LYCEE CHARLEMAGNE

Lundi 12 décembre

M.P.S.I.2

2022 2023

TD12

∘0∘

♡ Pour la formule de Taylor avec reste intégrale $f(a+h)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}.h^k+\dfrac{h^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1(1-t)^n.f^{(n+1)}(a+t.h).dt$, des livres proposent parfois $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}.(x-a)^k+\dfrac{1}{n!}.\displaystyle\int_a^x(x-u)^n.f^{(n+1)}(u).du$. Passez de l'une à l'autre ?

On va considérer que le cours nous donne la première.
On veut ensuite calculer $f(x)$ à l'aide des dérivées en a.
On pose donc $x=a+h$ ou plutôt $h=x-a$ (quantité que le physicien qualifiera de petite et notera même dx, et que le mathématicien qualifiera d'accroissement).

Le terme $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}.h^k$ devient $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}.(x-a)^k$. C'est bon.

Conseil : *Si vous croisez quelqu'un qui utilise* $\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}.(x-a)^k$*, discutez avec lui.*
Mais ne le laissez pas polluer votre esprit. Sa formule n'est pas judicieuse.
Vous allez être trop tenté de développer les $(x-a)^k$ *par la formule du binôme, et vous perdrez alors tout l'intérêt de la formule de Taylor.*
Quand les termes sont ordonnés suivant les puissances de h, vous les voyez triés : $1>>h>>h^2>>h^3$ *(pour h « petit »).*
Pour x proche de a, la formule $1<<(x-a)>>(x-a)^2>>(x-a)^3$ *est ordonnée.*
Mais les termes 1, x, x^2, x^3 *sont tous « grands », et* $x^2+a.x+1$ *est « grand » tandis que* $x^2-2.a.x+1$ *est « petit ».*
Bref, développer les $(x-a)^k$ *donne une formule où plus rien n'est petit...*

Il faut ensuite passer de $\dfrac{h^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1(1-t)^n.f^{(n+1)}(a+t.h).dt$ à $\frac{1}{n!}.\int_a^x(x-u)^n.f^{(n+1)}(u).du$.
La factorielle est la même.
Posons ensuite $u=a+t.h$. Les bornes deviennent a et $a+h$ c'est à dire x.
On a alors $dt=\dfrac{du}{h}$, $(1-t)^n=\dfrac{(x-u)^n}{h^n}$.
On a donc h^{n+1} qui s'en va ! C'est la même.

∘1∘

Complétez $\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$ avec des coefficients entiers sachant que son carré est $11.I_2$ et son déterminant -11. Combien de solutions ?

On nomme les coefficients $\begin{pmatrix}1 & a\\ b & -1\end{pmatrix}$ et on traduit les exigences : $\begin{pmatrix}1+a.b & 0\\ 0 & 1+a.b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 0\\ 0 & 11\end{pmatrix}$ et $1+a.b=11$.

Bon... Trois fois la même chose. Et solutions

$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 10 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -10 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -2\\ -5 & -1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 10\\ 1 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -10\\ -1 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -5\\ -2 & -1\end{pmatrix}$

∘2∘

♡ Montrez qu'il n'existe pas de matrice réelle carrée de taille 2 M vérifiant $M^2=A$ (avec $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$).
indication : c'est déterminant.
Trouvez une solution dans $M_2(\mathbb{C})$, que vous pourrez chercher sous la forme $a.I_2+b.A$.

Méthode Terminale : on pose quatre coefficients, on écrit quatre équations, on tente de résoudre et comme tout part en c... on déduit qu'il n'y a pas de solution.
je vous la décommande fortement...

Méthode Prépas : on raisonne par l'absurde et regardant les choses sous le bon angle.
S'il y a une solution M elle vérifie $M^2=A$ et donc $\det(M^2)=\det(A)$.
Mais $\det(M.M)=\det(M).\det(M)$. C'est le carre d'un réel. Il est positif. Alors que $\det(A)$ vaut -1.
Impossible.

Attention en revanche, si on avait trouve $\det(A) = 1$, on aurait juste pu dire « si il y a une solution, son déterminant vaut 1 ou -1 ». mais rien ne dt qu'il y ait vraiment une solution.
Votre point de vue en tant qu'ingénieur c'est de dire « il n'y a pas de contradiction avec le déterminant, mais il y en a peut être une ailleurs...

Dans $\mathbb{C}$, on cherche une matrice de déterminant i. mais c'est un faible indice.
Comme propose, on la cherche sous la forme $a.I_2 + b.A$, pourquoi pas... Si ça échoue, on engueulera le colleur d'avoir propose une fausse piste. Et sinon, on prendre sur soi toute la gloire.
Et $\begin{pmatrix} a+b & 2.b \\ b & a+b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a+b & 2.b \\ b & a+b \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a+b & 2.b \\ b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+2.a.b+3.b^2 & 4.a.b+4.b^2 \\ 2.a.b+2.b^2 & a^2+2.a.b+3.b^2 \end{pmatrix}$
Exigeons $a^2 + 2a.b + 3.b^2 = 1$ et $2.a.b + 2.b^2 = 1$ si c'est possible...
Il « suffit » de prendre $b = i.a$ et $a = \dfrac{1}{\rho}$ avec $\rho^2 = 2.i - 2$ (en gros, avec une notation malpropre : $a = \dfrac{1}{\sqrt{2.i-2}}$, et tout va bien.
La matrice opposée convient « aussi bien ».

∘3∘ Dérivez et simplifiez $\varphi = t \longmapsto \sum_{k=0}^{3} \dfrac{(1-t)^k}{k!}.h^k.f^{(k)}(a+t.h)$. Calculez $\varphi(1)$ et $\varphi(0)$ en prenant garde au terme $k = 0$.

La formule de Taylor sans intégration par parties, et sans récurrence ! Trop fort.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$\varphi(t) =$	$f(a+t.h)$	$+(1-t).h.f'(a+t.h)$	$+\dfrac{(1-t)^2}{2}.h^2.f''(a+t.h)$	$+\dfrac{(1-t)^3}{6}.h^3.f^{(3)}(a+t.h)$
$\varphi(1) =$	$f(a+h)$	$+0$	$+0$	$+0$
$\varphi(0) =$	$f(a)$	$+h.f'(a)$	$+\dfrac{h^2}{2}.f''(a)$	$+\dfrac{h^3}{6}.f^{(3)}(a)$

Ensuite, on dérive les produits par rapport à t ne l'oublions pas

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$\varphi(t) =$	$f(a+t.h)$	$+(1-t).h.f'(a+t.h)$	$+\dfrac{(1-t)^2}{2}.h^2.f''(a+t.h)$	$+\dfrac{(1-t)^3}{6}.h^3.f^{(3)}(a+t.h)$
$\varphi'(t) =$	$h.f'(a+t.h)$	$-1..h.f'(a+t.h)$ $+(1-t).h^2.f''(a+t.h)$	$+\dfrac{-2.(1-t)}{2}.h^2.f''(a+t.h)$ $+\dfrac{(1-t)^2}{2}.h^3.f^{(3)}(a+t.h)$	$+\dfrac{-3.(1-t)^2}{6}.h^3.f^{(3)}(a+t.h)$ $+\dfrac{(1-t)^3}{6}.h^4.f^{(4)}(a+t.h)$

Les termes se simplifient : $\varphi'(t) = \dfrac{(1-t)^3}{6}.h^4.f^{(4)}(a+t.h)$ (vous le voyez mieux ici le décalage $\dfrac{(1-t)^n}{n!}$ en face de $h^{n+1}.f^{(n+1)}(a+t.h)$?
Quoi qu'il en soit, $\int_0^1 \varphi'(t).dt = \varphi(1) - \varphi(0)$ donne la formule de Taylor avec reste intégrale.

∘4∘ ♣ Mon corps est à sept éléments[a] version sur 2 sur 2. On pose donc $\mathbb{K} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ avec l'addition et la multiplication modulo 7 qui en font un corps.
Montrez qu'il y a 7^4 matrices carrées de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Montrez qu'il y a $(7^2-1).(7^2-7)$ matrices carrées $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversibles *(indication : vecteurs non nuls et non colinéaires...)*.
Montrez qu'il y a $\dfrac{(7^2-1).(7^2-7)}{6}$ matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant 1.

a. comme disait Blanche Neige

On rappelle les deux tableaux

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

et

×	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Sur le tableau de la multiplication, il conviendra d'effacer première ligne et première colonne pour retrouver un groupe (multiplicatif), puisque on a un corps.
On note la mise en valeur des 1 pour bien visualiser que chaque élément a un inverse.

Pour remplir une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, il faut choisir quatre coefficients, indépendamment les uns des autres, de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ en passant par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
On a 7 choix pour chaque coefficient, d'où $7 \times 7 \times 7 \times 7$ matrices possibles (rien à apprendre par cœur sur ce type de question, juste du bon sens).

Comment construire une matrice carrée inversible ? Pas en regardant le déterminant, c'est trop compliqué à cause des cas et sous cas (a nul ou pas, et ainsi de suite).

Mais une matrice est faite de deux colonnes.

Comment choisir la première ? Comme on veut, du moment qu'on ne prend pas le vecteur nul.
On a donc 7 choix pour a et 7 choix pour c mais il faut éliminer le choix $a = c = 0$.
En fait, il y a 7^2 vecteurs, dont un seul est le vecteur nul.

Reste à choisir le deuxième vecteur colonne. Par exemple, partant de $\begin{pmatrix} 2 & ? \\ 3 & ? \end{pmatrix}$, comment compléter ?
On met ce qu'on veut, mais pas le vecteur nul.
Mais il faut éviter aussi le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ puisque $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. [1]
Mais il faut aussi éviter $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ puisque là encore les deux colonnes sont proportionnelles.
Et aussi $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ me direz vous.
Sauf que dans $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ il y a un 9 qui nous fait sortir de l'ensemble.
Certes, mais c'est juste $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ puisque on travaille modulo 7. Et on a bien $2.2 - 3.6 = 0$.
En fait, il faut éviter tous les $\begin{pmatrix} 2 & 2.k \\ 3 & 3.k \end{pmatrix}$(et uniquement eux) avec k pouvant valoir 0,1, 2, 3, 4, 5 et 6 [2].
Aux 7^2 vecteurs initiaux, il faut en enlever 7.

On a donc finalement

$(7^2 - 1)$	$\times$	$(7^2 - 7)$
premier vecteur		deuxième vecteur

matrices inversibles.

Chaque fois qu'on a une matrice inversible $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant non nul, on en a six nouvelles, en étudiant $\begin{pmatrix} a & k.b \\ c & k.d \end{pmatrix}$ avec k valant 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 (cette fois, le déterminant est $k.(a.d - b.c)$).
On a 2016 matrices inversibles qui se répartissent équitablement entre toutes les valeurs de déterminants possibles

1. vous pouvez le voir par « déterminant nul » car $2 \times 5 - 5 \times 2 = 0$, mais je vous recommande de le voir par « parallélogramme plat car vecteurs colinéaires », vous commencerez alors à faire de la géométrie avec l'algèbre... donc des maths et pas juste du calcul
2. avec $k = 0$, on a bien les cas « seconde colonne nulle »

det = 1	det = 2	det = 3	det = 4	det = 5	det = 6	det = 0
336	336	336	336	336	336	385
matrices inversibles						non inversibles

La dernière colonne a été obtenue par soustraction.

◦5◦ Montrez que pour tout x réel, les deux suites $\left(\frac{[10^n.x]}{10^n}\right)$ et $\left(\frac{[10^n.x]+1}{10^n}\right)$ encadrent x et convergent vers x.
Soit f une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$. Montrez $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

On rappelle : $[t] \leqslant t \leqslant [t] + 1$ pour tout réel t (je sais, à droite c'est strict).
On reformule avec une inégalité de plus qui ne dit rien de plus : $t - 1 \leqslant [t] \leqslant t \leqslant [t] + 1$
En particulier : $10^n.x - 1 \leqslant [10^n.x] \leqslant 10^n.x$ puis $\frac{10^n.x-1}{10^n} \leqslant \frac{[10^n.x]}{10^n} \leqslant \frac{10^n.x}{10^n}$.
On a donc $x - \frac{-1}{10^n} \leqslant \frac{[10^n.x]}{10^n} \leqslant x$.
Les deux membres tendent vers x quand n tend vers l'infini.
Le téhorème d'encadrement donne donc $\frac{[10^n.x]}{10^n}$converge vers x quand n tend vers $+\infty$.

Et pour ceux qui ne l'auraient pas saisi, $\frac{[10^n.x]}{10^n}$ est l'approximation décimale de x par défaut à 10^{-n} près.
Prenons en effet un réel x.
On le muliplie par 10^n : la vrigule se déplace de n places vers la droite.
Prenons la partie entière : ce qu'il y avait derrière la virgule s'en va.
Divisions par 10^n : la vrigule revient à sa position initiale.
Une fois compris cet enchaînement, vous n'avez même plus besoin d'apprendre la formule par coeur, vous l'avez comprise donc apprise.
Un exemple : $x = \pi = 3,141592653\ldots$.

$10^5.x = 314159,2653\ldots$
$[10^5.x] = 314159$
$\frac{[10^5.x]}{10^5} = 3,14159$

Pour $\left(\frac{[10^n.x]+1}{10^n}\right)$, on a juste 10^{-n}de différence. La convergence vers x se fait aussi vite.

Encadrons : $[10^n.x] \leqslant 10^n.x \leqslant [10^n.x] + 1$ et divisions par 10^n (positif). On retrouve l'idée de l'approximation par défaut et de l'approximation par excès.

---

f vérifie $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$ *(donc juste pour les rationnels)*.

Elle pourrait vérifier $f(x) = 0$ pour tous les irrationnels x (mais serait difficile à tracer, j'en conviens).
Mais on ajoute que f est croissante.

On se donne un réel x quelconque *(rationnel ou non, on s'en moque)*.
On encadre : $\frac{[10^n.x]}{10^n} \leqslant x \leqslant \frac{[10^n.x]+1}{10^n}$.
On passe à f croissante : $f\left(\frac{[10^n.x]}{10^n}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{[10^n.x]+1}{10^n}\right)$ *(le mot clef est ici « croissante »)*.
Mais les deux décimaux sont des rationnels particuliers.
On a donc $\frac{[10^n.x]}{10^n} \leqslant f(x) \leqslant \frac{[10^n.x]+1}{10^n}$.
Maintenant, les deux côtés de l'encadrement convergent vers x. On peut donc passer à la limite *(les trois termes ont une limite, puisque celui du milieu ne dépend pas de n)*.
On a maintenant $x \leqslant f(x) \leqslant x$. Par antisymétrie : $f(x) = x$.

En fait, si on a $f(x) = x$ pour tout x d'un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ alors on a $f(x)x =$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

◦6◦ ♡ Sachant $deg(P) = 3$, $P(1) - 1 = P'(1) + 1 = P''(1) - 6 = P^{(3)}(1) + 6 = 0$, calculez $P(3)$.
Si vous commencez en écrivant $P(X) = a.X^3 + b.X^2 + c.X + d$, vous êtes très mal parti, sauf si vous adorez les calculs idiots.

Application directe de la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$P(a+h) = P(a) + h.P(a) + \frac{h^2}{2}.P''(a) + \frac{h^3}{6}.P^{(3)}(a) + \frac{h^4}{6}.\int_0^1 (a-t)^3.P^{(4)}(a+t.h).dt$$

Mais le degré de P nous donne $P^{(4)} = 0$, qu'on regarde en a, en $a+h$ ou en $a+t.h$.
On a donc $P(a+h) = P(a) + h.P(-a) + \dfrac{h^2}{2}.P''(a) + \dfrac{h^3}{6}.P^{(3)}(a)$.
On choisit $a = 1$ (là où on a les informations) et $h = 2$ (pour aller assez loi) :

$$P(3) = P(1) + 2.P'(1) + \frac{2^2}{2}.P''(1) + \frac{2^3}{6}.P^{(3)}(1) = 1 - 2.P'(1) + \frac{4.6}{2} + \frac{2^3.(-6)}{6}$$

$P(3)$ vaut 3 et on a en fait $P = -X^3 + 6.X^2 - 10.X + 6$ si on y tient.

∘7∘ ♡♠ On se donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Exprimez A^2 comme combinaison linéaire de A et I_2. Donnez les coefficients a_n et b_n vérifiant $A^n = a_n.A + b_n.I_2$ *(combinaisons de suites géométriques spectrales* (3^n) *et* $((-2)^n)$*)*.
On pose alors $E_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{A^k}{k!}$. Exprimez E_n comme combinaison linéaire $E_n = \alpha_n.A + \beta_n.I_2$.
Écrivez la formule de Taylor avec reste intégrale pour l'exponentielle entre 0 et 3 puis entre 0 et -2 à l'ordre n.
Montrez que le reste intégrale tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Déduisez les limites de α_n et β_n quand n tend vers l'infini.
Exprimez $\exp(A)$ *(la limite des* E_n*)* comme combinaison linéaire de A et I_2.

Si on a montré une fois pour toutes $A^2 - Tr(A).A + \det(A).I_2 = 0_{2,2}$ pour toute matrice carrée de taille 2, c'est vite réglé.
Sinon, on calcule : $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = A + 6.I_2$.

On diagonalise A :

trace : 1	déterminant : -6
polynôme caractéristique	$X^2 - X - 6$
valeur propre 3	valeur propre -2
$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.\frac{1}{5}}$

Mais ceci ne répond pas à la formule demandée.

On peut aussi montrer l'existence de deux suites (a_n) et (b_n) vérifiant $A^n = a_n.A + b_n.I_2$.
On initialise (récurrence, oui), avec $A^0 = 0.A + 1.I_2$, $A^1 = 1.A + 0.I_2$ et $A^2 = 1.A - 6.I_2$.
On suppose pour un n donné que an et $b_n$existence.
On calcule alors $A^{n+1} = A.A^n = A.(a_n.A + b_n.I_2) = a_n.A^2 + b_n.A = a_n.(A - 6.I_2) + b_nA. = (a_n + b_n).A - 6.a_n.I_2$.
Ceci prouve l'existence de a_{n+1} et b_{n+1} en posant $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -6.a_n$.
Cela dit, ça ne va pas nous arranger. On va devoir étudier les suites (a_n) et (b_n).

On peut par exemple déduire $a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} - 6.a_n$.
Si on connaît par cœur son cours de Terminale (même sans le comprendre), on dit que (a_n) est une combinaison de deux suites géométriques dont les raisons sont les racines de l'équation caractéristique $\lambda^2 = \lambda - 6$. Comme par hasard, les racines sont 3 et -2. On a donc $a_n = \alpha.3^n + \beta.(-2)^n$.
Et par là même $b_n = -6.(\alpha.3^{n-1} + \beta.(-2)^{n-1})$.
Les conditions initiales donnent $a_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{5}$ et $b_n = \dfrac{2.3^n + 3.(-2)^n}{5}$.
On a donc $\boxed{A^n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{5}.A + \dfrac{2.3^n + 3.(-2)^n}{5}.I_2}$
On pouvait l'obtenir aussi en écrivant $A = B + C$ avec $B.C = C.B = 0$ et $B^2 = 3.B$ et $C^2 = (-2).C$.

On somme de 0 à n, après division par $n!$:
$E_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{3^k - (-2)^k}{5.!}.A + \dfrac{2.3^k + 3.(-2)^k}{5.k!}.I_2$ ou aussi $E_n = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.\dfrac{1}{5}$
Bref, on est confronté à des suites de la forme $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

La formule de Taylor avec reste intégrale ($f = \exp$, $a = 0$, $h = x$) donne pour tout réel x :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.x^k + \frac{x^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.e^{t.x}.dt$$

On va montrer que pour -2 et 3 le reste intégrale tend vers 0.

Pour 2, on majore $e^{-2.t}$ par 1 (et on minore par 0) : $0 \leqslant \int_0^1 (1-t)^n.e^{-2.t}.dt \leqslant 1$.

Dans le même temps, $\dfrac{(-2)^n}{n!}$ tend vers 0 (croissances comparées).

Par produit, $\dfrac{x^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.e^{t.x}.dt$ tend vers 0.

Par soustraction, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!}$ converge vers e^{-2}.

Pour 3, on encadre presque de la même façon $(1-t)^n$ par 0 et 1
$e^{3.t}$ par 1 et e^3
$\int_0^1 (1-t)^n.e^{-2.t}.dt$ par 0 et e^3
$\dfrac{3^n}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.e^{-2.t}.dt$ par 0 et $\dfrac{3^n}{n!}.e^3$

Par croissances comparées et encadrement, le reste intégrale tend vers 0.

Par soustraction, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!}$ converge vers e^3.

Si vous ne voyez plus pourquoi la forme indéterminée $\dfrac{3^n}{n!}$ converge vers 0, retenez que la factorielle l'emporte même sur les puissances.

Et regardez, pour n plus grand que 6 :

$$\frac{3^n}{n!} = \frac{3}{1}.\frac{3}{2}.\frac{3}{3}.\frac{3}{4}.\frac{3}{5}.\frac{3}{6}.\frac{3}{7}.\frac{3}{8}\ldots\frac{3}{(n-1)}.\frac{3}{n}$$

La plupart des termes (en fait à partir de $\dfrac{3}{6}$) sont plus petits que $\dfrac{1}{2}$. On a donc

$$0 \leqslant \frac{3^n}{n!} \leqslant \frac{3}{1}.\frac{3}{2}.\frac{3}{3}.\frac{3}{4}.\frac{3}{5}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\ldots\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{81}{40}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$$

Par encadrement, $\dfrac{3^n}{n!}$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

En exploitant ce qui précède :

$$\boxed{\exp(A) = \frac{e^3 - e^{-2}}{5}.A + \frac{2.e^3 + 3.e^{-2}}{5}.I_2}$$ et $\exp(A) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.\dfrac{1}{5}$

◦8◦ Pour toute matrice carrée M de taille 2 sur 2, on définit $\exp(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$.

Calculez les exponentielles des matrices suivantes :
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On va utiliser à plusieurs reprises que la série de terme général $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ converge et a pour somme e^a.

Il suffit en effet d'écrire la formule de Taylor avec reste intégrale (ou de Lagrange, tiens) pour l'exponentielle entre 0 et a :

$e^{0+a} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}.a^k + \frac{a^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.e^{t.a}.dt$.

On distingue, pour a positif : $0 \leqslant \dfrac{a^{n+1}}{n!}.\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n.e^{t.a}.dt \leqslant \dfrac{a^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.e^{.a}.dt = \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}.e^a$ et on utilise les croissances comparées et le théorème d'encadrement

pour a positif : $0 \leqslant \left|\dfrac{a^{n+1}}{n!}.\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n.e^{t.a}.dt\right| \leqslant \dfrac{|a|^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.dt = \dfrac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}$ et on utilise encore les croissances comparées et le théorème d'encadrement

On a alors $\exp\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e&0\\0&e\end{pmatrix}$.

Puis $\exp\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e&?\\0&e\end{pmatrix}$ avec ? $=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k!}=0+\sum_{n=0}^{''+\infty-1''}\frac{1}{n!}=e$ aussi.

et la formule $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}$vient d'une brave récurrence.

De plus $\exp\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}.\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e&0\\0&1\end{pmatrix}$ le terme$k=0$ devant être traité à part.

De même $\exp\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}.\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e&e-1\\0&1\end{pmatrix}$ le terme$k=0$ devant être également traité à part, dans la somme $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ il manque 1.

$\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$ ne pose pas de problème et donne $\begin{pmatrix}e&0\\0&e^3\end{pmatrix}$.

Montrez que si A est semblable à B, alors $\exp(A)$ est semblable à $\exp(B)$.
On suppose A diagonalisable, même si c'est inutile en fait montrez $\exp(-A)=\Big(\exp(A)\Big)^{-1}$
exprimez $\det(\exp(A))$ à l'aide de $\det(A)$ et $Tr(A)$.

On suppose que B s'écrit $P.A.P^{-1}$.
On sait alors sans se poser de question que B^ks'écrit $P.A^k.P^{-1}$ et on factorise :
$\sum_{n=0}^{N}\frac{B^n}{n!}=\sum_{n=0}^{N}\frac{P.A^n.P^{-1}}{n!}=P.\Big(\sum_{n=0}^{N}\frac{A^n}{n!}\Big).P^{-1}$
On expédie N à l'infini : $\exp(B)=P.\exp(A).P^{-1}$ On reconnaît que les deux matrices sont semblables, via la même matrice P que pour A et B..

Type de question qu'un MPSI2 traite sans crainte en moins d'une minute (et encore, c'est parce qu'il se sert un café entre temps).

On écrit alors $A=P.D.P^{-1}$ mais aussi $-A=P.(-D).P^{-1}$.
On calcule rapidement $\exp(D)=\exp(\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}e^\alpha&0\\0&e^\beta\end{pmatrix}$
et $\exp(D)=\begin{pmatrix}e^{-\alpha}&0\\0&e^{-\beta}\end{pmatrix}=(\exp(D))^{-1}$.
Il reste à écrire $A=P.\exp(D).P^{-1}$ par la question précédente,
puis $A^{-1}=(P^{-1})^{-1}.(\exp(D))^{-1}.P^{-1}=P.(\exp(D))^{-1}.P^{-1}=P.\exp(-D).P^{-1}=\exp(-A)$.
On calcule aussi $\det(\exp(A))=\det(\exp(D))$ *(matrices semblables)*

$$\det(\exp(A))=\det(\begin{pmatrix}e^\alpha&0\\0&e^\beta\end{pmatrix})=e^\alpha.e^\beta$$

$$\boxed{\det(\exp(A))=e^{Tr(A)}}$$

Et il reste des élèves pour s'inquiéter « on a dit à l'aide de $Tr(A)$ *et* $\det(A)$*. Il manque* $\det(A)$ *».*
Si ils y tiennent $\det(\exp(A))=e^{Tr(A)}+0.\det(A)$ *et c'est bon.*

Le résultat restera vrai même pour A non diagonalisable.

Un élève dit on doit bien avoir $\exp(A+B)=\exp(A).\exp(B)$. Montrez qu'il a tort.

J'ai encore un souvenir de quand j'avais quatre ans de plus que vous.
Je voyageais dans un train pour découvrir un peu la France, j'étais du côté de Lyon, et voilà que montent dans mon compartiment un groupe de sept jeunes de votre âge, dont je comprends très vite qu'ils étaient en Prépas au lycée du Parc à Lyon.
Ils se mettent à discuter entre eux d'un peu tout. Et d'un coup, l'un d'entre eux (surement un M' [3]) veut se faire mousser devant les autres [4] et indique qu'il a vu dans des exercices qu'on pouvait calculer des exponentielles de matrice (à l'époque, ce n'était pas au programme de Prépas). Et devant deux jeunes camarades plus ou moins émerveillées par son savoir il commence à expliquer la formule. Et un de ses amis renchérit « et je crois qu'on a $exp(A+B)=exp(A).exp(B)$ ».

3. ce qui est devenu la MP*
4. « autres » avec deux e et deux jolis yeux pour marquer le féminin

Et là, je n'ai pas pu m'empêcher de lever le nez du bouquin de S.F ; que j'étais en train de lire et de les interrompre « si elles commutent ».
Et je me suis replongé dans ma lecture, sans même savoir si je lui avais cassé sa baraque auprès de ses camarades. En fait, si, du coin de l'œil j'ai cherché à savoir si j'avais attiré l'attention de la petite brune dans le coin... Et j'ai entendu « il me semblait bien qu'il nous écoutait en souriant depuis tout à l'heure, celui là.. »
Non mais quand même c'est vrai quoi ! On a besoin de $A.B = B.A$ pour démontrer $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$, il ne faut pas laisser les jeunes dire n'importe quoi.
Quoique, il y a juste une implication...

En tout cas, c'est tentant d'avoir $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$.

Mais ça pose problème avec la multiplication matricielle non commutative.
On devrait quand même avoir aussi $\exp(A).\exp(B) = \exp(A+B) = \exp(B+A) = \exp(B).\exp(A)$.
Et des matrices ne commutant pas forcément devraient avoir des exponentielles qui commutent...

Allons chercher dans ce qu'on a déjà fait :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\exp(A) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\exp(A+B) = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\exp(A).\exp(B) = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		

Pour le calcul de $\exp(B)$ non conduit plus haut, c'est rapide : $B^0 = I_2$, $B^1 = B$, $B^2 = 0_{2,2}$, $B^3 = 0_{2,2}$ et ainsi de suite, $\exp(B) = I_2 + B$.
A peu près n'importe quel exemple convenait, mais on n'a guère envie de se re-taper des $\exp(\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix})$.

♠ Un résultat dit $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$ si A et B sont permutables (c'est à dire $A.B = B.A$). Démontrez le sans vous poser de questions sur les interversions de sommes infinies.

Ça, vous le referez en Spé. Mais autant avoir déjà vu ce qu'il se passe.
Partons de $\exp(A).\exp(B)$.
C'est $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i}{i!}.\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{B^j}{j!} = \sum_{\substack{0\leqslant i\\0\leqslant j}} \frac{A^i.B^j}{i!.j!}$.

Et regardons aussi $\exp(A+B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^n}{n!}$.

Comme A et B sont permutables, on peut développer $(A+B)^n$par la formule du binôme : $(A+B)^n = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!.j!}.A^i.B^j$ (tout à coup, vous comprenez pourquoi il n'était pas judicieux d'utiliser la formule pourtant plus classique $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.A^i.B^{n-i}$).

On développe la somme de sommes, et on simplifie les factorielles : $\exp(A+B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{i+j=n} \frac{A^i.B^j}{i!.j!} \Big)$.

Mais qu'importe cette condition « $i+j$ doit valoir n » dans la mesure où on parcourt tous les n possibles.
On a finalement les mêmes termes dans les deux sommes.
Visuellement (eh oui, label Choquet, il va y avoir un truc visuel et un tableau...)

	I_2	$+A$	$+\frac{A^2}{2}$	$+\frac{A^3}{6}$	$+\frac{A^4}{24}$	$\dots$
I_2	I_2	A	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{A^3}{6}$	$\frac{A^4}{24}$	$\dots$
$+B$	B	$A.B$	$\frac{A^2.B}{2}$	$\frac{A^3.B}{6}$	$\frac{A^4.B}{24}$	$\dots$
$+\frac{B^2}{2}$	$\frac{B^2}{2}$	$\frac{A.B^2}{2}$	$\frac{A^2.B^2}{4}$	$\frac{A^3.B^2}{12}$	$\frac{A^4.B^2}{48}$	$\dots$
$+\frac{B^3}{6}$	$\frac{B^3}{6}$	$\frac{A.B^3}{6}$	$\frac{A^2.B^3}{12}$	$\frac{A^3.B^3}{36}$	$\frac{A^4.B^3}{144}$	$\dots$
$+\frac{B^4}{24}$	$\frac{B^4}{24}$	$\frac{A.B^4}{24}$	$\frac{A^2.B^4}{48}$	$\frac{A^3.B^4}{144}$	$\frac{A^4.B^4}{576}$	$\dots$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

saurez vous y retrouver (en diagonale) les termes de

I_2	I_2				
$A+B$	A	B			
$\frac{(A+B)^2}{2}$	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{2.A.B}{2}$	$\frac{B^2}{2}$		
$\frac{(A+B)^6}{6}$	$\frac{A^3}{6}$	$\frac{3.A^2.B}{6}$	$\frac{3.A.B^2}{6}$	$\frac{B^3}{6}$	
$\frac{(A+B)^4}{24}$	$\frac{A^4}{6}$	$\frac{4.A^3.B}{24}$	$\frac{6.A^2.B^2}{24}$	$\frac{4.A.B^3}{24}$	$\frac{B^4}{24}$
et ainsi de suite					

♣²♡ On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2.i.\pi \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2.i.\pi & 0 \\ 0 & -2.i.\pi \end{pmatrix}$. Calculez $\exp(A)$, $\exp(B)$ et $\exp(A+B)$ *(vous n'êtes pas obligé de diagonaliser A, vous pouvez calculer* $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k/k!$ *en faisant très attention au terme d'indice 0 qui est à part).*
Vérifiez $e^{A+B} = e^A.e^B$. A-t-on $A.B = B.A$?

Et là, on en vient au truc qui n'est même pas dans les programmes de Spé. Le cas où A et B ne commutent pas.
D'ailleurs, dans ce train Lyon-Genève, j'avais bien interrompu leur conversation par un « si A et B commutent ».
Et pas par un « seulement si A et B commutent ».
D'ailleurs, j'ai ensuite perdu le fil du livre de S.F. (Philip K.Dick, le meilleur !) que je lisais. Je réfléchissais à deux choses : la petite brune dans le coin allait elle continuer aussi jusqu'à Genève et avait elle été éblouie par mon savoir de normalien. Et existe-t-il des cas où on a $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$ *sans pour autant avoir A.B = B.A.*
La réponse je ne l'ai eue que plusieurs années plus tard[5]*, dans un livre de Pavel Halmös. Avec le contre-exemple donné ici, et des explications qui me permettent de faire un bon exercice de colles de seconde année (en ne donnant pas tout dès le début).*

A notre niveau, on calcule (dans un tableau, mon vice serait-il communicatif ?)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$	$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$A^n = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$	$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}$
$\alpha = 2.i.\pi$		récurrence	
$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$		$B^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & (-\alpha)^n \end{pmatrix}$	$\exp(B) = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}$
$A+B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(A+B)^0 = I_2$	$(A+B)^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & \alpha^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\exp(A+B) = \begin{pmatrix} e^\alpha & \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
		récurrence	

On ne semble pas avoir $e^A.e^B = e^{A+B}$.
Sauf qu'on a choisi ici $\alpha = 2.i.\pi$ (ce que je ne donnais pas en colle en seconde année).
Il reste donc $e^\alpha = 1$ (trigonométrie complexe).

Et je vous le rejoue :

$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	$\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	$\exp(A+B) = I_2$

Si ça ce n'est pas « trop fort », à en faire hurler de joie un Maxou en 2020 ou un Juan ou un Théophile en 2021, un Antoine ou un Balthazar en 2022, un Alexandre ou un Sami !

∘9∘

♣ Ayant appris qu'avec la formule de Taylor appliquée au logarithme entre 1 et 2, on obtenait que $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge vers $\ln(2)$, un élève écrit sans se méfier
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \ldots$ puis mélange en
$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{16} + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{18}\right) - \ldots$
Qu'obtient il ?

Traité dans le cours et par un Tableau Vert Python.
On a les mêmes termes (en quantité infinie) dans la seconde somme que dans la première.
Mais la seconde somme est deux fois plus petite.
Preuve que la famille n'est pas sommable.
On dira que la série converge, mais ne converge pas en valeur absolue.

---

5. *pas pour la jeune fille brune, elle est descendue à Bourg en Bresse, et maintenant, ce doit être une femme de cinquante ans, un peu moins brune, sans doute toujours jolie*

∘10∘

♡ Résolvez $\sum_{k=n+1}^{2.n} k \geqslant 10^5$.

Résolvez $2.\sum_{k=n}^{2.n} k^3 \geqslant 15.\sum_{k=0}^{n^2} k$.

$\sum_{k=n+1}^{2.n} k \geqslant 10^5$ est la somme des termes d'une suite arithmétique.

Il y a n termes, et la moyenne des extrèmes vaut $\dfrac{2.n+n+1}{2}$.

Si vous préférez : $\sum_{k=n+1}^{2.n} k = \sum_{k=0}^{2.n} k - \sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{2.n.(2.n+1)}{2} - \dfrac{n.(n+1)}{2}$.

Sinon j'ai aussi : $\sum_{k=n+1}^{2.n} k = \sum_{p=1}^{n}(p+n) = \sum_{p=1}^{n} p + \sum_{p=1}^{n} n = \dfrac{n.(n+1)}{2} + n.n$.

On résout donc $\dfrac{n.(3.n+1)}{2} \geqslant 10^5$ soit encore $3.n^2 + n - 2.10^5 \geqslant 0$.
On trouve deux racines de signe opposé. Par cohérence, on va demander d'être plus grand que la racine positive : $n \geqslant \dfrac{-1+\sqrt{1+24.10^5}}{6}$.

Il faut et suffit que n dépasse 258, *poussieres*. On n'y peut rien : $\boxed{S = [259,\ +\infty[}$

Vérification pythonienne : $\sum_{k=258}^{2.258} k = 99\,975$ *et* $\sum_{k=259}^{2.259} k = 100\,751$.

Pour l'exercice suivant, on utilise encore les formules du cours :

$$2.\sum_{k=n}^{2.n} k^3 \geqslant 15.\sum_{k=0}^{n^2} k \Leftrightarrow 2.\Big(\frac{2.n.(2.n+1)}{2}\Big)^2 - 2.\Big(\frac{n.(n+1)}{2}\Big)^2 \geqslant 15.\frac{n^2.(n^2+1)}{2}$$

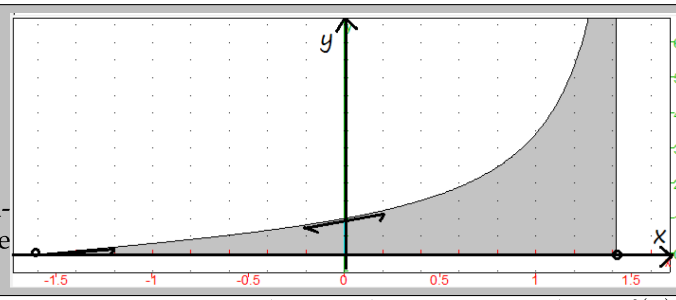
On note qu'on a des polynômes de degré 4 de chaque côté. Mais les termes en n^4 se simplifient.

Tous calculs faits : $9.n^3 - 6.n^2 \geqslant 0$.

C'est vrai dès le rang 1 ! Trop fort.

∘11∘

On pose $I = \Big]\dfrac{-\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\Big[$
et $f = x \longmapsto \dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$.
Déterminez $f^{(n)}$ pour n de 0 à 3.
Justifiez que le graphe de f est celui indiqué ci contre (y compris limite et dérivée I∼0) en $-\pi/2$).



En tant que composée, f est de classe C^∞ et on peut commencer le travail, en écrivant plutôt $f(x) = (1+\sin(x)).\cos^{-1}(x)$.

A la première étape, la formule en $\dfrac{u'.v-u.v'}{v^2}$ est d'usage légitime :

$f' = x \longmapsto \dfrac{\cos(x).\cos(x)+\sin(x).(1+\sin(x)}{\cos^2(x)}$. On simplifie déjà en $\boxed{f' = \dfrac{1+\sin}{\cos^2}}$

Je l'ai écrit ici à l'étage des fonctions. Et un correcteur sanctionnera partiellement une réponse comme $f' = \dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$ qui mélange les étages.

On l'écrit $(1+s).c^{-2}$ et on redérive en $(0+c).c^{-2}+(1+s).(-2).(-s).c^{-3}$.

On réduit au dénominateur commun : $\dfrac{c^2+2.s.(1+s)}{c^3}$.

On reformule $f'' = x \longmapsto \dfrac{(1+s)^2}{c^3}$ On notera qu'on peut aussi écrire $f'' = x \longmapsto \dfrac{(1+s)^2}{c.(1-s).(1+s)}$ et même $f = \dfrac{c}{(1-s)^2}$ même si ça n'a aucun intérêt.

Comme on a lu la suite de l'énoncé, on se dit qu'une forme avec « seulement du sinus en haut » est la plus simple. On remplace donc chaque c^2 par $1-s^2$.

On redérive : $f^{(3)} = x \longmapsto \dfrac{c.2.(1+s)}{c^3} + (1+s)^2.\dfrac{(-3).(-s)}{c^4}$.

On réduit au dénominateur commun : $f^{(3)} = x \longmapsto \dfrac{c^2.2.(1+s)+(1+s)^2.3.s}{c^4}$.

On remplace les $\cos^2$ par $1-\sin^2$ et on trouve $\boxed{f^{(3)} = x \longmapsto \dfrac{(1+\sin(x)).(\sin^2(x)+3.\sin(x)+2)}{\cos^4(x)}}$

Ceux qui en sont à des choses en $\dfrac{2.(1+s)^1.c.c^3 - 3.(-s).c^2.(1+s)^2}{(c^3)^2}$ doivent être largués. Et surtout, ils doivent couper l'envie au correcteur de simplifier, comparer à la réponse simple attendue.

On simplifie et on synthétise dans un tableau :

$f^{(0)}(x)$	$f^{(1)}(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$
$\dfrac{1+\sin(x)}{\cos^2(x)}$	$\dfrac{(1+\sin(x))}{\cos^2(x)}$	$\dfrac{(1+\sin(x))^2}{\cos^3(x)}$	$\dfrac{(1+\sin(x)).(\sin^2(x)+3.\sin(x)+2)}{\cos^4(x)}$

Le rapport du jury ne parle pas de tableau, mais avouez que pour le lecteur/correcteur, ce n'est pas mal.
Attention, pas de conclusion trop hâtive à partir des deux premières dérivées.

Rapport du jury : les candidats gagneraient à simplifier progressivement leurs calculs. La suite du sujet permettait d'orienter vers une suppression des $\cos(x)$.

La dérivée de f est positive. f est donc croissante.
Quand x tend vers $\pi/2$, le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers 0, la fraction tend vers l'infini.

En 0, on a la valeur de la fonction et de sa dérivée.

En $-\pi/2$, on a une forme indéterminée, car numérateur et dénominateur tendent vers 0.
On pose « naturellement » : $x = -\dfrac{\pi}{2} + h$: $f\Big(h - \dfrac{\pi}{2}\Big) = \dfrac{1-\cos(h)}{\sin(h)}$ (trigonométrie)
on peut réagir en physicien : je connais mes développements limités

$$f\Big(h-\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1-\Big(1-\dfrac{h^2}{2}+o(h^2)\Big)}{h} = \frac{h}{2}+o(h)$$

on identifie un prolongement par continuité par la valeur 0
et on a la demi tangente de coefficient directeur $\dfrac{1}{2}$

on peut réagir en matheux : je connais ma trigonométrie :

$$f\Big(h-\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1-\cos(h)}{\sin(h)} = \frac{2.\sin^2\Big(\dfrac{h}{2}\Big)}{2.\sin\Big(\dfrac{h}{2}\Big).\cos\Big(\dfrac{h}{2}\Big)} = \tan\Big(\frac{h}{2}\Big)$$

on peut prolonger par la valeur 0
et on a même l'équivalent $f\Big(h-\dfrac{\pi}{2}\Big) \sim_{h\to 0} \dfrac{h}{2}$

on peut réagir en élève astucieux : je pense à l'arc moitié

$$f(x) = \frac{1+\frac{2.t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1+t^2+2.t}{1-t^2} = \frac{(1+t)^2}{(1-t).(1+t)}$$

avec $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$f(x) = \frac{1+t}{1-t} = \frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

la fonction se prolonge en $-\frac{\pi}{2}$ sans effort et se dérive même

$$f'(x) = \frac{1}{2}.\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right)$$

C'est une question de cours que j'ai ajoutée personnellement par rapport au sujet initial de seconde année.

Quand j'ai posé le problème en 2020, les réponse sur le fait que c'était le bon graphe étaient bien trop laconiques. En gros, on me disait « beh oui, elle est croissante ». mais rien sur son asymptote verticale, sur sa valeur en $-`pi/2$, sur l'existence de tangentes.
Bref, pour vous un graphe c'est trois points bien placés sur le dessin (approche rapide)
ou douze points bien placés (approché débilitante des tableaux de valeurs de seconde)
ou quatre cent points bien placés (approche numpy de la physique).
Non, c'est des tangentes, des asymptotes, bref, des résultats fins.

I∼1) Montrez qu'il existe une suite (P_n) de polynômes vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{(\cos(x))^{n+1}}$.

On a l'existence des premiers polynômes : $P_0 = 1+X$, $P_1 = (1+X)^2$, $P_2 = (1+X)^2$...

On suppose, pour un n quelconque donné, que P_n existe vérifiant $\forall x,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$.

On redérive pour montrer que P_{n+1} existe, en le construisant :

$\forall x,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{\cos(x).P_n'(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)} + P_n(\sin(x)).\frac{-(n+1).(-\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}$.

On réduit au dénominateur commun :

$$\forall x,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{\cos^2(x).P_n'(\sin(x)) + (n+1).P_n(\sin(x)).\sin(x)}{\cos^{n+2}(x)}$$

. On remplace :

$$\forall x,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{(1-\sin^2(x)).P_n'(\sin(x)) + (n+1).P_n(\sin(x)).\sin(x)}{\cos^{n+2}(x)}$$

On définit alors $\boxed{P_{n+1} = (n+1).X.P_n(X) + (1-X^2).P_n'}$
Il existe.
Et c'est un polynôme.
Et il vérifie $\forall x,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}$.

L'essentiel de la récurrence est l'EXISTENCE. Et pas forcément la formule. Chaque chose en son temps.
Déjà, les variables. Et ensuite, on met en route l'autre partie du cerveau : le côté physicien qui calcule.
Et ce n'est pas une insulte. C'est juste l'ordre des priorités de vos raisonnements.

Cela dit, la formule encadrée permet de les calculer de proche en proche. Et si on est en devoir à la maison, on a le temps de vérifier la cohérence de P_1, P_2 et P_3.

Rapport du jury : Confusion fréquente entre $P(\sin(x))$ et $P \times \sin(x)$.
On remarque une maladresse à passer des polynômes en $\sin(x)$ à des polynômes en X.

La formule $P_{n+1} = (n+1).X.P_n(X) + (1-X^2).P_n'(X)$ que l'on a écrite pour prouver l'existence des P_n au sein d'une récurrence va servir maintenant pour des récurrences.
P_0 est le polynôme $1+X$, de degré 1, unitaire à coefficients positifs.
Pareil pour P_1.

I∼2) Montrez que pour tout n, P_n est unitaire, de degré n, à coefficients dans $\mathbb{N}$.

Supposons pour un n donné que P_n est unitaire de degré n à coefficients entiers positifs.
Alors $(n+1).X.P_n(X)+(1-X^2).P_n'(X)$ est une somme de polynômes à coefficients entiers. C'est un polynôme à coefficients entiers.
Mais unitaire ? Et coefficients positifs ? Il y a quand même un $1-X^2$ qui introduit un signe moins.

On écrit $P_n = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k.X^k$ ou même $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.X^k$ avec $a_n = 1$.

On calcule $P_n' = n.X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} k.a_k.X^{k-1}$

$$-X^2P_n' = -n.X^{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} k.a_k.X^{k+1}$$

$$(n+1).X.P_n(X) = (n+1).X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}(n+1).a_k.X^{k+1}$$

On somme : $P_{n+1}(X) = (n+1).X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}(n+1).a_k.X^{k+1} + n.X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} k.a_k.X^{k-1} - n.X^{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} k.a_k.X^{k+1}$.

Déjà le terme en X^{n+1} est le terme de plus haut degré
a pour coefficient $(n+1)-n$ ce qui fait 1.

Le nouveau polynôme est unitaire.
Le coefficient de X^{k+1} est ensuite $(n+1).a_k - k.a_k$ issu des sommes « naturelles »
$(k-2).a_{k-2}$ issue de la somme décalée $\sum_{k=0}^{n-1} k.a_k.X^{k-1}$ $(k \geqslant 2)$

Cette somme est positive. Chaque coefficient de $P_{n+1}(X)$ est positif ou nul.

Rapport du jury : Très peu de justifications que les coefficients sont positifs ou nuls, ce qui demandait un calcul explicite des coefficients.

Ah oui, combien d'élèves ne lisent pas la question en entier, se contentent de « c'est un polynôme » quand il est demandé « polynôme à coefficients entiers ».
On dirait que vous êtes resté au collège où on vous mâche le travail « polynôme, puis polynôme à coefficients entiers, puis polynôme à coefficients entiers positifs ».

I∼3) Montrez : pour tout x : $2.f'(x) = 1+(f(x))^2$.

La relation $2.f'(x) = 1+(f(x))^2$ est un cadeau. Il suffit de calculer... Mais elle est là pour préparer la suite.

I∼4) Pour tout n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$. Montrez : $2.\alpha_1 = (\alpha_0)^2 + 1$ et $2.\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\alpha_k.\alpha_{n-k}$.
On pourra démontrer pour tout couple de fonctions $(u,\ v)$: $(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.u^{(n-k)}.v^{(k)}$ (ou l'utiliser directement si il a été vu en cours), puis l'appliquer à u et v bien choisies.

On l'applique en 0 : $2.f'(0) = 1+(f(0))^2$. Et avec nos notations, c'est $2.\alpha_1 = 1+(\alpha_0)^2$! justement !

Maintenant, comme on sait que f est de classe C^∞, on peut dériver n fois la relation $2.f'(x) = 1+(f(x))^2$ vraie en tout point.

La formule de Leibniz donne $2.(f')^{(n)} = 0 + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.f^{(k)}.f^{(n-k)}$ (à l'étage des fonctions).

n est dans $\mathbb{N}^*$ pour que la dérivation de 1 donne 0.

On applique en 0 : $2.f'^{(n+1)}(0) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.f^{(k)}(0).f^{(n-k)}(0)$.

Et avec nos notations, c'est $\boxed{\alpha_{n+1} = \dfrac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\alpha_k.\alpha_{n-k}}{2}}$ (on sait que ce sera quand même un entier car P_n est à coefficients dans $\mathbb{N}$).

Rapport du jury : Il n'est pas vrai que toute assertion dépendant d'un entier se démontre par récurrence ! Il est important de parler ici de formule de Leibniz, sans quoi il n'est pas clair du tout pour le lecteur de deviner la méthode employée.

Là, ce n'est pas moi qui le dis. Mais presque une fois par semaine, c'est moi qui le dis.

I∼5) Écrivez un script **Python** qui prend N en entrée et calcule les α_n pour n de 0 à N.

Pour calculer des termes consécutifs, c'est la formule ci dessus qui va servir. On va créer une liste qu'on va allonger peu à peu, en créant le nouveau terme comme somme.

```
def Coeff(n) :
....L = [1, 1] #les deux premiers
....for n in range(1, N) : #il n'en faut que N-1 pour en avoir N+1 au total
........S = 0
........for k in range(n+1) : #la somme de 0 à n inclus
............S += binomial(n,k)*L[k]*L[n-k]
........L.append(S//2) #on sait qu'il est pair
....return(L)
```

Et on aura crée une procédure pour calculer les coefficients binomiaux :

```
def Binomial(n, k) :
....if k == 0 :
........return(1)
....return((n-k+1)*binomial(n,k)//k)
```

Et voici les premières valeurs
[1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, 50521, 353792, 2702765, 22368256, 199360981, 1903757312]

En fait le mieux serait de les construire pas à pas dans la somme, plutôt que de tout reprendre à chaque fois.

```
def Coeff(n) :
....L = [1, 1] #les deux premiers
....for n in range(1, N) : #il n'en faut que N-1 pour en avoir N+1 au total
........S, bin = 0, 1 #la somme et le binomial
........for k in range(n+1) : #la somme de 0 à n inclus
............S += bin*L[k]*L[n-k]
............bin = bin*(n-k)//(k+1) #actualisation du coefficient binomial
........L.append(S//2) #on sait qu'il est pair
....return(L)
```

C'est moi qui ai ajouté cette question Python... Le sujet (filière P.C.) n'osait pas en demander. Je trouve cela dommage.

II∼0) Montrez pour tout n et tout $x$de $I \cap \mathbb{R}^+$: $\sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n \leqslant f(x)$ (indication : Taylor).

Dans $\sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n \leqslant f(x)$, le premier membre ressemble vraiment à un développement de Taylor entre 0 et x.
f est de classe suffisante pour écrire

$$f(0+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k + \frac{x^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.f^{(n+1)}(t.x).dt$$

On comprend qu'il suffit de montrer que le reste intégrale $\frac{x^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.f^{(n+1)}(t.x).dt$ est positif.

Comme x est positif, le terme $\frac{x^{n+1}}{n!}$ l'est aussi.

Ensuite, dans l'intégrale, $(1-t)^n$est positif, et $\frac{P_{n+1}(\sin(t.x))}{(\cos(t.x))^{n+1}}$ est positif.

En effet, $\sin(t.x)$ et $\sin(t.x)$ sont positifs car $t.x$ est entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Et le polynôme P_{n+1} est à coefficients positifs (question en fin de partie précédente).
La combinaison $P_{n+1}(\sin(t.x))$ est positive.

Rapport du jury : Beaucoup d'erreurs dans la formule de Taylor avec reste intégrale. certains utilisent la positivité de $f^{(n)}$ invoquant le fait que P_n est à coefficients strictement positifs, même s'ils ont négligé ce point auparavant.

II∼1) Déduisez que pour tout x de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ la série de terme général $\frac{\alpha_n}{n!}.x^n$ converge vers une somme qu'on notera $g(x)$ (c'est à dire $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha_n}{n!}.x^n$).

Rappel : on appelle série de terme général $a_n$la suite (A_N) défnie par $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$.

La série de terme général $\dfrac{\alpha_n}{n!}.x^n$ est croissante.

En effet, quand on calcule la différence de deux sommes partielles $\sum_{n=0}^{N+1} \dfrac{\alpha_n}{n!}.x^n - \sum_{n=0}^{N} \dfrac{\alpha_n}{n!}.x^n$, il reste $\dfrac{\alpha_{N+1}}{(N+1)!}.x^{N+1}$ qui est positif comme on l'a dit dans la positivité du reste dans la formule de Taylor.

La suite $\left(\sum_{n=0}^{N} \dfrac{\alpha_n}{n!}.x^n\right)_N$ est croissante, majorée (le majorant $f(x)$ ne dépend pas de N, c'est bon).
Elle converge.

La grande naïveté serait de dire « elle converge vers $f(x)$ juste parce que c'est le majorant proposé. Mais il est peut être trop large !
Une suite majorée par 4 ne converge pas forcément vers 4, elle peut converger vers e ou π ou n'importe quoi encore.
Bon, certes, ici, on montrera que c'est encore vers le majorant trouvé dans l'énoncé que la série va converger...

II∼2) On admettra que l'on peut (sous des conditions ici validées) dériver $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha_n}{n!}.x^n$ comme une limite de sommes (alors qu'il s'agit d'une limite de sommes) et permuter les sommes doubles (familles sommables). Montrez $2.g'(x) = 1 + (g(x))^2$.

On dérive formellement : $g'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha_k}{k!}.k.x^{k-1}$ (en ne commençant qu'au terme d'indice 1 puisque le terme constant a une dérivée nulle).

On décale les indices et simplifie la factorielle : $2.g'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{2.\alpha_{n+1}}{n!}.x^n$.

On développe ensuite le carré : $g(x).g(x) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha_i}{i!}.x^i\right).\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha_j}{j!}.x^j\right)$

$$(g(x))^2 = \sum_{i,j} \frac{\alpha_i.\alpha_j}{i!.j!}.x^{i+j} \text{ en écrivant une double somme}$$

$$(g(x))^2 = \sum_{i,j} \frac{(i+j)!}{i!.j!}\alpha_i.\alpha_j.\frac{x^{i+j}}{(i+j)!} \text{ en forçant la main}$$

$$(g(x))^2 = \sum_{i,j} \binom{i+j}{i}.\alpha_i.\alpha_j.\frac{x^{i+j}}{(i+j)!} \text{ en voyant le binomial}$$

$$(g(x))^2 = \sum_{n} \left(\sum_{i+j=n} \binom{i+j}{i}.\alpha_i.\alpha_j\right).\frac{x^n}{n!} \text{ en regroupant par exposant}$$

c'est ce qu'on appelle le « produit de Cauchy »

On reconnaît alors la formule qui calcule de proche en proche les α_i : $(g(x))^2 = \sum_n \alpha_{n+1}.\dfrac{x^n}{n!}$.

II∼3) Déduisez $\forall x \in I,\ f(x) = g(x)$.

f et g sont définies au moins sur le même domaine,

vérifient la même équation différentielle $2.y' = 1 + (y^2)$

vérifient la même condition initiale

elles sont donc égales dira le physicien, et même le mathématicien qui dispose du théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'existence et unicité des solutions d'équations différentielles.

Rapport du jury : Oubli fréquent : « la même condition initiale ».

Mais en fait, il y a une solution propre, niveau Sup.

On définit $F = x \longmapsto Arctan(f(x)$ et $G = x \longmapsto Arctan(g(x))$.
On les dérive : $F' = x \longmapsto \dfrac{f'(x)}{1+(f'(x))^2}$ et $G' = x \longmapsto \dfrac{g'(x)}{1+(g'(x))^2}$.
La coïncidence des équations différentielles donne $F' - G' = 0$.
On intègre de 0 à x : $F(x) - G(x) = F(0) - G(0)$ (mille fois plus propre et rigoureux que $F(x) - G(x) = C^{te}$ qui n'a de sens qu'en amphi de physique).
Or, $F(0) = G(0)$, donc pour tout x, $F(x) = G(x)$ (mille fois plus judicieux que de dire « et ensuite je détermine la constante en 0).

III∼0) Montrez que la seule application à la fois paire et impaire est $x \longmapsto 0$.

Prenons une fonction ϕ à la fois paire et impaire. On traduit : $\forall x,\ f(x) = f(-x)$
$\forall x,\ f(-x) = -f(x)$
On met bout à bout : $\forall x,\ f(x) = -f(x)$.
On arrange : $\forall x,\ 2.f(x) = 0$.
L'application f est nulle.
Et bien sûr, la fonction nulle est à la fois paire et impaire.

Les fonctions constantes sont paires, mais seule la constante nulle est aussi impaire.

III∼1) Déduisez, par analyse et synthèse, que pour toute application ϕ de I dans $\mathbb{R}$ il existe un unique couple $(p,\ i)$ avec p paire et i impaire vérifiant $\phi = p + i$.
Précisez qui sont p et i dans les cas $\phi = x \longmapsto 3.x^4 + 5.x^3 + 4.x^2 + 2.x - 1$
$\phi = x \longmapsto e^x$
$\phi = x \longmapsto \cos(x - \varphi_0)$ pour φ_0 fixé

Pour prouver qu'une application quelconque ϕse décompose en somme « paire plus impaire », on va raisonner par analyse et synthèse. L'analyse nous permettra de dire « si il y a une décomposition, ce ne peut être que » et la partie synthèse dira « oui, et c'est bien une décomposition ».

Donc, je triche et je vous donne tout de suite la décomposition : $\phi = \Big(x \longmapsto \dfrac{\phi(x)+\phi(-x)}{2}\Big) + \Big(x \longmapsto \dfrac{\phi(x)-\phi(-x)}{2}\Big)$.
On confirme : cette somme donne bien ϕ.
l'application $\Big(x \longmapsto \dfrac{\phi(x)+\phi(-x)}{2}\Big)$ est bien paire : $\dfrac{\phi(-x)+\phi(-(-x))}{2} = \dfrac{\phi(x)+\phi(-x)}{2}$
l'application $\Big(x \longmapsto \dfrac{\phi(x)-\phi(-x)}{2}\Big)$ est bien impaire : $\dfrac{\phi(-x)-\phi(-(-x))}{2} = \dfrac{\phi(x)-\phi(-x)}{2}$
Maintenant, l'analyse, parce que sinon, vous allez me dire « mais comment on pouvait deviner ça ? ».
facile. Supposons que p et i existent vérifiant $\phi = p + i$.
On a alors $\phi(x) = p(x) + i(x)$
$\phi(-x) = p(-x) + i(-x)$
$\phi(-x) = p(x) - i(x)$ par parité et imparité
On combine première et dernière ligne, et on trouve $p(x) = \dfrac{\phi(x)+\phi(-x)}{2}$.

Cette étape d'analyse prouve l'unicité de la décomposition (si elle existe, on n'a pas le choix)
et nous souffle à l'oreille laquelle proposer et vérifier.

Mais à quoi servait la question « la seule application à la fois paire et impaire est l'application nulle » ?
A faire une question « de cours ».
A permettre devoir l'unicité par ce biais : si f admet deux décompositions $\phi = p_1 + i_1$ et $\phi = p_2 + i_2$, alors on a $p_2 - p_1 = i_1 - i_2$.
Cette différence est donc à la fois paire (c'est $p_2 - p_1$) et impaire (c'est $i_1 - i_2$).
Elle est donc nulle.
Et on a donc $p_1 = p_2$ et $i_1 = i_2$.

Mon énoncé demandait des décompositions, il suffisait de les proposer :

fonction	paire		impaire
g$3.x^4 + 5.x^3 + 4.x^2 + 2.x - 1$	$= 3.x^4 + 4.x^2 - 1$	+	$5.x^3 + 2.x$
e^x	$= ch(x)$	+	$sh(x)$
$\cos(x - \varphi_0)$	$= \cos(\varphi_0).\cos(x)$	+	$\sin(\varphi_0).\sin(x)$

et vérifier... (synthèse)

III∼2) Montrez aussi : $\tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2.n+1}}{(2.n+1)!}.x^{2.n+1}$ et $\frac{1}{\cos(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.x^{2.n}$.

On a montré : $f(x) = \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{k!}.x^k$.

On décompose alors f en « paire+impaire » sous chacune des deux formes.

$\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$		$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{k!}.x^k$	
$\frac{1}{\cos(x)}$	$+\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\sum_{k\ pair} \frac{\alpha_k}{k!}.x^k$	$+\sum_{k\ impair} \frac{\alpha_k}{k!}.x^k$

Par unicité de la décomposition, on peut identifier :

paire	$\frac{1}{\cos(x)} = \sum_n \frac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.x^{2.n}$
impaire	$\tan(x) = \sum_n \frac{\alpha_{2.n+1}}{(2.n+1)!}.x^{2.n+1}$

Mais au fait, qu'est ce qui dit que $x \longmapsto \sum_n \frac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.x^{2.n}$ et $x \longmapsto \sum_n \frac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.x^{2.n}$ sont bien les parties paire et impaire de f ?

Est ce juste parce que les exposants sont respectivement pairs et impairs ?

C'est tentant. ; et sinon, $\sum_n \frac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.(-x)^{2.n} = \sum_n \frac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.x^{2.n}$

et $\sum_n \frac{\alpha_{2.n+1}}{(2.n+1)!}.(-x)^{2.n+1} = -\sum_n \frac{\alpha_{2.n+1}}{(2.n+1)!}.x^{2.n+1}$

Rapport du jury : Idéalement, il faudrait justifier pourquoi la partie paire/impaire d'une fonction développable en série entière est donnée par la somme des termes pairs/impairs de son développement. On pouvait d'ailleurs calculer $f(x) \pm f(-x)$ et simplifier pour obtenir les formes attendues.

III∼3) Pour tout entier naturel n, exprimez $\tan^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

On peut ensuite identifier $\tan(x) = \sum_n \frac{\alpha_{2.n+1}}{(2.n+1)!}.x^{2.n+1}$ et l'écrire même $\tan(x) = \sum_k \frac{A_k}{k!}.x^k$ avec $A_k = 0$ si k pair et $A_k = \alpha_{2.n+1}$ si k impair de la forme $2.n+1$.

On identifie avec la formule de Taylor (ou on dérive plein de fois et on calcule en 0) : $\tan^{(k)}(0) = A_k$.

Pour k pair, $\tan^{(k)}(0) = 0$

Pour k impair (de la forme $2.n+1$) : $\tan^{(k)}(0) = \tan^{(2.n+1)}(0) = \alpha_{2.n+1}$.

Rapport du jury : Le taux d'échec à cette question a été une grande surprise pour les correcteurs. Les candidats font preuve d'une grande maladresse pour interpréter la formule qu'ils viennent de démontrer et oublient qu'on ne leur demande qu'une valeur en 0. De nombreuses confusions d'indice, le même entier étant appelé indifféremment n ou $2n+1$ dans la même égalité.

III∼4) Exprimez $\tan'$ à l'aide de tan. Déduisez $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_{2.n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2.n}{2.k-1}.\alpha_{2.k-1}.\alpha_{2.n-2.k+1}$.

La formule $\tan' = 1 + \tan^2$.

On lui applique la formule de Leibniz : $\tan^{(2.n+1)} = 0 + \sum_{j=0}^{2.n} \binom{2.n}{j}.\tan^{(j)}.\tan^{(2.n-j)}$.

On l'applique en 0 : $\tan^{(2.n+1)}(0) = \sum_{j=0}^{2.n} \binom{2.n}{j}.\tan^{(j)}(0).\tan^{(2.n-j)}(0)$.

Ne restent que les termes d'indice impair dans le membre de droite (les dérivées d'indices pairs de la fonction sont nulles en 0) :

$$\tan^{(2.n+1)}(0) = \sum_{k=1}^{n} \binom{2.n}{2.k-1}.\tan^{(2.k-1)}(0).\tan^{(2.n-2.k+1)}(0)$$

C'est la formule souhaitée.

Rapport du jury : Ici il est important d'expliquer ce que l'on fait, calculer ne suffit pas. Un raisonnement expéditif « par analogie avec Q5 » n'était certes pas suffisant, mais il était bienvenu d'alléger les calculs en expliquant la similarité avec ceux de Q5.

◦12◦

♡ A est une matrice carrée de taille 2 de trace 7 et de déterminant 10. Montrez alors : $A^2 = 7.A - 10.I_2$.
On pose $B = A - 2.I_2$ et $C = A - 5.I_2$. Montrez : $B.C = C.B$ et exprimez B^2 comme multiple de B et C^2 comme multiple de C.
Exprimez A comme combinaison de B et C.

Une bonne fois pour toutes : $A^2 - Tr(A).A + \det(A).I_2 = 0_{2,2}$. C'est toujours vrai.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a^2 + b.c & b.(a+d) \\ & \\ c.(a+d) & b.c + d^2 \end{pmatrix} \end{array} = (a+d).\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a.d - b.c).\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est la formule de Hamilton et Cayley. Et elle admet une généralisation en taille n sur n, mais évidemment avec n termes, et c'est le polynôme caractéristique qui revient.

On développe $B.C = (A - 2.I_2).(A - 5.I_2) = A^2 - 2.A - 5.A + 10.I_2 = 0_{2,2}$ et de même $C.B = 0_{2,2}$.
B et C sont permutables mais en plus, les produits seront nuls.

$B^2 = A^2 - 4.A + 4.I_2$ car A et I_2 commutent.
$B^2 = (7.A - 10.I_2) - 4.A + 4.I_2$
$B^2 = 3.A - 6.I_2$
$B^2 = 3.B$

De même $C^2 = A^2 - 10.A + 25.I_2$
$C^2 = (7.A - 10.I_2) - 10.A + 25.I_2$
$C^2 = -3.A + 15.I_2$
$C^2 = (-3).C$

	B	C
B	$3.B$	$0_{2,2}$
C	$0_{2,2}$	$-3.C$

On combine ensuite $B = A - 2.I_2$ avec $C = A - 5.I_2$ pour arriver à $A = \dfrac{5.B - 2.C}{3}$.

On peut appliquer la formule du binôme car B et C sont permutables (de même que $\dfrac{5}{3}.B$ et $\dfrac{-2}{3}.C$).

On obtient a priori $n+1$ termes : $A^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\Big(\frac{5}{3}.B\Big)^{n-k}.\Big(\frac{-2}{3}.C\Big)^{n-k}$.

Mais il n'en reste que deux car $B.C$ et $C.B$ donnent la matrice nulle : $A^n = \Big(\dfrac{5}{3}.B\Big)^n + \Big(\dfrac{-2}{3}.C\Big)^n$ ($k = 0$ et $k = n$).

De plus, en mettant en boucle $B^2 = 3.B$, on obtient $B^n = 3^{n-1}.B$. Et de même $C^n = (-3)^{n-1}.C$.

Il reste cette fois $A^n = \dfrac{5^n}{3}.B + \dfrac{2^n}{3}.C$.

Et de fait, c'est encore la diagonalisation de A présentée d'une autre façon...

◦13◦

Démontrez par récurrence : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$ pour tout n.
Et sans récurrence ?

On note P_n la propriété $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$.

On initialise avec P_0 : d'un côté un produit vide et de l'autre $(0!)^1$: il y a égalité.
Et même avec P_1 : d'un côté le produit vaut juste 1 et de l'autre $(1!)^2$ n'en est pas loin non plus.

Supposons, pour un entier n donné, qu'on a bien $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$.

On passe au rang $n+1$ dans le membre de gauche, puisque c'est lui le plus compliqué :

$$\prod_{k=1}^{n+1} k^k.k! = \Big(\prod_{k=1}^{n+1} k^k.k!\Big).(n+1)^{n+1}.(n+1)!$$

On remplace par hypothèse de rang n : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} k^k.k! = \Big((n!)^{n+1}\Big).(n+1)^{n+1}.(n+1)!$

On fait entrer $(n+1)^{n+1}$ dans la grande parenthèse :

$$\prod_{k=1}^{n+1} k^k.k! = \Big((n!).(n+1)\Big)^{n+1}.(n+1)! = \Big((n+1)!\Big)^{n+1}.(n+1)!$$

et on retrouve bien $\Big((n+1)!\Big)^{n+1+1}$.

Sinon, je vous laisse réfléchir à l'explication ci dessous

					5
				4	4
			3	3	2
		2	2	2	2
.	1	1	1	1	1

là, c'est $\prod_{k=1}^{n} k!$ en colonnes

5	5	5	5	5	.
4	4	4	4		
3	3	3			
2	2				
1					

et là $\prod_{k=1}^{n} k^k$ en lignes

5	**5**	**5**	**5**	**5**	5
4	**4**	**4**	**4**	4	4
3	**3**	**3**	3	3	2
2	**2**	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1

et là, finalement $(n!)^{n+1}$

∘14∘

a est une suite arithmétique vérifiant $\sum_{k=0}^{10} a_k = 374$. Pouvez vous retrouver la raison ? Et le premier terme ?

Et si j'ajoute $\sum_{k=0}^{20} a_k = 1\,344$?

Non. On peut prendre une suite de premier terme 34 et de raison 0.
de premier terme 33 et de raison 1

En notant a_0 le premier terme et r la raison, on a un système $\begin{array}{lcl} 11.a_0 & +\frac{10.11}{2}.r & = & 374 \\ 21.a_0 & +\frac{20.21}{2}.r & = & 1344 \end{array}$

Cette fois, on le résout : $\boxed{\text{le premier terme vaut 4 et la raison 6}}$

∘15∘

♣ $\pm 1 \pm 1 \pm 1$ est il égal à ± 3 ?
De toutes les matrices de taille 2 à coefficients ± 1, lesquelles ont le déterminant le plus grand ?

Pour ce qui est de $\pm 1 \pm 1 \pm 1$, si on et en facteur, ce ne peut être que 3 ou -3.
Mais si on le lit $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ avec chaque ε_i dans $\{-1, 1\}$, il peut valoir -3, -1, 1 ou 3.

Sinon, on regarde le déterminant de $\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix}$ en notation malpropre. C'est $\varepsilon_1.\varepsilon_2 - \varepsilon_3.\varepsilon_4$ avec des notations propres.

Il ne peut dépasser 2 , atteint pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Il ne peut dépasser -2, atteint pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Et il vaut 0 pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$.

Et en taille 3 ? Je vous la repose bientôt...

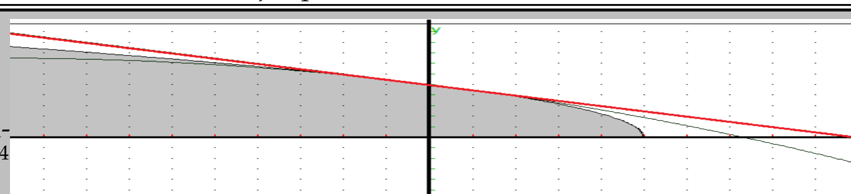
∘16∘

Montrez que toute matrice carrée de taille 2 ayant pour trace 1 et pour déterminant 1 a pour puissance sixième I_2.

La formule de Cayley-Hamilton dit pour une matrice de taille 2 : $M^2 = Tr(M).M - \det(M).I_2$.
Sous nos hypothèses : $M^2 = M - I_2$ (Cayley)
$M^3 = M^2 - M$ (on multiplie par M)
$M^3 = (M - I_2) - M = -I_2$ (on remplace)
$M^3 = (-I_2)^2 = I_2$ (sans redescendre jusqu'aux coefficients)

∘17∘

On veut utiliser
$\sqrt{1-x} \simeq 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.
Sur quel intervalle peut on se placer pour qu'elle soit correcte à 10^{-4} près ?



L'erreur est à l'ordre 3 : $f(1-x)=f(1)-x.f'(1)+\frac{x^2}{2}.f''(1)-\frac{x^3}{2}.\int_0^1(1-t)^2.f^{(3)}(1-t.x).dt$.

On dérive et calcule : $f^{(3)}=t\longmapsto\frac{3}{8.(1+x)^{5/2}}$.

Dans l'intégrale $f^{(3)}(1-t.x)$ est facile à majorer pour x négatif.
Pour x positif, il faut éviter d'aller trop près de 0 sous la racine.
Mais si on impose de toutes façons à x d'être plus petit que 10^{-1} en valeur absolue, ça va aller.
Et ensuite, $\frac{x^3}{2}$ sera encore un peu trop grand si on a pour objectif « majoration par 10^{-4} ».

∘18∘ ♣ ou ♡ ? Calculez la limite (étonnante ?) de $\frac{e.\sqrt[3]{e}.\sqrt[5]{e}.\sqrt[7]{e}.\sqrt[9]{e}\ldots\sqrt[2.n+1]{e}}{\sqrt[2]{e}.\sqrt[4]{e}.\sqrt[6]{e}.\sqrt[8]{e}.\sqrt[10]{e}\ldots\sqrt[2.n]{e}}$ quand n tend vers l'infini (mot clef : $\ln(1+h)=\sum_{k=1}^{n}\ldots+\ldots$ avec $h=1$).

En notation « fractionnaire » : $\frac{e.\sqrt[3]{e}.\sqrt[5]{e}.\sqrt[7]{e}.\sqrt[9]{e}\ldots\sqrt[2.n+1]{e}}{\sqrt[2]{e}.\sqrt[4]{e}.\sqrt[6]{e}.\sqrt[8]{e}.\sqrt[10]{e}\ldots\sqrt[2.n]{e}}=\frac{e.e^{\frac{1}{3}}.e^{\frac{1}{5}}.e^{\frac{1}{7}}.e^{\frac{1}{9}}\ldots e^{\frac{1}{2.n+1}}}{e^{\frac{1}{2}}.e^{\frac{1}{4}}.e^{\frac{1}{6}}.e^{\frac{1}{8}}.e^{\frac{1}{10}}\ldots e^{\frac{1}{2.n}}}$.
On passe tout à un seul exposant, avec des signes moins pour le dénominateur.

$$\frac{e.\sqrt[3]{e}.\sqrt[5]{e}.\sqrt[7]{e}.\sqrt[9]{e}\ldots\sqrt[2.n+1]{e}}{\sqrt[2]{e}.\sqrt[4]{e}.\sqrt[6]{e}.\sqrt[8]{e}.\sqrt[10]{e}\ldots\sqrt[2.n]{e}}=e^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2.n+1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2.n}}=e^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots-\frac{1}{2.n}+\frac{1}{2.n+1}}$$

Et que fait cet exposant ? C'est la série harmonique alternée. Elle converge vers $\ln(2)$
(écrire la formule de Taylor avec reste intégrale $\ln(1+1)$ et regarder le reste tendre vers 0 quand n tend vers l'infini).
La limite donne $e^{\ln(2)}$. Et ça, c'est 2 ! et je peux même écrire « et ça c'est 2! »

∘19∘ ♡ On pose $a_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)^2.k^2}$ et $b_n=a_n+\frac{1}{3.n^3}$ pour tout n. Montrez qu'elles forment un couple de suites adjacentes.

On se donne n et on calcule

$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}-a_n+\frac{1}{3.(n+1)^3}-\frac{1}{3.n^3}$	$\frac{1}{n^2.(n+1)^2}+\frac{1}{3.(n+1)^3}-\frac{1}{3.n^3}=\frac{-8.n^2-8.n-3}{n^3.(n+1)^3}\leqslant 0$	suite décroissante
b_n-a_n	$\frac{1}{3.n^3}\geqslant 0$	majoration
$a_{n+1}-a_n$	$\frac{1}{n^2.(n+1)^2}\geqslant 0$	suite croissante
b_n-a_n		tend vers 0

Les deux suites vont donc converger, vers la même limite.
Mais qui est cette limite ? Ce n'est heureusement pas la question (c'est $\zeta(3)$ et on n'en sait guère plus).

∘20∘ ♡ Montrez que $\left(2.\sqrt{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ et $\left(2.\sqrt{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ sont adjacentes.

On pose $A_n=2.\sqrt{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ et $B_n=2.\sqrt{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.
Il est évident que B_n majore A_n.
Les autres calculs sont plus lourds, mais pas tant que ça :

$$A_{n+1}-A_n=2.\sqrt{n+1}-2.\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(le $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ est ce qu'il reste après simplification des sommes. On conjugue :

$$A_{n+1}-A_n=2.\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}$$

Je suis sûr que là, certains trouvent jolie la transformation de $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ en $\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}$. Elle est évidente, mais jolie.

Sous cette forme, $A_{n+1} - A_n$ est positif, puisque le second dénominateur est plus grand que le premier.

Pour B_n on fait de même : $B_{n+1} - B_n = 2.\sqrt{n+2} - 2.\sqrt{n+1} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ et le travail est du même type. (B_n) est décroissante.

Évidemment aussi, la différence $B_n - A_n$tend vers 0 quand n tend vers l'infini, encore et toujours en écrivant $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Remarque | *Le programme de mathématiques de première année a cet avantage d'être fait de jolies idées, de petits outils comme la conjugaison. Plus évidemment des définitions.*
En Spé, vous aurez d'avantage de théorèmes.

∘21∘

A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée. Complétez ce qui manque dans ce raisonnement.
On pose $M = Sup(A)$ et $\mu = Inf(A)$.
On a $x - y \leqslant M - \mu$.
Notons α un majorant de $x - y$. Alors pour tout y, on a
pour tout x : $x \leqslant \alpha + y$ donc $M \leqslant \alpha + y$. Et donc pour tout y : $M - \alpha \leqslant y$.
On déduit : $M - \alpha \leqslant \mu$.
Finalement $Sup\{x - y \mid (x, y) \in A^2\} = M - \mu$.

A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée.
Elle admet donc une borne supérieure qu'on note M : $M = Sup(A)$.

On suppose aussi A minorée. Elle a alors une borne inférieure : $\mu = Inf(A)$.

On va alors montrer que $\{x - y \mid (x, y) \in A^2\} = M - \mu$ admet pour borne supérieure $M - \mu$.

Qui sont ces $\{x - y \mid (x, y) \in A^2\}$: ce sont les distances entre points de A. Et on cherche la plus grande distance.
Me permettrez vous de l'appeler « diamètre de A » ?

Pour tout x et tout y de A, on a déjà $x \leqslant M$ (majorant) puis $\mu \leqslant y$.
On passe à l'opposé dans la seconde et on somme : $x - y \leqslant M - \mu$.

Déjà, le diamètre ne peut pas dépasser M−, ce qui est assez logique par l'inclusion mA\subset [\mu,\ M] (non ! qui d'entre vous a transformé en $A = [\mu, M]$, estimant que tout ensemble est un segment ?).

On a $x - y \leqslant M - \mu$.

Il faut montrer que $M - \mu$ est non seulement un majorant de notre ensemble de différences, mais même « son plus petit majorant ». On va utiliser ici l'approche « tous les autres majorants sont plus grands que $M - \mu$.

Notons α un majorant de $x - y$. Alors pour tout y et tout x, on a $x - y \leqslant \alpha$ donc $x \leqslant \alpha + y$.
Gardons y fixé pour l'instant. Et insistons sur le $\forall x$.
Le réel $\alpha + y$ majore tous les x de A. C'est un majorant de A.
Par définition du plus petit majorant : $M \leqslant \alpha + y$.

On fait passer α de l'autre côté : $M - \alpha \leqslant y$.
Le réel $M - \alpha$ est un minorant de A.
Par définition du plus grand minorant : $M - \alpha \leqslant \mu$.

Oui, si partant de « $M - \alpha \leqslant y$ » vous passez à « je fais tendre y vers la borne inférieure μ et j'obtient $M - \alpha \leqslant \mu$ », alors vous avez aussi tout compris.
En revanche, si partant de « $M - \alpha \leqslant y$ » vous passez à « je prends y égal à la borne inférieure μ et j'obtient $M - \alpha \leqslant \mu$ », alors vous n'avez pas compris qu'une borne inférieure n'est pas forcément atteinte. Erreur classique, mais on est MP bordel, pas en licence de physique !

On rétablit : $M - \mu \leqslant \alpha$.

Le réel $M-\mu$ est un majorant de $\{x-y \mid (x,\ y) \in A^2\}$, plus petit que les autres majorants.
C'est lui la borne supérieure.

∘22∘

♣ Bintou se isiro $n!$ =40526…4812800000000000000 (o nilo pupo ti akoko lati kọ) ati $(n+1)!$ =2350561…9142400000000000000. O ni lati wa nọmba naa n ? Salaye. C'est du yorouba *(langue du Nigeria, Bénin, Togo, Côte d'Ivoire...)*. J'espère que vous comprenez qu'on vous demande de retrouver n à partir de $n!$ et $(n+1)!$.

Combien de 0 dans l'écriture de $n!$? C'est un bon indice.
$n!$ a 13 chiffres 0 au bout. Et $(n+1)!$ en a autant.
On n'a donc multiplié ni par 5 ni par un de ses multiples.
$n+1$ n'est pas multiple de 5.

Pour avoir 13 zéros au bout : $55 \leqslant n < 60$.

On rappelle en effet :

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	...	*10*	...	*15*	...	*20*	...	*25*	...	*30*	...	*35*	...	*40*	...	*45*	...	*50*	...	*55*
				1			*+1*		*+1*		*+1*		*+2*		*+1*		*+1*		*+1*		*+1*		*+2*		*+1*

Comment choisir ?
Regardons le « chiffre des unités », u plutôt le chiffre après les 0.
Dans $n!$ c'est un 8.
Et quand on multiplie par $n+1$ ça devient un 4.
C'est à dire que si on multiplie 8 par le chiffre des unités de $n+1$ on doit obtenir 4.
Le chiffre des unités de $n+1$ est donc un 8.

On a retrouvé : $\boxed{n = 57 \text{ et } n+1 = 58}$

Et avec l'aide de Python :
$57! = 40526919504877216755680601905432322134980384796226602145184481280000000000000$
puis $58! = 2350561331282878571829474910515074683828862318181142924420699914240000000000000$.

∘23∘

♡ Trouvez le réel a sachant $\left\{\begin{array}{lcl} 2^a \times 3^b \times 5^c & = & 235 \\ 3^a \times 5^b \times 2^c & = & 352 \\ 5^a \times 2^b \times 3^c & = & 523 \end{array}\right|$

Le système $\left\{\begin{array}{lcl} 2^a \times 3^b \times 5^c & = & 235 \\ 3^a \times 5^b \times 2^c & = & 352 \\ 5^a \times 2^b \times 3^c & = & 523 \end{array}\right|$ peut avoir l'air étrange. Mais si on pense à passer au logarithme, il devient très simple *(et le passage au logarithme est une équivalence)* :

$\left\{\begin{array}{llllll} \ln(2).a & +\ln(3).b & +\ln(5).c & = & \ln(235) \\ \ln(3).a & +\ln(5).b & +\ln(2).c & = & \ln(352) \\ \ln(5).a & +\ln(2).b & +\ln(3).c & = & \ln(523) \end{array}\right|$ et même $\begin{pmatrix} \ln(2) & \ln(3) & \ln(5) \\ \ln(3) & \ln(5) & \ln(2) \\ \ln(5) & \ln(2) & \ln(3) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(235) \\ \ln(352) \\ \ln(523) \end{pmatrix}$.

La matrice est inversible. On déduit la valeur de a *(unique)* : $a = \dfrac{\begin{vmatrix} \ln(235) & \ln(3) & \ln(5) \\ \ln(352) & \ln(5) & \ln(2) \\ \ln(523) & \ln(2) & \ln(3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ln(2) & \ln(3) & \ln(5) \\ \ln(3) & \ln(5) & \ln(2) \\ \ln(5) & \ln(2) & \ln(3) \end{vmatrix}}$.

L'application numérique est une horreur :

$$a = \frac{-\ln(5)^2.\ln(532) - \ln(2).\ln(3).\ln(235) - \ln(2).\ln(3).\ln(352) + \ln(2).\ln(3).\ln(532) + \ln(2).\ln(5).\ln(235) + \ln(3).\ln(5).\ln(352)}{-\ln(5)^3 - \ln(2)^2.\ln(3) + \ln(2)^2.\ln(5) + \ln(3)^2.\ln(5) - \ln(2).\ln(3)^2 + \ln(2).\ln(3).\ln(5)}$$

Et aucune formule intelligente ne simplifie $\ln(a).\ln(b)$ (hormis $\ln(a^{\ln(b)})$ mais je n'en vois pas l'intérêt.

C'était juste une question sur les systèmes et les formules de Cramer une fois qu'on passait au logarithme.
Le pire est de répondre qu'il n'y a pas de solution, en croyant qu'il faut aller chercher des solutions seulement dans $\mathbb{N}^3$, en factorisant $235 = 5.47$ par exemple.

∘24∘

Bintou vient de faire une partie de puissance 4 ou morpion contre Aïssata qui s'est conclue par un nul. Il n'y a aucun alignement de quatre croix ni de quatre cercles, que ce soit en ligne, colonne ou diagonale. Version Bintou : Retrouvez le contenu des cases qui manquent. Combien de solutions ?
Version I.P.T. : une matrice de taille 5 sur 5 contient des 0 et des &, il faut vérifier qu'il n'y a aucun alignement de quatre pions.

χ	$\mathcal{O}$	χ	$\mathcal{O}$	χ
χ	χ		$\mathcal{O}$	
	χ			
χ	$\mathcal{O}$			$\mathcal{O}$
$\mathcal{O}$				$\mathcal{O}$

Au moins une des case se déduit tout de suite pour qu'il n'y ait pas d'alignement de trois $\mathcal{O}$

χ	$\mathcal{O}$	χ	$\mathcal{O}$	χ
χ	χ		$\mathcal{O}$	
	χ	là		
χ	$\mathcal{O}$			$\mathcal{O}$
$\mathcal{O}$				$\mathcal{O}$

Mais alors, pour éviter un alignement de trois croix, une nouvelle case est forcée.

χ	$\mathcal{O}$	χ	$\mathcal{O}$	χ
χ	χ		$\mathcal{O}$	
	χ	χ		
χ	$\mathcal{O}$		là	$\mathcal{O}$
$\mathcal{O}$				$\mathcal{O}$

Et le jeu se poursuit avec le même argument à chaque fois, jusqu'à

χ	$\mathcal{O}$	χ	$\mathcal{O}$	χ
χ	χ	$\mathcal{O}_3$	$\mathcal{O}$	χ_7
$\mathcal{O}_5$	χ	χ_0	χ_4	$\mathcal{O}_6$
χ	$\mathcal{O}$	χ_2	$\mathcal{O}_1$	$\mathcal{O}$
$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}_8$			$\mathcal{O}$

Les indices indiquent l'ordre de remplissage.
Il reste deux cases, qu'on remplit comme on veut du moment qu'il n'y a pas deux $\mathcal{O}$. Sauf qu'il n'y a pas non plus de χ dans la dernière à cause d'une diagonale. Finalement, il ne reste qu'un choix $\boxed{\chi \mid \mathcal{O}}$.
On peut compter les χ et les $\mathcal{O}$ afin de savoir qui a commencé et terminé.

La version ITC ne sera pas traitée ici.

∘25∘ Calculez $\int_0^{1/5} Arctan(3.\tan(x)).dx$ (on change de variable ?).

L'existence ne pose pas de problème, $Arctan(x)$ ne passe pas sur la valeur $\frac{\pi}{6}$ (pourquoi $\frac{\pi}{6}$ mais parce que $3.\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ et là, la tangente « explose »).
En effet, pour qu'il mette le pied sur $\frac{\pi}{6}$, il aurait fallu atteindre $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et ici on s'arrête en $\frac{1}{5}$ égal à $\frac{1}{\sqrt{25}}$.

On développe ensuite $\tan(3.\theta) = \dfrac{\dfrac{2.t}{1-t^2}+t}{1-\dfrac{2.t}{1-t^2}.t}$ avec des notations naturelles.

Ici, tout se « simplifie » et l'intégrale vaut $\int_0^{1/2} \frac{t^3-3.t}{3.t^2-1}.dt$ (et si ça vous rappelle $t^3 \quad +3.i.t^2 \quad -3.t \quad -i$, vous avez raison).
On décompose en éléments simples en commençant par une « partie entière » (c'est à dire un polynôme) : $\dfrac{t^3-3.t}{3.t^2-1} = \dfrac{\left(\frac{t}{3}\right)(3.t^2-1)}{3.t^2-1} - \dfrac{\frac{8}{3}}{3.t^2-1}$.

$$\frac{t^3-3.t}{3.t^2-1} = \frac{t}{3} - \frac{4}{3.(3.t+\sqrt{3})} - \frac{4}{3.(3.t-\sqrt{3})}$$

il ne fallait pas oublier le $\frac{t}{3}$ qui correspond d'ailleurs au comportement vers $+\infty$ (équivalent).

On intègre en $\frac{t^2}{6} - \frac{4}{9}.\ln(1-3.t^2)$ et on trouve $\boxed{\dfrac{1}{150} - \dfrac{4.\ln(22/25)}{9}}$

∘26∘ ♡ Une suite u est définie par $\exists(\alpha,\ \beta) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \alpha.(u_n)^\beta$.
Exprimez u_n à l'aide de u_0, α, β et n (c'est ♡ mais ça peut être long quand même).

On peut calculer les premiers.
Mais en fait, la suite $\ln(u_n)$ est celle qui nous intéresse. On la note a_n et elle vérifie $a_{n+1} = \beta.a_n + \ln(\alpha)$.
Elle est presque géométrique de raison β.

On cherche le point fixe : $x = \beta.x + \ln(\alpha)$: $x = \dfrac{\ln(\alpha)}{1-\beta}$.

On pose alors $b_n = a_n - \dfrac{\ln(\alpha)}{1-\beta}$.

On reporte : $b_{n+1} = a_{n+1} - \dfrac{\ln(\alpha)}{1-\beta}$

$$b_{n+1} = \beta.a_n + \ln(\alpha) - \frac{\ln(\alpha)}{1-\beta}$$

$$b_{n+1} == \beta.a_n + \beta.\frac{\ln(\alpha)}{1-\beta}$$

$$b_{n+1} = \beta.b_n$$

Elle est géométrique de raison β : $b_n = \beta^n.b_0 = \beta^n.\Big(a_0 - \dfrac{\ln(\alpha)}{1-\beta}\Big)$.

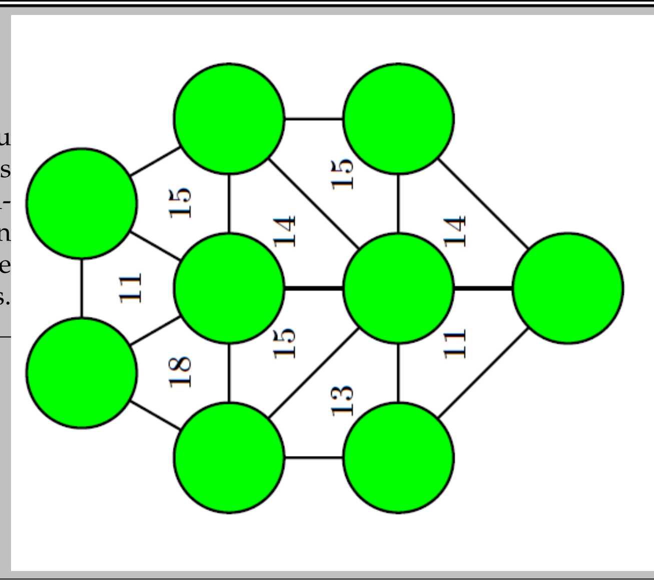
On reporte : $a_n = \beta^n.\Big(a_0 - \dfrac{\ln(\alpha)}{1-\beta}\Big) + \dfrac{\ln(\alpha)}{1-\beta}$.

On revient à u_n : $\boxed{u_n = (u_0)^{(\beta^n)}.\alpha^{\frac{1-\beta^n}{1-\beta}}}$

L'exposant β^n sur u_0 était facile à deviner. Celui sur α était plus long à mettre en place. Cala dit, on voyait venir la somme de termes en β^k.

◦27◦

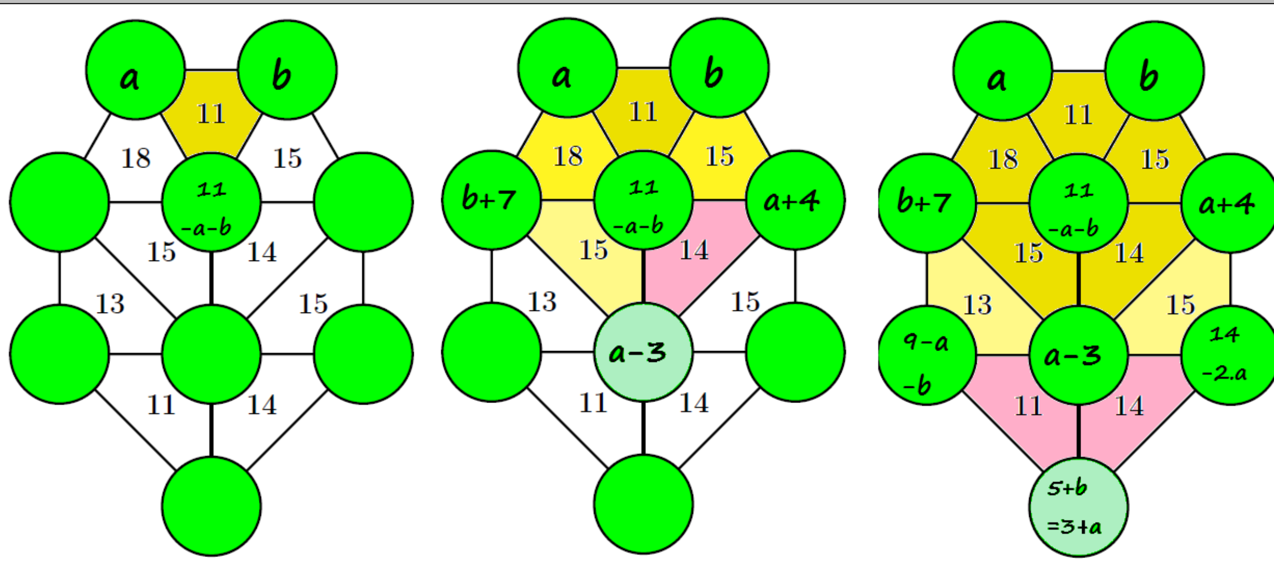
Dans chaque triangle, le nombre écrit à l'intérieur du triangle doit être égal à la somme des nombres inscrits dans les trois cercles qui sont aux sommets du triangle. De plus, les neuf cercles contiennent chacun un des nombres de 1 à 9 sans les répéter. Complète cette figure en plaçant les jetons numérotés dans les cercles.



Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k.3^{n-k}$.

Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2.k.3.(n-k)$.

Calculez $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sqrt{2.k}$.



On donne deux noms aux premiers termes en haut. On complète par le premier triangle jaune (première image). On complète avec trois autres triangles (en jaune plus clair). On obtient la valeur de la cellule vert clair.

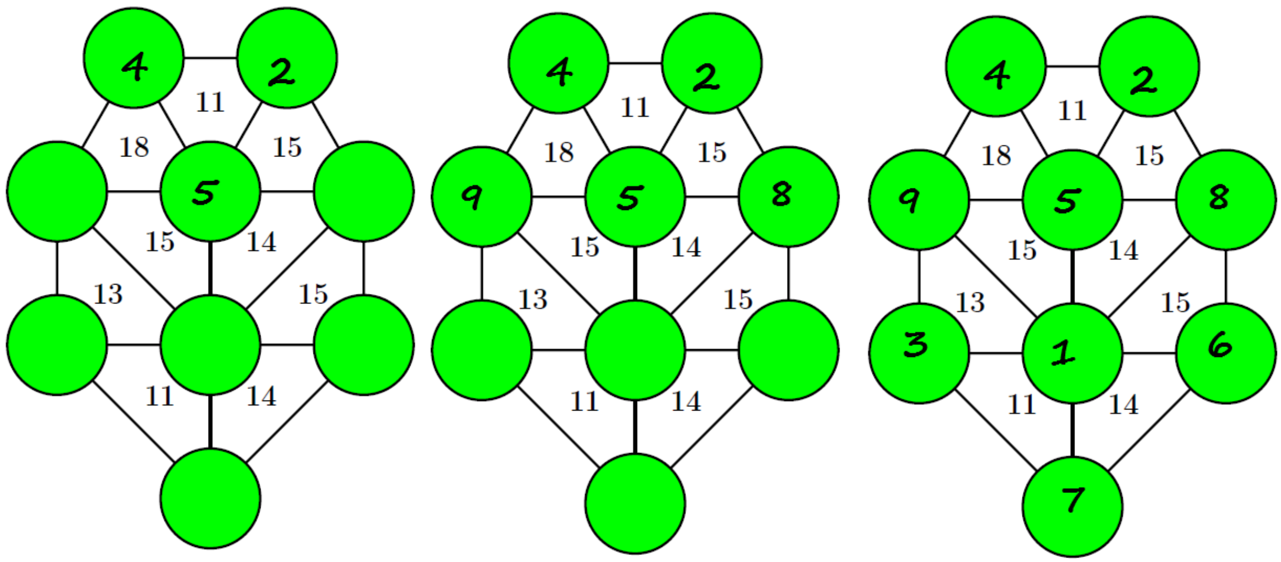
Mais alors le triangle rose (image du milieu) impose une équation : $(11-a-b)+(a+4)+(a-3) = 14$: $a-b = 2$.

On continue jusqu'en bas. Les deux derniers triangles (roses) imposent deux valeurs à la cellule vert clair de la dernière image : $5 + b = 3 + a$. On l'a déjà.
Mais il nous reste des contraintes : ce sont des entiers, et ils sont tous différents.

On a donc par exemple $a - 3 > 0$ et $14 - 2.a > 0$ (avant dernière ligne, cellules de droite et du milieu).
a vaut 4 ou 5 ou 6. Et par là même, b vaut 2 ou 3 ou 4.

Mais $b + 7$ ne doit pas dépasser 9. Il ne reste que $a = 4$ et $b = 2$.
Mais la solution $a = 5$ et $b = 7$ donne une case négative en haut au milieu.

La solution passe donc par 4 et 6 :



Approche de Tristan[6] : la pièce centrale en haut est 5
Ce ne peut pas être 9 car pour 11 il ne reste que $1 + 1$
ni 8 car $9 + 8 > 15$
ni 7 car $7 + 8 = 15$ ...
Et ensuite, ça vient assez vite.

Sinon, il y avait aussi une approche « algèbre linéaire » intuitive.
On a neuf disques à remplir : 9 inconnues.
On a neuf triangles à border : 9 équations.
Il est tentant de dire qu'il y aura une unique solution (système de Cramer 9 sur 9).
Sauf si il dégénère. Et ici, on l'a vu dégénérer quand on a trouvé deux fois l'équation $a - b = 2$.
On va donc avoir une inconnue qui va passer d'inconnue à « paramètre ».
Mais ensuite, on avait des contraintes sur « solutions entières et positives, et ça change tout ».

> *Personnellement, je trouve que c'est au travers de tels exercices qu'on perçoit la notion de dimensions dans les systèmes linéaires.*

Ah oui, après il y a trois sommes et produits.

$\sum_{k=0}^{n} 2^k.3^{n-k}$ est une somme de série géométrique de raison $2/3$.
En effet, on passe de $2^k.3^{n-k}$ à $2^{k+1}.3^{n-k-1}$ en multipliant par 2 et en divisant par 3.
Le premier terme est pour $k = 0$: $2^0.3^n$.
Le premier terme à venir est $k = n + 1$: $2^{n+1}.3^{n-n-1}$.
La formule donne directement $\dfrac{3^n - \frac{2^{n+1}}{3}}{1 - \dfrac{2}{3}}$ (et je ne calcule pas le nombre de termes, je m'en contrefiche).

6. MPSI2 promo première vague Covid, spécialiste des exos étranges, parti à Decour en MP puis à l'ESILV

On simplifie en $3^{n+1}-2^{n+1}$ (assez compact et prévisible).

$$\sum_{k=0}^{n} 2.k.3.(n-k) = 6.\sum_{k=0}^{n} k.(n-k) = 6.\Big(\sum_{k=0}^{n} n.k - \sum_{k=0}^{n} k^2\Big) = 6.n.\sum_{k=0}^{n} k - 6.\sum_{k=0}^{n} k^2$$

Le cours donne $6.n.\dfrac{n.(n+1)}{2} - 6.\dfrac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$.
On simplifie en $n.(n^2-1)$; joli quand même.

$$\prod_{k=1}^{n}\sqrt{2.k} = \sqrt{\prod_{k=1}^{n} 2.k} = \sqrt{\Big(\prod_{k=1}^{n} 2\Big).\Big(\prod_{k=1}^{n} k\Big)} = \sqrt{2^n.n!} = 2^{n/2}.\sqrt{n!}$$

et on n'a guère mieux...

◦28◦

♡ On donne $A(1,1)$, $B(2,4)$ et $C(5,3)$. Placez D sur la droite (BC) pour que (ABD) ait pour aire 2.

Comme D est sur (BC), on a $\det(\overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{BD}) = 0$. On résout $\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ y-4 & -1 \end{vmatrix} = 0$.
On trouve $x+3.y = 14$.

Et si on est en MPSI2, on propose $x+3.y=14$. C'est une équation de droite.
Elle passe par B et par C ($2+3.4=14$ et $5+3.3=14$). C'est donc elle.

On veut ensuite $\det(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}) = 4$. On veut donc cette fois $\begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ 3 & y-1 \end{vmatrix} = 4$.
On a l'intersection de deux droites. On résout et on trouve $\left(\dfrac{7}{5},\ \dfrac{21}{5}\right)$.

Mais il y a aussi $\det(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}) = -4$ car les aires sont algébriques. La solution est cette fois $\left(\dfrac{13}{5},\ \dfrac{19}{5}\right)$.

◦29◦

Primitives d'ordre n. Pour f continue et n entier de $\mathbb{N}^*$, on définit $F_n = x \longmapsto \int_0^x f(t).(x-t)^{n-1}.dt$. déterminez $F_n(0)$ et $F_1'(x)$.
Montrez : $F_4' = 3.F_3$ *(indication : développer par la formule du binôme, utiliser la linéarité, dériver, regrouper dans l'autre sens par la formule du binôme)*. Montrez même $F_n' = (n-1).F_{n-1}$. Déterminez $(F_n)^{(n)}$ à l'aide de f. Calculez $(F_n)^{(k)}(0)$ pour tout k de 0 à $n-1$.
• Un élève propose une autre approche. Il note ϕ une primitive de f et en intégrant par parties, il calcule F_n à l'aide de $x \longmapsto \int_0^x \phi(t).(x-t)^{n-2}.dt$. Faites le. Recommencez. Que trouvez vous ?
• Un autre élève propose une autre approche encore : il dit qu'il note ψ une application vérifiant $\psi^{(n)} = f$ *(obtenue quitte à "primitiver" n fois de suite, en choisissant bien ses constantes d'intégration)*, puis qu'il écrit la formule de Taylor avec reste intégrale pour ψ entre 0 et x. faites le. Que trouvez vous ?
Mettez les d'accord.

♣ Un élève encore plus fou se dit qu'il doit être possible de définir des primitives d'ordre $1/2$ *(il a suivi notre T.D. sur $(1/2)!$)*. Faites comme lui. Déterminez la primitive d'ordre $1/2$ d'une application constante.
Déterminez la primitive d'ordre $1/2$ *(essayez $x \longmapsto x.Arcsin(\sqrt{x})$ pour voir)*.

J'ai un autre exercice, mais c'est en fait le même :
Déterminez la limite quand h tend vers 0 de $\dfrac{f(a+4.h)-4.f(a+3.h)+6.f(a+2.h)-4.f(a+h)+f(a)}{h^4}$ quand h tend vers 0 *(où f est une application de classe 4 (pour pouvoir écrire des formules de Taylor et les écraser en simples développements limités))*.
Généralisez.

On va utiliser les développements limités. On rappelle qu'on les connaît par la formule de Taylor :
$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \dfrac{h^2}{2}.f''(a) + \dfrac{h^3}{6}.f^{(3)}(a) + \dfrac{h^4}{24}.f^{(4)}(a) + reste$

Suivant votre niveau d'étude ou votre façon de parler, vous écrirez :

reste =	...
	$\dfrac{h^4}{24}.\displaystyle\int_0^1 (1-t)^4.f^{(5)}(a+t.h).dt$
	$h^4\times$(truc borné)
	$h^4.O(1)$
	$O(h^4)$
	$h^3\times$(truc de limite nulle)
	$h^3.o(1)$
	$h^3.\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h)\to_{h\to 0} 0$
	$o(h^3)$

On remplace h par $2.h$, $3.h$ et $4.h$:

$$\begin{array}{rclllllll}
f(a+4.h) & = & f(a) & +4.h.f'(a) & +16.h^2.\frac{f''(a)}{2} & +64.h^3.\frac{f^{(3)}(a)}{6} & +256.h^4.\frac{f^{(4)}(a)}{24} & +o(h^4)\\
-4.f(a+3.h) & = & -4.f(a) & -12.h.f'(a) & -36.h^2.\frac{f''(a)}{2} & -108.h^3.\frac{f^{(3)}(a)}{6} & -324.h^4.\frac{f^{(4)}(a)}{24} & +o(h^4)\\
+6.f(a+2.h) & = & +6.f(a) & +12.h.f'(a) & +24.h^2.\frac{f''(a)}{2} & +48.h^3.\frac{f^{(3)}(a)}{6} & +96.h^4.\frac{f^{(4)}(a)}{24} & +o(h^4)\\
-4.f(a+h) & = & -4.f(a) & -4.h.f'(a) & -4.h^2.\frac{f''(a)}{2} & -4.h^3.\frac{f^{(3)}(a)}{6} & -4.h^4.\frac{f^{(4)}(a)}{24} & +o(h^4)\\
+f(a) & = & +f(a) & & & & & \\
TOTAL & = & & & & & h^4.f^{(4)}(a) & +o(h^4)
\end{array}$$

C'est génial, ça marche.

Je vous laisse compléter par exemple :

$$\begin{array}{rcllllll}
f(a+3.h) & = & f(a) & +3.h.f'(a) & +9.h^2.\frac{f''(a)}{2} & +27.h^3.\frac{f^{(3)}(a)}{6} & +o(h^3)\\
-3.f(a+2.h) & = & -3.f(a) & -6.h.f'(a) & -\dots.h^2.\frac{f''(a)}{2} & -\dots.h^3.\frac{f^{(3)}(a)}{6} & +o(h^3)\\
+3.f(a+1.h) & = & +3.f(a) & +\dots.h.f'(a) & +\dots.h^2.\frac{f''(a)}{2} & +\dots.h^3.\frac{f^{(3)}(a)}{6} & +o(h^3)\\
-f(a) & = & -f(a) & & & & \\
TOTAL & = & & & & & +o(h^3)
\end{array}$$

Et même au rang 2.

∘30∘

Trouvez a, b, c, d et e *(si si !)* pour avoir $\dfrac{24}{(X-1).(X-2).(X-3).(X-4)}=\dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{X-2}+\dfrac{c}{X-3}+\dfrac{d}{X-4}+\dfrac{e}{X-5}$. Calculez $\displaystyle\sum_{4\leqslant k}\frac{1}{\binom{k}{4}}$.

$$\frac{24}{(X-1).(X-2).(X-3).(X-4)}=\frac{-4}{X-1}+\frac{12}{X-2}-\frac{12}{X-3}+\frac{4}{X-4}+\frac{0}{X-5}$$

(beh oui quand même, e est nul !).
On les trouve par la méthode des pôles, ou en réduisant au dénominateur commun et en identifiant.

On somme, on télescope et il reste dans $\displaystyle\sum_{4\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{\binom{k}{4}}$ quelques termes, dont un lot qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Il reste que la somme de la série $\boxed{\displaystyle\sum_{4\leqslant k}\frac{1}{\binom{k}{4}} \text{ vaut } \frac{4}{3}}$

Proprement le télescopage donne : $\displaystyle\sum_{4\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{\binom{k}{4}}=\frac{4}{3}-\frac{4}{n-2}+\frac{8}{n-1}-\frac{4}{n}$. *Sans récurrence évidemment.*

Ah oui, $\displaystyle\sum_{4\leqslant k}$ est une somme avec une infinité de termes. C'est la limite quand N tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{4\leqslant k\leqslant N}$.

∘31∘

On pose $f=x\longmapsto \ln(\cos(x))$. Calculez $f^{(k)}(0)$ pour k de 0 à 4.
Donnez le développement limité de f en 0 à l'ordre 4.
Montrez que si on remplace f par son développement d'ordre 4 en 0 pour x entre $-\pi/4$ et$\pi/4$, l'erreur commise est inférieure ou égale à 10^{-1}.

n	0	1	2	3	4	5
$f^{(n)}(x)$	$\ln(\cos(x))$	$\dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)}$	$-1-\tan^2(x)$	$-2.\tan(x).(1+\tan^2(x)) = -2.t - 2.t^3$	$(-2-6.t^2).(1+t^2)$	$-(16.t+40.t^3+24.t^5)$
$f^{(k)}(0)$	0	0	-1	0	-2	

Le développement limité d'ordre 4 en 0 ne contient que peu de termes non nuls :
$f(0+h) = f(0) + h.f'(0) + \frac{h^2}{2}.f''(0) + \frac{h^6}{6}.f^{(3)}(0) + \frac{h^{42}}{24}.f^{(4)}(0) + reste = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + reste$
Suivant votre humeur ou l'exigence du correcteur, le reste est

$o(h^4)$ quand h tend vers 0	$O(h^5)$ quand h tend vers 0	dominé par $\dfrac{h^5}{120}.M_5$	$\dfrac{h^5}{24}.\displaystyle\int_0^1 (1-t)^4.f^{(5)}(t.h).dt$

Le dernier explique que j'aie pris la peine de calculer plus haut $f^{(5)}$.
L'avant dernier vient d'une majoration du dernier :

$$\Big|\frac{h^5}{24}.\int_0^1 (1-t)^4.f^{(5)}(t.h).dt\Big| \leqslant \frac{|h||^5}{24}.\int_0^1 (1-t)^4.|f^{(5)}(t.h)|.dt \leqslant \frac{|h||^5}{24}.\int_0^1 (1-t)^4.M_5.dt = \frac{|h||^5}{24}.M_5.\frac{1}{5}$$

Notre travail va donc être de majorer la dérivée cinquième sur l'intervalle $[-\pi/4,\ \pi/4]$.
Mais on a $-(16.t+40.t^3+24.t^5)$ avec $t = \tan(x)$
La tangente reste entre -1 et 1 quand x reste entre $-\pi/4$ et $\pi/4$. Cette dérivée se majore donc en valeur absolue par $24+40+16$.

Le reste intégrale est donc majoré par $\dfrac{|h|^5}{120}.80$.

Mais $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^4$ est de l'odre de $0,3$ (honte à moi : calculatrice).
Ceci premet de majorer l'erreur commisecomme promis.

∘32∘ ♡? Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comparez $\displaystyle\int_0^x \Big(\int_t^x f(u).du\Big).dt$ et $\displaystyle\int_0^x v.f(v).dv$.

Comme F est continue, elle admet des primitives. On en prend une qu'on appelle F, caractérisée par deux choses : $F' = f$ et $\displaystyle\int_a^b f(t).dt = F(b) - F(a)$ pour tout couple $(a,\ b)$.

On calcule alors la première double intégrale : $\displaystyle\int_0^x (F(x)-F(t)).dt = \int_0^x F(x).dt - \int_0^x F(t).dt$.
le premier terme vaut $x.F(x)$. Le second peut être intégré par parties, puisque tout est dérivable à dérivée continue

$F(t)$	$\hookrightarrow$	$f(t)$
1	$\hookleftarrow$	t

On a alors $\displaystyle\int_0^x F(t).dt = \Big[t.F(t)\Big]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x t.f(t).dt = x.F(x) - \int_0^x t.f(t).dt$.
Surprise : le terme $x.F(x)$ est présent deux fois, mais avec des signes opposés : $\displaystyle\int_0^x (F(x)-F(t)).dt = 0 - \Big(-\int_0^x t.f(t).dt\Big)$.
Parlez de $\displaystyle\int_0^x t.f(t).dt$ ou de $\displaystyle\int_0^x t.f(t).dt$ c'est pareil.

Un exercice qui aurait pu figurer dans le cours, tant il utilise de manière directe des résultats du cours.
De plus, il montre qu'au lie de chercher une « primitive de primitive » en intégrant deux fois (premier membre), il suffit d'une seule intégrale. Pratique.
Ça sert en résistance des matériaux par exemple.
Sinon, la formule de Taylor avec reste intégrale est cachée là dedans mine de rien...

.

∘33∘ ♡ Vrai ou faux :

- 1 -	$\left(a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \ et \ b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n + b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
- 2 -	$\left(a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \ et \ b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n + b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
- 3 -	$\left(a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \ et \ b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n + b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
- 4 -	$\left(a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \ et \ b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n.b_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$
- 5 -	$\left(a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \ et \ b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n.b_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$
- 6 -	$\left(a_n = o(n^2) \ et \ b_n = o(n)\right) \Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} = o(n)\right)$

Rappel : $a_n = o(e_n)$ signifie $\frac{a_n}{e_n}$tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

En particulier, $a_n = o(1)$ signifie que $a_n$tend vers 0.

$a_n = o\left(\frac{1}{a_n}\right)$ siginife que « même $n.a_n$tend vers 0, et donc à plus forte raison, $a_n$tend vers 0 ».

$a_n = O(e_n)$ signifie $\frac{a_n}{e_n}$ est bornée.

- 1 -	$\left(a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \ et \ b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n + b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
	VRAI

En effet $\frac{a_n + b_n}{1/n} = \frac{a_n}{1/n} + \frac{b_n}{1/n}$ tend vers 0.

- 2 -	$\left(a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \ et \ b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n + b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
	VRAI

En effet $\frac{a_n + b_n}{1/n} = \frac{a_n}{1/n} + \frac{b_n}{1/n}$ est la somme d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle (donc bornée).

- 3 -	$\left(a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \ et \ b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n + b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
	VRAI

En effet $\frac{a_n + b_n}{1/n} = \frac{a_n}{1/n} + \frac{b_n}{1/n} = \frac{1}{n}.\frac{a_n}{1/n^2} + \frac{b_n}{1/n}$.

On dira aussi que tout $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est un $o\left(\frac{1}{n}\right)$ (les $\frac{borne}{n^2}$ tendent vers 0 plus vite que $\frac{1}{n}$.

- 4 -	$\left(a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \ et \ b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n.b_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$
	VRAI

En effet, dans $\frac{a_n.b_n}{1/n^3} = \frac{a_n}{1/n^2}.\frac{b_n}{1/n}$ on a un terme borné et un terme de limite nulle. C'est « limite nulle » qui l'emporte.

- 5 -	$\left(a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \ et \ b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n.b_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$
	VRAI

Si le terme est un $o(c_n)$ (le quotient tend vers 0), alors c'est a fortiori un $O(c_n)$ (le quotient est borné).
On peut écrire $o(c_n) \Rightarrow O(c_n)$. Ou même $o(c_n) \subset O(c_n)$. On évitera $o(c_n) = O(c_n)$ car « une seul sens d'implication est vrai ».

- 6 -	$\left(a_n = o(n^2) \ et \ b_n = o(n)\right) \Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} = o(n)\right)$
	FAUX

Par (contre)-exemple $a_n = b_n = \sqrt{n}$. On a bien $\sqrt{n} = o(n^2)$ et $\sqrt{n} = o(n)$ [7]. Et le quotient $\frac{a_n}{b_n}$ vaut 1.

Et on peut faire encore pire avec des choses sans limite à la fin.

∘34∘ $a_n = o(e_n)$ signifie $\frac{a_n}{e_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La relation « être un petit o de « est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive sur l'ensemble des suites réelles strictement positives ?

Réflexive Comment pourrait on avoir $\frac{a_n}{a_n}$tend vers 0 sachant que ce quotient vaut 1.

On se donne la suite $a_n = 1$ pour tout n et on a un contre-exemple.

7. on note au passage que l'égalité utilisée ici n'est pas transitive... étonnant, un peu comme ces « $+C^{te}$ » avec la constante C qui peut changer de ligne en ligne

Il fallait VRAIMENT donner un contre-exemple ?

Symétrique Si $\frac{a_n}{b_n}$ tend vers 0, alors $\frac{b_n}{a_n}$ *tend*vers l'infini et nullement vers 0.
Contre-exemple : $1 = o(n)$, mais on n'a pas $n = o(1)$ quand n tend vers 'linfini.

Anti-symétrique On se donne deux suites (a_n) et (b_n). On suppose qu'on a à la fois $\frac{a_n}{b_n}$et $\frac{b_n}{a_n}$ qui tendent vers 0.
C'est impossible (leur produit vaut 1 et il devrait tendre vers 0^2).
Mais so l'hypothèse est fausse, alors l'mplication est vraie (que (a_n) soit ou on égale à (b_n).
On a donc bien $(a_n = o(b_n)\ et\ b_n = o(a_n)) \Rightarrow (\forall n,\ a_n = b_n)$.

Transitive On se donne trois suites strictement positives (a_n), (b_n) et (c_n).
On suppose que $\frac{a_n}{b_n}$ et $\frac{a_n}{b_n}$ tendent vers 0.
Leur produit tend aussi vers 0.
Et c'est la définition de $a_n = o(c_n)$.

∘35∘ Dans cette famille, tous les enfants *(Prof, Atchoum, Dormeur, Marius, Grincheux, Timide et Joyeux)* sont nés un 7 juillet *(07/07, oui)*. Le jour de l'anniversaire, chacun a un gâteau avec autant de bougies que son âge. Tiens, il y a cinq ans, il y avait autant de gâteux, mais deux fois moins de bougies que cette année. Alors, combien de bougies ?

Et maintenant, cette histoire de nains tous nés un 7 juillet.
Il y a cinq ans, il fallait $\sum_{k=0}^{6} a_k$ bougies. Et cette année, il en faut $\sum_{k=0}^{6}(a_k+5)$.
On nous dit donc :
$$\sum_{k=0}^{6}(a_k+5) = 2.\sum_{k=0}^{6} a_k$$
soit $\sum_{k=0}^{6} a_k = 7\times 5$. Il y a donc 70 bougies cette année.

∘36∘ ♡ Existe-t-il une homographie *(application de la forme $x \longmapsto \frac{a.x+b}{c.x+d}$)* dont les deux points fixes soient 2 et 3 ?
Et si on ajoute valant 4 en 1 ?
Et si on ajoute plutôt « tend vers 5 en $+\infty$" ?
Et si on ajoute pltôt « tendant vers $+\infty$ en 5 ?

La condition est juste $\frac{2.a+b}{2.c+d} = 2$ et $\frac{3.a+b}{3.c+d} = 3$.
Ce système d'inconnues a, b, c et d a des solutions.
Par exemple $x \longmapsto \frac{5.x-6}{x+0}$.

Dans la suite de l'exercice, on anjoute des conditions.

∘37∘ On définit $f = t \longmapsto (t^2+1).e^{-t}$. Donnez l'intervalle le plus grand possible sur lequel f est croissante et convexe.
Même question avec décroissante et convexe.
Même question avec décroissante ou convexe.

Il s'agit d'étudier le signe de f' (monotonie) et de f'' (convexité).
On dérive donc, et plutôt deux fois qu'une.

	valeur	du signe de	positive sur
$f(x)$	$(1+x^2).e^{-x}$	$1+x^2$	$\mathbb{R}$
$f'(x)$	$-(x^2-1)^2.e^{-x}$	$(-x^2-1)$	rien
$f''(x)$	$(x^2-4.x+3).e^{-x}$	$(x-1).(x-3)$	$]-\infty,\ 1]$ et $[3,\ +\infty[$
décroissante et convexe			$]-\infty,\ 1]$ et $[3,\ +\infty[$
décroissante ou convexe			partout

Attention, on ne dit pas convexe sur $]-\infty,\ 2]\cup[3,\ +\infty[$.
Ca n'a pas de sens. la convexité (la croissance aussi) ne se définit que sur un intervalle à la fois.
Prenez cette habitude...

◦38◦

On pose $0 < a_0 \leqslant b_0$ et pour tout n, on pose $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $a_{n+1} = \sqrt{a_n.b_{n+1}}$.
Montrez qu'elles convergent vers la même limite λ.
On pose $d_n = \dfrac{b_n}{a_n}$. Prouvez $d_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+d_n}{2}}$.
Montrez : $b_n = a_n.ch(2^{-n}.\alpha)$ et $2^n.a_n.sh(2^{-n}.\alpha) = a_0.sh(\alpha)$ pour tout n (α est une mesure que vous préciserez).
Déduisez $\lambda = \dfrac{\sqrt{(b_0)^2 - (a_0)^2}}{\alpha}$ et $(b_n - a_n) \sim_{n\to+\infty} a_0.\alpha.sh(\alpha).2^{-n}$.

Par récurrence évidente, non traitée ici, les suites sont strictement positives.
On montre ensuite $a_n \leqslant b_n$ pour tout n.
C'est initialisé, et ensuite on suppose $a_n \leqslant b_n$ à un rang n quelconque donné, puis on calcule

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \sqrt{b_n.b_{n+1}} - \sqrt{a_n.b_{n+1}} = \sqrt{b_{n+1}}.\left(\sqrt{b_{n+1}} - \sqrt{a_n}\right) = \sqrt{b_{n+1}}.\frac{b_{n+1} - a_n}{\sqrt{b_{n+1}} + \sqrt{a_n}}$$

en enchainant comme à chaque fois de petites idées simples.
Enfin, $b_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - \dfrac{a_n + a_n}{2}$ et on utilise l'hypothèse de rang n.

Maintenant qu'on a cette inégalité pour tout n, on calcule $b_{n+1} - b_n$ et on le trouve négatif (c'est $\dfrac{a_n - b_n}{2}$).
On calcule aussi $a_{n+1} - a_n$ ou même $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ puisque tout est positif.

Les suites vérifient $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_1 \leqslant b_0$.
ce ne sont pas encore des suites adjacentes, car il n'est pas évident que $b_n - a_n$ tend vers 0.
Mais on passe par un chemin tout aussi simple : (a_n) est croissante majorée par b_0. Elle converge, on note sa limite α.
(b_n) est décroissante minorée par (a_0), elle converge vers une limite β.
En passant à la limite dans $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, on trouve $\alpha = \beta$.
Les deux suites sont la même limite.

On calcule

$$d_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{b_{n+1}}{\sqrt{a_n.b_{n+1}}} = \sqrt{\frac{b_{n+1}}{a_n}} = \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2.a_n}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + + \frac{b_n}{a_n}\right)}$$

Ici, pas de récurrence, c'est un calcul direct.

Les formules $b_n = a_n.ch(2^{-n}.\alpha)$ et $2^n.a_n.sh(2^{-n}.\alpha) = a_0.sh(\alpha)$ se démontrent par récurrence. En posant $\alpha = Argch(b_0/a_0)$.

Dans la formule $2^n.a_n.sh(2^{-n}.\alpha) = a_0.sh(\alpha)$, on a une forme indéterminée avec $2^n.sh(2^{-n}.\alpha)$. Mais si on l'écrit $\alpha.\dfrac{sh(2^{-n}.\alpha)}{2^{-n}.\alpha}$, on a une limite de la forme $\dfrac{sh(t)}{t}$ avec t qui tend vers 0. On l'écrit $\dfrac{sh(t) - sh(0)}{t - 0}$. Elle tend vers $ch(0)$ égal à 1.

On lève l'indétermination et on fait tendre n vers l'infini : $\lambda.\alpha = a_0.sh(\alpha)$. On isole, et on remplace $sh(\alpha)$ en fonction de $th(\alpha)$.

◦39◦

♡ Sur quel(s) intervalle(s) $t \longmapsto (1 - t^2).e^t$ est elle convexe ?

Il suffit d'étudier le signe de sa dérivée seconde : $t \longmapsto (1 - t^2).e^t$
$t \longmapsto (1 - t^2 - 2.t).e^t$
$t \longmapsto (-t^2 - 4.t - 1).e^t$

On demande donc $t^2 + 4.t + 1 \leqslant 0$.
On trouve $\boxed{[2 - \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3}]}$

Alors pourquoi ce pluriel ? Il n'y a qu'un intervalle, non ?

Non. Par exemple $[-2,\ -1]$ convient aussi. Puisque $[-2,\ -1] \subset [2 - \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3}]$.
En fait, la réponse est « tout intervalle inclus dans $[2 - \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3}]$.

∘40∘

♡ Calculez ces sommes multiples pour n donné

$A_n = \sum\limits_{0\leqslant j<i\leqslant n} \frac{j}{i}$	$B_n = \sum\limits_{i+j=n} i.j$	$C_n = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} Max(i,\ j)$

Si vous n'avez pas confiance, écrivez un script Python qui prend en entrée n et les calcule.

$A_n = \sum\limits_{0\leqslant j<i\leqslant n} \frac{j}{i}$

$A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.\sum\limits_{j=0}^{i-1} j$

$A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.\frac{i.(i-1)}{2}$

$A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i-1}{2}$

$\boxed{A_n = \frac{n.(n-1)}{4}}$

$B_n = \sum\limits_{i+j=n} i.j$

$B_n = \sum\limits_{i=0}^{n} i.(n-i)$

$B_n = n.\sum\limits_{i=0}^{n} i - \sum\limits_{i=0}^{n} i^2$

$\boxed{B_n = \frac{n^3-n}{6}}$

$C_n = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} Max(i,\ j)$

$C_n = \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} Max(i,\ j) + \sum_{0\leqslant i=j\leqslant n} Max(i,\ j) + \sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} Max(i,\ j)$

$C_n = 2.\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} Max(i,\ j) + \sum_{0\leqslant i=j\leqslant n} i$

$C_n = 2.\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} j + \sum_{i=0}^{n} i$

$C_n = 2.\sum_{j=0}^{n} j\sum_{i=0}^{j-1} 1 + \frac{n.(n+1)}{2}$

$C_n = 2.\sum_{j=0}^{n} j^2 + \frac{n.(n+1)}{2}$

$\boxed{C_n = \frac{n.(n+1).(4.n+5)}{6}}$

∘41∘

♡ Montrez pour tout x réel : $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

x donné, on écrit la formule de Taylor avec reste intégrale pour l'exponentielle à l'ordre 3 entre 0 et x :

$$e^{0+x} = \sum_{k=0}^{3} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}.x^k + \frac{x^4}{3}.\int_0^1 (1-t)^3.\exp^{(4)}(t.x).dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{3}.\int_0^1 (1-t)^3.e^{t.x}.dt$$

Le reste intégrale est positif (exposant pair). On a la minoration.

C'est le même modèle que $e^x \geqslant 1+x$.

On aurait pû aussi, masochistement, définit $f = x \longmapsto e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$.
L'application $f^{(4)}$ est l'exponentielle, ositive.
$f^{(3)}$ est donc croissante, et elle est nulle en 0 ($f^{(3)} = x \longmapsto e^x - 1$).
$f^{(3)}$ est donc d'abord négative, puis positive.
Il s'ensuite que f'' est décroissante puis croissante.
f'' admet un minimum en 0. Et il vaut 0.
f'' est donc positive.
f' est donc croissante. Comme elle s'annulle en 0, elle est donc négative puis positive.
f est donc décroissante puis croissante.
f admet en 0 un minimum, égal à 0 (simple calcul).

f est donc positive. C'est ce qu'on voulait.

◦42◦ Soit f deux fois dérivable avec f'' positive. Montrez que si $f'(a)$ est nul, alors f admet un minimum en a.

f' est donc croissante.
Comme elle est nulle en a, elle est donc négative (ou nulle) avant, puis positive après.
f est doonc décroissante, puis croissante.
Bref, c'est un tableau de variations qui nous dit que f admet un minimum en a.

Rappelons qu'avec l'annulation de f' ont n'a pas forcément un minimum.
Oui, je sais, ça peut être un maximum.
Mais ce peut être aussi ni l'un ni l'autre, comme avec $x \longmapsto x^3$ e 0.
Le critère est « annulation et changement de signe de la dérivée ».

Mais ici, on peut aussi écrire $f(x) = f(a) + 0.(x-a) + \dfrac{(x-a)^2}{1}\displaystyle\int_0^1 (1-t).f''(t.x+(1-t).a).dt$.
l'intégrale est positive par positivité de f''. Le carré devant l'intégrale l'est aussi.
La différence $f(x) - f(a)$ est donc positive.
On a bien un minimul en a.

◦43◦ ♡ Montrez, pour x et a positifs : $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{a} - \dfrac{x-a}{a^2}$ (cas d'égalité ?).

Quoi de plus simple que de calculer la différence : $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a} + \dfrac{x-a}{a^2} = \dfrac{a^2 - x.a + (x-a).x}{x.a^2} = \dfrac{(x-a)^2}{x.a^2}$

Mais je le trouve plus joli par convexité.
L'application $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ a pour dérivée seconde $x \longmapsto \dfrac{2}{x^3}$, positive.
La formule de Taylor avec reste intégrale entre a et x donne

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + (x-a).\frac{-1}{a^2} + \frac{(x-a)^2}{1}.\int_0^1 (1-t).\frac{2}{(a+t.(x-a))^3}.dt$$

Le terme $\dfrac{(x-a)^2}{1}.\displaystyle\int_0^1 (1-t).\frac{2}{(a+t.(x-a))^3}.dt$ est positif, c'est ce qu'on voulait.

◦44◦ Montrez : $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} |i^2 - j^2| = \frac{n^2.(n+1).(n+2)}{3}$ et $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} |i-j|^2 = \frac{n.(n+1)^2.(n+2)}{6}$ (voyez tout ça dans un tableau à double entrée et sommez en colonne ou en ligne).

Partons du plus compliqué : $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} |i^2 - j^2|$. Il y a $(n+1)^2$ termes (i et j varient de manière indépendante).

Séparons en trois $\displaystyle\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} |i^2-j^2|$, $\displaystyle\sum_{0\leqslant i=j\leqslant n} |i^2-j^2|$ et $\displaystyle\sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} |i^2-j^2|$.
Celle du milieu est nulle.
Les deux autres sont égales par symétrie des rôles.
On se concentre sur $\displaystyle\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} (j^2 - i^2)$.

On la découpe en $\displaystyle\sum_{0\leqslant j\leqslant n} \Big(\sum_{i=0}^{j-1} (j^2 - i^2)\Big)$.

Pour chaque j, la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} (j^2 - i^2)$ est faite de j termes égaux à j^2 : total j^3

la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} i^2$ réputée pour valoir $\dfrac{(j-1).j.(2.j-1)}{6}$

On somme ensuite ces termes $\dfrac{4.j^3+3.j^2-j}{6}$ en séparant $\dfrac{4}{6}.\sum\limits_{j=0}^{n} j^3 = \dfrac{4}{6}.\dfrac{j^2.(j+1)^2}{4}$

$\dfrac{3}{6}.\sum\limits_{j=0}^{n} j^2 = \dfrac{3}{6}.\dfrac{j.(j+1).(2.j+1)}{6}$

$\dfrac{1}{6}.\sum\limits_{j=0}^{n} j^3 = \dfrac{1}{6}.\dfrac{j.(j+1)}{2}$ (formules du cours)

Et on ré-assemble.

On pouvait aussi voir un tableau tel que

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4
1	1	0	1	2	3
2	2	1	0	1	2
3	3	2	1	0	1
4	4	3	2	1	0

On perçoit bien le découpage en trois

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0		1	2	3	4
1			1	2	3
2				1	2
3					1
4					

,

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0				
1		0			
2			0		
3				0	
4					0

et

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1	1				
2	2	1			
3	3	2	1		
4	4	3	2	1	

Et dans

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1	1				
2	2	1			
3	3	2	1		
4	4	3	2	1	

on peut aussi très vite découper en diagonales

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1	1				
2		1			
3			1		
4				1	

,

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1					
2	2				
3		2			
4			2		

,

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1					
2					
3	3				
4		3			

,

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1					
2					
3					
4	4				

On a n fois le 1, $n-1$ fois le 2, $n-2$ fois le 3 et ainsi de suite.

On calcule donc $\sum\limits_{k=0}^{n}(n-k).k$ et là le calcul est plus rapide : $n.\sum\limits_{k=0}^{n} k - \sum\limits_{k=0}^{n} k^2$.

Avec cette même idée, la somme des carrés donne

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	4	9	16
1	1	0	1	4	9
2	4	1	0	1	4
3	9	4	1	0	1
4	16	9	2	1	0

On laisse tomber une diagonale, et on double $2.\sum\limits_{k=0}^{n}(n-k).k^2$

(oui, en fait, la diagonale est comptée deux fois, mais elle est nulle).

Cette fois, c'est $2.n.\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 - \sum\limits_{k=0}^{n} k^3$. Et on a au final la formule indiquée.

◦45◦ On définit $f = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & \exists(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \quad x = a + b.\sqrt{2} \\ 0 & sinon & \end{array} \right.$. Acceptez vous de représenter graphiquement f ?

Montrez que f est périodique de période 1.

Montrez que f n'est pas périodique de période $\dfrac{1}{2}$.

On se donne x. S'il est de la forme $a+b.\sqrt{2}$, alors $a+1$ s'écrit $(a+1)+b.\sqrt{2}$.

On calcule les deux images : $f(a+b.\sqrt{2}) = 1$ et $f(a+1+b.\sqrt{2}) = 1$.

S'il n'est pas de la forme $a+b.\sqrt{2}$, il en est de même de $a+1$ (raisonnement par l'absurde).

Pourrait elle être périodique de période $\dfrac{1}{2}$?

On aurait alors $1 = f(0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Ceci signifierait que $\dfrac{1}{2}$ s'écrirait $a+b.\sqrt{2}$ avec a et b entiers.
Et ça c'est impossible.

Mais pourquoi ? Après tout, en choisissant bien a et b, peut être. Comme avec Bézout.
Mais on aurait alors $1 = 2.a + 2.b.\sqrt{2}$ et donc $\sqrt{2} = \dfrac{1-2.a}{2.b}$. Et $\sqrt{2}$ serait rationnel.
Ou alors b serait nul, mais il y a une contradiction de parité.

∘46∘

♡ On veut montrer que pour n entier, $\sqrt{n}$ est soit entier (comme $\sqrt{16}$), soit irrationnel (comme $\sqrt{7}$).
On suppose $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux. Montrez qu'il existe a et b entiers vérifiant $a.n.q + b.p = \sqrt{n}$.
Concluez.

La fraction $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$ étant supposée irréductible, on peut écrire une identité de Bézout entre p et q :
$\exists (a,\ b) \in \mathbb{Z}^2,\ a.p + b.q = 1$
On la multiplie par $\sqrt{n}$ à droite, par $\dfrac{p}{q}$ à gauche, ce qui ne change rien : $a.p.\dfrac{p}{q} + b.p = \sqrt{n}$.

Mais si on a posé $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$, on a immédiatement $n = \dfrac{p^2}{q^2}$ puis $n.q = \dfrac{p^2}{q}$.
Notre formule devient donc $a.n.q + b.p = \sqrt{n}$.

Le réel $\sqrt{n}$ est donc une conbinaison d'entiers, c'est un entier ($(\mathbb{Z}, +, .)$ est un anneau).

On a donc prouvé $\forall n,\ (\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{Z})$

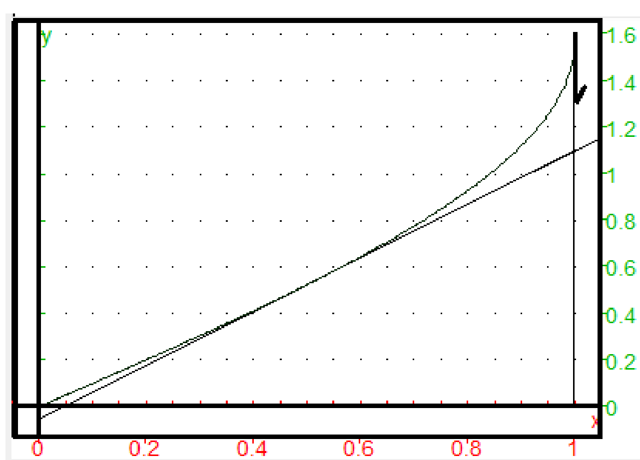
C'est aussi $\forall n,\ \overline{(n \in \mathbb{Q})}\ ou\ \sqrt{n} \in \mathbb{Z}$.
On reconnaît la formulation « soit entiern, soit irrationnel ».

∘47∘

Montrez pour x positif : $Arcsin(x) \geqslant \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2.x-1}{\sqrt{3}}$.

C'est bon, on a reconnu la convexité de la fonction arcinus entre x et $\dfrac{1}{2}$.
Pour commencer, on dérive deux fois :
$Arcsin''(x) = \dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ (comptez bien les signes moins et les 2).
On confirme : dérivée secnde positive, donc graphe au dessus de ses tangentes.
La tangente en $a = \dfrac{1}{2}$ a pour équation
$y = Arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right) + Arcsin'\left(\dfrac{1}{2}\right).\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$.
Avec les valeurs :

$$y = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}.\left(x - \frac{1}{2}\right)$$



Quitte à simplifier : $y = \frac{\pi}{6} + \frac{2.x - 1}{\sqrt{3}}$. Et par la formule de Taylor si on a le crourage de l'écrire :

$$Arcsin(x) = \frac{\pi}{6} + \frac{2.x - 1}{\sqrt{3}} + \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{1} . \int_0^1 (1 - t) . \frac{\frac{1}{2} + t . \left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(1 - \left(\frac{1}{2} + t . \left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^2\right)^{3/2}} . dt$$

avec une intégrale positive.