0.1. Équations différentielles linéaires. Suites récurrentes linéaires.

<table>
<tr><td colspan="2">Tout ce qui suit est traité à l'ordre 2,
les résultats se généralisent à l'ordre n.</td></tr>
<tr><td>Équations différentielle linéaire
$$y"_t + b.y'_t + c.y_t = 0$$
• avec ou sans condition initiale : y_0 et y'_0 donnés
• ou avec condition aux bornes (plus délicate, pas forcément de solutions).</td><td>Suites récurrente linéaire
$$u_{n+2} + b.u_{n+1} + c.u_n = 0$$
plus souvent écrite sous la forme
$u_{n+2} = \beta.u_{n+1} + \gamma.u_n$
• avec ou sans condition initiale u_0 et u_1 donnés,
• ou avec condition aux bornes u_0 et u_N donnés.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Écrire et résoudre l'équation caractéristique, éventuellement dans $\mathbb{C}$: $\lambda^2 + b.\lambda + c = 0$ de solutions λ_1 et λ_2 (le cas de la racine double est traité plus loin)</td></tr>
<tr><td>Forme des solutions :
$$y_t = A.e^{\lambda_1.t} + B.e^{\lambda_2.t}$$
avec A et B dépendant des conditions initiales (système de Cramer à résoudre)
Proprement :
$\exists (A,\ B) \in \mathbb{C}^2,\ \forall t,\ y_t = A.e^{\lambda_1.t} + B.e^{\lambda_2.t}$
Sans conditions initiales (ou forme algèbre linéaire) :
$S = Vect(t \longrightarrow e^{\lambda_1.t},\ t \longrightarrow e^{\lambda_2.t})$</td><td>Forme des solutions :
$$u_n = A.(\lambda_1)^n + B.(\lambda_2)^n$$
avec A et B dépendant des conditions initiales (système de Cramer à résoudre)
Sans conditions initiales :
$S = Vect(((\lambda_1)^n)_{n\in\mathbb{N}},\ ((\lambda_2)^n)_{n\in\mathbb{N}})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cas de la racine double λ_1 vérifiant donc $(\lambda_1)^2 + b.\lambda_1 + c = 0$ et $2.\lambda_1 + b = 0$
(ou encore $b = -2.\lambda_1$ et $c = (\lambda_1)^2$ par les formules de Viète)</td></tr>
<tr><td>Forme des solutions :
$$y_t = A.e^{\lambda_1.t} + B.t.e^{\lambda_1.t}$$
avec A et B dépendant des conditions initiales
Sans conditions initiales :
$$S = Vect(t \longrightarrow e^{\lambda_1.t},\ t \longrightarrow t.e^{\lambda_1.t})$$
(explication plus loin de ce « dédoublement du terme », appelé amortissement critique en physique)</td><td>Forme des solutions :
$$u_n = A.(\lambda_1)^n + B.n.(\lambda_1)^n$$
avec A et B dépendant des conditions initiales
Sans conditions initiales :
$$S = Vect(((\lambda_1)^n)_{n\in\mathbb{N}},\ (n.(\lambda_1)^{n-1})_{n\in\mathbb{N}})$$
(le $n-1$ dans l'exposant permet peut être de mieux comprendre et ne change rien, quitte à remplacer b par $\lambda_1.b$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Retour éventuel sur $\mathbb{R}$ quand les deux racines sont complexes conjuguées $\lambda_1 = \mu + i.\omega$ et $\lambda_2 = \mu - i.\omega$ avec $b = -2.\mu$ et $c = \mu^2 + \omega^2$ (formules de Viète).</td></tr>
<tr><td>Forme des solutions :
$$y_t = e^{\mu.t}.(\alpha.\cos(\omega.t) + \beta.\sin(\omega.t))$$
avec αA et β dépendant des conditions initiales
On pourra préférer $y_t = e^{\mu.t}.A.\cos(\omega.t + \varphi)$ avec $\alpha = A.\cos(\varphi)$ et $\beta = A.\sin(\varphi)$ mais aussi $A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ et φ déterminé par son sinus et son cosinus et pas juste la formule $Arctan(\beta/\alpha)$ qui n'est valable que modulo π).
Tout repose sur l'égalité entre espaces vectoriels $Vect(e^{\lambda.t}.e^{i.\omega.t},\ e^{\lambda.t}.e^{i.\omega.t}) =$
$Vect(e^{\lambda.t}.\cos(\omega.t),\ \ e^{\lambda.t}.\sin(\omega.t))$ à écrire proprement avec des fonctions, et à démontrer par les formules de Moivre et Euler pour les changements de bases.</td><td>La forme $A.(\mu+i.\omega)^n + B.(\mu-i.\omega)^n$ peut être gardée telle quelle,
sachant que A et B seront des complexes (conjugués si les conditions initiales sont réelles).</td></tr>
</table>

0.2. Comment le physicien prouve ces résultats.

0.2.1. Inclusion. On cherche déjà des solutions sous une forme « simple ».

Pour l'équation différentielle $y"_t + b.y'_t + c.y_t = 0$ *(pour tout t)*, on cherche des solutions sous la forme simple : $t \to e^{\lambda.t}$ avec λ à choisir convenablement *(de dérivée n^{ieme} $t \to \lambda^n.e^{\lambda.t}$)*. Rien n'assure qu'il y en ait, rien n'assure qu'il ne faille pas chercher d'autres solutions, mais autant tenter ce qui est le plus simple.
On dérive donc deux fois et on reporte dans l'équation $y"_t + b.y'_t + c.y_t = 0$:

$$\lambda^2.e^{\lambda.t} + b.\lambda.e^{\lambda.t} + c.e^{\lambda.t} = 0$$

On factorise $(\lambda^2 + b.\lambda + c).e^{\lambda.t} = 0$ *(pour tout t)*.
Comme une exponentielle ne s'annule jamais *(même une exponentielle complexe)*, ceci est équivalent à $\lambda^2 + b.\lambda + c = 0$, c'est l'équation caractéristique.

A ce stade en fait, on a prouvé :

si λ_1 et λ_2 sont les deux racines de l'équation caractéristique, alors $(t \to e^{\lambda_1.t}) \in S$ et $(t \to e^{\lambda_2.t}) \in S$ (ensemble des solutions). C'est bien une inclusion.

Pour les suites récurrentes linéaires $u_{n+2} + b.u_{n+1} + c.u_n = 0$ *(pour tout n)*, on cherche des suites géométriques $u_n = \lambda^n$.
Là encore, on obtient $\lambda^{n+2} + b.\lambda^{n+1} + c.\lambda^n = 0$ *(pour tout n)*, puis

$$(\lambda^2 + b.\lambda + c).\lambda^n = 0$$

(pour tout n) et enfin à nouveau $\lambda^2 + b.\lambda + c = 0$.

Le cas particulier de la racine double peut être traité autrement, à moins que de ne tenter $t \to t.e^{\lambda.t}$ pour l'équation différentielle, et $u_n = n.\lambda^n$ pour la suite récurrente linéaire.

0.2.2. Généralisation. On effectue des combinaisons linéaires de solutions.

En effet, comme l'équation est linéaire, toute combinaison linéaire de solutions *(forme $A.e^{\lambda_1.t} + B.e^{\lambda.t}$)* est encore solution.

> On peut le vérifier à la main, ou commencer par créer l'opérateur $D \circ D + b.D + a.Id$ qui transforme une application f en $f" + b.f' + c.f$
> *(D est l'opérateur de dérivation sur l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$: $D(f) = f'$ pour tout f, et très proprement $D(f)(x) = f'(x)$ pour tout f et pour tout x, mais surtout $D = f \to f'$ et donc $D = f \to f"$).*
> Si on note cet opérateur Δ *(donc $\Delta(f) = f" + b.f' + c.f$)*, il est linéaire : $\Delta(A.f + B.g) = A.\Delta(f) + B.\Delta(g)$.
> Comme l'équation se ramène à $\Delta(f) = 0$ d'inconnue f, on constate que si on a $\Delta(f) = 0$ et $\Delta(g) = 0$, alors on a aussi $\Delta(A.f + B.g) = 0$ pour tout couple de complexes $(A,\ B)$.

On fait de même pour les suites récurrentes linéaires, avec cette fois un opérateur D de « décalage » ou « shift » qui transforme la suite (u_n) en la suite (u_{n+1})
(attention aux niveaux de parenthèses : $(D(u))_n = u_{n+1}$ pour tout u et tout n).

A ce stade :

- $\{A.e^{\lambda_1.t} + B.e^{\lambda_2.t} \mid (A, B) \in \mathbb{C}^2\} \subset S$
  . pour le physicien qui ne se préoccupe pas trop des variables.
- $\{t \to (A.e^{\lambda_1.t} + B.e^{\lambda_2.t}) \mid (A, B) \in \mathbb{C}^2\} \subset S$
  . pour le physicien qui se préoccupe des variables.
- $Vect\big((t \to e^{\lambda_1.t}),\ (t \to e^{\lambda_2.t})\big) \subset S$
  . pour le mathématicien qui aime l'algèbre linéaire.

Pour les suites récurrentes linéaires, l'inclusion est du même type.

0.2.3. Double inclusion. Il faut quand même se convaincre qu'on a toutes les solutions.

L'ensemble propose $Vect\big((t \to e^{\lambda_1.t}),\ (t \to e^{\lambda_2.t})\big)$ est inclus dans l'espace des solutions et forme un espace vectoriel de dimension 2 *(les deux fonctions $t \to e^{\lambda_i.t}$ sont indépendantes, car non colinéaires [1])*.

Or l'espace S des solutions est de dimension 2 car l'équation est d'ordre 2. Ceci semble logique, mais il faudrait évidemment le prouver.

Avec inclusion et égalité des dimensions,
on passe de $Vect\big((t \to e^{\lambda_1.t}),\ (t \to e^{\lambda_2.t})\big) \subset S$ à $Vect\big((t \to e^{\lambda_1.t}),\ (t \to e^{\lambda_2.t})\big) = S$.

Pour les suites récurrentes linéaires, une récurrence suffit.
En effet :

supposons que λ_1 et λ_2 sont les deux racines de l'équation caractéristique
ajustons A et B pour avoir $A + B = u_0$ et $\lambda_1.A + \lambda_2.B = u_1$ *(système de Cramer)*
on montre alors $u_n = A.(\lambda_1)^n + B.(\lambda_2)^n$ par récurrence à double hérédité sur n déjà initialisée
supposons pour un n donné : $u_n = A.(\lambda_1)^n + B.(\lambda_2)^n$ et $u_{n+1} = A.(\lambda_1)^{n+1} + B.(\lambda_2)^{n+1}$
combinons : $u_{n+2} = -b.u_{n+1} - c.u_n = -b.\big(A.(\lambda_1)^{n+1} + B.(\lambda_2)^{n+1}\big) - c.\big(A.(\lambda_1)^n + B.(\lambda_2)^n\big)$
regroupons : $u_{n+2} = A.\big(-b.(\lambda_1)^{n+1} - c.(\lambda_1)^n\big) + B.\big(-b.(\lambda_2)^{n+1} - c.(\lambda_2)^n\big)$
factorisons : $u_{n+2} = A.(\lambda_1)^n.\big(-b.\lambda_1 - c\big) + B.(\lambda_2)^n.\big(-b.\lambda_2 - c\big)$
remplaçons : $u_{n+2} = A.(\lambda_1)^n.\big(\lambda_1\big)^2 + B.(\lambda_2)^n.\big(\lambda_2\big)^2$
il ne reste qu'à regrouper les exposants.

0.2.4. Ce que le physicien (et le mathématicien) retient pour l'oscillateur harmonique.

L'équation différentielle $y"_t + \omega^2.y_t = 0$ est un classique *(présent aussi sous la forme $y" = -\omega^2.y$)*.

On peut certes repasser par l'équation caractéristique $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ de racines $i.\omega$ et $-i.\omega$, écrire les solutions complexes et revenir aux solutions réelles.

Mieux vaut retenir tout de suite le résultat.

Ses solutions de base sont $t \to \cos(\omega.t)$ et $t \to \sin(\omega.t)$.

Ses solutions sont les combinaisons $t \to \alpha.\cos(\omega.t) + \beta.\sin(\omega.t)$ sous forme « linéaire »
$t \to A.\cos(\omega.t - \varphi)$ sous forme « amplitude/déphasage ».

REMARQUE 1. *On notera les formules de changement de base* $\begin{pmatrix} \cos(\omega.t) \\ \sin(\omega.t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2.i} & \frac{-1}{2.i} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} e^{i.\omega.t} \\ e^{-i.\omega.t} \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} e^{i.\omega.t} \\ e^{-i.\omega.t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos(\omega.t) \\ \sin(\omega.t) \end{pmatrix}$ *utilisées ici.*

0.3. Comment le manipulateur de matrices prouve le résultat.

0.3.1. Mise sous forme matricielle.

$y"_t = -b.y'_t - c.y_t$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y'_t \\ y"_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_t \\ y'_t \end{pmatrix}$	$u_{n+2} = -b.u_{n+1} - c.u_n$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

0.3.2. Notation intermédiaire.

On définit $Y_t = \begin{pmatrix} y_t \\ y'_t \end{pmatrix}$ pour tout t.	On définit $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ pour tout n

1. *pour l'ordre n, on aura vraiment besoin de « indépendantes » et pas juste de « non colinéaires »*

0.3.3. Étape tricheur pour deviner mais pas utilisable directement.

$Y_t' = M.Y_t$ donc $Y_t = e^{M.t}.Y_0$ Mais il faut calculer M^n ou définir cette « exponentielle de matrice ».	$U_{n+1} = M.U_n$ donc $U_n = M^n.U_0$ On a juste une suite géométrique de raison *(matricielle)* à gauche M et de premier terme U_0.

0.3.4. Diagonalisation.

On diagonalise M *(quitte à travailler dans $\mathbb{C}$ et en supposant que les deux valeurs propres sont distinctes, ce qui assure la diagonalisabilité de M)*.

$$M = P.D.P^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Il suffit de vérifier :

$$M.P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ (\lambda_1)^2 & (\lambda_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = P.D$$

0.3.5. Espace des phases.

$Y_t = P.D.P^{-1}.Y_t \Leftrightarrow P^{-1}.Y_t = D.P^{-1}.Y_t$ On pose $Z_t = P^{-1}.Y_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}$. l'équation devient $Z_t' = D.Z_t$ et donc $\begin{pmatrix} u_t' \\ v_t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}$	$U_{n+1} = P.D.P^{-1}.U_n \Leftrightarrow P^{-1}.U_{n+1} = D.P^{-1}.U_n$ On pose $V_n = P^{-1}.U_n$. l'équation devient $V_{n+1} = D.V_n$.

0.3.6. Forme simplifiée.

Le système se sépare : $u_t' = \lambda_1.u_t$ et $v_t' = \lambda.v_t$. On résout : $u_t = e^{\lambda_1.t}.u_0$ et $v_t = e^{\lambda_2.t}.v_0$ avec u_0 et v_0 dépendant des conditions initiales dans l'espace des phases.	Il suffit d'écrire $D^n = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^n & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^n \end{pmatrix}$.

0.3.7. Retour dans l'espace initial.

On remonte : $Y_t = P.Z_t$. $\begin{pmatrix} y_t \\ y_t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} e^{\lambda_1.t}.u_0 \\ e^{\lambda_2.t}.v_0 \end{pmatrix}$ *On notera que la seconde ligne n'apporte aucune information de plus.*	On remonte : $U_n = P.D^n.P^{-1}.U_0$. $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} (\lambda_1)^n & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ *Retenir juste : des $(\lambda_1)^n$, des $(\lambda_2)^n$ et des termes dépendant linéairement de u_0 et u_1.*

0.4. Où VanDerMonde se cache.

Traitons le cas de l'équation différentielle d'ordre 3 pour comprendre : $\boxed{y^{(3)} + b.y" + c.y' + d.y = 0}$

On écrit l'équation caractéristique $\lambda^3 + b.\lambda^2 + c.\lambda + d = 0$, dont on note λ_1, λ_2 et λ_3 les trois racines *(supposées distinctes)*.

On sait donc que les solutions sont de la forme

$$t \to A_1.e^{\lambda_1.t} + A_2.e^{\lambda_2.t} + A_3.e^{\lambda_3.t}$$

avec A_1, A_2 et A_3 dépendant des conditions initiales.
On cherche justement à les déterminer. On dérive donc deux fois et on identifie à $t = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{cccc|} A_1 & +A_2 & +A_3 & = & y_0 \\ A_1.\lambda_1 & +A_2.\lambda_2 & +A_3.\lambda_3 & = & y_0' \\ A_1.(\lambda_1)^2 & +A_2.(\lambda_2)^2 & +A_3.(\lambda_3)^2 & = & y"_0 \end{array} \right.$$

On reconnaît une matrice de VanDerMonde $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ (\lambda_1)^2 & (\lambda_2)^2 & (\lambda_3)^2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \\ y"_0 \end{pmatrix}$
et on sait qu'elle est inversible puisque les λ_i sont tous distincts.

Le résultat est du même type • en dimension plus grande,
• si la condition initiale n'est pas en $t = 0$
• ou si on a affaire à des suites récurrentes linéaires.

0.5. Comment le géomètre (et algébriste linéaire) comprend le résultat.

On va travailler sur un exemple pour saisir. Prenons la suite récurrente linéaire $u_{n+2} = u_{n+1} + 2.u_n$ avec condition initiale $u_0 = -2$ et $u_1 = 3$.
On comprend d'ores et déjà que la connaissance des deux premiers termes permet par récurrence de calculer tous les termes de la suite.
En l'occurrence :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
u_n	-2	3	-1	5	3	13	19	45	83	173	339	685	1363	2733
		2×3	$+(-1)$	$= 5$				2×45	$+83$	$= 173$				

Pour visualiser les choses, on peut tracer un graphique classique $n \to u_n$.
Mais ce n'est pas pertinent.

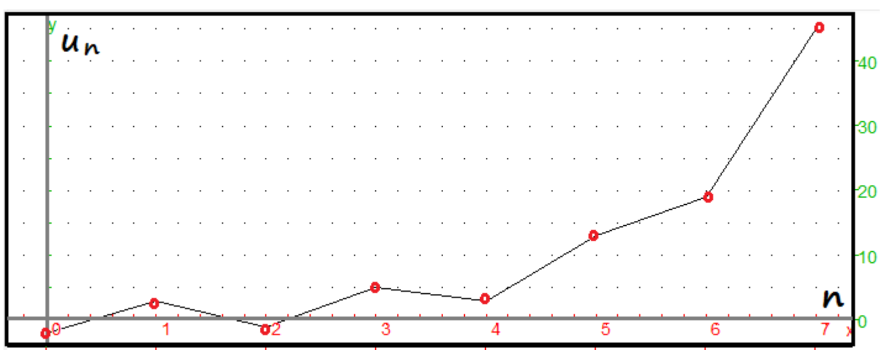

FIGURE 0.5.1. Visualisation directe

Il vaut mieux visualiser un vecteur d'observation $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ *(en liaison avec notre remarque : « si on connaît deux termes consécutifs, on connaît toute la suite »).*
On a cette fois la liste suivante

-2	3	-1	5	3	13	19	45	83	173	339	685	1363
3	-1	5	3	13	19	45	83	173	339	685	1363	2733

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 19 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 83 \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ permet bien de passer d'un vecteur au suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 2.u_n + u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$$

La représentation dans le plan donne.

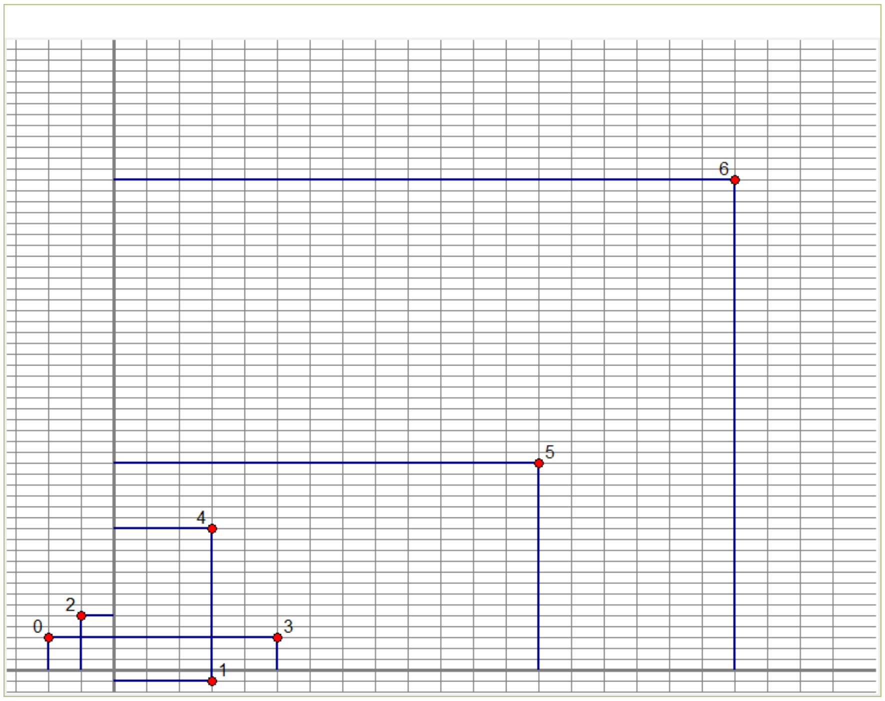

FIGURE 0.5.2. Visualisation dans le plan

On ne voit toujours pas clairement où on veut en venir.
C'est normal, le repère est mal choisi. Il faut se placer dans le repère sur lequel la matrice se diagonalise.
En l'occurrence ici :

vecteurs propres		matrice diagonale	matrice de passage
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ valeur propre -1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ valeur propre 2	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
vérification	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$		

On choisit donc le repère dont les deux vecteurs de base sont $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

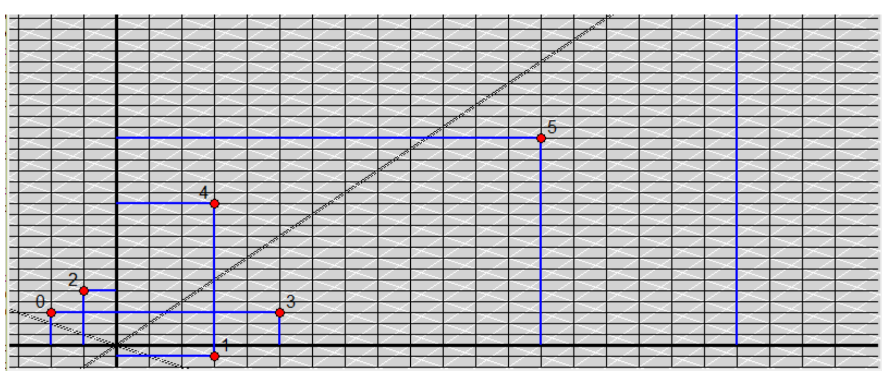

FIGURE 0.5.3. Introduisons le nouveau repère

On a besoin de la matrice de passage $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ d'inverse $\frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui va nous servir à compléter les nouvelles coordonnées :

anciennes composantes	$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 \\ 19 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 19 \\ 45 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 45 \\ 83 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 83 \\ 173 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 173 \\ 339 \end{pmatrix}$
nouvelles composantes	$\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}/3$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}/3$	$\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}/3$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}/3$	$\begin{pmatrix} -7 \\ 16 \end{pmatrix}/3$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 32 \end{pmatrix}/3$	$\begin{pmatrix} -7 \\ 64 \end{pmatrix}/3$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 128 \end{pmatrix}/3$	$\begin{pmatrix} -7 \\ 256 \end{pmatrix}/3$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 512 \end{pmatrix}$

Les deux suites géométriques sont nettement visibles[2], y compris sur le graphique, avec les nouveaux axes *(attention, non orthonormés)* :

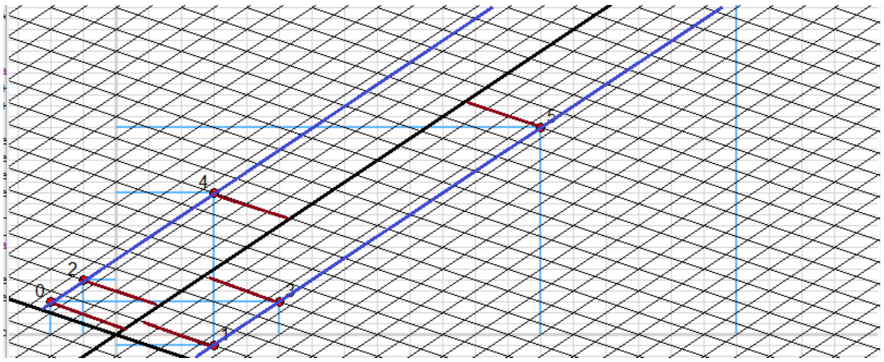

FIGURE 0.5.4. Donnez les coordonnées dans le nouveau repère

2. l'une a pour raison -1 et l'autre a pour raison 2