LYCEE CHARLEMAGNE

Lundi 13 février

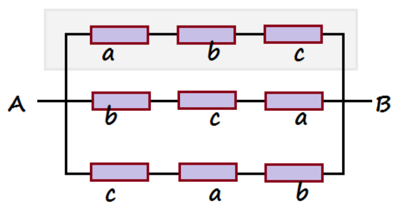
M.P.S.I.2

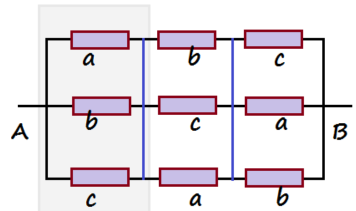
2022 2023

TD19

∘0∘ On prend trois réels strictement positifes a, b et c. leur moyenne arithmétique est connue, et leur moyenne harmonique est l'inverse de la moyenne des inverses $\dfrac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$.

Montrez que la moyenne harmonique est plus petite que la moyenne arithmétique, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur deux triplets bien choisis.
Montrez que la moyenne harmonique est plus petite que la moyenne arithmétique en calculant la résistance entre A et B sur les deux schémas électriques ci-contre.





∘1∘ ♡ Vérifiez que $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Décomposez $\overrightarrow{i}$ sur cette base.
Changez la composante d'un de ces vecteurs pour que ce ne soit plus une base de $\mathbb{R}^3$.
Il existe une composante que l'on peut changer comme on veut, sans que la famille cesse d'être une base de $\mathbb{R}^3$. Laquelle ?
(une base $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$ de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ c'est « tout vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose d'une façon unique sous la forme $\overrightarrow{u}=\alpha.\overrightarrow{a}+\beta.\overrightarrow{b}+\gamma.\overrightarrow{c}$ »,et ça revient à avoir un système ayant une unique solution, donc à un déterminant non nul, par exemple).

∘2∘ Un élève prétend que si A et B sont deux matrices carrées de taille n alors on a $\det\begin{pmatrix}A & -B\\ B & A\end{pmatrix}=\det(A^2+B^2)$.
Montrez par un contre-exemple simple pour n égal à 2 qu'il a tort. Montrez qu'en revanche, son résultat est vrai si $A.B$ est égal à $B.A$ *(on pourra utiliser les matrices* $\begin{pmatrix}I_n & 0\\ i.I_n & I_n\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}I_n & 0\\ i.I_n & I_n\end{pmatrix}$ *de part et d'autre)* . Montrez que si A et B sont réelles, qu'elles « commutent » ou non, on a quand même $\det\begin{pmatrix}A & -B\\ B & A\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^+$.

∘3∘ Un théorème affirme : pour tout couple d'entiers $(a,\ b)$ distincts, il existe une infinité d'entiers naturels n vérifiant $a+n$ et $b+n$ sont premiers entre eux.
Écrivez un script Python qui pour a et b donnés cherche une liste de cent entiers n vérifiant ceci.
Donnez le couple $(a,\ b)$ avec a et $b$entre 1 et 1000 pour lequel le dernier terme de cette liste est le plus grand.

Joël Martin (la Comtesse du Canard) à Paris :
Paris aux prestigieuses scènes est la capitale mondiale capitale du luxe. On y rencontre plein de titis qui rusent et bisent des copines à l'air cool. On voit plein de péniches à la Seine et plein de bus faciles à citer. On entend parfois soupirer des touristes subjugués par l'abîme dans la Tour : "Ah que j'aurais aimé connaître vos motivations, Eiffel !"

Règle du jeu : sur chaque ligne, les lettres de A à D et une case transparente. Et au bout, l'indication de « qui on voit depuis ce bord ».

	A	C		A		
	A	C	D		B	
D	D	B	C	A		A
A		A	B	D	C	
C	C		A	B	D	D
	B	D		C	A	

	D		A		B	
C	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	B
	.	.	.	.	.	
			C	C		

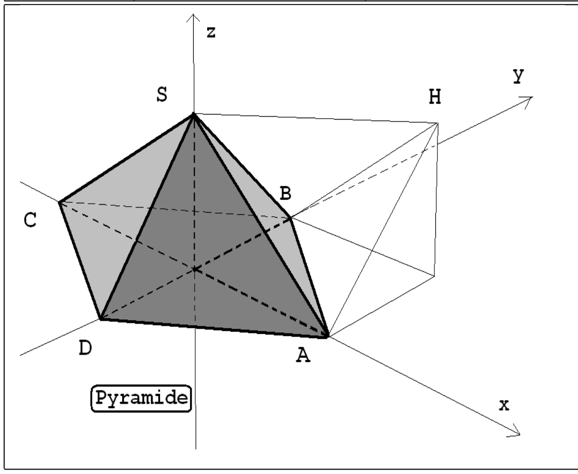
	A		B		C	
	.	.	.	.	.	D
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
A	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
		D	D			

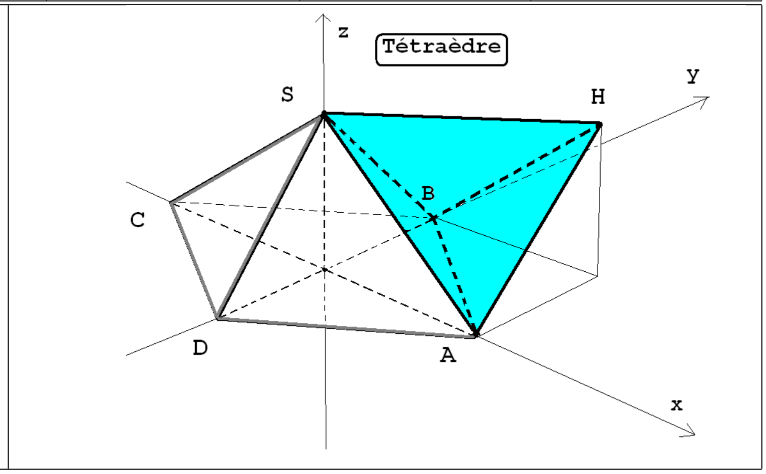
◦4◦ Est il possible que les trois droites d'équations $x+y=a$, $a.x+y=1$ et $x+a.y=1$ aient un seul point d'intersection ?

◦5◦ Est il vrai que la consommation en essence d'une voiture est une aire ?

◦6◦ ♡♣ **La pyramide et le tétraèdre.** On définit :

A	B	C	D	S	H
$(1,\ 0,\ 0)$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 0)$	$(0,\ -1,\ 0)$	$(0,\ 0,\ 1)$	$(1,\ 1,\ 1)$





Montrez que $(A,\ B,\ C,\ D,\ S)$ est une pyramide à base carrée et à faces équilatérales *(nombre de faces ?)*.

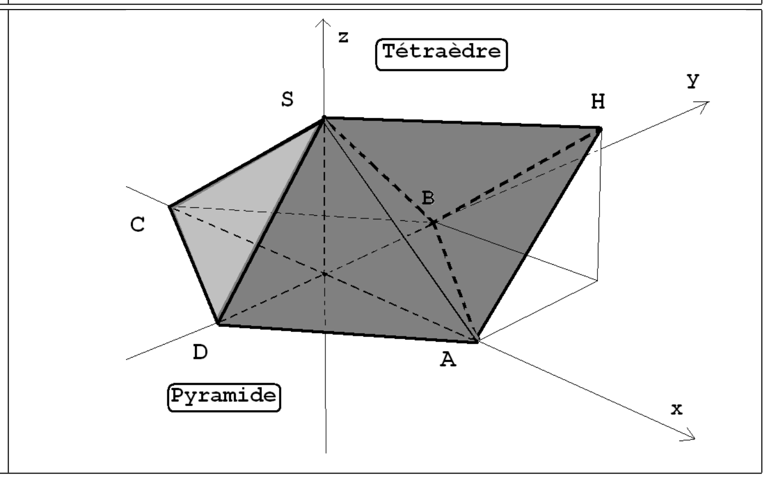
.

Montrez que $(A,\ B,\ S,\ H)$ est un tétraèdre régulier "posé sur une face de la pyramide" *(nombre de faces ?)*.

.

Montrez que A, D, S et H sont coplanaires.
Combien de faces a le solide formé de tous nos points ?

.



◦0◦ ♡ Le colleur demande de calculer le déterminant $\begin{vmatrix} \cos(2.a) & \cos(a+b) & \cos(a+c) & \cos(a+d) \\ \cos(a+b) & \cos(2.b) & \cos(b+c) & \cos(b+d) \\ \cos(c+a) & \cos(c+b) & \cos(2.c) & \cos(c+d) \\ \cos(d+a) & \cos(d+b) & \cos(d+c) & \cos(2.d) \end{vmatrix}$. Après un calcul un peu long, l'élève P.Céhessi trouve 0.
L'élève M.Péhaiçi bougonne "coplanaires dans $\mathbb{R}^4$". Expliquez.

◦1◦ Une forme bilinéaire antisymétrique sur $(\mathbb{R}^3,+,.)$ vérifie $\phi(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{j})=4$ et $\phi(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{k})=10$.
Pouvez vous calculer $\phi(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{j}-\overrightarrow{k})$?
Et si je vous donne $\phi(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{j})=8$?

◦2◦ Montrez que $\begin{vmatrix} 20 & 8 & 12 & 34 \\ 15 & 3 & 9 & 27 \\ 35 & 44 & 71 & 17 \\ 70 & 9 & 0 & 41 \end{vmatrix}$ est un multiple de 30. Quel est le coefficient de 35.9.12.27 ?

◦3◦ Rappel : on inverse les matrices carrées en calculant leur comatrice : $M^{-1}=\dfrac{{}^t Com(M)}{\det(M)}$ où la comatrice est la matrice des cofacteurs pondérés.

Utilisez cette méthode pour inverser $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ en calculant déjà sa comatrice (attention aux signes devant les comatrices) et le produit $M.^t(Com(M))$.

∘4∘ La comatrice d'une matrice antisymétrique inversible est antisymétrique. La preuve :
$^t(Com(A)) = \det(A).A^{-1}$ donc
$Com(A) =^t (\det(A).A^{-1}) = \det(A).^t(A^{-1}) = \det(A).(^tA)^{-1} = \det(A).(-A)^{-1} = -\det(A).A^{-1} = -Com(A)$
Et pourtant, il suffit d'une matrice de taille 3 pour avoir un contre-exemple. Alors ?

∘5∘ ♡ Soient quatre matrices de taille 2 sur 2 de trace nulle. Montrez qu'elles forment une famille liée [1].

∘6∘ On va étudier les matrices antisymétriques ($^tA = -A$) et aller en direction du résultat : le déterminant d'une matrice réelle antisymétrique est le carré d'une formule en les coefficients de la matrice (le Pfaffien). Les questions sont largement issues d'une épreuve de Polytechnique-ESPCI, filière P.C. de 2003 (quel âge aviez vous ?) [2]

I∼0) On se fixe un entier n qui pourra le temps de quelques questions prendre une valeur imposée. On note E_i le i^{eme} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ *(n composantes nulles sauf la i^{eme} qui vaut 1)*. On note A_n l'espace des matrices antisymétriques de taille n sur n *(rappel : $^tA = -A$)*. Montrez que c'est un espace vectoriel pour les lois usuelles, donnez sa dimension et donnez une base à l'aide des $E_i.^tE_j$ *(on ne demandera pas de prouver que c'est une base)* [3].

I∼1) Montrez que le déterminant d'une matrice antisymétrique de taille impaire est forcément nul.

I∼2) L'élève A dit que le produit de deux matrices antisymétriques est symétrique, et B dit que le produit de deux matrices antisymétriques est antisymétrique. Mettez les d'accord. *Cette question n'était pas dans le sujet de Polytechnique.*

I∼3) Est il vrai que les matrices antisymétriques de taille 2 forment un supplémentaire [4] de l'ensemble des matrices de trace nulle ? Pouvez vous donner dans $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ un sous-espace vectoriel qui soit à la fois supplémentaire de l'ensemble des matrices symétriques, mais aussi de l'ensemble des matrices de trace nulle ?

I∼4) Montrez que le déterminant d'une matrice antisymétrique de taille 2 est le carré de la forme linéaire $A \longmapsto^t E_1.A.E_2$.

II∼0) On définit : $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{pmatrix}$. Montrez qu'elles ont le même déterminant. Calculez $A.B$ et déduisez que $\det(A)$ est le carré d'une application sur les coefficients de A que vous préciserez *(attention, ne pas oublier un détail)*.

II∼1) On définit le script suivant

---

1. liée : l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres
2. n'allez pas aux toilettes avec votre smartphone pour essayer de récupérer le corrigé, j'ai modifié l'intitulé et le déroulement des questions à ma façon, et viré les parties difficiles.
3. essayez en taille 2 : $E_1.^t(E_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_1.^t(E_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tandis que $E_2.^t(E_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. attention, ne confondez pas supplémentaire et complémentaire : un supplémentaire de A dans E est un espace vectoriel tel que tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $(E, +, .)$ se décompose d'une façon unique comme somme d'un vecteur de A et d'un vecteur de B (exemples : l'axe imaginaire est supplémentaire de l'axe réel dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}-$espace vectoriel)

```
def Mystere(L) :
....n = len(L)
....if n % 2 == 0 :
........return(0)
....M = [[0 for k in range(n+1)] for i in range(n+1)]
....for i in range(n) :
........M[i][i+1] = L[i]
........M[i+1][i] = -L[i]
....return(M)
```

Montrez qu'il définit une matrice antisymétrique, et calculez son déterminant.

II$\sim$2) Soit D_n une matrice diagonale de taille n sur n ; calculez en fonction du déterminant de D_n le déterminant de la matrice de taille $2.n$ par blocs : $\begin{pmatrix} 0_{n,n} & -D_n \\ D_n & O_{n,n} \end{pmatrix}$.

II$\sim$3) Soit A une matrice antisymétrique, on suppose que A^2 est nulle. Montrez que A est nulle *(indication qui n'était pas dans le sujet : calculez ${}^t(A.E_i).(A.E_i)$ pour tout i).*

III$\sim$0) Dans cette partie, A est une matrice réelle antisymétrique vérifiant $A^2 + I_n = 0$. Montrez que n est pair (on posera alors $n = 2.m$) et que A est inversible. Soit U un vecteur. A quelle condition $(U,\ A.U)$ est elle libre ?

III$\sim$1) On pose : $F = \{V \in \mathbb{R}^n \mid {}^tU.V = 0 \ et\ {}^t(A.U).V = 0\}$. Montrez que F est un espace vectoriel, quelle est sa dimension. Montrez : $\forall V \in F,\ A.V \in F$.

III$\sim$2) Déduisez l'existence d'une famille de vecteurs $(U_1, \dots U_m)$ telle que $(U_1, \dots U_m, A.U_1, \dots A.U_m)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs deux à deux orthogonaux, et normés.
L'orthogonalité de deux vecteurs V et W c'est ${}^tV.W = 0$. Un vecteur normé vérifie ${}^tV.V = 1$.

IV$\sim$0) Soit A une matrice antisymétrique. Montrez que $(U, V) \longmapsto^t U.A.V$ (notée ϕ^1_A) est une forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathbb{R}^n$.

IV$\sim$1) Une forme multilinéaire est dite alternée si elle donne 0 dès que deux vecteurs d'indices voisins sont égaux : $\forall i,\ U_i = U_{i+1} \Rightarrow \phi(U_1, \dots, U_i, U_{i+1}, \dots U_n) = 0$ *(ce n'est pas (encore) la même définition que dans le cours).*
Montrez alors que $\phi(U_1, \dots U_n)$ change de signe dès qu'on échange deux vecteurs d'indices voisins.

Montrez alors que $\phi(U_1, \dots U_n)$ est nul dès que deux vecteurs d'indices distincts sont égaux.

IV$\sim$2) On définit maintenant $\phi^2_A = (U_1, U_2, U_3, U_4) \longmapsto \phi^1_A(U_1, U_2).\phi^1_A(U_3, U_4) - \phi^1_A(U_1, U_3).\phi^1_A(U_2, U_4) + \phi^1_A(U_1, U_4).\phi^1_A(U_2, U_3)$. Montrez que c'est une forme quadrilinéaire alternée.

IV$\sim$3) On prend ici $n = 4$. Déduisez qu'il existe un réel $Pf(A)$ vérifiant
$\forall (U_1, \dots U_4) \in (\mathbb{R}^4)^4,\ \phi^2_A(U_1, \dots U_4) = Pf(A).\det(U_1, \dots U_4)$.

IV$\sim$4) Explicitez $Pf(A)$ à l'aide des coefficients de A.

V$\sim$0) On définit ensuite $\phi^3_A(U_1, \dots U_6) = \sum_{k=2}^{6} (-1)^k.\phi^1_A(U_1, U_k).\phi^2_A(U_2, \dots U_{k-1}, U_{k+1} \dots, U_6)$ *(la notation étant ambigüe, le premier terme de la somme est $\phi^1_A(U_1, U_2).\phi^2_A(U_3, U_4, U_5, U_6)$et le dernier est $\phi^1_A(U_1, U_6).\phi^2_A(U_2, U_3, U_4, U_5)$).* Montrez que c'est une forme hexalinéaire alternée.

V$\sim$1) On prend ici $n = 6$. Déduisez qu'il existe un réel $Pf(A)$ vérifiant
$\forall (U_1, \dots U_6) \in (\mathbb{R}^6)^6,\ \phi^3_A(U_1, \dots U_6) = Pf(A).\det(U_1, \dots U_6)$.

V$\sim$2) Soit A une matrice antisymétrique de taille 6 et M une matrice de taille 6. Montrez que ${}^tM.A.M$ est antisymétrique. Montrez $Pf({}^tM.A.M) = \det(M).Pf(A)$.

∘7∘ ♠ Il parait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k}{(k+1)^2} = \zeta(3)$. C'est un sujet d'oral de Centrale.

∘8∘ Montrez que $(A,\ B) \longmapsto Tr(A.{}^tB)$ est une forme bilinéaire symétrique sur l'espace des matrices de taille 2 sur 3 (la trace est la somme des termes diagonaux, vous devrez vérifier l'existence, mais ne redescendez pas jusqu'aux coefficients pour la bilinéarité, travaillez avec des matrices !).

◦9◦ ♡ Inversez les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

◦10◦ Résolvez pour a, b et c complexes distincts donnés : $\left\{ \begin{array}{llll} x & +a.y & +a^2.z & = & a^3 \\ x & +b.y & +b^2.z & = & b^3 \\ x & +c.y & +c^2.z & = & c^3 \end{array} \right.$ d'inconnues (x, y, z).

◦11◦ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Donnez le polynôme caractéristique de A et son spectre[5].

Montrez que K, K' et N sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^3, +, .)$

$K_A = \{U \in \mathbb{R}^3 \mid A.U = 0_3\}$
$K'_A = \{U \in \mathbb{R}^3 \mid A^2.U = 0_3\}$
$N_A = \{U \in \mathbb{R}^3 \mid A.U = 9.U\}$

. Donnez leurs dimensions.

Lesquelles de ces propositions sont vraies

$\mathbb{R}^3 = K' \oplus N$	$\mathbb{R}^3 = K' + N$
$\mathbb{R}^3 = K \oplus N$	$\mathbb{R}^3 = K' + N$

?

Donnez un polynôme de degré le plus petit possible vérifiant $P(A) = 0_{3,3}$.
Traitez les mêmes questions avec B à la place de A.
Placez les dans le tableau : A, B, I_3, $O_{3,3}$

	diagonalisable	non diagonalisable
inversible		
non inversible		

◦12◦ ♡ Montrez qu'il n'existe pas d'application f linéaire[6] de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(mot clef : relation de dépendance linéaire).

◦13◦ On travaille avec le corps $\mathbb{K}$ des entiers de 0 à 12 et l'addition et la multiplication modulo 13. Montrez que $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix})$ est une base de $(\mathbb{K}^3, +, .)$. Donnez la matrice de passage de la base canonique à cette base. Décomposez la base canonique suivant cette base.

◦14◦ Un nombre sur divisible est un nombre « divisible par le nombre de ses diviseurs ».
Montrez qu'il y a exactement 6 nombres sur divisibles ayant justement 70 diviseurs.
Montrez que tout nombre sur-divisible impair est congru à 1 modulo 8.
Montrez qu'un nombre sur-divisible ne peut pas valoir 6 modulo 8.

Bonus : Ces ma**c**aques font malo**tr**us. Il bou**cl**e l'**éd**ito. Il n'est pas **u**tile au p**os**te. Ote ta lam**p**e que je puisse **gu**etter. Elle aime les b**oi**tes de Hongr**ie**. S**able** min**us**. La pinède sent la b**r**aise. Oh le **s**ot **greff**ier.

◦15◦ Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce déterminant vaudra 2017 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ ? & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$? Si oui, cette valeur sera-t-elle entière, si non, calculez le coefficient de X^{23} dans T_{27}.

◦16◦ Soit A une matrice de terme général a_i^k. On note $\overbrace{A}$ la matrice de terme général $\alpha_i^k = a_{n+1-k}^{n+1-i}$. Expliquez "géométriquement" comment elle se déduit de A.
Montrez qu'elle a le même déterminant que A.
Vous pourrez revenir à la formule "brute", vous pourrez aussi utiliser la permutation $i \longmapsto n+1-i$.

5. $\chi_A(X) = \det(A - X.I_3)$ est le polynôme caractéristique ; ses racines sont le spectre
6. l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images

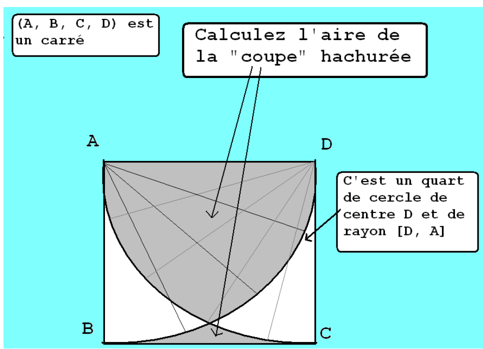
Exprimez $\overbrace{A}$ à l'aide de A et de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

∘17∘ ♡ Complétez $\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \end{pmatrix}$ sachant que son polynôme caractéristique est $X^3 - X^2 - 5.X - 2$.
(CharPoly(M, x) c'est $\det(M - x.I_n)$).

∘18∘ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$. Calculez $\det(A^{-1})$. (la relation de Pascal peut servir...)

∘19∘ ♡ Calculez $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Généralisez en taille n, si possible avec démonstration.

∘20∘



$$\begin{array}{lllllllllll}
0, & 2 \\
0, & 0 & 4 \\
0, & 0 & 0 & 8 \\
0, & 0 & 0 & 1 & 6 \\
0, & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\
0, & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 \\
0, & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\
0, & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 6 \\
0, & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\
0, & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4
\end{array}$$

Sur chaque ligne, j'écris les puissances de 2 et je les décale peu à peu. Je pose cette immense addition *(carrément infinie...)*. Je calcule le total. Quel est le 2016^{ieme} chiffre derrière la virgule de ce réel écrit en décimal ?

∘21∘ ♡ Dérivez (pour b fixé non nul) $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2 + b^2}$.
Calculez $\displaystyle\int_{y=0}^{1} \Big(\int_{x=0}^{1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.dx \Big).dy$ et $\displaystyle\int_{x=0}^{1} \Big(\int_{y=0}^{1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.dy \Big).dx$.

Admirez les **p**arts des **d**îneurs. Treize à **t**able et pleins de **f**ric. Elle bou**d**e le **ph**are. Ce **m**alus **f**ou mérite-t-il une **t**elle pu**b** ? Ils aiment les cr**û**s coûteux. Ils **d**înent avec des ra**p**aces. **Cu**vées de **prix**. C'est un expert en **g**affes avec **p**rojet. Ils aiment les **m**enus **c**achés. Des **s**inistres **m**astiquent.

∘22∘ ♡ Prolongez par continuité en 0 et en 1 $x \longmapsto \dfrac{x - 1}{\ln(x)}$.

♡ En considérant comme valide le théorème de Fubini ($\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \Big(\int_{y=c}^{y=d} f(x, y).dy \Big).dx = \int_{y=c}^{y=d} \Big(\int_{x=a}^{x=b} f(x, y).dx \Big).dy$),
montrez : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x - 1}{\ln(x)}.dx = \ln(2)$ (on pourra faire intervenir l'application $(x,\ y) \longmapsto x^y$ sur $[0,\ 1]$).

Calculez pour a et b positifs $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)}.dx$ après avoir prolongée en 0 et en 1 l'application sous le signe somme.

∘23∘ ♣ On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez son déterminant puis son inverse *(pensez à la voir comme matrice d'un changement de base)*.
Calculez $det(A + I_6)$.
♣ Quelles valeurs peut prendre $\det(A + I_6)$ quand A décrit l'ensemble des permutations de taille 6 ?
♣♠ Même question en taille n.

∘24∘ ♡ Calculez le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *(argument géométrique sur des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ « pas si* *nombreux »).*

∘25∘ Pouvez vous utiliser le même vecteur $\overrightarrow{a}$ pour compléter à la fois $(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})$ et $(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}-5.\overrightarrow{j}+3.\overrightarrow{k})$ en bases de $(\mathbb{R}^3,+,.)$?
Pouvez vous utiliser le même vecteur $\overrightarrow{b}$ pour compléter à la fois $(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})$ et $(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}-5.\overrightarrow{j}+3.\overrightarrow{k})$ en familles liées de $(\mathbb{R}^3,+,.)$?

∘26∘ ♡ Déterminant de Menger. Montrez que $\begin{vmatrix} AB^2 & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} & AC^2 \end{vmatrix}/4$ est le carré de l'aire du triangle *(indication : $\det(M.{}^tM)$).*
Montrez que $\begin{vmatrix} AB^2 & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} & AC^2 & \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} & \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} & AD^2 \end{vmatrix}/36$ est le carré du volume du tétraèdre $(A,\ B,\ C,\ D)$. *Indication :* $\det(M)^2=\det({}^tM.M)$.

∘27∘ Une matrice est un carré vraiment magique si la somme des termes de chacune de ses lignes est égale à la somme des termes de chacune de ses colonnes, ainsi que la somme des termes de ses deux diagonales *(exemple* $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ *; à vous d'en trouver d'autres)*. Donnez une base de l'ensemble des carrés vraiment magiques de taille 1.
♡ Donnez une base de l'ensemble des carrés vraiment magiques de taille 2.
♡ Donnez une base de l'ensemble des carrés vraiment magiques de taille 3.
♡ Donnez la dimension de l'ensemble des carrés vraiment magiques de taille 4.
Donnez la dimension de l'ensemble des carrés vraiment magiques et antisymétriques *($\forall(i,\ k),\ a_i^k=-a_k^i$)* de taille n.
Donnez la dimension de l'ensemble des carrés vraiment magiques et symétriques *($\forall(i,\ k),\ a_i^k=a_k^i$)* de taille n.

Ce gant est assoupLi. Il est PRémuni face aux Doutes. Sans Pèze, il manque de Bouffe. Les vieux Masques évitent la FLotte. Pas de Bouffe, pas de Tabac. On manque de CHaises pour attirer les corBeaux. Ne faites pas craMer votre CHambre. Ces SPoliés sont pleins de Germes. J'ai CHIné un gros CALIbre. Les Bars s'enDettente.

∘28∘ ♡ On définit $P(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & x^3 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & x^4 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & x^5 \end{vmatrix}$. Calculez la petite différence $P(x+1)-P(x)$.

∘29∘ ♡ Un vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ à la fois sur la base $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$ mais aussi sur la base $(3.\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j},\ b.\overrightarrow{i}+3.\overrightarrow{j})$. Retrouvez a et b. Que constatez vous alors pour le vecteur $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ quand vous l'écrirez sur la nouvelle base ?
Les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{a}$ sur une base $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$, c'est le couple de réels $(\alpha,\ \beta)$ vérifiant $\overrightarrow{a}=\alpha.\overrightarrow{i}+\beta.\overrightarrow{j}$).

∘30∘ Montrez que pour tout vecteur $\overrightarrow{a}$ du plan, il existe un vecteur $\overrightarrow{\alpha}$ vérifiant $\forall\overrightarrow{b}\in\mathbb{R}^2$, $\det(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})=\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{b}$. Montrez qu'il est orthogonal à $\overrightarrow{a}$, de même norme. On pourrait le noter $\wedge(\overrightarrow{a})$. Déterminez $\wedge(\wedge(\overrightarrow{a}))$.
Montrez que pour tout triplet $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, il existe un vecteur $\wedge(\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d})$ vérifiant $\forall\overrightarrow{a}$, $\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d})=\overrightarrow{a}.(\wedge(\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d}))$.

∘31∘ ♡ a, b et c sont trois complexes distincts. Montrez que $\delta(x)$ est une fonction du premier degré en x *(pensez à combiner les colonnes)*. Calculez sa valeur pour x égal à $-b$, puis pour x égal à $-c$. Calculez Δ_5. Écrivez un script **Python** qui prend en entrée trois réels a, b, c et un entier n et retourne la matrice de cette forme en taille n.

$$\delta(x)=\begin{vmatrix} a+x & b+x & b+x & b+x \\ c+x & a+x & b+x & b+x \\ c+x & c+x & a+x & b+x \\ c+x & c+x & c+x & a+x \end{vmatrix},\ \Delta_5=\begin{vmatrix} a & b & b & b & b \\ c & a & b & b & b \\ c & c & a & b & b \\ c & c & c & a & b \\ c & c & c & c & a \end{vmatrix}.$$

∘32∘ ♡ Complétez ce qui manque : $\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ \end{pmatrix}$.

∘33∘ ♠ Comparez $\det(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c},\ \overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b})$ et $\det(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$ quand $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ *(une démonstration pourra utiliser la formule du double produit vectoriel)*.

∘34∘ ♡ Résolvez $(\overrightarrow{i} + ♣.\overrightarrow{j} + \diamondsuit.\overrightarrow{k}) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{j} + 3.\overrightarrow{k}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ sachant que $\overrightarrow{i} + 3.\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ est une des solutions.
Existe-t-il une solution dont la composante suivant $\overrightarrow{j}$ est nulle ?

∘35∘ ♡ Comparez $X \longmapsto A.X$ et $\overrightarrow{u} \longmapsto \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.
En étudiant $A.B.X$, retrouvez la formule du double produit vectoriel.

∘36∘ On donne dans $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Résolvez le système d'équations $\left\{ \begin{array}{ccccc} \overrightarrow{u} & \wedge & \overrightarrow{a} & = & -\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{u} & \wedge & \overrightarrow{b} & = & 2.\overrightarrow{c} \end{array} \right.$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$.

∘37∘ ♡ $\overrightarrow{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \\ \\ \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} \begin{pmatrix} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Retrouvez les coefficients qui manquent sachant que $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$ est liée par la relation $2.\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$.

∘38∘ ♡ On donne la formule du double produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$:
$(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{a}$ pour tout triplet $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$ de $\mathbb{R}^3$
Vérifiez la pour des triplets de la base canonique comme $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k})$, $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i})$, $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{j})$.
Vérifiez que le vecteur du membre de droite est bien orthogonal à $\overrightarrow{c}$.
Vérifiez que le vecteur du membre de droite est bien orthogonal à tout vecteur orthogonal à $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.
Démontrez la formule si vous en avez le courage avec neuf coefficients pour les composantes de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ *(si cette partie de l'exercice vous plait, ne m'adressez plus la parole)*.
Comparez $(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c})$.

∘39∘ ♡ Calculez $(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c} + (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) \wedge \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}) \wedge \overrightarrow{b}$.

Montrez que l'équation $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ n'a pas de solution.
Montrez que l'équation $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ a une infinité de solutions.

On se donne $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ et on veut résoudre l'équation $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{b}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$. Montrez qu'il faut déjà que $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ soient orthogonaux.

On suppose à présent $\overrightarrow{a}$ orthogonal à $\overrightarrow{b}$. Montrez que $\dfrac{\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|^2}$ *(noté $\overrightarrow{u_0}$)* est une solution de l'équation *(utilisez ici la formule du double produit vectoriel)*.
Montrez que $\overrightarrow{u}$ est solution si et seulement si $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u_0}$ est colinéaire à $\overrightarrow{a}$. Donnez toutes les solutions de l'équation. *(Quelle est celle dont la norme est la plus courte ?)*

∘40∘ ♡ Complétez $(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$ en base de $\mathbb{R}^3$ sachant que sur cette base, $\overrightarrow{i}$ a pour composantes $(1, 0, 1)$ et que $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ a les mêmes composantes sur cette base que sur la base canonique.