LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 20+14 février
M.P.S.I.2

2022 2023

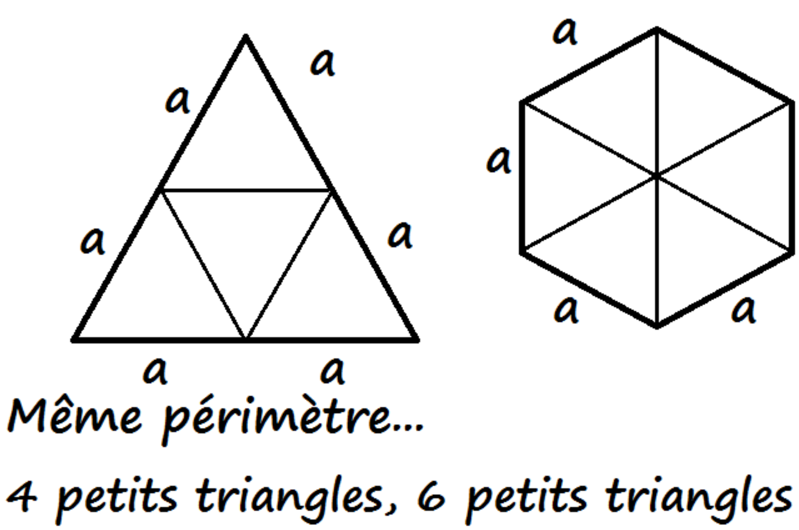
TD20

∘0∘ ♡ Dérivez cette application (comptez bien) $(x \longmapsto \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ x & 2 & 3 & 1 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix})'$.

$(x \longmapsto \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ x & 2 & 3 & 1 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix})'$ est déjà une dérivée *(la dérivée première d'un polynôme en x)*. Il faut encore dériver. On en est à la dérivée seconde. Il ne reste rien. Sauf si la fonction initiale est un polynôme de degré 2. Et c'est le cas, il y a un terme en x^2, issu par exemple de $\begin{vmatrix} & & 4 & \\ x & & & \\ & x & & \\ & & & 1 \end{vmatrix}$.

Pour avoir un terme de degré 2 il faut déjà mettre un x quand on développe par rapport à la première colonne : $-x.\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ & & \\ x & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + autres$. Et il faut mettre encore un x en redévéloppant : $-x.(-x)$. $\begin{vmatrix} & 4 & 5 \\ & & \\ * & & \\ & 2 & 1 \end{vmatrix}$. Il y a finalement deux termes en x^2 dans le déterminant, avec coefficient total $4 - 10$. On dérive deux fois ce $(-6.x)^2$ et on a $\boxed{-12}$
Si vous avez perdu du termes, vous avez dérivé deux fois $x \longmapsto -6.x^2 + 12.x - 8$.

∘1∘ Un triangle équilatéral et un hexagone régulier ont le même périmètre ; dans quel rapport sont leurs aires ?



Un dessin vaut mieux qu'un long discours.
Rapport : six contre quatre.

∘2∘ Donnez le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, puis celui de son inverse.

Avec trace, déterminant et trace de la comatrice, on trouve $X^3 - 4.X^2 - X + 4$.

On peut calculer son inverse *(déterminant non nul)*, trouver sa trace, son déterminant [1] et retrouver même $X^3 - \frac{1}{4}.X^2 + X - \frac{1}{4}$.

Mais on peut l'avoir sans se fatiguer.

1. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, la trace de A^{-1} est celle de $\frac{1}{\det(A)}.Com(A)$, on la connait déjà

La définition est $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda.I_3 - A)$.
Et on veut $\chi_{A^{-1}}(\lambda)$ c'est à dire $\det(\lambda.I_3 - A^{-1})$.
Et là, on ruse : $\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) = \det(\lambda.A.A^{-1} - A^{-1})$

$$\begin{aligned}
\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) &= \det((\lambda.A - I_3).A^{-1}) \\
\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) &= \det(\lambda.A - I_3).\det(A^{-1}) \\
\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) &= \det\left(\lambda.(A - \frac{1}{\lambda}.I_3)\right).\det(A^{-1}) \\
\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) &= \lambda^3.\det\left(A - \frac{1}{\lambda}.I_3\right).\det(A^{-1}) \\
\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) &= -\lambda^3.\det\left(\frac{1}{\lambda}.I_3 - A\right).\det(A^{-1}) \\
\det(\lambda.I_3 - A^{-1}) &= -\lambda^3.\det(A^{-1}).\chi_A\left(\frac{1}{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

On vérifie ici :

$$-\lambda^3.\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{\lambda^3} - 4.\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} - 4\right)$$

Tout ça pour ça.

On peut aussi dire que les racines de $\chi_{A^{-1}}$ sont les inverses des racines de χ_A.
En effet, les termes de la diagonale de D^{-1} sont les inverses des termes de la diagonale de D *(en ayant posé $AP.D.P^{-1}$ et donc $A^{-1} = P.D^{-1}.P$).*

◦3◦

Montrez que l'implication suivante est une bêtise :
($A.U = B.U$ et $A \neq B$) $\Rightarrow$ $U = 0_n$ (A et B sont des matrices carrées, de taille n sur n et U est un vecteur colonne de taille n).

La formule $A.U = B.U$ donne $(A - B).U = 0_n$.
Mais si $A - B$ n'est pas inversible, on peut justement trouver au moins un vecteur U non nul vérifiant ceci !

◦4◦

De même qu'on peut développer un déterminant par rapport à une colonne faite de n termes avec chacun son cofacteur, il existe une formule où l'on développe par rapport à deux colonnes, somme de termes du type "déterminant de taille 2 fois déterminant de taille $n-2$". Combien de termes de ce type ?
Quel est le signe du terme $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}$ dans le déterminant de taille 5 ?

Cette formule, vous la connaissez en taille 3 :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} & & c \\ & & \\ & & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ & \\ a'' & b'' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} & & \\ & & c' \\ & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \\ & \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & c'' \end{vmatrix}$$

(je n'ai pas envisagé la taille 2).

Dans le déterminant de taille n il y a $n!$ termes.
dans un déterminant de taille 2 il y a deux termes, dans un déterminant de taille $(n-2)$ il y en a $(n-2)!$.
Dans le produit d'un déterminant de taille 2 multiplié par un déterminant de taille $n-2$ il y a $2.(n-2)!$ termes.

Si il n'y a pas de termes en trop qui se simplifient mutuellement, dans k produits « déterminant de taille 2 fois déterminant de taille $n-2$ » il y a $k.2.(n-2)!$ termes.

On en veut $n!$ au total ?

Prenons $2.k.(n-2)! = n!$ et déterminons

$$k = \frac{n!}{2.(n-2)!} = \frac{n.(n-1)}{2}$$

on constate que c'est un entier.

Imaginons le calcul de $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^1 & a_5^2 & a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}$ contenant $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & & & \\ & & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_3^1 & a_3^2 & & & \\ & & a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ & & a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}$ qui est l'objet de notre énoncé.

Or, dans la grande formule du déterminant, on a justeremtdes termes issus de $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}$

que je vais écrire $\begin{matrix} a_1^1 & .a_3^2 \\ -a_3^1 & .a_1^2 \end{matrix} \times \begin{matrix} a_2^3.a_4^4.a_5^5 & - & a_2^3.a_5^4.a_4^5 \\ +a_4^3.a_5^4.a_2^5 & - & a_4^3.a_2^4.a_5^5 \\ +a_5^3.a_2^4.a_{5_4} & - & a_5^3.a_4^4.a_2^5 \end{matrix}$.

On y trouve par exemple $a_1^1.a_3^2.a_2^3.a_4^4.a_5^5$.
Ce terme est présent dans le grand déterminant avec coefficient -1 (un bicycle).

On y trouve par exemple $a_1^1.a_3^2.a_2^3.a_5^4.a_4^5$.
Ce terme est présent dans le grand déterminant avec coefficient $+1$ (deux bicycles).

Si on veut, on fait demême avec les dix autres termes.

On a donc $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^1 & a_5^2 & a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix} = \ldots - \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix} + \ldots$

◦5◦ Montrez que la famille $(X + X^2 + X^3 + X^4,\ 1 + X^2 + X^3 + X^4,\ 1 + X + X^3 + X^4,\ 1 + X + X^2 + X^4,\ 1 + X + X^2 + X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$. Explicitez les composantes des polynômes de la base canonique sur cette base. Quelle relation vérifient les composantes sur cette base des polynômes nuls en 1.

On l'exprime sur la base canonique et on calcule le déterminant :

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1^* \\ X^* \\ (X^2)^* \\ (X^3)^* \\ (X^4)^* \\ \end{array}$$

ce déterminant classique vaut 4 : en sommant toutes les colonnes sur la première
en sortant un facteur 4
puis en soustrayant cette colonne sur les autres

Il suffit d'inverser cette matrice.
Ou de dire

$$1 + X + X^2 + X^3 + X^4 = \frac{P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{4}$$

il ne reste qu'à soustraire : $1 = \dfrac{P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{4} - P_0$ et ainsi de suite.

Dans les deux cas, on aboutit à la matrice $\dfrac{1}{4}.\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Si vous avez cherché à inverser par les formules en cofacteurs, c'est que votre approche de l'algèbre linéaire est trop figée, manque de souplesse de changements de points de vue. Oubliez vos réflexes « j'apprends une méthode, et c'est la seule ». On n'est plus en train de passer le bac.

Que se passe-t-il pour un polynôme nul en 1 ?
Sur la base canonique, la somme de ses composants vaut 0 (puisque $P(1) = a + b + c + d + e$ si on a écrit $P(X) = a + b.X + c.X^é + d.X^3 + e.X^4$.
Mais sur cette base ?
Compléter...

◦6◦ $B = (\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\-1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}), C = (\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\-2\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1 \end{pmatrix}), D = (\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\3 \end{pmatrix})$ Un élève dit que B est une base du sous-espace d'équation $x+y+z=t$ dans $\mathbb{R}^4$. Il dit ensuite que C est une base du sous-espace d'équation $2.x+y=t$. Il déduit que l'intersection a pour base D. Trouvez l'erreur.

C'est vrai, B est de dimension 3 dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$. C'est $Vect(\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix})$ en écrivant ses vecteurs sous la forme $\begin{pmatrix} x\\y\\z\\x+y+z \end{pmatrix}$.

Mais toute autre famille libre de trois vecteurs de B fait encore l'affaire. Et ici, c'est ce qu'on nous propose.

Sinon, on peut passer de ma base $(\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix})$ à la base $(\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\-1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix})$ par un changement inversible :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui dit $\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}$ et ainsi de suite.

On fait de même pour C qui est de dimension 3 aussi.

Certes le vecteur commun aux deux bases $\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\3 \end{pmatrix}$ est dans $C \cap D$. Mais il n'est pas le seul.

$C \cap D$ est de dimension 2.
Il faut donc deux vecteurs pour en avoir une base.
Sous la forme équation, on peut trouver ça. Sous la forme « base », on ne cherche pas forcément du bon côté.
$x+y+z=t$ et $2.x+y=t$
on a donc $t = 2.x+y$ et $z = x$ (équivalences).

On trouve que les vecteurs sont de la forme $\begin{pmatrix} x\\y\\x\\2.x+y \end{pmatrix}$.

On a une base : $(\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1 \end{pmatrix})$. Et n'engendre qu'une droite dans ce plan.

Les vecteurs communs à deux sous-espaces ne sont pas les vecteurs communs à deux bases. Ce sont les vecteurs qui se décomposent suivant les deux bases à la fois...

Vos Mi*ss* m'ont dé*ch*u. Ils cherchent des *t*aillis avec des *s*apins. Ma*r*ine fait bien *p*ire. Ils éva*c*uent l'é*l*u. C'est une bonne pause pour la Chine. Attention aux pi*r*es des *can*ailles (circulaire). Ne vous *b*attez plus, *t*aisez vous ! Il faut éliminer l'é*c*art des *d*us. Montrez moi vos p*en*sions, je suis cons*ul*tante. Ah, les *l*uttes des c*r*assses. Le traiteur *c*olorie ses *and*ouilles.

◦7◦ Calculez $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -x & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -x & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -x & 1\\ e & d & c & b & a-x \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1\\ b & -1 & 0 & 0 & 0\\ c & 0 & -1 & 0 & 0\\ d & 0 & 0 & -1 & 0\\ e & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. (non, pas de rapport)

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b & a-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x^2 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e+d.x & d & c & b & a-x \end{vmatrix}$$

calcul : $C_1 := C_1 + x.C_2$ pour éliminer le $-x$

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b & a-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ -x^3 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e+d.x+c.x^2 & d & c & b & a-x \end{vmatrix}$$

calcul : $C_1 := C_1 + x^2.C_3$ pour éliminer le $-x^2$
et ainsi de suite

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b & a-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ S & d & c & b & a-x \end{vmatrix}$$

en continuant $C_1 := C_1 + x^3.C_4 + x^4.C_5$
avec $S = e + d.x + c.x^2 + b.x^3 + (a-x).x^4$
Finalement, en développant ensuite par rapport à la colonne où il n'y a que s : $x^5 - (a.x^4 + b.x^3 + c.x^2 + d.x + e)$
car le cofacteur $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \end{vmatrix}$ vaut 1.
Et l'idée se généralise.

$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & -1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & -1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & -1 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & -1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & -1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & -1 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ avec $S = a+b+c+d+e$ en additionnant toutes les lignes sur la première.
Le déterminant vaut $(a+b+c+d+e)$.
On pouvait aussi développer par rapport à la première colonne et calculer chaque cofacteur, égal à $(-1)^{quelquechose}$ qui est compensé par le $(-1)^{i+k}$ de l'alternance de signes.

◦8◦

Le corps est $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 5, noté $\mathbb{F}_5$.
Montrez qu'il y 5 formes bilinéaires antisymétriques sur $(\mathbb{F}_5)^2$. .
5 formes trilinéaires antisymétriques sur $(\mathbb{F}_5)^3$
625 formes bilinéaires sur $(\mathbb{F}_5)^2$
125 formes bilinéaires antisymétriques sur $(\mathbb{F}_5)^3$
125 formes bilinéaires symétriques sur $(\mathbb{F}_5)^2$

Dans $(\mathbb{F}_5)^2$ il y a deux vecteurs de base, qu'on va noter $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ (c'est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$).
Une forme bilinéaire antisymétrique est totalement déterminée par la donné de $\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
C'est à dire par la donnée d'un nombre. Il y a cinq choix pour ce nombre (de 0 à 4).

De toutes façons, toutes les formes biinéaires antisymétriques sur $(\mathbb{F}_5)^2$ sont des multiples du déterminant.
Et le choix du facteur « multiple de » laisse cinq possibilités.

L'idée est la même pour les trilinéaires antisymétriques.
Elles sont toutes des multiples du déterminant. Et il suffit de déterminer le nombre $\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ pour trouver ϕ.
Ah oui, j'ai posé $\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On travaille sur $(\mathbb{F}_5)^2$. On a des couples de vecteurs de la forme $(a.\overrightarrow{i}+b.\overrightarrow{j},\ c.\overrightarrow{i}+d.\overrightarrow{j})$.
Par bilinéarité, une forme $\phi : (a.\overrightarrow{i}+b.\overrightarrow{j},\ c.\overrightarrow{i}+d.\overrightarrow{j}) \longmapsto \ldots$ est totalement déterminée si on se donne les quatre nombres

$\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i})$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})$
$\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j})$

Il n'y a aucune hypothèse de symétrie ou d'antisymétrie permettant de regrouper ou simplifier.

Il y a $5\times 5\times 5\times 5$ choix de ce quadruplet. Ceci fait bien 625.

Dès lors, $\phi : (a.\overrightarrow{i}+b.\overrightarrow{j},\ c.\overrightarrow{i}+d.\overrightarrow{j}) \longmapsto a.b.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i})+b.c.\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})+a.c.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})+b.d.\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j})$ est totalement déterminée.

Sur $(\mathbb{F}_5)^3$ on va avoir beaucoup de formes bilinéaires.

On doit choisir

$\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i})$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})$	$\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{i})$
$\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j})$	$\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{j})$
$\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k})$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$	$\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{k})$

.

Mais si la forme est antisymétrique, on n'a plus tant d'images à déterminer :

$\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i})$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})$	$\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{i})$
$\ominus$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j})$	$\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{j})$
$\ominus$	$\ominus$	$\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{k})$

Ah, j'oubliais, antisymétrique implique alternée :

0	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})$	$\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{i})$
$\ominus$	0	$\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{j})$
$\ominus$	$\ominus$	0

Trois nombres à déterminer, 5^3 tableaux possibles.

Pour les bilinéaires symétriques sur $(\mathbb{F}_5)^2$,on doit choisir

$\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i})$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})$
$\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j})$

Et par symétrie,

$\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i})$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})$
	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j})$

suffit.

∘9∘ ♡ On pose : $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$. On pose $C_A=\{M\in M_2(\mathbb{R})\mid A.M=M.A\}$. Montrez que C_A contient toutes les puissances de A. Montrez que $(I_2,\ A)$ est une base de C_A.

On prend dans le rôle de M une matrice de la forme A^k. On vérifie : $A.A^k=A^k.A$. Oui, car la multiplication matricielle est associative.

On résout
$$\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$$

A priori, quatre équations, quatre inconnues. On ne va guère avoir le choix. Mais très vite il ne reste que deux équations :

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & +2.c & & = & a & +3.b & & \\ & b & & +2.d & = & 2.a & +b & & \\ 3.a & & +c & & = & & & c & +3.d \\ & 3.b & & +d & = & & & 2.c & +d \end{array}$$

donne juste $a=d$ et $3.b=2.c$.

Remarque : *Sur quatre équations, il n'en reste que deux. Le système est très dégénéré.*
Mais c'est normal, il y a des informations inutiles, du fait même que $Tr(A.M)=Tr(M.A)$ et aussi $\det(A.M)=\det(M.A)$.
On sait aussi qu'il doit y avoir beaucoup de solutions (si le système n'avait pas été dégénéré, il n'y en aurait eu qu'une) : les puissances de A.

Les matrices sont de la forme $\begin{pmatrix}a&b\\\frac{3}{2}.b&a\end{pmatrix}$.

On les écrit même $a.\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}0&1\\\frac{3}{2}&0\end{pmatrix}$ ce qui permet de dire que les deux matrices $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&1\\\frac{3}{2}&0\end{pmatrix}$

forment une base de notre espace vectoriel.[2]

Mais l'écriture $a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{b}{2}.\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ nous rapproche de la formule attendue.

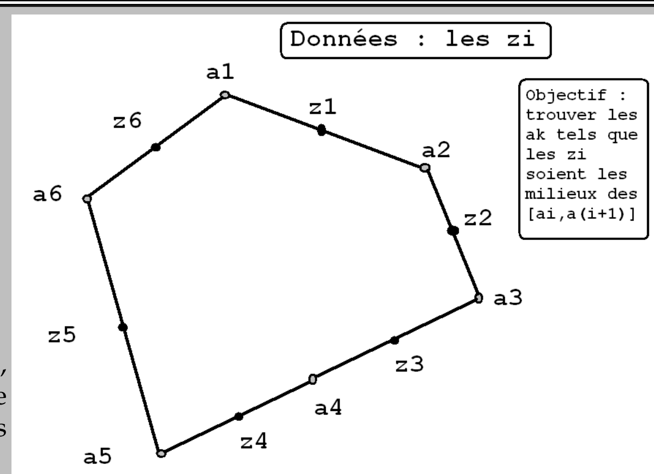
Et même $\left(a - \frac{b}{2}\right).\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{b}{2}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ pour avoir les deux matrices de l'énoncé.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est elle inversible ?

On se donne 9 points A_1 à A_9 dans le plan complexes, d'affixes z_1 à z_9. Montrez qu'il existe une unique famille

∘10∘ de points M_1 à M_9 tels que les A_k soient les milieux des côtés du polygone $(M_1, \ldots M_9)$.

A-t-on le même résultat pour dix points ?



$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, car son déterminant vaut 2.

Comment l'obtenir ? On soustrait la première ligne sur la seconde : $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

On soustrait la seconde sur la troisième : $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

On soustrait la troisième sur la quatrième : $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

On termine avec la quetrième sur la cinquième : $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

On développe par rapport à la dernière ligne $D = 2.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$

Et in calcule même son inverse si nécessaire

$$\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

---

2. base : tout élément de l'espace vectoriel se décompose d'une façon unique comme combinaison linéaire des éléments de la base ; par exemple $(1,\ i)$ est une base de $\mathbb{C}$

On note que sur la matrice de taille 4 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ le même algorithme conduit à un déterminant nul.

On généralise même • taille impaire : non nul,
• taille paire : nul

Notons z_1 à z_9 les affixes des points imposés.
Et on cherche des affixes de neuf points a_1 à a_9.
La condition « être le milieu de » devient $z_k = \dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$ (avec à la fin $z_9 = \dfrac{a_9 + a_1}{2}$).
Ceci se traduit par un système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}$$

mais de taille 9 sur 9.
Les données sont les z_k et les inconnues des a_k.
La matrice de taille 9 a aussi un déterminant non nul.
Le système a donc une unique solution.
Et je puis même vous indiquer la façon de la construire par « fausse position ».

En revanche en taille 10, le déterminant est nul.
Si les z_i sont mal choisis, il n'y a pas de solution.
Si ils sont bien choisis, il y en a une infinité.
Et on sait les construire.

Bref, l'exercice est loin d'être fini.
Et il illustre bien la notion de résolution de $M.U = B$: M inversible, une unique solution
M non inversible, B hors de l'image : pas de solution
B dans l'image : une infinité de solutions

Un vendangeur m'a véhiculé. Il shootait en priant. Les fées sont légion ! Le latiniste spécialiste de Crassus enquète beaucoup. Ils a des escargots lents (translation). Fidèles à Sion au présent (translation). La nausée est russe. J'ai croqué bien des galettes. Les phobies perturbent les ames. A-t-on des tenues pour caté ? Des belles hôtesses en France passent en montrant une belle assurance. L'arène pistée. Il n'a plus de foot, c'est pas un crado (translation) ! Les astronautes contrôlent l'orbite quand ils veulent. Vous aimez les rixes ? Plutôt céder !

∘11∘ ♡ Donnez une base de l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $2.x + y - z = 0$.

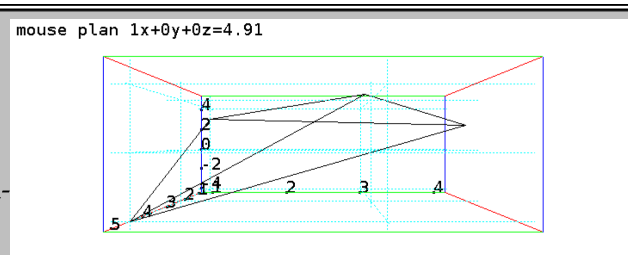
Ce sont des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2.x + y \end{pmatrix}$.

On les écrit $x.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ils se décomposent d'une façon unique à l'aide de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs forment une base de notre plan.

Plus simple que ça, tu meurs.
Bon, certes, on pouvait choisir au hasard deux vecteurs non colinéaires dans ce plan, mais avoyez que là, c'est fourni clef en main.

∘12∘



On donne $A(1,1,3)$, $B(2,3,5)$, $C(3,4,2)$, $D(5,1,4)$. Calculez l'aire de chacune des faces du tétraèdre.
Quelle est sa hauteur quand il est posé sur (A, B, C) ?

Les aires se calculent par la moitié de la norme du produit vectoriel.
Quant à la hauteur, on dit que le volume du parallélépipède est d'une part le déterminant
d'autre part le produit de l'aire de base par la hauteur.

∘13∘

Montrez que D est réel *(il vaut d'ailleurs 39, mais je ne vous recommande pas de le calculer, juste de prouver qu'il est réel)*.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1+i & 1-2.i & 3-i \\ 1-i & 2 & i & 2-i \\ 1+2.i & -i & 0 & 1+3.i \\ 3+i & 2+i & 1-3.i & 4 \end{vmatrix}$$

La matrice à coefficients complexes dont il faut calculer le déterminant a une particularité : quand on la transpose, on obtient son conjugué (les $a+i.b$ deviennent des $a-i.b$). Or, une matrice et sa transposée ont le même déterminant.
Si on décide de poser comme dans tous les sujets de concours $\overline{A}$ la matrice conjuguées de A , de terme général $\alpha_i^k = \overline{a_i^k}$, on a des formules faciles à prouver : $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, ou $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ (en écrivant $\overline{\sum_{j=1}^{n} a_i^j \times b_j^k} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_i^j \times b_j^k} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_i^j} \times \overline{b_j^k}$), mais aussi $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$. Il suffit en effet d'écrire

$$\overline{\sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)}} = \sum_{\sigma \in S_n} \overline{Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)}} = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).\overline{a_1^{\sigma(1)}} \dots \overline{a_n^{\sigma(n)}}$$

car la signature est un réel.
Fort de ce résultat, on écrit donc

$$\det(A) = \det({}^t A) = \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$$

Le déterminant est son propre conjugué ; il est réel.

∘14∘

Le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ (notée A) vaut 7 quel que soit a. Trouvez b.
Et donnez les coefficients de A^{-1} qui ne dépendant pas de a.

On calcule le déterminant de A ou du moins, on imagine qu'on le calcule *(dernière colonne)* :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{vmatrix} = a.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

La seule dépendance en a se fait par le facteur $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix}$ qui doit donc être nul.
On développe par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - b.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$b = 2$$

Maintenant qu'on connaît la valeur du déterminant, on inverse la matrice. Ah non, on imagine encore que l'on calcule son inverse.

Ce sont quatorze cofacteurs, comme $\begin{vmatrix} 1 & & 3 & 0 \\ & & & \\ 2 & & 1 & 3 \\ 1 & & 1 & a \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & \\ & & & \\ 2 & b & 1 & \\ 1 & 2 & 1 & \end{vmatrix}$.

On voit que dans le premier, il reste du a. Il ne fait donc pas partie des cofacteurs à calculer.
On voit dans le dernier qu'il n'y a plus de a. Et pour cause, on a effacé sa ligne et sa colonne.
Chacun des termes de la dernière colonne ou de la dernière ligne peut être calculé *(et devient un terme de la dernière ligne et de la dernière colonne, puisqu'il faut transposer)*.

On calcule donc $\begin{vmatrix} & 1 & 3 & 0 \\ & 2 & 5 & 2 \\ & 2 & 1 & 3 \\ & & & \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & & 3 & 0 \\ 2 & & 5 & 2 \\ 2 & & 1 & 3 \\ & & & \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 2 & 2 & & 2 \\ 2 & 2 & & 3 \\ & & & \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & \\ 2 & 2 & 5 & \\ 2 & 2 & 1 & \\ & & & \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & \\ 2 & 2 & 5 & \\ & & & \\ 1 & 2 & 1 & \end{vmatrix}$ et ainsi de suite. Et on n'oublie pas l'alternance de signes, ni la division par 7.

On aboutit à $\begin{pmatrix} & & & -7 \\ & & & 7 \\ & & & 0 \\ -8 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ qu'il faudra diviser encore par 7.

Mais il y a une surprise ou un bonus : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & & \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}$ ne dépend pas non plus de a ! Car a est face à $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ qui est nul.

On pourrait donc aboutir à $A^{-1} = \frac{1}{7}.\begin{pmatrix} & & & -7 \\ & & & 7 \\ -2 & 3 & -2 & 0 \\ -8 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *(et les derniers facteurs comme $24 - 8.a$ et $5.a - 15$ dépendant de a).*

◦15◦

♡ Résolvez $\vec{a} \wedge (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = (\vec{i} + \vec{j} + 2.\vec{k})$ d'inconnue vectorielle $\vec{a}$.

Pour résoudre $\vec{a} \wedge (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = (\vec{i} + \vec{j} + 2.\vec{k})$ d'inconnue vectorielle $\vec{a}$, le plus simple est d'en venir à un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc|} & -y & -z & = 1 \\ x & & +z & = 1 \\ x & -y & & = 2 \end{array} \right.$$

La première donne $y = 1 - z$, la seconde donne $x = 1 - z$ et la troisième confirme *(système compatible)*.

On trouve les solutions : $\boxed{S = \left\{ \begin{pmatrix} 1-z \\ 1-z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$ suivant la forme souhaitée *(description complète ou solution particulière plus homogènes)*.

Si vous avez rédigé en $\left\{ \begin{array}{cccc|} & -y & -z & = 1 \\ x & & +z & = 1 \\ x & -y & & = 2 \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ $(x = 1 - z$ *et* $y = 1 - z)$ *vous avez gardé vos réflexes de résolution par implication, et vous avez... perdu. En effet, on a tout aussi bien* $\left\{ \begin{array}{cccc|} & -y & -z & = 1 \\ x & & +z & = 1 \\ x & -y & & = 43.\sqrt{2} \end{array} \right.$ $\Rightarrow (x = 1 - z$ *et* $y = 1 - z)$ *puisque c'est juste une implication...*

◦16◦

$\vec{i} \wedge \vec{j} \wedge \vec{i} \wedge \vec{k}$ n'a pas de sens si on ne met pas de parenthèses *(ainsi, $(\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge (\vec{i} \wedge \vec{k})$ va en avoir)*. Combien de « valeurs » peut prendre ce vecteur suivant comment vous mettez les parenthèses ? *(base canonique)*

On peut mettre toutes les parenthèses que voici :

$\left((\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{i}\right) \wedge \vec{k}$	$\left(\vec{i} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{i})\right) \wedge \vec{k}$	$(\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge (\vec{i} \wedge \vec{k})$	$\vec{i} \wedge \left((\vec{j} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{k}\right)$	$\vec{i} \wedge \left(\vec{j} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{k})\right)$
$\left(\vec{k} \wedge \vec{i}\right) \wedge \vec{k}$	$\left(\vec{i} \wedge (-\vec{k})\right) \wedge \vec{k}$	$\vec{k} \wedge (-\vec{j})$	$\vec{i} \wedge \left((-\vec{k}) \wedge \vec{k}\right)$	$\vec{i} \wedge \left(\vec{j} \wedge (-\vec{j})\right)$
$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$	$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$	$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{0}$

Finalement, seulement deux vecteurs.

◦17◦

On va étudier le déterminant de $\begin{pmatrix} -b.c & b.c + b^2 & b.c + c^2 \\ a.c + a^2 & -a.c & a.c + c^2 \\ a.b + a^2 & a.b + b^2 & -a.b \end{pmatrix}$, et même généraliser, autrement qu'en développant comme un bourrin.

◇ 0 ◇

On se donne trois réels non tous nuls a, b et c. On pose alors $s = a + b + c$, $\sigma = a.b + a.c + b.c$, $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} s-a \\ s-b \\ s-c \end{pmatrix}$, puis $M = W.({}^tU)$. Calculez ${}^tU.W$ à l'aide de s et σ. Vérifiez que M est une matrice carrée, et montrez que $(M^2,\ M)$ est liée *(inutile d'en revenir aux neuf coefficients, c'est par associativité)*.

Sachant $U=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$, on a ${}^tU=(a\ b\ c)$ et ${}^tU.W=\begin{pmatrix} a & b & c\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s-a\\ s-b\\ s-c\end{pmatrix}=a.(s-a)+b.(s-b)+c.(s-c)$.
On trouve le réel $(a+b+c).s-a^2-b^2-c^2=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=2.(a.b+a.c+b.c)=2.\sigma$: $\boxed{{}^tU.W=2.\sigma}$

En revanche

$$M=W.{}^tU=\begin{pmatrix} s-a\\ s-b\\ s-c\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a.(s-a) & b.(s-a) & c.(s-a)\\ a.(s-b) & b.(s-b) & c.(s-b)\\ a.(s-c) & b.(s-c) & c.(s-c)\end{pmatrix}$$

c'est une matrice carrée de taille 3 sur 3.
Pour montrer que $(M,\ M^2)$ est liée, il faut et il suffit de montrer que M^2 est un multiple de M.
On effectue : $M^2=M.M=\begin{pmatrix} s-a\\ s-b\\ s-c\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b & c\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s-a\\ s-b\\ s-c\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b & c\end{pmatrix}$.

Le terme du milieu a été calculé, c'est $2.\sigma$: $M^2=W.(2.\sigma).{}^tU=(2.\sigma).W.{}^tU=2.\sigma.M$: $\boxed{M^2=2.\sigma.M}$

◊ 1 ◊ On pose $K=\{X\in\mathbb{R}^3\mid {}^tU.X=0\}$. Montrez que K est un espace vectoriel et donnez sa dimension.

On pose $K=\{X\in\mathbb{R}^3\mid {}^tU.X=0\}$. C'est une partie de $\mathbb{R}^3$ contenant le vecteur nul : ${}^tU.0_3=0_3$.
On prend X et Y dans cet ensemble, puis λ et μ dans $\mathbb{R}$: ${}^tU.(\lambda.X+\mu.Y)=\lambda.{}^tU.X+\mu.{}^tU.Y=0$.
On pousse le calcul jusqu'au bout pour avoir une base : $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in K\Leftrightarrow a.x+b.y+c.z=0$. on a des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x\\ y\\ -(a.x+b.y)/c\end{pmatrix}$ par exemple, et on dispose d'une base $\left(\begin{pmatrix} c\\ 0\\ -a\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0\\ c\\ -b\end{pmatrix}\right)$. La dimension est bien 2.

◊ 2 ◊ On pose $H=\{X\in\mathbb{R}^3\mid M.X=2.\sigma.X\}$. Montrez que H est un espace vectoriel contenant $\begin{pmatrix} b+c\\ a+c\\ a+b\end{pmatrix}$.

On pose $H=\{X\in\mathbb{R}^3\mid M.X=2.\sigma.X\}$. On a encore une partie de $\mathbb{R}^3$ contenant le vecteur nul.
On montre la stabilité en prenant deux hypothèses : $M.X=2.\sigma.X$ et $M.Y=2.\sigma.Y$ et en les combinant $M.(\lambda.X+\mu.Y)=2.\sigma.(\lambda.X+\mu.Y)$.
On nous propose un vecteur, il suffit de le vérifier

$$\begin{pmatrix} a.(b+c) & b.(b+c) & c.(b+c)\\ a.(a+c) & b.(a+c) & c.(a+c)\\ a.(a+b) & b.(a+b) & c.(a+b)\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b+c\\ a+c\\ a+b\end{pmatrix}=2.(a.b+a.c+b.c).\begin{pmatrix} b+c\\ a+c\\ a+b\end{pmatrix}$$

Les trois lignes répondent au même type de calcul :

$$a.(b+c)^2+b.(b+c).(a+c)+c.(b+c).(a+b)=(b+c).\Big(a.(b+c)+b.(a+c)+c.(a+b)\Big)=(b+c).(2.a.b+2.a.c+2.b.c)$$

Les deux autres lignes sont sur le même modèle.

H est donc au moins de dimension 1 puisqu'on y trouve au moins un vecteur non nul.
Mais si finalement il était nul ? On ne pourrait pas conclure si vite.
Quoi qu'il en soit, $b+c=a+c=a+b=0$ donne vite $a=b=c=0$ car chaque réel est son propre opposé.
On rejette donc cette possibilité.
H est bien de dimension 1.

◊ 3 ◊ Démontrez $H\cap K=\{0_3\}$.Calculez $\dim(H)$. Déduisez $H\oplus K=\mathbb{R}^3$.

Comme demandé, on détermine $H\cap K$. On sait qu'on y trouve le vecteur nul, puisque chaque sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ le contient.
Ce qui manque est donc l'autre sens : il n'y a que le vecteur nul.
Prenons U dans H et K à la fois : ${}^tU.X=0$ et $M.X=2.\sigma.X$ c'est à dire $(W.{}^tU).X=2.\sigma.X$.
Mais par associativité, en reportant :

$$(W.{}^tU).X=W.({}^tU.X)=W.O=0_3$$

On aboutit à ${}^tU.X = 0$ et $2.\sigma.X = 0$.
Comme σ est non nul, on trouve $X = 0_3$.

Comme l'intersection de H et K est réduite à $\overrightarrow{0}$, on a $\dim(H \cap K) = 0$.
On reporte dans la formule de Grassmann :

$$\dim(H + K) = \dim(H) + \dim(K) - 0 = 2 + \dim(K)$$

Comme c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, sa dimension ne peut dépasser 3.
C'est donc que K est au plus de dimension 1.

Mais comme on a déjà prouvé qu'il est de dimension au moins égale à 1, le voilà de dimension 1.
Et le vecteur $\begin{pmatrix} b+c \\ a+c \\ a+b \end{pmatrix}$ est une base de K.

Ayant à la fois $\dim(H + K) = 3$ et l'inclusion $H + K \subset \mathbb{R}^3$, on a sans effort $H + K = \mathbb{R}^3$.
Comme l'intersection est réduite à $\overrightarrow{0}$, la somme est directe : $H \oplus K = \mathbb{R}^3$.

$\diamond$ 4 $\diamond$ Déduisez que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.\sigma \end{pmatrix}$.

Comme on a $H \oplus K = \mathbb{R}^3$, on sait qu'en mettant bout à bout une base de H et une base de k, on a une base de $\mathbb{R}^3$.
Prenons deux vecteurs formant une base de H et un vecteur formant une base de K et faisons en une matrice.
Cette matrice (pas exemple $\begin{pmatrix} -b & -c & b+c \\ a & 0 & a+c \\ 0 & a & a+b \end{pmatrix}$) est donc inversible (base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$).
Notons la P et calculons $M.P$ en calculant les trois colonnes les unes après les autres.
$M.C_1 = 0_3$ car C_1 est dans H
On a donc $M.P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2.\sigma.(b+c) \\ 0 & 0 & 2.\sigma.(a+c) \\ 0 & 0 & 2.\sigma.(a+b) \end{pmatrix}$.
Mais on a aussi $P.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2.\sigma.(b+c) \\ 0 & 0 & 2.\sigma.(a+c) \\ 0 & 0 & 2.\sigma.(a+b) \end{pmatrix}$.
On a obtenu $M.P = P.D$ avec P inversible. C'est la définition de « *matrices semblables* ».

En fait, H et K s'appellent sous-espaces propres de M associés aux deux valeurs propres 0 et $2.\sigma$.
La formule $H \oplus K = \mathbb{R}^3$ raconte la diagonalisation de M, avec valeurs propres 0 (double) et $2.\sigma$.

$\diamond$ 5 $\diamond$ Calculez alors $\det(M)$ et $\det(M - \sigma.I_3)$. Concluez.

Comme M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.\sigma \end{pmatrix}$, elle a le même déterminant : $\det(M) = 0$.
On le savait déjà, puisqu'il existait des vecteurs X non nuls vérifiant $M.X = 0_3$ *(ce qui est incompatible avec l'existence de M^{-1}).*

Mais en écrivant $M = P.D.P^{-1}$ on a aussi $M - \sigma.I_3 = P.D.P^{-1} - \sigma.P.I_3.P^{-1} = P.(D - \sigma.I_3).P^{-1}$.
On passe au déterminant :

$$\det(M - \sigma.I_3) = \det(\begin{pmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}) = \sigma^3$$

Mais qui est $M - \sigma.I_3$ quand on revient aux coefficients ?

$$\begin{pmatrix} a.(b+c) & b.(b+c) & c.(b+c) \\ a.(a+c) & b.(a+c) & c.(a+c) \\ a.(a+b) & b.(a+b) & c.(a+b) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a.b+a.c+b.c & 0 & 0 \\ 0 & a.b+a.c+b.c & 0 \\ 0 & 0 & a.b+a.c+b.c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bc & b.(b+c) & c.(b+c) \\ a.(a+c) & -a.c & c.(a+c) \\ a.(a+b) & b.(a+b) & -a.b \end{pmatrix}$$

C'est bien la matrice de l'énoncé, et son déterminant vaut bien σ^3.

Le sujet d'oral de Centrale faisait conjecturer le résultat en créant la matrice, calculant son déterminant pour des valeurs de a, bet c particulières.

Ensuite, il montrait des choses un peu plus générales sur des matrices $W.^tU$ avec des sous-espaces supplémentaires comme H et K.
Évidemment, les élèves de Spé ont quelques théorèmes de plus que vous sur la diagonalisation des matrices.

◇ 6 ◇ Complétez et justifiez

$$\begin{vmatrix} & b^2+b.c+b.d & c^2+b.c+c.d & b^2+b.d+c.d \\ a^2+a.c+a.d & -a.c-a.d-c.d & & d^2+a.d+c.d \\ a^2+a.b+a.d & b^2+a.b+b.d & -a.b-a.d-b.d & \\ a^2+a.b+a.c & & c^2+a.c+b.c & -a.b-a.c-b.c \end{vmatrix} = -(a.b+a.c+\ldots+b.d+c.d)^4.$$

En suivant une démarche similaire avec des matrices plus grandes et quatre réels, un vecteur w et un vecteur u, des matrices $\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&2.\sigma \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sigma&0&0&0\\0&-\sigma&0&0\\0&0&-\sigma&0\\0&0&0&\sigma \end{pmatrix}$, on arrive à prouver

$$\begin{vmatrix} -b.c-b.d-c.d & b^2+b.c+b.d & c^2+b.c+c.d & b^2+b.d+c.d \\ a^2+a.c+a.d & -a.c-a.d-c.d & c^2+c.a+c.d & d^2+a.d+c.d \\ a^2+a.b+a.d & b^2+a.b+b.d & -a.b-a.d-b.d & d^2+d.a+d.b \\ a^2+a.b+a.c & b^2+b.a+b.c & c^2+a.c+b.c & -a.b-a.c-b.c \end{vmatrix} = -(a.b+a.c+a.d+b.c+b.d+c.d)^4$$

∘18∘

```
def truc(n) :
....A = []
....for i in range(n) :
........L = []
........for k in range(n) :
............L.append(abs(i-k))
........A.append(L)
....return(A)
```

Calculez le déterminant de `Truc(n)` pour n de 0 à 6.

On crée ligne à ligne une matrice, de terme général $|i-k|$ si i est l'indice de ligne et k celui de colonne *(certes, ça ne change rien, la matrice est symétrique)*.
Les premières matrices sont simples en rappelant que la matrice a vide a pour déterminant 1 :

0	1	2	3	4	5
$()$	$\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&0&1&2\\2&1&0&1\\3&2&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&2&3&4\\1&0&1&2&3\\2&1&0&1&2\\3&2&1&0&1\\4&3&2&1&0\end{pmatrix}$
1	0	-1	4	-12	32

Et en taille 6, on trouve -80. Et les suivants, à la machine : 192, -448, 1024 et -2304.

$$\begin{vmatrix} 0&1&2&3&4\\1&0&1&2&3\\2&1&0&1&2\\3&2&1&0&1\\4&3&2&1&0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0&1&2&3&4\\1&0&1&2&3\\0&1&-2&-3&-4\\0&2&-2&-6&-8\\0&3&-2&-7&-12 \end{vmatrix} \begin{matrix} L0\\L1\\L2-2.L1\\L3-3.L1\\L4-4.L1 \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1&2&3&4\\1&-2&-3&-4\\2&-2&-6&-8\\3&-2&-7&-12 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0&1&2&3&4\\1&0&1&2&3\\2&1&0&1&2\\3&2&1&0&1\\4&3&2&1&0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1&2&3&4\\2&0&0&0\\3&0&-3&-4\\4&0&-4&-8 \end{vmatrix} \begin{matrix} L0\\L1+L0\\L2+L0\\L3+L0 \end{matrix} = +2.\begin{vmatrix} 2&3&4\\0&-3&-4\\0&-4&-8 \end{vmatrix} = 4.\begin{vmatrix} -3&-4\\-4&-8 \end{vmatrix} = 32$$

Il n'y a pas de règle facile à deviner pour généraliser.

L'inflation irrite les *ma*bouls. La gau*ch*e au bou*l*ot. Je n'apprécie pas le *g*éant de taver*n*e. In*tr*us de Bel*g*ique. Les p*r*ofs gèlent dans les f*a*cs. L'*é*quipe exalte les *p*opulations. L'abî*m*e est dans le con*t*enu. Ce vétérinaire a *ann*ulé l'*en*caisse. Difficile de *s'en* sortir si on *re*cule. Les footbaleurs ont montré leur f*o*rce dans le p*é*no.

∘19∘ Peut on choisir a, b et c réels pour que $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$ admette pour spectre $\{0,\ 1,\ 2\}$?

On calcule de deux façons les trois coefficients du polynôme caractéristique :

Trace	$a+b+c$	$=0+1+2$
Mineurs	$a.b-1+a.c-1+b.c-1$	$=0.1+0.2+1.2$
Déterminant	$a.b.c+1+1-a-b-c$	$=0.1.2$

On résout donc $\begin{array}{ccccc} a & +b & +c & = & 3 \\ a.b & +a.c & +b.c & = & 5 \\ a & \times b & \times c & = & 1 \end{array}$.

L'ami Viète dit alors : $X^3-3.X^2+5.X-1$.
Et ce polynôme n'a qu'une racine réelle.
Sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et reste de signe constant.
C'est donc impossible.

En revanche, avec a, b et c complexes c'est possible.
Et il y a six matrices (permutation des six nombres).
Mais ne me demandez pas les valeurs.

∘20∘ ♡ Si A est une matrice à coefficients complexes a_i^k, on note $\overline{A}$ la matrice de terme général $\overline{a_i^k}$ *(conjugué)*. Montrez : $\det(\overline{A})=\overline{\det(A)}$. Montrez que $Tr({}^tA.\overline{A})$ est un réel positif. Que pouvez vous dire si il est nul ?

On transforme par exemple $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$.

On calcule $\det(\overline{A})=\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\overline{a_1^{\sigma(1)}}.\overline{a_2^{\sigma(2)}}\dots\overline{a_n^{\sigma(n)}}$ (définition)

$\det(\overline{A})=\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\overline{a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}\dots a_n^{\sigma(n)}}$ (conjugué du produit)

$\det(\overline{A})=\sum_{\sigma\in S_n} \overline{Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}\dots a_n^{\sigma(n)}}$ (la signature est réelle, elle est son propre conjugué)

$\det(\overline{A})=\overline{\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}\dots a_n^{\sigma(n)}}$ (conjugué de la somme)

$\det(\overline{A})=\overline{\det(A)}$

Le terme général de ${}^tA.\overline{A}$ est $c_i^k=\sum_{j=1}^n \alpha_i^j.\overline{a_j^k}$ où α_i^j est le terme de ligne i et colonne j de ${}^tA$.

Par définition de la transposée : $c_i^k=\sum_{j=1}^n a_j^i.\overline{a_j^k}$.

Sur la diagonale : $c_i^i=\sum_{j=1}^n a_j^i.\overline{a_j^i}$

Par calcul dans $\mathbb{C}$: $c_i^i=\sum_{j=1}^n |a_j^i|^2$.

On somme pour avoir la trace : $Tr({}^tA.\overline{A})=\sum_{i,j}|a_j^i|^2$ (n^2 termes).

C'est une somme de carrés de modules, c'est un réel, et ce réel est positif.

Si cette somme est nulle, alors chaque module carré est nul (encadrer $0\leqslant |a_p^q|^2\leqslant \sum_{i,j}|a_j^i|^2=0$ car c'est un des termes de la somme).
La matrice est nulle.

Pour saisir en petite taille : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a.\overline{a}+c.\overline{c} & \\ & b.\overline{b}+d.\overline{d} \end{pmatrix}$.

◦21◦ Soit A une matrice à coefficients entiers, dont les termes diagonaux sont impairs et les termes hors de la diagonale pairs *(ceux ci peuvent donc être nuls)*. Montrez que le déterminant de A est impair. Déduisez que A est inversible.
Vous pouvez commencer par traiter l'exercice en taille 2 ou 3.
Mais sinon, pensez à travailler modulo 2, dès la matrice elle même...

La taille n'est pas précisée. Appelons la n.
On calcule $\det(A)$ modulo 2. C'est

$$\Big(\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}\dots a_n^{\sigma(n)}\Big)\ mod\ 2$$

Mais par compatibilité des sommes modulo 2, c'est aussi

$$\sum_{\sigma\in S_n}\Big(Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}\dots a_n^{\sigma(n)}\ mod\ 2\Big)$$

Comme les signatures valent 1 ou -1 modulo 2, on peut aussi les éliminer :

$$\det(A)\ mod\ 2 = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\Big(a_1^{\sigma(1)}\dots a_n^{\sigma(n)}\ mod\ 2\Big)$$

Et par compatibilité des produits, c'est

$$\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\alpha_1^{\sigma(1)}\dots \alpha_n^{\sigma(n)}$$

où les α_i^k sont les a_i^k modulo 2.

Bref, le déterminant de la matrice modulo 2 c'est le déterminant de la matrice modulo 2.

Pardon : « le déterminant de la matrice » modulo 2
c'est aussi le déterminant de « la matrice modulo 2 »

Et ici, la matrice modulo 2, c'est I_n. De déterminant 1.

Modulo 2, le déterminant vaut 1.
Il ne peut donc pas être nul.
La matrice est inversible.

Sinon, plus sobrement, on efface de $\det(A)$ tous les termes pairs.
Or, dès que σ est différente de Id, il y a dans $a_1^{\sigma(1)}\dots a_n^{\sigma(n)}$ au moins un coefficient pair (venant de « hors de la diagonale »).
Modulo 2, chacun de ces termes s'en va.
Il reste $\det(A) = \sum\limits_{\sigma=Id} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}\dots a_n^{\sigma(n)}$.
Et ce produit est impair.

◦22◦ ♡ a, b, c et d sont quatre réels. Calculez les déterminants de VanDerImmonde :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3\end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4\end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3\\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4\end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3\\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4\end{vmatrix}$$

Pensez à un déterminant de VanDerMonde, mais de taille 5 : $VdM(a,\ b,\ c,\ d,\ x)$.

On connaît la formule générale : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d & x\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3\\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4\end{vmatrix} = \begin{array}{cccc} (x-a). & (x-b). & (x-c). & (x-d)\\ (d-a). & (d-b). & (d-c). & \\ (c-a). & (c-b). & & \\ (b-a) & & & \\ Van & Der & Monde & \end{array}$

On l'écrit même $\lambda.(x-a).(x-b).(x-c).(x-d)$ avec $\lambda = \begin{array}{ccc} (d-a). & (d-b). & (d-c).\\ (c-a). & (c-b). & \\ (b-a) & & \end{array}$ (produit de six termes).

Mais en développant le déterminant par rapport à sa dernière colonne, c'est aussi

$$x^4.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ & & & \end{vmatrix} \quad -x^3.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ & & & \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \quad +x^2.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ & & & \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

$$-x.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \quad +1.\begin{vmatrix} & & & \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

On peut alors identifier les coefficients des polynômes (après avoir développé $(x-a).(x-b).(x-c).(x-d)$ par les formules de Viète) :

x^4		$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{array}$		$\begin{array}{lll} (d-a). & (d-b). & (d-c). \\ (c-a). & (c-b). & \\ (b-a) & & \end{array}$
x^3		$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{array}$		$-\begin{array}{lll} (d-a). & (d-b). & (d-c). \\ (c-a). & (c-b). & \\ (b-a) & & \end{array} .(a+b+c+d)$
x^2		$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{array}$		$\begin{array}{lll} (d-a). & (d-b). & (d-c). \\ (c-a). & (c-b). & \\ (b-a) & & \end{array} \times \left(\begin{array}{lll} a.b & +a.c & +a.d \\ & b.c & +b.d \\ & & +c.d \end{array}\right)$
1		$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{array}$		$\begin{array}{lll} (d-a). & (d-b). & (d-c). \\ (c-a). & (c-b). & \\ (b-a) & & \end{array} .a.b.c.d$

Deux d'entre eux sont déjà « de VanDerMonde », quitte pour l'un à factoriser chaque colonne.

∘23∘ ♡ Résolvez $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{k})$ et $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$ est liée.

A faire.

∘24∘ ♡ Quels sont les vecteurs de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ que vous pouvez utiliser pour compléter $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ en base de $\mathbb{R}^3$? Lesquels donnent une base de même orientation que la base canonique ?

Pour passer d'une famille libre de deux vecteurs à une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ il faut un vecteur et un seul.
Et il suffit que ce vecteur ne soit pas coplanaire avec les deux premiers.
La condition devient « déterminant non nul ».
Et pour que la base soit directe, la condition devient « déterminant strictement positif ».

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
4	-1	0	16	non !	0	0
oui	oui	non	oui		non	non
directe			directe			

Dans la dernière, le vecteur ajouté est colinéaire au premier.
Il y a un cas où on allonge avec « carrément le vecteur nul ».
Sinon, on a aussi $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, ce qui élimine bien $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$$2.\begin{pmatrix}1\\2\\a\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b\\1\\c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}d\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

quatre équations, quatre inconnues, on va s'en tirer :

$$2.\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-3\\1\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

et la voilà liée.

On peut alors vérifier une chose : $\begin{vmatrix}1&0&2\\2&-3&1\\0&1&1\\1&-2&0\end{vmatrix}$ ne veut rien dire

Mais $\begin{vmatrix}&&\\2&-3&1\\0&1&1\\1&-2&0\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix}1&0&2\\2&-3&1\\0&1&1\\1&-2&0\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix}1&0&2\\2&-3&1\\&&\\1&-2&0\end{vmatrix}=0$ et $\begin{vmatrix}1&0&2\\2&-3&1\\0&1&1\\&&\end{vmatrix}=0$.

∘25∘ Complétez et diagonalisez $\begin{pmatrix}&7\\1&\end{pmatrix}$ pour que ses valeurs propres soient 3 et -5 *(s'il y a plusieurs solutions, traitez les toutes).*

Pouvez vous compléter $\begin{pmatrix}&7\\1&\end{pmatrix}$ pour qu'elle ne soit pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Pouvez vous compléter $\begin{pmatrix}&7\\1&\end{pmatrix}$ pour qu'elle ne soit pas diagonalisable, même sur $\mathbb{C}$.

Pour que $\begin{pmatrix}a&7\\1&b\end{pmatrix}$ ait pour spectre $\{-3,\ 5\}$, il faut qu'on la relie à la matrice $\begin{pmatrix}-3&0\\0&5\end{pmatrix}$ avec qui elle devra partager trace et déterminant.

On impose donc

trace	déterminant
$a+b=-3+5=2$	$a.b-7=(-3).5=-15$

les deux réels a et b sont les deux racines de $X^2-2.X-8=0$.

On trouve deux matrices qu'on va d'ailleurs diagonaliser en la même matrice D qu'on connaît déjà : $D=\begin{pmatrix}-3&0\\0&5\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-2&7\\1&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&7\\1&-2\end{pmatrix}$
$D=\begin{pmatrix}-3&0\\0&5\end{pmatrix}$	$D=\begin{pmatrix}-3&0\\0&5\end{pmatrix}$
$P=\begin{pmatrix}1&1\\-1/7&1\end{pmatrix}$ ou même $P=\begin{pmatrix}-7&1\\1&1\end{pmatrix}$	$P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1/7\end{pmatrix}$ ou même $P=\begin{pmatrix}1&7\\-1&1\end{pmatrix}$

Comment faire pour qu'elle ne soit pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Qu'elle ne puisse pas être semblable à une matrice diagonale à coefficients réels ?

Imposons que son polynôme caractéristique ait un discriminant négatif :

$\begin{pmatrix}a&7\\1&b\end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^2-(a+b).X+(a.b-7)$, de discriminant $(a+b)^2-4.a.b+28$, celui ci vaut $(a-b)^2+28$, il est toujours positif.

On a donc toujours au moins une matrice D et on résoudra un petit système bien lourd (mais résoluble).

La matrice $\begin{pmatrix}a&7\\1&b\end{pmatrix}$ est toujours diagonalisable.

Et sur $\mathbb{C}$? On va se dire que c'est encore pire. L'équation du second degré a toujours des racines !

Mais si elle n'en a qu'une ?

Je m'explique : si on a une valeur propre double λ, il y a un problème ; la matrice devrait être semblable à $\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$, or seule $\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$.

On va donc ici annuler le discriminant $a-b=i.\sqrt{28}$: par exemple $\begin{pmatrix} a & 7 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ ne se diagonalise pas :

trace	déterminant	polynôme	spectre	D	P
$i.2.\sqrt{7}$	-7	$X^2-2.i.\sqrt{28}-7$	$\{i.\sqrt{7}\}$ en double	$\begin{pmatrix} i.\sqrt{7} & 0 \\ 0 & i.\sqrt{7} \end{pmatrix}$	jamais inversible

Toutes les matrices P trouvées ont leurs deux colonnes égales ou proportionnelles.

∘26∘ ♣ « Yes, well, the Governor of Kgovjni wants to give a very small dinner-party, and he means to ask his father's brother-in-law, his brother's father-in-law, his father-in-law's brother, and his brother-in-law's father ; and you're to guess how many guests there will be.»
«There is only one guest».
C'est du Lewis Carroll. Retrouvez le structure familiale du gouverneur pour que ces quatre dénominations recouvrent une seule et même personne.

Une année j'ai pris des notes sur la correction d'un élève.
Et j'ai perdu mes notes.

∘27∘ ♡ Montrez que M et ${}^tM$ ont le même spectre.

Normal, elles ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes racines pour ce polynôme.
L'un est $\det(M-\lambda.I_n)$ et l'autre $\det({}^tM-\lambda.{}^tI_n)$.
Et une matrice a le même déterminant que sa transposée.

∘28∘ ♡ Donnez une base et la dimension de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ ensemble des matrices carrées de taille 2 sur 2. On donne $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrez que $(A,\ A^2,\ A^3)$ est liée. Montrez que $(I_2,\ B,\ B^2)$ est liée. La famille $(I_2,\ A,\ B,\ B^2)$ est-elle une base de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$. Si oui, décomposez B^3 sur cette base, si non, $(I_2,\ A,\ B,\ A.B)$ est elle une base de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$?

Base canonique : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ à l'ordre près sur les deux du milieu. Et avec des parenthèses car c'est une famille.

On sait d'avance : $A^2=2.A+3.I_2$ (relation $A^2-Tr(A).A+\det(A).I_2=0_{2,2}$ pour les matrices de taille 2 sur $é$).
On multiplie par A : $A^3=2.A^2+3.A$. Ceci lie la famille.

De même $B^2-3.B+I_2=0_{2,2}$.

Pour que $(I_2,\ A,\ B,\ B^2)$ soit une base, il faudrait qu'elle soit libre.
Or, déjà $(I_2,\ B,\ B^2)$ est liée. Il n'y a pas à chercher plus loin, c'est fichu.

Pour $(I_2,\ A,\ B,\ A.B)$, la bonne nouvelle est qu'elle a le bon cardinal.
Il fut et il suffit donc que ce soit une famille libre.
On se donne quatre réels a, b, c et d et on suppose $a.I_2+b.A+c.B+d.A.B=0_{2,2}$.
On obtient

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 2.b \\ 2.b & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & c \\ 2.c & 3.c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4.d & 6.d \\ 2.d & 5.d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est un système de quatre équations à quatre inconnues qu'on résout.
Quand je dis qu'on le résout, pas tout à fait. On est en maths, bordel ! On l'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule juste le déterminant de la matrice 4 sur 4 : 26.
La matrice st inversible. Le système n'a qu'une solution. Et c'est $a=b=c=d=0$.
On notera que cette matrice est matrice de passage. On retrouve en colonne les décompositions de I_2, A, B et $A.B$ sur la base canonique déjà citée.

Si ensuite vous voulez inverser cette matrice, elle vous permettra d'exprimer $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (et plus généralement $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$) à l'aide de I_2, A, B et $A.B$.

Globalement, à peu près zéro calcul à part un déterminant.
Mais tout est dans « l'art » de se poser la bonne question, au bon étage.
Facile pour qui a l'esprit mathématique. Torture pour qui a l'esprit juste calculatoire et par-coeuresque.

∘29∘ ♡ L'élève Aissé-Sontencohr-Okupéh constate que les matrices suivantes ont pour déterminant 1 ou -1 et sont leur propre inverse :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Prouvez le, y compris en taille 6.
Généralisez en donnant la forme du coefficient de ligne i colonne k et si possible en prouvant $M^2 = I_n$ *(là, ça devient ♠ ou ♣, on peut penser à l'application qui passe de $a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + a_3.X^3 + \ldots + a_n.X^n$ à $a_0 + a_1.(1-X) + a_2.(1-X)^2 + a_3.(1-X)^3 + \ldots + a_n.(1-X)^n$ et l'appliquer deux fois).*

A faire.

∘30∘ ♡ a, b et c sont trois réels, montrez : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) \end{vmatrix} = \cos(b) - \cos(a)$ et

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) & \cos(2.c) \end{vmatrix} = 2.(\cos(b) - \cos(a)).(\cos(c) - \cos(b)).(\cos(c) - \cos(a))$.

Avez vous une formule pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) & \cos(d) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) & \cos(2.c) & \cos(2.d) \\ \cos(3.a) & \cos(3.b) & \cos(3.c) & \cos(3.d) \end{vmatrix}$? Et pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ch(a) & ch(b) & ch(c) \\ ch(2.a) & ch(2.b) & ch(2.c) \end{vmatrix}$

En taille 2, c'est facile.
En taille 3, on peut développer le déterminant en commençant par l'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(a) & \cos(b) - \cos(a) & \cos(c) - \cos(a) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) - \cos(2.a) & \cos(2.c) - \cos(2.a) \end{vmatrix}$$

On écrit ensuite $\cos(2.b) - \cos(2.a) = 2.\cos^2(b) - 1 - (2.\cos^2(a) - 1) = 2.(\cos(b) - \cos(a)).(\cos(b) + \cos(a))$
On factorise alors le contenu des colonnes :

$$\begin{vmatrix} \cos(b) - \cos(a) & \cos(c) - \cos(a) \\ \cos(2.b) - \cos(2.a) & \cos(2.c) - \cos(2.a) \end{vmatrix} = 2.(\cos(b) - \cos(a)).(\cos(c) - \cos(a)).\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \cos(b) + \cos(a) & \cos(c) + \cos(a) \end{vmatrix}$$

On trouve bien la formule demandée.

Pour celle de taille 4, on effectue le même type de travail pour aboutir à

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) - \cos(a) & \cos(c) - \cos(a) & \cos(d) - \cos(a) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) - \cos(2.a) & \cos(2.c) - \cos(2.a) & \cos(2.d) - \cos(2.a) \\ \cos(3.a) & \cos(3.b) - \cos(3.a) & \cos(3.c) - \cos(3.a) & \cos(3.d) - \cos(3.a) \end{vmatrix}$$

On factorise de même, puis avec $\cos(3.b) - \cos(3.a) = 4.\cos^3(b) - 4.\cos^3(a) - 3.(\cos(b) - \cos(a))$
$\cos(3.b) - \cos(3.a) = (\cos(b) - \cos(a)).(4.(\cos^2(b) + \cos(a).\cos(b) + \cos^2(a) - 3)$

On arrive à $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(b) + \cos(a) & \cos(c) + \cos(a) & \cos(d) + \cos(a) \\ 4.(\cos^2(b) + \cos(a).\cos(b) + \cos^2(a) - 3) & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$
en facteur de $2.(\cos(b) - \cos(a)).(\cos(c) - \cos(a)).(\cos(d) - \cos(a))$.

On soustrait la première colonne aux autres

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(b) + \cos(a) & \cos(c) - \cos(b) & \cos(d) - \cos(b) \\ \ldots & 4.\cos^2(c) - 4.\cos^2(b) + 4.(\cos(c) - \cos(b)).\cos(a) & \end{vmatrix}$$

A la fin, on a

$$8\times\ \begin{array}{lll} (\cos(d)-\cos(a)) & (\cos(c)-\cos(a)) & (\cos(b)-\cos(a)) \\ (\cos(d)-\cos(b)) & (\cos(c)-\cos(b)) & \\ (\cos(d)-\cos(c)) & & \end{array}$$

Il existe aussi une solution astucieuse avec les déterminants de VanDerMonde et les polynômes de Tchebychev..

Avec les cosinus hyperboliques, le résultat est le même.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ch(a) & ch(b) & ch(c) \\ ch(2.a) & ch(2.b) & ch(2.c) \end{vmatrix} = 2.(ch(b)-ch(a)).(ch(c)-ch(a)).(ch(c)-ch(b))$$

Et le coup des polynômes de Tchebychev ?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) & \cos(d) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) & \cos(2.c) & \cos(2.d) \\ \cos(3.a) & \cos(3.b) & \cos(3.c) & \cos(3.d) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ 2.x^2-1 & 2.y^2-1 & 2.z^2-1 & 2.t^2-1 \\ 4.x^3-3.x & 4.y^3-3.y & 4.z^3-3.z & 4.z^3-3.z \end{vmatrix}$$

avec des notations que j'espère claires.

On soustrait en lignes : $L_2 \leftarrow L_2 + L_0$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 3.L_1$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ 2.x^2 & 2.y^2 & 2.z^2 & 2.t^2 \\ 4.x^3 & 4.y^3 & 4.z^3 & 4.z^3 \end{vmatrix}$

Il ne reste qu'à sortir les 2 et les 4 et on a un déterminant de VanDerMonde.
On a donc 8 fois le produit des différences de cosinus.

∘31∘

♡ Écrivez un script Python qui crée la matrice "en damier" de taille n Δ_n ainsi que son négatif ∇_n.

$\Delta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\nabla_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La lettre Δ c'est delta *(majuscule)* et ∇ c'est nabla.

Calculez leurs déterminants en fonction de n.
Calculez $(\Delta_n)^p$. Calculez $\Delta_n.\nabla_n$ et $\nabla_n.\Delta_n$.
Calculez $(\nabla_n)^p$.

Il suffit de créer les deux lignes avec des 1 et des 0 (avec modulo) puis de les coller.

```
def Delta(n) :
....I = [k%2 for k in range(n)]
....P = [(k%2)+1 for k in range(n)]
....M = [ ]
....for i in range(n) :
........if i %2 == 0 :
............M.append(P[:])
........else :
............M.append(I[:])
....return(M)
```

Ou si on y tient :

```
def Nabla(n) :
....return([[(i+k)%2 for k in range(n)] for i in range(n)]
```

Elle nécessite quand même de calculer à chaque fois les coefficients, alors que ce sont toujours les m^mes (copies de) lignes qu'on voit.

Dans Δ_n comme dans ∇_n, il y a deux colonnes égales. Le déterminant est donc nuls
Sauf pour n trop petit (0, 1 ou 2).

On les calcule à part :

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n\geqslant 3$
Δ_n	1	1	1	0
∇_n	1	0	-1	0

∘32∘ Est il possible qu'une phrase soit vraie dans ce que j'ai écrit dans ce cadre ?

Dans ce cadre, exactement une phrase est vraie.
Dans ce cadre, exactement une phrase est fausse.
Dans ce cadre, exactement deux phrases sont vraies.
Dans ce cadre, exactement deux phrases sont fausses.

∘33∘ ♡ Déterminez $Com(Com(A))$ si A est une matrice carrée de taille 2.
Déterminez $Com(Com(A))$ si A est une matrice carrée inversible de taille n.
Montrez que si A une matrice de taille 3 non inversible, alors $Com(Com(A))$ est la matrice nulle.

En taille 2 : $Com(Com(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})) = Com(\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
On a $Com(Com(A)) = A$.

Pour A inversible, on a $A^{-1} = \dfrac{{}^tCom(A)}{\det(A)}$.
Mais alors $Com(A)$ est à son tour inversible : ${}^t(Com(A)) = \det(A).A^{-1}$
$\det({}^t(Com(A))) = (\det(A))^n.\det(A^{-1})$
$\det({}^t(Com(A))) = (\det(A))^{n-1}$ non nul
On inverse $Com(A)$ par la formule : $Com(A))^{-1} = \dfrac{{}^tCom(Com(A))}{\det(Com(A))}$ et donc ${}^tCom(Com(A)) = (\det(Com(A))).Com(A))^{-1}$.
Mais la relation $A.{}^tCom(A) = \det(A).I_n$ donne aussi une forme rapide et directe de l'inverse de $Com(A)$:

$$(Com(A))^{-1} = \frac{{}^tA}{\det(A)}$$

En comparant les deux formules : $\dfrac{{}^tA}{d} = \dfrac{{}^t(Com(Com(A))}{d^{n-1}}$ et donc $\boxed{Com(Com(M)) = d^{n-2}.A}$
Et pour n égal à 2, c'est cohérent...

∘34∘ a, b , c et d sont quatre entiers tirés au hasard entre 0 et 4. Quelle est la valeur maximale de $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a & a^3 \\ 1 & b^2 & b & b^3 \\ 1 & c^2 & c & c^3 \\ 1 & d^2 & d & d^3 \end{vmatrix}$?

C'est l'opposé d'un déterminant de VanDerMonde (en permutant des colonnes).
On l'écrit $-\begin{matrix} (b-a). & (c-a). & (d-a) \\ & (c-b). & (d-b) \\ & & (d-c) \end{matrix}$. Pour le maximiser, on va éviter d'en prendre deux égaux.

On a donc quatre nombres pour finalement cinq entiers possibles.

C'est donc qu'on en évite un et un seul. Par exemple $0 < 1 < 3 < 4$. Ou $0 < 1 < 2 < 4$.

Les rôles étant symétriques au signe près à la fin, on va prendre $a < b < c < d$.

Si d vaut 3 et non 4, on le fait passer à 4, les distances augmentent, et le déterminant grandit.

De même, si a ne vaut pas 0 (il vaut donc 1), on peut agrandir en prenant $a = 0$.

Il ne reste que quelques possibilités à tester : $0 < 2 < 3 < 4$, $0 < 1 < 3 < 4$ ou $0 < 1 < 2 < 4$.
C'est la solution $\boxed{0 < 1 < 3 < 4}$ qui l'emporte. Le déterminant vaut $\boxed{72}$ Les autres choix donnent 48.

∘35∘ Inversez ces trois matrices là $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (calcul direct)

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$ Comment je l'ai eue ? par cofacteurs et déterminant. Ou en tâtonnant.

Pour la dernière, une piste agréable est de l'élever au carré :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pas loin.
On sort un 4 et on multiplie par une matrice de permutation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $\dfrac{1}{4}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vient comme inverse « naturel ».
Et on peut généraliser en dimension plus grande.

On peut dire qu'inverser la matrice revient à résoudre $\begin{array}{ccccc} x & +y & +z & +t & = & a \\ x & +i.y & -z & -i.t & = & b \\ x & -y & +z & -t & = & c \\ x & -i.y & -z & +i.t & = & d \end{array}$ d'inconnues x, y, z et t.

Et ce système se résout aussi sans inverser la matrice, mais en sommant les lignes : $x+z = \dfrac{a+c}{2}$ par exemple, et en continuant avec de bonnes idées comme ça.

∘36∘ Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Même question avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice de comatrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$?
Existe-t-il une matrice de comatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?
Existe-t-il une matrice de comatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ avec la définition.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ facile (même sans être inversible).
Mais $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est la comatrice de personne.

Il faudrait trouver $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ vérifiant $\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c} = \overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A terminer...

∘37∘ ♡ Complétez, sachant que cette matrice a un déterminant réel : $\begin{pmatrix} 1+i & 1 & 2 & 1 \\ 1 & & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Le plus simple est de choisir un réel, et d'annuler alors le cofacteur de $1+i$: $\begin{vmatrix} & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Il suffit de prendre $a = 0$. le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ est nul à cause de la relation $4.C_1 + C_2 - 3.C_3 = 0_3$.
Retrouvez la combinaison qui colle sur les lignes aussi.
Et avouez que c'est plus joli qu'un calcul de déterminant. Enfin, question de goût, c'est vrai...

Mais il y a aussi une solution, puisque nul ne nous force à prendre a réel.

Si on a $\begin{vmatrix} & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1-i$, alors le produit « facteur fois cofacteur » donne un réel : $1+i).(1-i)$!

∘38∘ ♡ On pose : $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix}$. Montrez que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de A *(valeurs propres ?)*.
Donnez la troisième valeur propre, et trouvez un vecteur propre associé.
Diagonalisez A. Diagonalisez A^2. Diagonalisez A^{-1}.
Diagonalisez ${}^tA$.

Pour « vecteur propre », il suffit de montrer que U et $A.U$ sont colinéaires.
Et le coefficient λ dans $A.U = \lambda.U$ sera la valeur propre associée.

Ici : $\begin{pmatrix} 8 & -5 & -12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: la valeur propre vaut 3

$\begin{pmatrix} 8 & -5 & -12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -4. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: la valeur propre vaut -4

Il est à noter que la valeur propre a le droit d'être nulle. C'est au vecteur qu'on interdit la chose. Pour qu'on puisse le mettre en colonne de la matrice P inversible.
λ sera sur la diagonale de D, et aura le droit d'être nulle.

Pour la troisième valeur propre, soyons matheux, et varions les points de vue.

Quand je dis soyons matheux, c'est évitions le truc « j'ai appris par cœur racines du polynôme caractéristique, donc je calcule celui ci, j'en cherche les trois racines... ». En étant déjà un peu plus intelligent, on se dit qu'on en connaît déjà deux racines, non ?

Mais le plus simple est de dire que les trois valeurs propres formeront la diagonale de D.
Et que D aura même trace que M.
La somme des trois valeurs propres vaut $8+3-10$.
deux valent déjà 3 et -4.
La troisième vaut donc 2.

Ensuite, on cherche U vérifiant $M.U = 2.U$.
Là, c'est juste un système à résoudre, dont on sait qu'il a des solutions non triviales.

$\begin{pmatrix} 8 & -5 & -12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On met les valeurs propres dans l'ordre qu'on veut dans D, et on complète les colonnes de D avec les vecteurs propres trouvés, dans l'ordre des valeurs propres :

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & -5 & -12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$
		$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

Pour diagonaliser A^2, on ne calcule pas A^2, on réfléchit.
On a prouvé $AP.D.P^{-1}$ et on déduit $A^2 = P.D^2.P^{-1}$.
D^2 est diagonale de termes diagonaux 3^2, $(-4)^2$ et 2^2.
Et la matrice de passage est la même.

D'ailleurs, les vecteurs propres sont les mêmes :
$M.U = \lambda.U$ entraîne $M^2.U = M.(M.U) = M.(\lambda.U) = \lambda.M.U = \lambda^2.U$.

Plus généralement, A^n a pour matrice diagonale D^n et pour matrice de passage P.

L'exposant peut même être -1 : $M^{-1} = (P.D.P^{-1}) = (P^{-1})^{-1}.D^{-1}.P^{-1} = P.D^{-1}.P^{-1}$.
C'est bien sûr D^{-1} de valeurs propres $\dfrac{1}{\lambda_i}$ qui sert.
Et surtout, c'est la matrice matrice de passage P.

Les vecteurs colonne n'ont pas changé. $M.U = \lambda.U$ donne $M^{-1}.U = \dfrac{1}{\lambda}.U$.

En revanche, pour M^t on a cette fois ${}^tM = {}^t.P^{-1}.D.{}^tP$ car ${}^tD = D$.
On garde les mêmes valeurs propres. Mais les vecteurs propres ont changé, et sont peut clairs : les lignes de P^{-1}...
Pourquoi pas.

∘39∘

Laquelle de ces formules est la bonne :

$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c}) \times \vec{b} - (\vec{a}.\vec{b}) \times \vec{c}$	$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{b}) \times \vec{b} + (\vec{a}.\vec{c}) \times \vec{c}$
$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{b}) \times \vec{c} - (\vec{a}.\vec{c}) \times \vec{b}$	$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{b}) \times \vec{b} - (\vec{a}.\vec{c}) \times \vec{c}$

On se donne deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de norme 1. On définit la suite $(\vec{u_n})_n$ par $\vec{u_0} = \vec{a}$ et $\vec{u_1} = \vec{b}$ et $\overrightarrow{u_{n+2}} = \vec{u_n} \wedge \overrightarrow{u_{n+1}}$. Montrez que la suite converge dans le cas $\vec{a} = \vec{b}$.
La suite converge-t-elle dans le cas $\vec{a} = \vec{i}$ et $\vec{b} = \vec{j}$?
Calculez les six premiers termes de la suite *(on posera $\vec{a}.\vec{b} = \alpha$).*
Dans quel cas converge-t-elle ?

A faire.

∘40∘

♡ Montrez que l'équation d'un cercle du plan est de la forme $x^2 + y^2 - 2.\alpha.x - 2.\beta.y + \gamma = 0$.
Montrez néanmoins que $x^2 + y^2 - 2.x - 4.y + 7 = 0$ n'est pas une équation de cercle.
Montrez que $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a^2+\alpha^2 & a & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$ est l'équation du cercle passant par $A(a,\alpha)$, $B(b,\beta)$ et $C(c,\gamma)$ *(surtout ne développez pas, on est en maths ! pensez à prouver que c'est la forme d'une équation de cercle, et trouvez trois points évidents).* Donnez l'équation et le centre du cercle passant par $A(1,1)$, $B(2,5)$ et $C(4,12)$.
Donnez l'équation et le centre de la sphère de $\mathbb{R}^3$ passant par $A(1,1,0)$, $B(2,5,0)$ et $C(4,12,0)$ et $D(0,0,1)$.

L'équation duu cercle de centre $C(a,\ b)$ et de rayon R est $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$.
On la développe en $x^2 + y^2 - 2.\alpha.x - 2.\beta.y + \gamma = 0$ avec $\gamma = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$.

Si les coefficients sont mal choisis : $x^2 + y^2 - 2.x - 4.y + 7 = 0$
$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 7 = 0$
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = -2$
Ce qu'il reste n'est pas un carré de rayon. Le cercle est « imaginaire ».

$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a^2+\alpha^2 & a & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$ se développe sous la forme

$$(x^2+y^2).\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix} - x.\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} + y.\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & \alpha \\ b^2+\beta^2 & b & \beta \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

On a la forme $(x^2+y^2) - 2.A.x - 2.B.y + C = 0$ en posant

$A = \dfrac{\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix}}{2.\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix}}$	$B = -\dfrac{\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & 1 \end{vmatrix}}{2.\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix}}$	$C = \dfrac{\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & \alpha \\ b^2+\beta^2 & b & \beta \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma \end{vmatrix}}{2.\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix}}$

sous réserve que le dénominateur soit non nul (on en recause plus loin si nécessaire).

C'est bien la forme d'une équation de cercle.

Ensuite, $\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & \alpha & 1 \\ a^2+\alpha^2 & a & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$ car il y a deux lignes égales.
Ce cercle contient le points A.
De même, avec « $L_1 = L_3$ », il contient le point B.
Et le point C.

Or, par A, B et C passe un cercle et un seul.
C'est donc LE cercle passant par A, B et C.

Tout ça sans se prendre la tête à déterminer son centre par trente équations comme le ferait un élève malformé par le système « éducatif » pré-bac.

Pour $A(1,1)$, $B(2,5)$ et $C(4,12)$, l'équation est

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 29 & 2 & 5 & 1 \\ 160 & 4 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ et on développe en } x^2+y^2-335.x+77.y+256.$$

On peut ainsi retrouver les coordonnées du centre $\left(\dfrac{335}{2}, \dfrac{-77}{2}\right)$ et un petit calcul donne le rayon[3].

Et pour la sphère, le raisonnement est le même : $\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ a^2+a'^2+a''^2 & a & a' & a'' & 1 \\ b^2+b'^2+b''^2 & b & b' & b'' & 1 \\ c^2+c'^2+c''^2 & c & c' & c'' & 1 \end{vmatrix} = 0$

est l'équation d'une sphère (forme développée $(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2 = R^2$).
Et elle est valable pour A, pour B, pour C et pour D. C'est LA sphère passant par A, B, C et D.

Ah oui, j'ai promis de traiter à part le cas $\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$ dans l'équation

$$(x^2+y^2).\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix} - x.\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} + y.\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & \alpha \\ b^2+\beta^2 & b & \beta \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

C'est alors l'équation d'une droite.
Mais cette droite passe quand même par A, B et c puisque ces trois couples de composantes vérifient l'équation.
Et c'est louche une droite passant par trois points imposés.
A moins que ces points ne soient déjà alignés, auquel cas la question « équation du cercle » perd son sens...

On notera que $\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$ équivaut à $\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b-a & \beta-\alpha & 0 \\ c-a & \gamma-\gamma & 0 \end{vmatrix} = 0$ puis $\begin{vmatrix} b-a & \beta-\alpha \\ c-a & \gamma-\gamma \end{vmatrix} = 0$.
On reconnaît « $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ».
Comme quoi tout se tient...

◦41◦

Duquel des deux plans le point $M(1,1,4)$ est il le plus proche :	
plan d'équation $x+y-3.z=0$	plan passant par $A(1,3,2)$, $B(0,2,1)$ et $C(2,0,1)$

Formule clef en main pour la distance point plan quand on a l'équation : $\dfrac{a.x+b.y+c.z+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$[4].

L'équation du premier plan est connue. Pour le second, on développe $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y-3 & -1 & -3 \\ z-2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ (c'est $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$)

et on lui demande d'être nul.
On trouve l'équation $-x-y+2.z=0$.
Mais comment on rédige quand on est matheux ?On propose $-x-y+2.z=0$. C'est l'équation d'un plan.

Il passe par A (vérifiez), par B (idem) et par C ($-2-0+2.1=0$).
C'est donc le plan $(A\ B\ C)$.
C'est mille fois plus intelligent dans la copie que de rédiger une page de calcul.
Certes, ça ne montre pas au correcteur « m'sieur, m'sieur, regarde, j'ai tout retenu de ma classe de première », mais qu'est ce qu'il s'en fout...Pour lui, c'est aussi passionnant que si vous lui disiez « j'ai retenu la liste des dates de naissance de tous les rois de France depuis Henri 4 ».

Reste à mettre dans l'équation $(1,\ 1,\ 4)$.

3. moi je dirais « mesure juste la distance de A au centre que tu viens de trouver
4. non, pas $\dfrac{a.x+b.y+c.z+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$, d est justement un terme de distance déjà

plan d'équation $x+y-3.z=0$	plan passant par $A(1,3,2)$, $B(0,2,1)$ et $C(2,0,1)$ $x+y-2.z=0$
distance = $\dfrac{1+1-12}{\sqrt{1+1+9}}$	$\dfrac{1+1-8}{\sqrt{1+1+16}}$

La fin n'est que produit en croix et élévation au carré ?

Pardon ! Pour comparer $\dfrac{10}{\sqrt{11}}$ et $\dfrac{6}{\sqrt{18}}$ vous prenez la calculatrice !

Prenez plutôt la porte et ne revenez plus me voir, allez finir vos jours en amphi 21.

Il suffit de comparer $\dfrac{100}{11}$ et $\dfrac{36}{18}$ et donc de comparer 1800 et 11×36.

Où voyez vous une calculatrice ?

Oui, vous pouvez aller finir vos jours en amphi 21, je viendrai vous y rejoindre à la fin de l'année pour les cours de maths de juin...

∘42∘ Exprimez $\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \sin(a) \\ 1 & \cos(b) & \sin(b) \\ 1 & \cos(c) & \sin(c) \end{vmatrix}/8$ comme produit de trois sinus (autre que $\sin(3.\pi/2).\sin(-\pi/2).\sin(Arcsin(\det(\ldots))$ évidemment.

On va combiner les lignes et faire de la trigonométrie :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \sin(a) \\ 1 & \cos(b) & \sin(b) \\ 1 & \cos(c) & \sin(c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \sin(a) \\ 0 & \cos(b)-\cos(a) & \sin(b)-\sin(a) \\ 0 & \cos(c)-\cos(a) & \sin(c)-\sin(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(b)-\cos(a) & \sin(b)-\sin(a) \\ \cos(c)-\cos(a) & \sin(c)-\sin(a) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2.\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2} & -2.\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2} \\ -2.\sin\frac{a+c}{2}.\sin\frac{a-c}{2} & -2.\cos\frac{a+c}{2}.\sin\frac{a-c}{2} \end{vmatrix}$$

On peut sortir un facteur -2 et même deux. Puis on sort $\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{a-c}{2}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \sin(a) \\ 1 & \cos(b) & \sin(b) \\ 1 & \cos(c) & \sin(c) \end{vmatrix} = 2.\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-c}{2}\right).\begin{vmatrix} \sin\frac{a+b}{2} & \cos\frac{a+b}{2} \\ \sin\frac{a+c}{2} & \cos\frac{a+c}{2} \end{vmatrix}$$

Mais la formule finale en $\sin.\cos.-\cos.\sin$donne le sinus d'une différence :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \sin(a) \\ 1 & \cos(b) & \sin(b) \\ 1 & \cos(c) & \sin(c) \end{vmatrix} = -4.2.\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-c}{2}\right).\sin\left(\frac{b-c}{2}\right)$$

∘43∘ On veut que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ d \\ e \end{pmatrix}\right)$ n'engendre qu'un plan. Donnez l'équation de celui ci.

Il faut et il suffit que ces quatre vecteurs soient coplanaires.

Mais déjà, le premier et le troisième sont non colinéaires et engendrent un plan.

Il faut et il suffit que le second soit combinaison de « premier et troisième »

le dernier soit combinaison de « premier et troisième »

Il existe α, β, α' et β' vérifiant :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ d \\ e \end{pmatrix} = \alpha'.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \beta'.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

Quelques valeurs sont vite imposées :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ d \\ e \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \beta'.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

Après ce sont des systèmes.

On peut aussi imposer la coplanarité ainsi : $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & a & c \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ d & 1 & 1 \\ e & a & c \end{vmatrix} = 0$.

On peut aussi se donner l'équation d'un plan contenant comme par hasard deux des vecteurs,puis imposer aux deux autres de vérifier cette équation, ce qui répond en même temps à la dernière question.

∘44∘ ♡ On pose $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Trouvez la matrice A vérifiant $A.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u}$ pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$. Calculez son spectre *(dans $\mathbb{C}$ si nécessaire)*.

En posant $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on trouve $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} b.z - c.y \\ c.x - a.z \\ a.y - b.x \end{pmatrix}$

La matrice qui transforme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} & -c..y & +b.z \\ c.x & & -a.z \\ -b.x & +a.y & \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$

(et d'avoir écrit le vecteur sous une forme un peu intelligente et aérée a simplifié le travail !).

On écrit le polynôme caractéristique $\det(A - \lambda.I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -c & b \\ c & -\lambda & -a \\ -b & a & -\lambda \end{vmatrix}$.

On le calcule (soit ainsi, soit par trace, détermina,t somme des mineurs 2 sur 2) :
$\lambda^3 - (a^2 + b^2 + c^2).\lambda$

Une racine est 0 (de vecteur propre $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, devinez vous pourquoi ?)

et les deux autres sont $i.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ et $-i.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (complexes conjuguées, c'est un peu normal).

∘45∘ Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(la comatrice est la matrice des cofacteurs pondérés).

Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. En taille 2, c'est facile : $Com(Com(A)) = A$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour comatrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Pardon ? Je pars dans le mauvais sens ? A voir...

Regardons alors « par hasard » la comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On trouve $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. C'est carrément raté pour les signes.

Alors on tente son opposé : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui a pour comatrice... $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ encore...

(normal, $Com(-A) = Com(A)$ en taille 3 car on a des déterminants de taille 2, pour lesquels le signe moins ne change rien).

D'où l'idée de prendre $\begin{pmatrix} -i & i & 0 \\ 2.i & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$. Sa comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Mais vous vous dites que faire appel à i de carré -1, c'est tricher.

Pas tant que ça. Si on reste sur $\mathbb{R}$, il n'y aura pas de matrice dont la comatrice sera $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Je vous le prouve. Supposons $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Com(A)$.

La relation $A.^t(Com(A)) = \det(A).I_3$ donne, en passant au déterminant $\det(A).\det(Com(A)) = (\det(A))^3$ puis $\det(Com(A)) = (\det(A))^2$.

Le déterminant d'une comatrice est (en taille 3) toujours un carré.

Mais $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a un déterminant négatif. Elle n'est la comatrice de personne sur $\mathbb{R}$.

∘46∘ Calculez $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Comme on peut remplacer une colonne d par une combinaison $a+b+c+d$ sans modifier le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 12 \\ 9 & 2 & 0 & 12 \\ 1 & 9 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 12.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

On peut ensuite soustraire une ligne *(la première)* sur les autres et trouver $12.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 9 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

On développe par rapport à la dernière colonne, le déterminant est de taille 3 et on fait appel à Pierre-Frédéric Sarrus. On trouve $\boxed{-5904}$

L'autre se calcule de la même façon et donne $\boxed{5904}$ Il suffit d'ailleurs de remettre les colonnes dans le « bon » ordre pour passer de l'un à l'autre.

∘47∘ ♡ Ajustez a, b et c pour que $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$ ait pour spectre $\{0,\ 1,\ 4\}$. Prouvez sans effort qu'elle est alors diagonalisable.

On va ajuster trace, déterminant et somme des mineurs 2 sur 2 par les formules de Viète :

Trace	$a+b+c$	$=0+1+4$
Mineurs	$a.b-1+a.c-1+b.c-1$	$=0.1+0.4+1.4$
Déterminant	$a.b.c+1+1-a-b-c$	$=0.1.4$

On résout $\begin{array}{cccc} a & +b & +c & = & 5 \\ a.b & +a.c & +b.c & = & 7 \\ a & \times b & \times c & = & 3 \end{array}$ avec des rôles symétriques.

a, b et c sont les racines de $X^3-5.X^2+7.X-3$.

On trouve deux racines dont une double : 1, 1 et 3.

Les matrices possibles sont $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ensuite, on a trois valeurs propres distinctes.

Chacune apporte un vecteur propre (une droite en fait), et on a de quoi remplir les trois colonnes d'une matrice de passage P.

Je vous offre même P (et D dans le premier cas) :

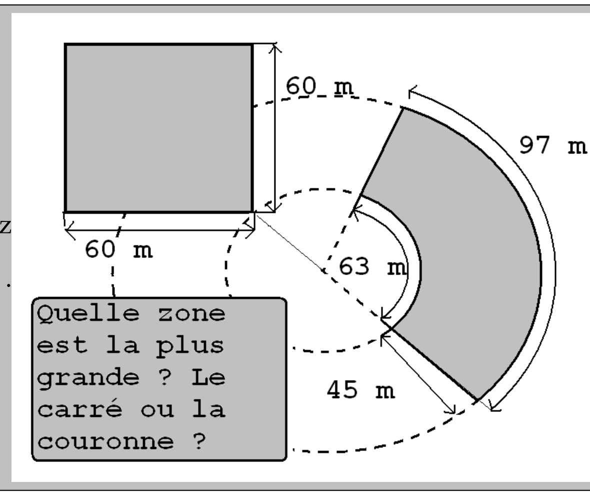
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

◦48◦

La matrice B a pour valeurs propres 1, 3 et -2. Donnez son polynôme caractéristique : $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -24 & & 15 \\ & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Trouvez un vecteur propre de valeur propre 1.

Calculez $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.



◦49◦

♡ Donnez une base de l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $2.x + y - z = 0$, noté E.

Donnez une base de l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $2.x + 3.y + z = 0$, noté F.

Donnez une base de $E \cap F$.

Donnez une base et la dimension de l'ensemble des matrices M de taille 3 sur 3 vérifiant $\forall X \in \mathbb{R}^3,\ M.X \in E \cap F$.

Donnez une base et la dimension de l'ensemble des matrices M de taille 3 sur 3 vérifiant $\forall X \in E \cap F,\ M.X = 0_3$.

Même pas de méthode à apprendre par cœur. Juste se laisser porter.

On a les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2.x + y \end{pmatrix}$.

On les écrit $x.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Et la base est directement lisible : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ qui permet d'écrire tous les vecteurs, d'une façon unique.

Pour F on fait de même : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -2.x - 3.y \end{pmatrix} = x.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ (notez que les vecteurs de base correspondent à des choix particuliers de x et y et sont bien dans F).

Quand ensuite un vecteur vérifie à la fois $2.x + y - z = 0$ et $2.x + 3.y + z = 0$, il s'écrit $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix}$ après résolution du système (on exprime y et z à l'aide de x par exemple).

Une base de $E \cap F$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour aller plus vite : on sait que l'intersection des deux plans est de dimension 1, il reste juste à y trouver un vecteur non nul pour avoir une base.

Les matrices M de taille 3 sur 3 vérifiant $\forall X \in \mathbb{R}^3,\ M.X \in E \cap F$ sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ (nécessaire et suffisant).

Une base est donc $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Et pour $\forall X \in E \cap F,\ M.X = 0_3$, on a cette fois $\begin{pmatrix} a & a + c & c \\ a' & a' + c' & c' \\ a'' & a'' + c'' & c'' \end{pmatrix}$ et une base sera faite de six vecteurs que je vous laisse expliciter.

◦50◦

Complétez cette matrice de VanDerMonde, calculez son déterminant, et complétez son inverse, puis calculez le déterminant de son inverse. $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & & \\ & 4 & & 2 & 2 \\ 1 & 1 & & 6 & \\ 1 & 2 & 2 & & \end{pmatrix}$, $V^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & & 1 & 1 \\ & 2 & 0 & & 5 \\ 3 & & & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 3 & \end{pmatrix}$. *Pardon ? Il y a un truc ? Oui. On travaille sur* $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ *pour l'addition et la multiplication modulo* 7.

Oui, $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Certaines colonnes sont déjà remplies.
Pour d'autres, on complète avec les puissances de 5.
Pour d'autres, on se demande comment passer de 2 à 6.
Enfin, la dernière pourrait contenir les puissances de 3, mais on lui demande d'être inversible, cette matrice. Il n'y a donc pas deux colonnes égales.

Ensuite, comme on nous offre plusieurs coefficients, l'inversion de V se fait juste en complétant les cases :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

◦51◦

Montrez que $A = \begin{pmatrix} -6 & -10 & 17 \\ 5 & 9 & -13 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -7 & -12 & 20 \\ 4 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont le même polynôme caractéristique.
Calculez A^2 et B^2. A et B sont elles semblables ?

Juste du calcul : $\chi_A(X) = \chi_B(X) = -(X^3 - X^2 - X + 1)$.
Le spectre, commun aux deux, est $[1,\ 1,\ -1]$.

Remarque : Le fait que 1 soit valeur propre de B doit se lire directement, même si c'est « valeur propre de ${}^tB$ » qui est le plus naturel car on a alors un vecteur propre.
Mais si, regardez : ${}^tB = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 0 \\ -12 & 7 & 0 \\ 20 & -10 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -7 & 4 & 0 \\ -12 & 7 & 0 \\ 20 & -10 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si A et B étaient semblables, A^2 serait semblable àB^2 ($A^2 = P.B^2.P^{-1}$). Or, rien, à part I_3 n'est semblable à I_3.

Remarque : Les deux matrices sont le même spectre, mais seule B se diagonalise en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Et A se trigonalise en $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. C'est à dire « est semblable à cette matrice trigonale.
Un trigône est un polygône à trois côtés.
Ou, c'est un triangle, et la matrice est triangulaire ou trigonale...

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2021/22

CCP 2009 MP 3 heures

I∼0) p et q sont deux entiers naturels. Montrez que $((1,0),\ (X,0),\dots,(X^{p-1},0),\ (0,1),\ (0,X),\dots(0,X^{q-1}))$ est une base de $\mathbb{C}_{p-1}[X] \times \mathbb{C}_{q-1}[X]$ (base notée $\mathbb{B}$, espace vectoriel noté E). 2 pt.

I∼1) A et B sont deux polynômes, de degrés respectifs q et p, qu'on écrira sous forme factorisée $A(X) =$

$\lambda_A.\prod_{j=1}^{q}(X-\alpha_j)$ et $B(X)=\lambda_B.\prod_{j=1}^{p}(X-\beta_j)$ mais aussi développée sur la base canonique $A(X)=\sum_{k=0}^{q}a_k.X^k$ et $B(X)=\sum_{k=0}^{p}b_k.X^k$. On définit f sur E par $f((P,Q))=A.P+B.Q$. Montrez que f est linaire. Montrez que $Im(f)$ est inclus dans $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

I∼2) On rappelle qu'on pose $Ker(f)=\{(P,Q)\in E\mid f((P,Q))=0\}$. Montrez que $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$. $\boxed{\text{2 pt.}}$
I∼3) Montrez que f est injective, si et seulement si $Ker(f)$ est égal à $\{(0,\ 0)\}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$
I∼4) Montrez que si A et B ont une racine commune r si et seulement $Ker(f)$ n'est pas réduit à $(0,\ 0)$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

I∼5) Montrez que l'ensemble des $f(C)$ quand C décrit $\mathbb{B}$ est une famille génératrice de $Im(f)$. $\boxed{\text{2 pt.}}$
I∼6) Montrez que c'est une base de $Im(f)$ si et seulement si $Ker(f)$ est réduit à $\{(0,0)\}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$
I∼7) Montrez que f est bijective de E dans $(\mathbb{C}_{p+q-1}[X],+,.)$ si et seulement si $Ker(f)$ est réduit à $\{(0,0)\}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$II\sim 0$ On construit la matrice $M_{A,B}$:

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & & \vdots & & b_0 \\ a_q & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_p & & \vdots \\ & & a_q & & & \ddots & \vdots \\ & & & a_q & & & b_q \end{pmatrix}$$

Elle est de format $p+q$ sur $p+q$ et les positions non remplies sont des 0.
Par exemple $A=1+2.X+3.X^2$ et $B=4+5.X+6.X^2+7.X^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculez le déterminant de cette matrice $M_{A,B}$ donnée en exemple à droite. $\boxed{\text{1 pt.}}$

II∼0) Calculez le déterminant de la matrice dans le cas $A=X^2-3.X+2$ et $B=X^3-2.X^2-5.X+6$. $\boxed{\text{2 pt.}}$
II∼1) Écrivez une procédure `Python` qui prend en entrées deux listes de coefficients `A` et `B` (sur l'exemple ci dessus `[1, 2, 3]` et `[3, 4, 5]`) et retourne la matrice $M_{A,B}$ sous forme de liste de listes. $\boxed{\text{2 pt.}}$
II∼2) On appelle résultant de A et B le déterminant de la matrice $M_{A,B}$. Qui est le résultat de A et A ? Le résultant est il un opérateur commutatif ? $\boxed{\text{2 pt.}}$
II∼3) Calculez le résultant de A et A' quand A est le polynôme $a.X^2+b.X+c$. $\boxed{\text{2 pt.}}$
II∼4) Calculez le résultant de A et A' quand A est le polynôme $X^3+a.X+b$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

III∼0) Montrez que si le couple de polynômes $(P,\ Q)$ a pour composantes sur la base E le vecteur U, alors le polynôme $f((P,\ Q))$ a pour composantes $M_{A,B,}.U$ sur la base canonique de $(\mathbb{C}_{p+q-1}[X],+,.)$. $\boxed{\text{3 pt.}}$

IV∼0) Montrez que $X^2-s.X+p$ et $X^2-s'.X+p'$ ont une racine commune au moins si et seulement si $p^2+p.s'^2+p'.s^2+p'^2$ est égal à $2.p.p'+(p+p').s.s'$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

V∼0) Dans cette partie : $A=X^4+X^3+1$ et $B=X^3-X+1$. Écrivez la matrice $M_{A,B}$ (format ?), calculez son déterminant. $\boxed{\text{2 pt.}}$ Montrez que A et B n'ont pas de racine commune. $\boxed{\text{1 pt.}}$
V∼1) Montrez qu'en utilisant la matrice $M_{A,B,}$ on peut trouver un couple de polynômes $(P_0,\ Q_0)$ vérifiant $A.P_0+B.Q_0=1$. $\boxed{\text{2 pt.}}$ D'ailleurs, trouvez en un, par la méthode que vous voulez. $\boxed{\text{3 pt.}}$
V∼2) Déterminez tous les couples solutions dans $(\mathbb{C}[X])^2$ de $A.P+B.Q=1$ *(pensez que vous avez une solution particulière, et écrive $(P-P_0).A=(Q_0-Q).B$).* $\boxed{\text{1 pt.}}$

VI∼0) En utilisant les polynômes $A=X^2-3$ et $B=(y-X)^2-7$, trouvez un polynôme de degré 4 à coefficients entiers admettant pour racine $\sqrt{3}+\sqrt{7}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

VII∼0) On a représenté graphiquement pour vous ci contre l'arc paramétré Γ « mouvement d'une particule en fonction du temps » : $\left\{\begin{array}{lcll} x(t) & = & t^2 & +t \\ y(t) & = & t^2 & -t \quad +1 \end{array}\right|$ *(la construction d'arcs paramétrés était encore au programme en 2009)*. On se donne deux polynômes P et Q à coefficients réels et l'on pose pour tout triplet $(x,\ y,\ t)$ de $\mathbb{R}^3$: $A(t)=P(t)-x$ et $B(t)=Q(t)-y$. Établissez que si un point M de coordonnées $(x,\ y)$ appartient à la courbe de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & P(t) \\ y(t) & = & Q(t) \end{array}\right|$ alors les fonctions polynômes ont une racine commune. $\boxed{\text{2 pt.}}$

VII~1) Déduisez qu'un point M de coordonnées $(x,\ y)$ appartenant à la courbe Γ vérifie $x^2+y^2-2.x.y-4.y+3=0$. $\boxed{\text{1 pt.}}$ Mettez l'équation $x^2+y^2-2.x.y-4.y+3=0$ sous la forme $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}.S.\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0$ où S est une matrice symétrique. $\boxed{\text{2 pt.}}$ Donnez le polynôme caractéristique de S et son nombre de valeurs propres réelles. $\boxed{\text{3 pt.}}$.

◦52◦

Inversez $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ par la méthode du pivot de Gauss.

$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & \mid & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & \mid & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \mid & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & \mid & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \mid & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \mid & -2 & 0 & 1 \end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & \mid & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \mid & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 0 & -1 & 1 \end{matrix}\right]$
	$L2=L2-2.L1$ $L3=L3-2.L1$	$L3=L3-L2$
$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \mid & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 0 & -1 & 1 \end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & \mid & 5 & -9 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & \mid & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 0 & -1 & 1 \end{matrix}\right]$	$\begin{pmatrix} 5 & -9 & 7 \\ -2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
$L1=L1+L3$ $L2=L2-3.L3$	$L1=L1-2.L2$	c'est elle

◦53◦

Résolvez par pivot de Gauss, et discutez :

$\begin{cases} x+2.y=1 \\ 2.x+y=2 \\ 3.x+4.y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y+3.z=1 \\ 2.x-2.y+z=3 \\ 2.x-y-z=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2.y=1 \\ 2.x+y=2 \\ 3.x+4.y=3 \end{cases}$
a	b	c
$\begin{cases} x-2.y+z=1 \\ -x+3.z=5 \\ x-3.y+z=1 \\ x+4.y-z=a \end{cases}$	$\begin{cases} a.x+b.y+z=1 \\ x+a.b.y+z=b \\ x+b.y+a.z=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2.y+z+2.t+3.u=1 \\ x+3.y+z+2.t=1 \\ y-3.u=-1 \end{cases}$
d	e	f
$\begin{cases} x+y-z=a \\ x-y=b \\ x+4.y+z=c \end{cases}$	$\begin{cases} x-y+z=\lambda.x \\ 2.x-5.y+4.z=\lambda.y \\ 2.x-7.y+6.z=\lambda.z \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+2.y+2.z+2.t=3 \\ x+2.y+3.z+3.t=5 \\ x+2.y+3.z+4.t=9 \end{cases}$
g	h	i

$\begin{cases} x+2.y=1 \\ 2.x+y=2 \\ 3.x+4.y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y+3.z=1 \\ 2.x-2.y+z=3 \\ 2.x-y-z=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2.y=1 \\ 2.x+y=2 \\ 3.x+4.y=3 \end{cases}$
$\begin{cases} x+2.y=1 \\ -3.y=0 \\ -2.y=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y+3.z=1 \\ -5.z=1 \\ y-7.z=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2.y=1 \\ -3.y=0 \\ -2.y=0 \end{cases}$
$S_{(x,y)}=\emptyset$	$\begin{cases} x-y=8/5 \\ y=-17/5 \\ z=-1/5 \end{cases}$	$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ y=0 \end{cases}$
	$\begin{cases} x=-9/5 \\ y=-17/5 \\ z=-1/5 \end{cases}$	$S_{(x,y)}=\{(1,0)\}$
	$S_{(x,y,z)}=\left\{\left(\frac{-9}{5},\frac{-17}{5},\frac{-1}{5}\right]\right\}$	

∘54∘ ♡ On pose $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&3\end{pmatrix}$. Montrez que $M\longmapsto A.M.B$ est un endomorphisme de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$. Montrez que c'est un automorphisme de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$.
Calculez l'image de chacun des quatre vecteurs de la base canonique : $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.
Donnez la matrice de cet endomorphisme sur cette base canonique.
Calculez son déterminant. Inversez la sans trop d'effort.

Existence : OK par formats compatibles.
Endo : formats là encore.
Morphisme : $A.(\alpha.M+\beta.N).B=\dots$
Auto : $A.M.B=0_{2,2}\Leftrightarrow M=0_{2,2}$ en multipliant à droite comme à gauche par A^{-1} et B^{-1}.
l'endomorphisme en injectif
on est en dimension finie, il est bijectif.
On pouvait aussi créer sa réciproque à droite et à gauche $M\longmapsto A^{-1}.M.B^{-1}$.

$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\longmapsto\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&.&.&.\\1&.&.&.\\0&.&.&.\\2&.&.&.\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$	$\longmapsto\begin{pmatrix}-1&3\\-2&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&.&.\\1&3&.&.\\0&-2&.&.\\2&6&.&.\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\longmapsto\begin{pmatrix}0&3\\0&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&0&.\\1&3&3&.\\0&-2&0&.\\2&6&5&.\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\longmapsto\begin{pmatrix}-3&9\\-5&15\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&0&-3\\1&3&3&9\\0&-2&0&-5\\2&6&5&15\end{pmatrix}$

La matrice sur la base canonique de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est donc $\begin{pmatrix}0&-1&0&-3\\1&3&3&9\\0&-2&0&-5\\2&6&5&15\end{pmatrix}$ qu'on lit par blocs $\begin{pmatrix}0&-1&.&0&-3\\1&3&.&3&9\\.&.&.&.&.\\0&-2&.&0&-5\\2&6&.&5&15\end{pmatrix}$.

On reconnaît quatre multiples de ${}^tB$: $\begin{pmatrix}{}^tB&3.{}^tB\\2.{}^tB&5.{}^tB\end{pmatrix}$. Et les coefficients sont ceux de A.

Et son inverse ?
Esprit P.C. : pivot de Gauss.
Esprit MP et PSI : l'endomorphisme inverse est $M\longmapsto\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}.M.\begin{pmatrix}3&-1\\1&0\end{pmatrix}$, où l'on a remplacé A par A^{-1} et B par B^{-1}.

La matrice sera donc $\begin{pmatrix}-5.{}^tB^{-1}&3.{}^tB^{-1}\\2.{}^tB^{-1}&-{}^tB^{-1}\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}-15&-5&.&9&3\\5&0&.&-3&0\\.&.&.&.&.\\6&2&.&-3&-1\\-2&0&.&1&0\end{pmatrix}$

Et si vous avez un doute : guess and check...

∘55∘ Inversez `[[1, 2, 1, 0], [1, 3, 3,-1], [1, 1, 0, 2], [1, 3, 5, 2]]` par méthode du pivot de Gauss.

Calcul du déterminant si on veut juste ça :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{lllllll} & & L1 & & & & \\ L2 & = & L2 & -L1 & & & \\ L3 & = & L3 & -L1 & & & \\ L4 & = & L4 & -L1 & & & \end{array} \quad \begin{array}{llll} & & L1 & \\ & & L2 & \\ L3 & = & L3 & +L2 \\ L4 & = & L4 & -L2 \end{array} \quad \begin{array}{llll} & & L1 & \\ & & L2 & \\ & & L3 & \\ L4 & = & L4 & -2.L3 \end{array}$$

Le déterminant vaut 1, la matrice est inversible.
Mais si on met un second membre ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ c-a \\ d-a \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} & & L1 & \\ L2 & = & L2 & -L1 \\ L3 & = & L3 & -L1 \\ L4 & = & L4 & -L1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ b+c-2.a \\ b+d-2.a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ b+c-2.a \\ 4.a-3.b-2.c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} & & L1 & \\ & & L2 & \\ L3 & = & L3 & +L2 \\ L4 & = & L4 & -L2 \end{array} \qquad \begin{array}{llll} & & L1 & \\ & & L2 & \\ & & L3 & \\ L4 & = & L4 & -2.L3 \end{array}$$

Connaissant $t = 4.a - 3.b - 2.c + d$, on peut remonter dans les lignes au dessus et trouver $c = -6.a + 4.c + 3.c - d$ puis $b = 15.a - 10.b - 8.c + 3.d$ et ainsi de suite.

On interprète : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & 16 & 13 & -5 \\ 15 & -10 & -8 & 3 \\ -6 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

Et la matrice qui exprime les inconnues à l'aide des paramètres est justement A^{-1}.

Mais on peut aussi coder le membre de droite sous forme matricielle :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{llll} & & L1 & \\ L2 & = & L2 & -L1 \\ L3 & = & L3 & -L1 \\ L4 & = & L4 & -L1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{llll} & & L1 & \\ & & L2 & \\ L3 & = & L3 & +L2 \\ L4 & = & L4 & -L2 \end{array} \qquad \begin{array}{llll} & & L1 & \\ & & L2 & \\ & & L3 & \\ L4 & = & L4 & -2.L3 \end{array}$$

Et pourquoi s'arrêter là ? On remonte :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -7 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 15 & -10 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rcll} L1 & = & L1 & \\ L2 & = & L2 & +L4 \\ L3 & = & L3 & -L4 \\ & & L4 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} L1 & = & L1 & -L3 \\ L2 & = & L2 & -2.L3 \\ & & L3 & \\ & & L4 & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -23 & 16 & 13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 15 & -10 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

on a reconstruit M^{-1}

$$\begin{array}{rcll} L1 & = & L1 & -2.L2 \\ & & L2 & \\ & & L3 & \\ & & L4 & \end{array}$$

Et c'est ainsi que Gauss est grand, même si ce n'est pas de lui l'idée.

Je vous le refais ?

On crée le domino et on combine

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ L_3 + L_2 \\ L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ L_4 - 2.L_3 \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 + L_4 \\ L_3 - L_4 \\ \end{array}$$

$$\uparrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 7 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 15 & -10 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 - L_3 \\ L_2 - 2.L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\uparrow$$

La matrice de droite est l'inverse cherché.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -23 & 16 & 13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 15 & -10 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

∘56∘ On donne $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}$. Peut on choisir a et b pour avoir $Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = Vect(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d})$?

∘57∘

Montrez que $f \longmapsto f'' + f'$ est un endomorphisme de $Vect(ch,\ sh,\ ch^2,\ sh^2,\ ch.sh)$. Donnez la dimension de son noyau et de son image.

Dans « endomorphisme », il y a « endomorph » et « isme ».
Mais surtout il y a « endo » et « morphisme ».
Morphisme, c'est « linéaire ».
En notant T notre transformation, il faut vérifier $T(\alpha.f + \beta.g) = \alpha.T - f) + \beta.T(g)$ pour tout quadruplet de fonctions et réels.
On a bien $(\alpha.f + \beta.g)'' + (\alpha.f + \beta.g)' = \alpha.(f'' + f') + \beta.(g'' + g')$.

Difficulté ? | *La seule difficulté ici, si il y en a une,*
c'est de bien voir que ce qu'on appelle vecteurs, ce sont les fonctions.
Et la linéarité, c'est pour $\alpha.f + \beta.g$, combinaison de vecteurs.
Et pas $f(\alpha.x + \beta.y)$, qui n'aurait aucun rapport et serait d'ailleurs faux.
Argument direct : la dérivation est linéaire.
Et j'ai bien dit « dérivation » et pas « dérivée ».

« Endo », c'est d'un espace vectoriel dans lui même.
Si f est une combinaison de $(ch,\ sh,\ ch^2,\ sh^2,\ ch.sh)$, son image $f'' + f'$ est elle aussi combinaison de

$(ch,\ sh,\ ch^2,\ sh^2,\ ch.sh)$.

Le réflexe est de poser $f = a.ch + b.sh + c.ch^2 + d.sh^2 + e.ch.sh$ et de dériver deux fois, regrouper et mettre sous la forme

$$\begin{array}{llllll} a.(& ch & +sh) & & & \\ +b.(& sh & +ch) & & & \\ +c.(& 2.ch^2 & +2.sh^2 & +2.sh.ch & &) \\ +d.(& 2.ch^2 & +2.sh^2 & +2.sh.ch) & & \\ +e.(& 4.ch.sh & & ch^2 & +sh^2) & \end{array}$$

Mais c'est un réflexe qui manque de recul. Soyons matheux.
Si on prouve la propriété pour chacun des cinq vecteurs de la base, on aura le résultat général par linéarité. Et on aura moins de constantes inutiles comme a, b, c, d et e à trainer.
Et ordonnons un peu :

ch	a pour image	ch	$+sh$			
sh	a pour image	ch	$+sh$			
ch^2	a pour image			$2.ch^2$	$+2.sh^2$	$+2.ch.sh$
sh^2	a pour image			$2.ch^2$	$+2.sh^2$	$+2.ch.sh$
$ch.sh$	a pour image			ch^2	$+sh^2$	$+4.ch.sh$

On peut d'ailleurs créer une matrice qui liste colonne par colonne l'image de chaque vecteur de base sur la base :

ch a pour image $ch + sh$ donc $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$	sh a pour image $ch + sh$ donc $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$
ch^2 a pour image ... donc $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\\2\end{pmatrix}$	sh^2 a pour image ... donc $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\\2\end{pmatrix}$
$ch.sh$ a pour image ... donc $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&2&2&1\\0&0&2&2&1\\0&0&2&2&4\end{pmatrix}$

On vérifie $\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&2&2&1\\0&0&2&2&1\\0&0&2&2&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b\\a+b\\2.c+2.d+e\\2.c+2.d+e\\2.c+2.d+4.e\end{pmatrix}$ Vous voyez le rapport avec l'approche « image d'une combinaison » ?
Sinon, c'est vrai qu'une application linéaire en dimension finie est toujours associée à une matrice.
Et comme on a un endomorphisme, la matrice est carrée.

Qui est l'ensemble image ? C'est toutes les images.
Certes, elles sont dans $Vect(ch,\ sh,\ ch^2,\ sh^2,\ ch.sh)$.
Mais elles ont une forme particulière.
On aura beau faire, les images ont toujours les deux mêmes premières composantes (avec nos notations : $a+b$).

On n'a donc pas $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ mais on a juste $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

de même, les deux composantes suivantes sont aussi égales.

On a des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\beta\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$.

L'ensemble image est de dimension 3.

D'ailleurs, en toute rigueur, on part de la base canonique $(ch,\ sh,\ ch^2,\ sh^2,\ ch.sh)$.
L'image de cette base est une famille génératrice de l'ensemble image.
On a donc $Im(T) = Vect(T(ch),\ T(sh),\ T(ch^2),\ T(sh^2),\ T(ch.sh))$.
On remplace : $Im(T) = Vect(ch + sh,\ ch + sh,\ 2.ch^2 + 2.sh^2 + 2.ch.sh,\ 2.ch^2 + 2.sh^2 + 2.ch.sh,\ ch^2 + sh^2 + 2.ch.sh)$.
On élimine les vecteurs inutiles :
$Im(T) = Vect(ch + sh,\ 2.ch^2 + 2.sh^2 + 2.ch.sh,\ ch^2 + sh^2 + 2.ch.sh)$.
On combine un peu mieux pour la lisibilité :
$Im(T) = Vect(ch + sh,\ ch^2 + sh^2,\ 2.ch.sh)$.

Ou si on préfère : $Im(T) = Vect((t \longmapsto e^t),\ (t \longmapsto ch(2.t)),\ t \longmapsto sh(2.t))$.

On a perdu deux dimensions dans l'image.
On va trouver un noyau de dimension 2.
Partant de $T(ch) = T(sh)$, on a aisément $T(ch - sh) = 0$ (linéarité).
On identifie : $ch - sh \in Ker(T)$.

De même $T(ch^2) = T(sh^2)$, donc $T(ch^2) - T - (sh^2) = 0$ puis $T(ch^2 - sh^2) = 0$.
$ch^2 - sh^2$ est dans le noyau. Normal, c'est $t \longmapsto -1$. Et cette application disparait par dérivation.

On a donc $Ker(T) = Vect(ch - sh,\ ch^2 - sh^2)$.
Et il n'est pas utile d'en chercher plus, sauf à vouloir contredire « $dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(depart)$ ».

◦58◦ ♡ Combien y a-t-il d'endomorphismes f de $(\mathbb{R}^2, +, .)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j})$ et vérifiant $f(\overrightarrow{i} - 3.\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i}$?

Le noyau nous dit $f(\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j}) = 0$ *(pour ses multiples aussi, mais ceci n'est pas une information plus interlligente).*
L'autre information nous donne $f(\overrightarrow{i} - 3.\overrightarrow{j})$.
On connaît l'image d'une base !
On connait donc par lineraite l'image de tout vecteur.

En effet, $x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j}$ se decompose d'une façon unique en $\dfrac{3.x + y}{5}.(\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j}) + \dfrac{.x - y}{5}.(\overrightarrow{i} - 3.\overrightarrow{j})$ (resolution directe d'un système).
Son image par f est donc $\dfrac{3.x + y}{5}.\overrightarrow{0} + \dfrac{.x - y}{5}.\overrightarrow{i}$.
Il n'y a donc u'une applicaton f lineaire verifiant ces conditions.

◦59◦ Le corps de base est l'ensemble des entiers de 0 à $p - 1$ (p est un nombre premier au moins égal à 5, je sais). On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. L'application linéaire est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Déterminez la dimension du noyau de f et de l'image de f (elle peut dépendre de p).
Déterminez aussi la dimension du noyau et de l'image de $M \longmapsto A.M$ de $M_{2,2}(\{0, \dots p - 1\})$ dans lui même.

Si la matrice est inversible, l'application est bijective (c'est même une équivalence).
Et si elle est bijective (d'inverse $X \longmapsto A^{-1}.X$), alors son noyau est réduit à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et son image est le plan entier [5].
On calcule le déterminant (utile d'ailleurs pour résoudre $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).
Il vaut 13. Qu'il faut réduire évetuellement modulo p.
Mais si p dépasse 13, $\det(A)$ vaut 13, et 13 est non nul.
Et p vaut au moins 5 pour que 4 ait un sens. On traite donc les premiers cas à part :

	$p = 5$	$p = 7$	$p = 11$	$p = 13$	$p > 13$
déterminant	$\det(A) \neq 0$	$\det(A) \neq 0$	$\det(A) \neq 0$	$\det(A) = 0$	$\det(A) \neq 0$
noyau	$Ker(f) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$	$Ker(f) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$	$Ker(f) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$	à voir	$Ker(f) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$
image	$Im(f) = range(p)^2$	$Im(f) = range(p)^2$	$Im(f) = range(p)^2$	à voir	$Im(f) = range(p)^2$

Au fait On ne confondra pas $range(p)^2$ et $range(p^2)$.

Quand p vaut 13, on résout $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Les deux équations sont proportionnelles. On passe de la première à la seconde en multipliant par 10 puisque

5. qui est tombé dans le piège et a dit « son image est $\R^2$ » ? non, son image est $range(p)^2$, c'est tout !

$4.10 = 40 = 1$ et $3.10 = 30 = 4$.
On résout donc juste $x + 4.y = 0$ soit $x = 9.y$.
On trouve les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} 9.y \\ y \end{pmatrix}$ c'est $Vect(\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix})$ ou $Vect(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix})$. On peut vérifier $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour l'ensemble image, on calcule $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Toutes les autres images sont combinaisons des deux : $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x.\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Mais les deux vecteurs sont proportionnels : $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 4.\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
L'ensemble image est $Vect(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Application $M \longmapsto A.M - M.A$. A faire.

◦60◦ ♡ Une application linéaire f de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ dans $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$ vérifie $f(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = X^2 + X + 1$, $f(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = X^2 - X$ et $f(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = X^2 - X$.
Calculez $f(\overrightarrow{i})$, $f(\overrightarrow{j})$ et $f(\overrightarrow{k})$. Déterminez le noyau de f.

Tout repose sur la linéarité.
Et sur le fait que $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$ est une base.
Tout vecteur se décompose à l'aide de ces trois là.

$$\begin{array}{rclllc}
\overrightarrow{i} & = & 0.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) & +1.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) & -1.(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) & facile \\
\overrightarrow{k} & = & -1.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) & +1.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) & +0.(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) & facile\ aussi \\
\overrightarrow{j} & = & 1.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) & -1.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) & +1.(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) & avec\ les\ deux\ autres
\end{array}$$

On a donc les trois images : $\begin{array}{rclll} f(\overrightarrow{i}) & = & 0 & & \\ f(\overrightarrow{j}) & = & X^2 & +X & +1 \\ f(\overrightarrow{k}) & = & & -2.X & -1 \end{array}$

On peut vérifier en recalculant $f'(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et autres.

Il saute qux yeux que $\overrightarrow{i}$ est dans le noyau.
Ainsi que ses multiples.

Est il tout seul ? En tout cas, le noyau est il uniquement cette droite ?

On peut résoudre et montrer que $f(x.\overrightarrow{i} + .\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k}) = 0$ conduit à $y = z = 0$ et x quelconque.

Sinon, on peut se dire que si le noyau avait été plus gros, il aurait été de dimension 2.
L'image aurait alors été de dimension 1.
Et visiblement, on trouve des vecteurs non colinéaires.

Oui, les polynômes à l'arrivée sont appelés vecteurs.

Pour l'ensemble image, la formule du rang nous prévient qu'il sera de dimenson 2 seulement (inclus dans $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$ qui est de dimension 3).
On sait que les vecteurs $f(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = X^2 + X + 1$, $f(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = X^2 - X$ et $f(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = X^2 - X$. sont dans l'ensemble image.
Ils en forment une famille génératrice, puisque l'image de n'importe que $.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k}$ est une combinaison des trois.
Mais comme on a un vecteur en double, on ne le met qu'une fois.

$$Im(f) = Vect(X^2 + X + 1,\ X^2 - X)$$

Et en revanche on ne sait que l'ensemble image ne fait pas partie des questions posées...

Au fait, qui a été perturbé par le fait qu'on envoyait des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ *sur des polynômes ?*
Qui a dit « c'est pas cohérent » ?
Après tout, on définit ce qu'on veut, du moment que c'est linéaire !