Sommes et produits. *Chapitre*$_0$

Sommes en range : $\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $\sum_{k=p}^{q} a_k$, création sous Python.

Sommes sous condition

encadrement	ensembliste	condition	parité	arithmétique
$\sum_{p \leqslant k \leqslant q} a_k$	$\sum_{i \in I} a_i$	$\sum_{i+k=n} a_i.b_k$	$\sum_{\substack{i \leqslant n \\ i\ pair}} a_i$	$\sum_{d \wedge n = 1} d$

Conventions sur les sommes et produits :
♡ sommes vides et produits vides.
♣ Pourquoi il ne doit y avoir qu'un nombre fini de termes non nuls.

♠ Formules de Viète $\sum_{i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_p} r_{i_1}.r_{i_2} \ldots r_{i_p}$.

♠ Définition du déterminant d'une matrice carrée $\sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)} \ldots a_n^{\sigma(n)}$.

Réindexations légitimes :
♡ translation $i = k + 1$

♡ renversement

$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}$	$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i}$

application à $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n.(n+1)}{2}$ et "*somme des termes d'une suite arithmétique = moyenne des extrèmes fois nombre de termes*".
Les dangers des autres réindexation du type "somme sur k pair".

♡ Sommes telescopiques : $\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_{k+1} - a_k = a_{N+1} - a_0}$ "dernier moins premier"

Exemples simples :

$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1).(k+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}$	$\sum_{k=0}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$	$\sum_{k=0}^{n}(k^2+1).k!$

♡ Application : somme des premiers entiers impairs

♡ Application : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$.

♣ Application : formule de Zhu-Shi-Zi $\sum_{n=0}^{N} \binom{n}{k} = \binom{N+1}{k+1}$.

Série géométrique et ses parentes : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - r}{1 - r}}$ *(avec condition r différent de 1)* puis $\sum_{k=p}^{q} a_k$ avec $a_{k+1} = r.a_k$; formulation "*premier terme écrit moins premier terme à venir*".
♣ Inversion de $I_d + N$ avec N matrice nilpotente.

♠ Variantes $\sum_{k=0}^{n} k.a^k$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k}$.

♡ Variantes $\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}.b^k$. Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$ et de $a^{2.n+1} + b^{2.n+1}$ par $a+b$.

♡ Noyau de Dirichlet $\boxed{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k.\theta) = \frac{\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.\theta\right)}{2.\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$ application à $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2.n+1).\theta)}{\sin(\theta)}.d\theta$, puis au calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}.dt$.

Sommes de Newton $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^p}$: celles à connaître

$\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$	$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n.(n+1)}{2}$	$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$	$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)^2$

• diverses méthodes pour les retrouver

• équivalent quand n tend vers l'infini à p fixé $\sum_{k=0}^{n} k^p \sim_{n\to+\infty} \frac{n^{p+1}}{p+1}$, comparaison série intégrale.

♡ divergence logarithmique de la série harmonique $\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$

diverses preuves de la divergence de la série harmonique dont $H_{2.n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.

Sommes doubles.

Comment les indices sont liés : $\sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n} a_i^k = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n} a_i^k\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i^k\right)$

ou non $\sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} a_i^k = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n} a_i^k\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i^k\right)$.

Application au carré d'une somme : $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right).\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right) = \left(\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant i\leqslant n}} a_i.a_j\right.$.

Application à l'associativité du produit matriciel.

Application à des problèmes de dénombrements $\sum_{A\subset E} Card(A) = Card(E).2^{Card(E)}$, $\sum_{\substack{A\subset E\\ B\subset E}} Card(A\cap B)$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k.b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2\right).\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2\right)$; interprétaion géométrique.

Inégalité de la variance : $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant \frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2$, lien avec les probabilités.

Signature d'une permutation : $Sgn(\sigma) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.

♣ Série de Riemann : $\sum_{1\leqslant k} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

♣ Nombre de façons d'exprimer un entier n sous la forme $a + 2.b + 3.c$.

Formule du binôme $\quad$ *Chapitre*$_0$

♡ Définition factorielle des coefficients binomiaux,

♡ Définition rationnelle/`range` des coefficients binomiaux

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{n-i}{i+1}}$$

Convention sur les binomiaux aberrants $\binom{n}{2} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$.

♣ Binomiaux des lignes d'indices négatifs.

♡ Symétrie de la ligne $\binom{n}{0} = \binom{n}{n-k}$. Explication en termes de dénombrement.

♡ Premières valeurs

$\binom{n}{0} = 1$	$\binom{n}{1} = n$	$\binom{n}{2} = \frac{n.(n-1)}{2}$	$\binom{n}{3} = \frac{n.(n-1).(n-2)}{6}$

♡ Formule de Pascal $\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$

Explication en termes de dénombrement.

• Application : les coefficients binomiaux sont tous des entiers.

♣ Corollaire : tout produit de n entiers consécutifs est divisible par $n!$.

Somme des coefficients sur une ligne $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	

	en ligne	en colonne	en diagonale
Formules pour avancer	$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}.\binom{n}{k}$	$\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n+1-k}.\binom{n}{k}$	$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}.\binom{n}{k}$

Plus grand(s) coefficient(s) sur une ligne.

♯ Procédures Python de calcul des coefficients binomiaux *(évidemment sans factorielle).*

♡ Formule du binôme dans un anneau commutatif $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!.j!}.a^i.b^j}$

Conseils d'utilisation.

♡ Démonstrations *(récurrence, formule de Taylor avec reste intégrale...).*

♡ Conditions d'utilisation dans un anneau non commutatif.

• Applications aux matrices $(I_d + N)^n$ avec N nilpotente.

• Application aux opérateurs linéaires $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

Formule du multinôme $\boxed{(a+b+c)^n == \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!.j!.k!}.a^i.b^j.c^k}$ et $(a_1 + \ldots + a_p)^n$.

♡ Développement de $(1+X)^n$ et $(1-X)^n$.

Calcul de $\sum_{k\leqslant n} \binom{n}{k}$, $\sum_{\substack{k\leqslant n \\ k\ pair}} \binom{n}{k}$, $\sum_{p} \binom{n}{3.p}$, $\sum_{p} \binom{n}{3.p+1}$ et $\sum_{p} \binom{n}{3.p+2}$.

Formules de Pascal généralisées $\binom{n}{k} + 2.\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}$ et $\binom{n+m}{k} = \sum_{p+q=k} \binom{n}{p}.\binom{m}{q}$.

♣ Somme des carrés de binômiaux $\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2 = \binom{2.n}{n}$ et $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k.\left(\binom{n}{k}\right)^2$ suivant la parité de n.

♣ Matrices à coefficients binomiaux.

♡ Formule de Leibniz $\boxed{(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.u^{(n-k)}.v^{(k)}}$ conseils d'utilisation.

Exemples simples $\left(x \longmapsto P(x).e^{a.x}\right)^{(n)}$ et moins simples $\left(x \longmapsto x^{n-1}F\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}$.

♠ Application aux polynômes dits "orthogonaux".

♣ De Leibniz à Newton $\left(x \longmapsto e^{a.x}.e^{b.x}\right)^{(n)}$ et vice versa.

♣ Coefficients binomiaux et arithmétique.

♣ Triangle de Pascal modulo un nombre premier.

• Pour p premier, chaque $\binom{p}{k}$ est divisible par p pour k de 1 à $p-1$.
• Pour p premier, $n^p - n$ est un multiple de p pour tout n.
• Pour p premier, et n entre 1 et $p-1$, $n^{p-1} = 1 \ mod \ p$.
• Pour p premier, $(\{0, 1, \dots p-1\}, +, \times)$ est un corps.

♣ Décomposition en produit de facteurs premiers de $\binom{2.n}{n}$ *(théorème de Bertrand-Tchebitchev-Erdös).*

♣ Exposant de 2 dans $\binom{2.n}{n}$ en fonction de l'écriture binaire de n *(formule de Lucas).*

Récurrences. *$Chapitre_0$*

Construction et définition de $\mathbb{N}$.

Récurrence simple $\begin{array}{|c|}\hline P(0) \text{ est vraie} \\ \hline \forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \\ \hline \end{array}$

Ce qu'il ne faut jamais écrire.

Récurrence à double hérédité : $\begin{array}{|c|}\hline P(0) \text{ et } P(1) \text{ sont vraies} \\ \hline \forall n \in \mathbb{N},\ (P(n)\ et\ P(n+1)) \Rightarrow P(n+2) \\ \hline \end{array}$

Polynômes de Tchebitchev de première espèce : $T_{n+1}(X) = 2.X.T_n(X) - T_{n-1}(X)$.
Suite de Fibonacci : $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Récurrence à forte hérédité : $\begin{array}{|c|}\hline P(0) \text{ est vraie} \\ \hline \forall n \in \mathbb{N},\ (P(0)\ et\ P(1)\ \dots\ et\ > P(n)) \Rightarrow P(n+1) \\ \hline \end{array}$

Tout entier naturel s'écrit comme somme de termes distincts de la suite de Fibonacci.
Tout entier naturel admet une décomposition en base 2.

Récurrences croisées : $\begin{array}{|c|}\hline P(0) \text{ et } Q(0) \text{ sont vraies} \\ \hline \forall n \in \mathbb{N},\ (P(n)\ et\ Q(n)) \Rightarrow P(n+1) \\ \hline \forall n \in \mathbb{N},\ (P(n)\ et\ Q(n)) \Rightarrow Q(n+1) \\ \hline \end{array}$ et variantes.

Moyenne arithmético-géométrique : u_0 et v_0 donnés, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n.v_n}$.
Calcul approché de π par les polynômes à 6.2^n côtés.
Polynômes de Tchebitchev de première et seconde espèce $T_0 = 1$,$S_0 = 0$, $T_{n+1} = X.T_n(X) - (1 - X^2).S_n(X)$ et $S_{n+1}(X) = X.S_n(X) + T_n(X)$.
Mais finalement par une autre voie : $n.S_n(X) = T_n'(X)$.

Formes équivalentes au principe de récurrence :
• il n'existe pas de suite d'entiers naturels strictement décroissante
• toute suite strictement décroissante d'entiers naturels de premier terme n a au plus $n+1$ termes
• toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément

---

Intégrales de Wallis : $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t).dt$, formule de récurrence : $W_{n+1} = \frac{n}{n+1}.W_{n-1}$ et $(n+1).W_{n+1}.W_n = \frac{\pi}{2}$, formules closes $W_{2.n} = \frac{(2.n)!.\pi}{2^{2.n+1}.(n!)^2}$ et $W_{2.n+1} = \frac{(n!)^2.4^n}{(2.n+1°!}$.
Application à la formule de Stirling : $n! \sim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n.\sqrt{2.n.\pi}$.

Equations différentielles linéaires. *$Chapitre_0$*

Exemples d'équations différentielles issues de diverses matières

physique	oscillateur harmonique ou amorti, circuits électriques		
chimie	désintégration radioactive		
biologie	évolution de population, lois de Malthus, Verhulst, Volterra		
économie	équilibre d'un marché entre producteurs et consommateurs		

Equations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficient constant à second membre nul
$y'_t + a.y_t = 0$ pour tout t et y_0 donné $y_t = y_0.e^{-a.t}$
$y'_t + a.y_t = 0$ pour tout t
$S = Vect(t \longmapsto e^{-a.t})$

Equations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficient constant à second membre "simple"
$y'_t + a.y_t = s_t$ pour tout t et y_0 donné ou non s_t de type simple (polynôme, exponentielle, ligne trigonométrique, produit de ces fonctions)
$y_t = \lambda.e^{a.t} + p_t$ avec λ dépendant des conditions initiales
on cherche une solution particulière $t \longmapsto p_t$ par principe d'analogie avec éventuelle augmentation du degré si l'exponentielle du second membre est solution homogène

Equations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficient continu à second membre nul sous forme de Cauchy-Lipschitz
$y'_t + a_t.y_t = 0$ pour tout t et y_0 donné $y_t = y_0.e^{-A_t}$ où A est la primitive de a nulle en 0
$y_t = t_{t_0}.\exp\Big(-\int_{t_0}^{t} a_u.du\Big)$
Trouver une primitive de a, mettre un signe moins, placer en exponentielle

Equations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficient continus à second membre nul pas sous forme de Cauchy-Lipschitz
$\alpha_t.y'_t + \beta_t.y_t = 0$ pour tout t et y_0 donné se ramener à $y'_t + \dfrac{\beta_t}{\alpha_t}.y_t = 0$ sur un intervalle convenable puis raccorder aux points t_0 où α_{t_0} s'annule (raccordement D_1)

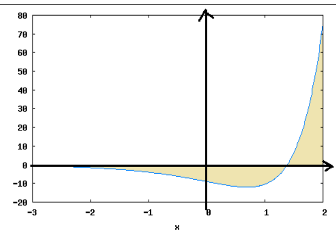
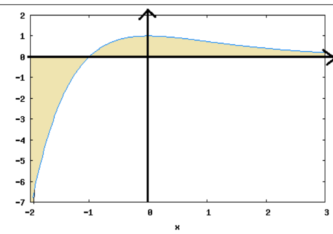
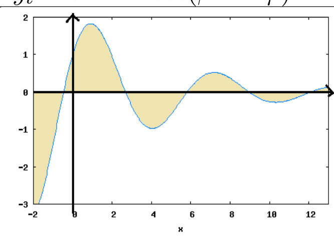
Equations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficient continus avec second membre continu
$y'_t + a_t.y_t = s_t$ pour tout t et y_0 donné $y_t = \lambda.e^{-A_t} + p_t$ où $t \longmapsto p_t$ est une solution de l'équation avec second membre
$\lambda.e^{-A_t}$ décrit les solutions $h'_t + a_t.h_t = 0$ et p_t est une solution de $p'_t + a_t.p_t = s_t$

Si on ne devine pas une solution particulière, on en trouve

par méthode du facteur intégrant :
$z_t = y_t.e^{A_t} = \dfrac{y_t}{h_t}$ où h est solution de l'équation homogène $h'_t + a_t.h_t = 0$ On dérive : $z'_t = y'_t.e^{A_t} + y_t.a_t.e^{A_t} = (y'_t + y_t.a_t).e^{A_t} = s_t.e^{A_t}$ Il ne reste qu'à intégrer (la "constante d'intégration donne la partie homogène et s'ajuste par les conditions initiales).
par variation de la constante :
Résoudre l'équation homogène $h'_t + a_t.h_t = 0$, solutions de la forme $h_t = \lambda.k_t$ Poser alors $y_t = \lambda_t.k_t$. Dériver $y_t = \lambda'_t.k_t + \lambda_t.k'_t$. Reporter dans l'équation avec second membre. On trouve $\lambda'_t.k_t = s_t$. On isole, on intègre. Là encore, la constante d'intégration donne la partie homogène.

Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficient constants avec second membre nul

$y"_t + a.y'_t + b.y_t = 0$ pour tout t et y_0 et y'_0 donnés ou non
équation caractéristique $\lambda^2 + a.\lambda + b = 0$

deux solutions réelles	une racine double	deux solutions complexes conjuguées $\lambda_1 = \alpha + i.\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i.\beta$
$y_t = a.e^{\lambda_1.t} + b.e^{\lambda_2.t}$	$y_t = e^{\lambda_1.t}.(a + b.t)$	$y_t = \gamma_1.e^{\lambda_1.t} + \gamma_2.e^{\lambda_2.t}$ γ_1 et γ_2 dans $\mathbb{C}$ conjugués
a et b dépendant des C.I.	a et b dépendant des C.I.	$y_t = e^{\alpha.t}.(a.\cos(\beta.t) + b.\sin(\beta.t))$ $y_t = e^{\alpha.t}.A.\cos(\beta.t - \varphi)$
		

Cas de l'oscillateur harmonique $y"_t + \omega^2.y_t = 0$.

Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficient constants avec second membre simple

$y"_t + a.y'_t + b.y_t = s_t$ pour tout t et y_0 et y'_0 donnés ou non s_t du type $e^{k.t}$ ou $P(t)$ ou $P(t).\cos(\omega.t)$...
principe de similitude pour trouver une solution particulière
augmentation du degré si nécessaire

Méthode de variation des constantes, Wronskien

Déterminants et algèbre linéaire. *Chapitre*$_0$

Déterminant d'une matrice de taille 2 et aire algébrique d'un parallélogramme.
Démonstration par puzzle.
Application à l'alignement de points, aux calculs d'aires, à l'équation d'une droite, à la distance d'un point à une droite.
Condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs forment une base du plan, changement de coordonnées, formules de Cramer.

Déterminant d'une matrice de taille 3. Interprétation géométrique.
Forme trilinéaire alternée $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) \to \det_C(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$. Toute autre forme trilinéaire lui est proportionnelle.
Application à la coplanarité de vecteurs et de points, aux équations de plan, à la distance d'un point à un plan.
Formule $\det_C(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a}.(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c})$, interprétation de $\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}$ (direction et norme), calcul d'aires de parallélogrammes de $\mathbb{R}^3$.
Déterminant d'une matrice carrée, d'une application linéaire.

Formule $\det(A.B) = \det(A.B).\det(A.B)$ en taille 3.
Application à l'inversibilité d'une matrice. Inversibilité des matrices à coefficients entiers.