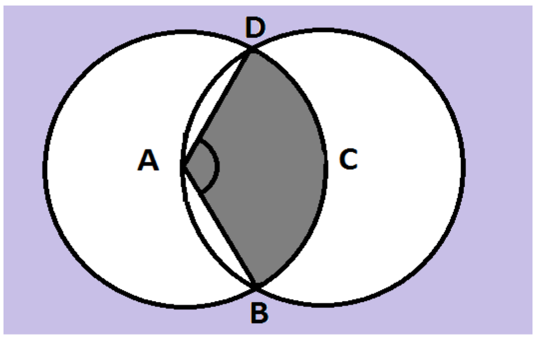
Comme il s'agit d'un rapport de mesures d'aires, on va prendre un rayon commun pour les deux cercles noté a.
Chacun des deux disques a pour aire $\pi.a^2$. Et il faut mesurer au moins la partie commune $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.
Cette partie est faite d'un losange (A, B, C, D) et de "quatre rognures d'ongles".
Pour le losange, c'est facile, il est fait de deux triangles équilatéraux de côté R.
Un tel triangle a pour aire $\dfrac{\sqrt{3}.a^2}{4}$; le losange a pour aire $\dfrac{\sqrt{3}.a^2}{2}$.

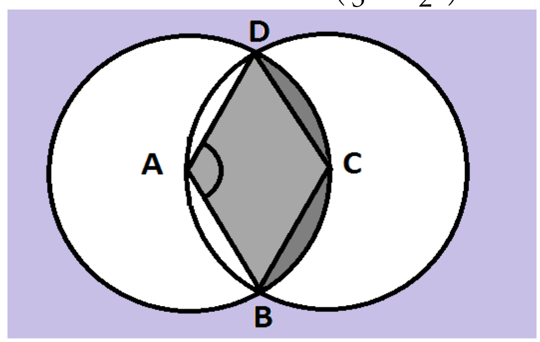




Mais on pouvait aussi mesurer l'aire d'une "part de tarte" autour de A. C'est un tiers de disque : $\dfrac{\pi.a^2}{3}$.

Par soustraction entre losange et section de disque, on a l'aire de deux petites lunes : $\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).a^2$.





Avec une part de tarte et deux lunes, on a l'aire de ce qui est appelé $\boxed{\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}\ :\ \left(\dfrac{2.\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).a^2}$

Par soustraction à l'aire de $\mathfrak{A}$ on a l'aire de $\boxed{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\ :\pi.a^2-\left(\dfrac{2.\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).a^2}$

On fait de même du côté de $\mathfrak{B}$, et on somme. On a l'aire de $\boxed{\mathfrak{A}\Delta\mathfrak{B}\ :2.\pi.a^2-\left(\dfrac{4.\pi}{3}-\sqrt{3}\right).a^2}$

Le rapport des aires est alors $\dfrac{2.\pi-\dfrac{4.\pi}{3}+\sqrt{3}}{\dfrac{2.\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ de l'ordre de $3,1$.

◦62◦

♡ On définit : $A*B=\overline{A}\Delta\overline{B}$. Cette loi est elle commutative ? Est elle associative ? Dispose-t-elle d'un neutre ? Mêmes questions avec $A\star B=\overline{A}\Delta B$.
Rappel : $\overline{A}$ est le complémentaire de A (les éléments qui ne sont pas dans A).
$C\Delta D$ est la différence symétrique de C et D (les éléments qui sont dans C ou dans D, mais pas dans les deux, le "ou" exclusif).

C'est idiot, mais $A*B=\overline{A}\Delta\overline{B}=A\Delta B$...
C'est la loi Δ. On la sait commutative, associative, avec un neutre *(l'ensemble vide)* et un symétrique pour chaque élément *(lui même)*...

L'autre loi est plus originale. Elle est interne sur $P(E)$.
Elle est commutative : $A\star B=\overline{A}\Delta B=A\Delta\overline{B}=B*A$ et c'est $\overline{A\Delta B}$.
Il suffit de passer par la fonction indicatrice : $1_{A*B}=1_A+1_B+1$ modulo 2.

On se donne trois parties A, B et c.
On étudie : $(A*B)*C=(\overline{A}\Delta B)*C=(\overline{A}\Delta B)\Delta\overline{C}$
$A*(B*C)=A*(B\Delta\overline{C})=\overline{A}\Delta(B\Delta\overline{C})$
Et comme Δ est associative, il y a égalité.

Elle n'est pas associative : $(\emptyset*E)*E=\emptyset*E=\emptyset$ et $\emptyset*(E*E)=\emptyset*E=\emptyset$. Raté, ça marche ici.
$(\emptyset*\emptyset)*E=E*E=E$ et $\emptyset*(\emptyset*E)=\emptyset*\emptyset=E$. Raté encore !

Elle a un neutre.
En notant ce neutre N il doit déjà vérifier $N*N=N$.

Or, $N * N = \overline{N \Delta N} = \overline{\emptyset}$ =E .
S'il y a un neutre, c'est l'univers entier E.
On vérifie ensuite pour toute partie X, $X * E = X \Delta \emptyset = X$.

Le symétrique d'une partie X est elle même.
En effet, pour tout X, on a $X * X = \overline{X \Delta X} = \overline{\emptyset} = E$ *(le neutre)*.

◦63◦ Retrouvez les coefficients : $\dfrac{2.x^2+2}{x^4+x^2+1} = \dfrac{a.x+b}{x^2+x+1} + \dfrac{c.x+d}{x^2-x+1}$.
Complétez : $\displaystyle\int \frac{2.x^2+2}{x^4+x^2+1}.dx = \Big[\star.Arctan\Big(\frac{x^2-1}{\text{☻}.x}\Big)\Big]$.

$$\frac{2.x^2+2}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}$$
$$\int \frac{2.x^2+2}{x^4+x^2+1}.dx = \Big[\frac{2.\sqrt{3}}{3}..Arctan\Big(\frac{x^2-1}{\sqrt{3}.x}\Big)\Big]$$

◦64◦ Vous tirez au hasard uniforme un entier entre 1 et 2019. Quelle est la probabilité qu'il soit multiple de 7 ou de 13 (ou inclusif).
Vous tirez au hasard uniforme un entier entre 1 et 2019. Quelle est la probabilité qu'il soit multiple de 7 ou de 13 (ou exclusif).

La probabilité se compte par « nombre de cas favorables divisé par nombre de cas possibles ».
Les cas possibles, c'est range(1, 2020). Il y a 2019 entiers.

Prenons une question intermédiaire : multiples de 7.
Il y a 7, 14, 21 jusqu'à 2016. Il y en a
- à peu près $\dfrac{2019}{7}$ (réponse de PSI)
- $\Big[\dfrac{2019}{7}\Big]$ (réponse de PC)
- le quotient euclidien de 2019 par 7 (réponse de MP)
- 2019 / 7 (réponse de MP option Python)
- 288

On compte aussi les multiples de 13 : il y en a 155 (même calcul mais avec 13).

Alors pour « multiple de 7 ou multiple de 13 », il y en aurait $288 + 155$?

Non.
Car avec cettedémarche, les multiples de 91 sont comptés deux fois. Une fois comme multiples de 7, une fois comme multiples de 13.
Et il y en a 22 *(là on peut en donner la liste)*.

Il faut les enlever.

Et pour le « ou exlcusif », il faudra les enlever deux fois.

Je vous offre un bilan pour toutes les réponses, y compris aux questions non posées :

multiples de 7	$(2019/7) = 288$	S
multiples de 13	$(2019/13) = 155$	T
multiples de 7 et de 13 (donc de 91)	$(2019/(73*7) = 22$	$S \cap T$
multiples de 7 ou de 13	$288 + 155 - 22$	$S \cup T$
multiples de 7 ou de 13 (mais pas les deux)	$288 + 155 - 2.22$	$S \Delta T$

Application numérique : ou inclusif : 20,8 pour cent
ou exclusif : $19,7$ pour cent

◦65◦ Justifiez : $Arcsin(\sqrt{1-x^2}) = Arccos(x)$ pour x dans $[0,\ 1]$.

Solution du physicien :	je dérive les deux fonction, elles ont la même dérivée, elles diffèrent donc d'une constante, je calcule cette constante en 0
Solution du matheux :	je nomme f leur différence, je dérive f : f' est nulle je trouve $f(x) = f(0)$ pour tout x (cette démarche évite ces histoires contre nature de « je calcule ensuite la constante en un point », alors que le seul point de vue logique est « je regarde d'un étatt initial 0 à un état final x »)
Solution du mateux :	je pose $\theta = Arcsin(\sqrt{1-x^2})$ je traduis : $\sin(\theta) = \sqrt{1-x^2}$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ j'en déduis $\sin^2(\theta) = 1 - x^2$ puis $\cos^2(\theta) = 1 - (1-x^2) = x^2$ je retrouve $\cos(\theta) = x$ au signe près mais comme θ est entre 0 et $\pi/2$, c'est bien $\cos(\theta) = x$ avec $\cos(\theta) = x$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \leqslant \pi$ je reconnais $\theta = Arccos(x)$ j'efface θ dans $Arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \theta = Arccos(x)$ et c'est fini.

Euh, monsieur, il y en a deux qui s'appellent « solution du matheux », que vousliez vous dire vraiment ?
je voulais dire que justement, le matheux est celui qui va proposer plusieurs solutions, ne pas se contenter de « celle qui a marché ».

Sinon, le calcul :

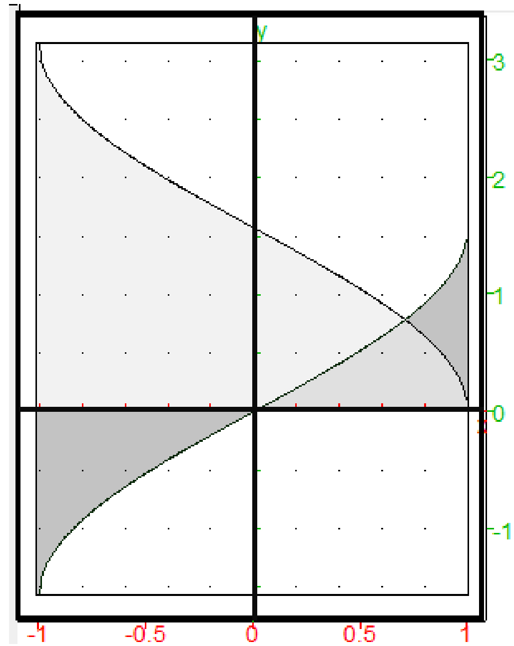
x	$\longrightarrow$	$\sqrt{1-x^2}$	$\longrightarrow$	$Arcsin(\sqrt{1-x^2})$
	$\dfrac{-2.x}{2.\sqrt{1-x^2}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}$	

On a donc $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{x^2}}$ et la positivité de x permet de simplifier $\dfrac{x}{|x|}$.
On notera quand même qu'il y a alors un problème pour le calcul effectife de cette dérivée en 0 (et en 1).

∘66∘

Résolvez $Arcsin(x) = Arccos(x)$ d'inconnue réelle x.

x est nécessairement entre -1 et 1.
On passe au cosinus (ou au sinus), condition juste nécessaire : $\sqrt{1-x^2} = x$.
On élève au carré (nécessaire) : $1 - x^2 = x^2$.
On résout : $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
On garde $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ mais on élimine $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ qui donne $-\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3.\pi}{4}$.
L'unique solution est $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$



Et si on se dit qu'elle sautait aux yeux, on la propose, vérifie : $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} \subset S_x$
Mais pourquoi est ce la seule ? Juste parce que *Arcsin* est croissante et *Arccos* décroissante. Elles ne se croiseront donc qu'une fois (leur différence est strictement monotone donc injective et ne s'annule qu'une fois).

◦67◦

Complétez : $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+x} = \ln(1+\sqrt{x}+x) - \star.Arctan\left(\frac{\cdots}{\cdot}\right)$.

Puisqu'on nnou le propose, on dérive $x \longmapsto \ln(1+\sqrt{x}+x)$ et on trouve $x \longmapsto \frac{1+\frac{1}{2.\sqrt{x}}}{1+x+\sqrt{x}}$.

On a un terme à compenser $x \longmapsto \frac{1}{2.\sqrt{x}.(1+x+\sqrt{x})}$.

On va le calcule par changement de variable : $\int \frac{dx}{2.\sqrt{x}.(1+x+\sqrt{x})} = \int \frac{du}{1+u+u^2}$.

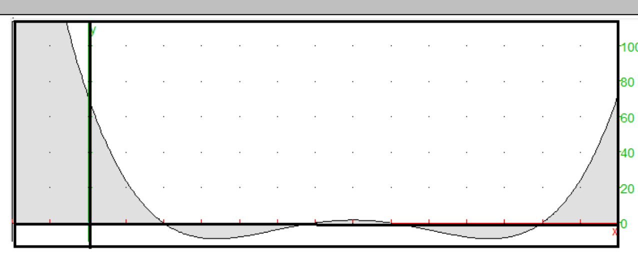
On factorise canoniquement :

$$\int \frac{dx}{2.\sqrt{x}.(1+x+\sqrt{x})} = \int \frac{du}{1+u+u^2} = \int \frac{du}{(u+0.5)^2+0;75} = \frac{4}{3}.\int \frac{du}{\left(\frac{2.u+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

On intègre en Arctangente : $\boxed{\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+x} = \ln(1+\sqrt{x}+x) - \frac{2}{\sqrt{3}}.Arctan\left(\frac{2.\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}}\right)}$

◦68◦

♡ Un polynôme unitaire de degré 4 a pour racines 1, 3, 4 et 6. Calculez sa valeur en 2 et en 5.
♡ Un polynôme de degré 4 a pour racines 1, 3, 4 et 6. Comparez sa valeur en 2 et sa valeur en 5.
♡ Un polynôme de degré 4 a pour racines 1, 2 et 3 *(et une autre)*. Il vaut 1 en 0 et en 5. Retrouvez la dernière racine.
(unitaire : coefficient dominant égal à 1).



Un polynôme unitaire de degré 4 a pour racines 1, 3, 4 et 6. Calculez sa valeur en 2 et en 5.
C'est donc forcément $(x-1).(x-3).(x-4).(x-6)$.
En 2 il vaut -8 et en 5 il vaut -8 aussi.

Un polynôme de degré 4 a pour racines 1, 3, 4 et 6. Comparez sa valeur en 2 et sa valeur en 5.
Cette fois, il s'écrit $\lambda.(x-1).(x-3).(x-4).(x-6)$ avec λ inconnu (non nul).
En 2 et en 5, il prend la même valeur $-8.\lambda$.

Un polynôme de degré 4 a pour racines 1, 2 et 3 *(et une autre)*. Il vaut 1 en 0 et en 5. Retrouvez la dernière racine.
Cette fois, il s'écrit $(x-1).(x-2).(x-3).(a.x+b)$ (son autre racine est $-b/a$).
On le calcule en 0 : $-6.b = 1$.
On le calcule en 5 : $24.(5.a+b) = 1$.

Ceci nous permet de récupérér a et b : $b = -\dfrac{1}{6}$ et $a = \dfrac{1}{24}$.
La racine qui manque est 4.

∘69∘ Calculez $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x.dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3.dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

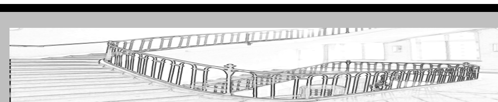
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[Arcsin(x)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{x.dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[-\sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 = 1$$

$$\int_0^1 \frac{x^3.dx}{\sqrt{1-x^4}} = \Big[\frac{1}{2}.Arcsin(x^2)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Et $dsp \int_0^1 \frac{x^3.dx}{\sqrt{1-x^4}}$ est jouable aussi, trouverez vous ?

LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2022 TD06 2023
0- points