LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 13 mars
M.P.S.I.2

2022 2023

TD21

∘0∘

On demandait de calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, un élève a mal recopié et a calculé $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. Son déterminant est il plus grand que le déterminant demandé ? Quelle est la valeur de la différence $|eleve - demande|$. *Si vous calculez réellement les deux déterminants de taille* 4*, vous n'aurez pas tort, mais vous ne serez pas digne de rester en MPSI2.*

Quelle est la différence entre les deux formules ?

Dans l'une : $+5.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ et dans l'autre $-5.\begin{vmatrix} 2 & 3 & & 1 \\ 2 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & & 3 \end{vmatrix}$.

La différence vaut $10.\begin{vmatrix} 2 & 3 & & 1 \\ 2 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & & 3 \end{vmatrix}$.

Après, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2.\begin{vmatrix} 2 & & 1 \\ & & \\ 1 & & 3 \end{vmatrix} = -10.$

∘1∘

Soit A une matrice de taille n sur n et U_1 à U_k des vecteurs propres de A associé à des valeurs propres distinctes λ_1 à λ_k ($A.U_i = \lambda_i.U_i$et $U_i \neq O_n$). Montrez que la famille $(U_1, \dots U_k)$ est libre *(partir de $\alpha_1.U_1 + \ldots + \alpha_k.U_k = 0_n$ et appliquer A autant de fois qu'il faut)*.
Concluez que si A admet n valeurs propres distinctes, alors il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale vérifiant $A.P = P.D$ *(on montrera qu'il existe au moins un vecteur propre pour chaque valeur propre, et on mettra ces vecteurs propres dans le matrice P)*.

On se donne k réels α_1 à α_k (les λ_i sont déjà pris pour désigner les valeurs propres).
On suppose $\alpha_1.U_1 + \ldots + \alpha_k.U_k = 0_n$. Objectif : les α_i sont nuls.

On applique A (formats compatibles) : $A.(\alpha_1.U_1 + \ldots + \alpha_k.U_k) = A.0_n$.

On distribue : $\alpha_1.A.U_1 + \ldots + \alpha_k.A.U_k = 0_n$ (les réels traversent les produits matriciels : $a.N.P = N.a.P = N.P.a$).

Mais chaque vecteur est vecteur propre $\alpha_1.\lambda_1.U_1 + \ldots + \alpha_k.\lambda_k.U_k = 0_n$.

On écrit même $\lambda_1.(\alpha_1.U_1) + \ldots + \lambda_k.(\alpha_k.U_k) = 0_n$.

On multiplie à nouveau par A à gauche : $A.\Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i.\alpha_i.U_i\Big) = 0_n$.

Même distribution : $\sum_{i=1}^{k} A.\lambda_i.\alpha_i.U_i = 0_n$.

Même traversée : $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i.\alpha_i.A.U_i = 0_n$.

Même propreté : $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i.\alpha_i.\lambda_i.U_i = 0_n$.

Même regroupement : $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i)^2.\alpha_i.U_i = 0_n$.

On recommence avec le même schéma : $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i)^3.\alpha_i.U_i = 0_n$.

Par récurrence naturelle sur l'exposant p (ou sur le nombre de fois où on a multiplié par A) :

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i)^p.\alpha_i.U_i = 0_n$$

Ecrivons k formules de cette liste les unes sous les autres :

$$\begin{array}{ccccccc} 1.\alpha_1.U_1 & + & 1.\alpha_2.U_2 & + & \dots & +1.\alpha_k.U_k & = & 0_n \\ \lambda_1.\alpha_1.U_1 & + & \lambda_2.\alpha_2.U_2 & + & \dots & +\lambda_k.\alpha_k.U_k & = & 0_n \\ (\lambda_1)^2.\alpha_1.U_1 & + & (\lambda_2)^2.\alpha_2.U_2 & + & \dots & +(\lambda_k)^2.\alpha_k.U_k & = & 0_n \\ \vdots & & & & & & & \\ (\lambda_1)^{k-1}.\alpha_1.U_1 & + & (\lambda_2)^{k-1}.\alpha_2.U_2 & + & \dots & +(\lambda_k)^{k-1}.\alpha_k.U_k & = & 0_n \end{array}$$

Matriciellement, ce système s'écrirait $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ (\lambda_1)^2 & (\lambda_2)^2 & \dots & (\lambda_k)^2 \\ \vdots & & & \\ (\lambda_1)^{k-1} & (\lambda_2)^{k-1} & \dots & (\lambda_k)^{k-1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha_1.U_1 \\ \alpha_2.U_2 \\ \alpha_3.U_3 \\ \vdots \\ \alpha_k.U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n \\ 0_n \\ 0_n \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}$
même si la notion de « vecteur de vecteurs » est un peu louche.
De toutes façons, c'est un système linéaire, dont la matrice est « de VanDerMonde ».
Comme les λ_i (les valeurs propres) sont distincts, la matrice de VanDerMonde est inversible.
L'unique solution est donc que chaque $\alpha_i.U_i$ soit égal à 0_n *(vecteur nul)*.
Par définition, un vecteur propre est non nul [1], c'est donc que c'est α_i qui est nul.

On a donc bien prouvé k vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de la matrice A sont linéairement indépendants.

On a de même k vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de l'endomorphisme f sont linéairement indépendants.

Comme la taille des familles libres est plafonnée, le nombre de valeurs propres est limité.

Suppsons que le poynôme caractéristique de A admet n valeurs propres distinctes (n est le format de la matrice, et aussi le degré du polynôme caractéristique).
Pour chaque valeur propre λ, on a $\det(A - \lambda.I_n) = 0$.
La matrice $A - \lambda.I_n$est non inversible.
Il existe une relation de dépendance linéaire sur ses colonnes.
Il existe donc un vecteur non nul U (formé des coefficients d'une telle relation) vérifiant $(M - \lambda.I_n).U = 0_n$.
Quitte à faire passer de l'autre côyté le $\lambda.I_n.U$, on a un vecteur propre : $M.U = \lambda.U$.

Chaque racine du polynôme caractéristique apporte un vecteur propre. Au moins un (pensez au cas des racines doubles qui vont peut être en amener plusieurs).

Comme on a supposé que le polynôme caractéristique avait n racines distinctes, on donc n vecteurs prorpes associés à ces n valeurs propres distinctes.
Mais par le résultat précédent *(appelé parfois « corollaire de VanDerMonde »)*, ces vecteurs propres forment une famille libre.

En tant que famille libre de bon cardinal n, la famille $(U_1, \dots, U_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

En prenant pour P la matrice de cette falille de vecteur (changement de base), les relations $A.U_i = \lambda_i.U_i$ donnent, colonne par colonne : $A.P = P.D$ avec $D = Diag(\lambda_1, \dots \lambda_n)$.

On a prouvé que toute matrice ayant autant de valeurs propres distinctes que son format est diagonalisable.

Ce qui va donc empêcher une matrice diagonalisable :
• pas assez de valeurs propres *(sur $\mathbb{R}$ par exemple, avec un spectre non réel)*
• des racines doubles dans le polynôme caractéristique, qui ne vont pas apporter assez de vecteurs propres.

1. sinon, avec $U = 0_n$, la relation $A.U = \lambda.U$ ne permet pas de déterminer λ)

Attention, même avec des valeurs orpres multiples, certaines se diagonalisent, comme I_n qui n'a qu'une valeur propre (c'est 1) mais est déjà diagonale.

Le critère fin sera : chaque valeur propre apporte-t-elle autant de vecteurs propres indépendants que sa multiplicité dans le polynôme caractéristique ?

∘2∘

♡ Pour tout n, on pose $c_n = (\theta \longmapsto \cos(n.\theta))$ et $\sigma_n = (\theta \longmapsto \cos^n(\theta))$. Montrez que la famille $(c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4)$ est libre dans $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ +,\ .)$. Montrez que la famille $(\sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_4)$ est libre dans $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ +,\ .)$ et engendre le même sous-espace vectoriel que $(c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4)$. Donnez la matrice de changement de base.

On se donne cinq réels a_0 à a_4 quelconques (quantification de $\forall (a_0, \dots a_4) \in \mathbb{R}^5$)
et on suppose $a_0.c_0 + a_1.c_1 + a_2.c_2 + a_3.c_3 + a_4.c_4 = 0$ (fonction nulle).
On doit montrer que a_0 jusqu'à a_4 sont nuls.

Une méthode :

on calcule en 0	$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$
on dérive $a_0.c_0 + a_1.c_1 + a_2.c_2 + a_3.c_3 + a_4.c_4 = 0$	$-a_1.c_1 - a_2.2.c_2 - a_3.3.c_3 - a_4.4.s_4 = 0$
et on re-dérive	$-a_1.c_1 - a_2.4.c_2 - a_3.9.c_3 - a_4.16.c_4 = 0$
on calcule en 0	$-a_1 - a_2.4 - a_3.9 - a_4.16 = 0$
on re-dérive deux fois	$-a_1.c_1 - a_2.16.c_2 - a_3.81.c_3 - a_4.64.c_4 = 0$
on calcule en 0	$-a_1 - a_2.16 - a_3.81 - a_4.64 = 0$
on recommence	

On finit par obtenir un système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 16 & 81 & \\ 0 & 1 & 64 & 729 & \\ 0 & 1 & 256 & 6561 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est de type VanDerMonde. Inversible.
La seule solution est « tous les $a_k$sont nuls ».

Autres méthodes : regarder aussi en π pour avoir autant de relations sans trop dériver
regarder en quelques points (au lieu de dériver et toujours regarder en 0), et obtenir encore un système de Cramer.

Cette fois, on se donne des b_k et on suppose

$$\forall x,\ b_0.(\cos(x))^0 + b_1.(\cos(x))^1 + b_2.(\cos(x))^2 + b_3.(\cos(x))^3 + b_4.(\cos(x))^4 = 0$$

Le polynôme $b_0 + b_1.X + b_2.X^2 + b_3.X^3 + b_4.X^4$ est nul sur tout $[-1,\ 1]$.
Il a plus de racines que son degré ? Il est nul !
Les b_k sont nuls.

On notera que grâce aux formules de Tchebychev, on pet ramener les c_k en combinaisons des σ_i et profiter de la liberté des uns pour obtenir celle des autres.

Toute combinaison des c_k est effectivement combinaison des σ_i.
On en déduit $Vect(c_0, \dots c_4) \subset Vect(\sigma_0, \dots \sigma_4)$.
Mais les deux espaces ont la même dimension.
Ils sont égaux ;
On exprime même les uns à l'aide des autres :

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & \sigma_0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & \sigma_4 \\ = & = & = & = & = & \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \end{array}$$

La quatrième colonne nous renseigne : $c_3 = 4.\sigma_3 - 3.\sigma_0$ (à l'étage des fonctions)

$$\forall x,\ \cos(3.x) = 4.\cos^3(x) - 3.\cos(x)$$

à l'étage des réels
colonne de coefficients $0, -3, 4, 0, 0$ pour dire ce qu'on sait de c_3.

On peut inverser la matrice « à la main » : $\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{matrix}$ c'est à dire

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3/8 & | & \sigma_0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 & | & \sigma_1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & | & \sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & | & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & | & \sigma_4 \\ = & = & = & = & = & & \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & & \end{matrix}$$

On retrouve par exemple $\forall x,\ \cos^3(x) = \dfrac{3.\cos(3.x) + \cos(x)}{4}$.

∘3∘ Soit la famille $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i} + 5.\overrightarrow{j},\ 2.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{j} + 3.\overrightarrow{k})$. Combien de familles libres peut on en extraire ? Combien de familles génératrices de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ peut on en extraire ?

$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{i} + 5.\overrightarrow{j}$	$2.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$	$\overrightarrow{j} + 3.\overrightarrow{k}$	
				libre car vide
$\overrightarrow{i}$				libre (un vecteur non nul)
	$\overrightarrow{i} + 5.\overrightarrow{j}$			libre (un vecteur non nul)
		$2.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$		
			$\overrightarrow{j} + 3.\overrightarrow{k}$	
$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{i} + 5.\overrightarrow{j}$			libre (non colinéaires)
$\overrightarrow{i}$		$2.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$		libre (non colinéaires)
				et ainsi de suite

On peut créer 2^4 (ce qui fait 16) familles.
Et une seule n'est pas libre, celle formée de tous les vecteurs (quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on sait que c'est fichu).
Mais sinon, les familles de trois sont libres $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ sont non nuls.
Total : 15 familles libres.

Pour les familles génératrices, il faut au moins trois vecteurs. Et chaque fois qu'on en prend trois, c'est bon, on a une base.
Et on peut y adjoindre la famille à quatre vecteurs.
D'où cinq familles génératrices de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

Question : et si on s'autorise à prendre plusieurs fois le même ?

Et quatre bases. Avec six permutations pour chacune..

∘4∘ ♡ Donnez la dimension de l'espace des matrices réelles carrées de taille 4 vérifiant ${}^tM = 5.M$.
Donnez la dimension du $\mathbb{C}-$espace vectoriel des matrices carrées de taille 4 vérifiant ${}^tM = i.M$.
Rappel : si la matrice A a pour terme général a_i^k, alors la matrice ${}^tA$ a pour terme général a_k^i. Pensez à regarder ${}^t({}^tA)$.

Ces ensembles sont bien des espaces vectoriels. La matrice nulle vérifie ceci.
Et si on a ${}^tM = 5.M$ et ${}^tN = 5.N$ alors on a bien ${}^t(\alpha.M + \beta.N) = 5.(\alpha.M + \beta.N)$.

Mais en fait, c'est très rapide. Si on a ${}^tM = 5.M$ alors on a aussi ${}^t({}^tM) = 5.{}^tM$ en transposant
$M = 5.{}^tM$ en simplifiant
$M = 5.(5.M)$
La seule matrice possible est la matrice nulle.

Remarque : | Il était inutile de redescendre jusqu'aux coefficients.

La dimension vaut 0.
Il en est de même avec i.

∘5∘

Existe-t-il une matrice de $M_5(\mathbb{R})$ dont le carré est $-I_5$?

Je pose 25 coefficients, j'écris 25 équation...
Et je finis à l'E.N.S.F.C.C. (ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE FABRICATION DES CUVETTES DE CHIOTTES, ça finira bien par exister, pour que les élèves bas de plafond aient un débouché).

Non, on réfléchit et on se dit qu'il doit y avoir une solution simple, avec la présence du mot « réel » et la dimension 5.
Par l'absurde, si il existe une telle matrice M, alors $M^2 = -I_n$.
On passe au déterminant :

$$(\det(M))^2 = \det(M^2) = \det(-I_5) = (-1)^5.\det(I_5) = -1$$

Et on a notre contradiction.

∘6∘

Calculez en fonction de n le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ après avoir donné la forme de son terme général (a_i^k en fonction de i et k).

En fait, dès que n est trop grand, ce déterminant est nul, car il y a deux colonnes égales.

Remarque : | Suivant votre recul : famille liée déterminant nul (réaction normale MP !)
on soustrait la première colonne sur la dernière et on développe par rapport à cette colonne de 0 (démarche de qui a fini par ne voir que des méthodes de calcul et n'a plus le recul sur ce qu'est un déterminant.. PSI !

Pour la définir, disons en indexation classique : $\begin{matrix} 1 & si & i=1 & ou & i=n \\ & ou & k=1 & ou & k=n \\ 2 & sinon & & & \end{matrix}$.

Avec **Python** :

```
A = [[2 for k in range(n)] for i in range(n)]
for i in range(n) :
....A[0][i] = 1
....A[n-1][0] = 1
....A[i][0] = 1
....A[i][n-1]=1
```

Et tant pis si les coins sont changés deux fois.
On peut aussi utiliser un seul constructeur direct

```
A = [[1+int(0<i<n-1 and 0<k<n-1) for k in range(n)] for i in range(n)]
```

∘7∘

Montrez que toute matrice réelle symétrique $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ admet deux valeurs propres distinctes ou est de la forme $a.I_2$.
Montrez qu'une matrice complexe symétrique $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ peut admettre la valeur propre 0 (valeur propre double) sans pour autant être la matrice nulle.

Le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est $X^2 - (a+c).X + (a.c - b^2)$.
Son discriminant vaut $(a-c)^2 + 4.b^2$.
Si $a = c$ et $b = 0$, le discriminant est nul, on a une racine double, mais la matrice est $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, déjà diagonale [2]
Sinon, le discriminant est strictement positif, on a deux valeurs propres distinctes et le corolaire de VanDerMonde fait que la matrice est diagonalisable.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ a pour trace et déterminant 0.
Son équation caractéristique est $x^2 = 0$ d'inconnue x.
Elle n'a qu'une valeur propre : 0.
Si elle se diagonalisait, on aurait $M = P.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.P^{-1}$ pour P convenable, ce qui est impossible.
Elle ne se diagonalise pas, mais se trigonalise en $M = P.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.P^{-1}$ (forme $M = P.\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.P^{-1}$ avec λ nul).
Il suffit de prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$ par exemple.
Vérifiez

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

∘8∘

Montrez que toutes les puissances d'une matrice symétrique sont symétriques. Qu'en est il des matrices antisymétriques ?
Montrez que le produit de deux matrices symétriques n'est pas forcément une matrice symétrique. Même question avec antisymétrique.

∘9∘

Que fait ce script *(la liste de listes est une matrice carrée)* ?

```
def truc(M) :
....for i in range(len(M)) :
........for k in range(len(M[i]) :
............M[k][i], M[k][i] = M[i][k], M[k][i]
....return(M)
```

Ne serait ce pas une transposition ?
L'affectation simultanée `M[k][i], M[k][i] = M[i][k], M[k][i]` va échanger `M[i][k]` et `M[k][i]`
(sans en perdre, contrairement à `M[k][i]= M[k][i]` `M[i][k]=M[k][i]`).
Ne serait on pas en train de fabriquer la transposée de la matrice M ?

Seulement voilà, il y a un problème.
On passe une fois sur chaque case. Et on en échange deux à chaque fois.
On va échanger `M[i][k]` et `M[k][i]` lors du passage i=1, k=2
mais aussi lors du passage i=2, k=1.
les termes en position symétrique vont être permutés deux fois.

On retrouve la matrice initiale...

Mais en plus, ce n'est pas l'échange `M[k][i], M[k][i] = M[i][k], M[k][i]` du type a,b = b, a.
C'est `M[k][i], M[k][i] = M[i][k], M[k][i]`.

∘10∘

Montrez que l'espace des matrices antisymétriques de taille $n+1$ a la même dimension que l'espace des matrices symétriques de taille n.

Le premier est de dimension $\dfrac{(n+1).(n+1-1)}{2}$.

2. donc diagonalisable avec $P = I_2$ par exemple)

Le second est de dimension $\frac{(n+1).n}{2}$. C'est pareil.

Pour saisir : on remplit une matrice symétrique de taille n en choisissant les termes au dessus de la diagonale.
on remplit une matrice antisymétrique en choisissant les termes strictement au dessus de la diagonale (la diagonale est nulle à cause de $-a = a$).
On a autant de termes à choisir.

Pour mieux saisir encore avec $n = 4$.

symétriques de taille 4		antisymétriques de taille 5
$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & i \\ -c & -f & -h & 0 & j \\ -d & -g & -i & -j & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ & e & f & g \\ & * & h & i \\ & * & * & j \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ & 0 & e & f & g \\ & * & 0 & h & i \\ & * & * & 0 & j \\ & * & * & * & 0 \end{pmatrix}$
$4+3+2+1 = \frac{4.5}{2}$		$4+3+2+1 = \frac{4.5}{2}$

∘11∘ Calculez à 10^{-7} près $\sqrt[1/\ln(5)]{e}$ et même pourquoi pas à 10^{-8} près...

$$\sqrt[1/\ln(5)]{e} = e^{\ln(5)} = 5$$

car $\sqrt[a]{b} = b^{\frac{1}{a}}$

Et si je le posais en Terminale celui là ?

∘12∘ On se donne quatre polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3 dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}_3(X], +, .)$ et quatre réels distincts a_0, a_1, a_2 et a_3 *(pourquoi est ce que cela ne se quantifie pas $a_0 \neq a_1 \neq a_2 \neq a_3$?)*. On définit alors la matrice M de terme général $P_i(a_k)$. Montrez que si la famille est liée, son déterminant est nul.
Exprimez cette matrice à l'aide de la matrice exprimant les P_i sur la base canonique et d'une matrice de VanDerMonde. Montrez que le déterminant de M est nul si et seulement si la famille des P_i est libre.
Chaque polynôme $\sum_{j=0}^{d} c_j.X^j$ est représenté par la liste $[c_0, \dots c_d]$. Votre script devra prendre en entrée la liste `LP` des `d` polynômes et la liste `A` des abscisses $[a_0, \dots a_{d-1}]$ et retourner la matrice `M` *(de taille `d` sur `d`)* définie ci dessus.

Déjà, la relation $a_0 \neq a_1 \neq a_2 \neq a_3$ n'interdit pas $a_1 = a_3$ ou $a_2 = a_0$.
Il est effectivement bien plus intelligent de dire « tous distincts » que d'inventer des chaines de non égalités, ou même des $\forall (i,\ j),\ a_i \neq aj$ (toujours pas correct, voyez vous pourquoi ?).

Quelle famille serait liée ? Celle des polynômes (qui a une chance d'être libre, les polynômes sont quatre, et $(\mathbb{R}_3(X], +, .)$ est de dimension 4).
Pas la famille de réels, quatre réels dans $\mathbb{R}$ (espace vectoriel de dimension 1) sont forcément liés...

On suppose que l'un des $P_i$est combinaison linéaire des autres.
Par exemple, par symétrie des rôles : $P_3 = a.P_0 + b.P_1 + c.P_2$.
Mais alors dans la matrice

$$\begin{pmatrix} P_0(a_0) & P_0(a_1) & P_0(a_2) & P_0(a_3) \\ P_1(a_0) & P_1(a_1) & P_1(a_2) & P_1(a_3) \\ P_2(a_0) & P_2(a_1) & P_2(a_2) & P_2(a_3) \\ P_3(a_0) & P_3(a_1) & P_3(a_2) & P_3(a_3) \end{pmatrix}$$

l'une des lignes est combinaison linéaire des autres.
La matrice a donc un déterminant nul.

Si on pose par exemple $P(X) = \alpha + \beta.X + \gamma.X^2 + \delta.X^3$, alors on a

$$\begin{pmatrix} P(a_0) & P(a_1) & P(a_2) & P(a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ (a_0)^2 & (a_1)^2 & (a_2)^2 & (a_3)^2 \\ (a_0)^3 & (a_1)^3 & (a_2)^3 & (a_3)^3 \end{pmatrix}$$

On compacte :

$$\begin{pmatrix} P_0(a_0) & P_0(a_1) & P_0(a_2) & P_0(a_3) \\ P_1(a_0) & P_1(a_1) & P_1(a_2) & P_1(a_3) \\ P_2(a_0) & P_2(a_1) & P_2(a_2) & P_2(a_3) \\ P_3(a_0) & P_3(a_1) & P_3(a_2) & P_3(a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ (a_0)^2 & (a_1)^2 & (a_2)^2 & (a_3)^2 \\ (a_0)^3 & (a_1)^3 & (a_2)^3 & (a_3)^3 \end{pmatrix}$$

et ceci répond parfaitement à la demande.

Les a_i étant distincts, la matrice de VanDerMonde est inversible (déterminant non nul).

La matrice initiale M a donc un déterminant nul si et seulement si $\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{pmatrix}$ (ou sa transposée) a un déterminant nul.

Et la transposée est précisément celle qui exprime les vecteurs P_i sur la base canonique de $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$.

Script Python.

∘13∘

♡ Calculez $\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -X & 1 \\ e & d & c & b & a-X \end{vmatrix}$ en combinant les colonnes. Montrez que pour tout polynôme donné de degré n il existe une matrice dont il est le polynôme caractéristique.

Avec des notations naturelles, le déterminant ne change pas si on remplace C_0 par $C_0 + X.C_1 + X^2.C_2 + X^3.C_3$

$$\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -X & 1 \\ e & d & c & b & a-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -X & 1 \\ S & d & c & b & a-X \end{vmatrix}$$

avec $S = e + d.X + c.X^2 + b.X^3 + a.X^4 - X^5$.

On développe par rapport à la première colonne, on trouve $S.1$ puisque $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -X & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -X & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Le déterminant vaut $-(X^5 - a.X^4 - b.X^3 - c.X^2 - d.X - e)$.

Et c'est par définition le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ e & d & c & b & a \end{pmatrix}$. *(rappel : $\det(A - X.I_5)$).*

Vous voulez une matrice de polynôme caractéristique $X^5 - X^4 + 2.X^3 - 3.X^2 + X + 6$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vous voulez une matrice de polynôme caractéristique $X^3 - 3.X^2 + X - 7$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Et ainsi de suite. En dimension n, on crée la matrice de Frobenius dont les coefficients de la dernière ligne sont (au signe près) les coefficients du polynôme unitaire cherché.

◦14◦

Parmi ces sous-ensembles de l'espace vectoriel des polynômes lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

polynômes nuls en 0	polynômes à coefficients positifs ou nuls
polynômes de degré 3	polynômes multiples de $X-1$
polynômes ne contenant que des monômes de degré impair	polynômes multiples de $X-1$ ou $X+1$
polynômes de terme constant nul	polynômes multiples de $X-1$ et $X+1$
polynômes de terme constant 1	polynômes nul en 1 ou en 3
polynômes dont la dérivée est soit nulle, soit ne contenant que des monômes de degré impair	

Il suffit de vérifier à chaque fois la présence du neutre, la stabilité par addition, et multiplication par un réel. Ou sinon, on trouve un contre-exemple.

polynômes nuls en 0	oui	polynômes à coefficients positifs ou nuls	non
noyau de $P \longmapsto P(0)$		passage à l'opposé	
polynômes de degré 3	non	polynômes multiples de $X-1$	oui
absence du nul, ou même $(X^3+1)-(X^3+X)$		stabilités...	
polynômes ne contenant que des monômes de degré impair	oui	polynômes multiples de $X-1$ ou $X+1$	non
$Vect(X, X^3, X^5, \ldots)$		stabilité : $2.(X+1)+(X-1)$ n'est multiple d'aucun	
polynômes de terme constant nul	oui	polynômes multiples de $X-1$ et $X+1$	oui
trois lignes plus haut !		de la forme $(X^2-1).P(X)$	
polynômes de terme constant 1	non	polynômes nul en 1 ou en 3	non
où est le nul ?		$(X-1)+(X-3)$ n'est plus nul en 1 ni en 3	
polynômes dont la dérivée est soit nulle, soit ne contenant que des monômes de degré impair			
oui : $Vect(1, X^2, X^4, X^6, \ldots)$			

◦15◦

♡ S est la matrice d'un Su-Do-Ku convenablement rempli (taille 9 sur 9, sur chaque colonne, sur chaque ligne et sur chaque "maison de taille 3 sur 3", on retrouve les entiers de 1 à 9). Montrez que $\det(S-45.I_9)$ est nul *(indication : le vecteur fait de 9 composantes égales à 1 donne un système non inversible)*.

On construit le vecteur dont tous les coefficients (de taille 9) valent 1.
Quand on le pose sur la matrice, on récupère la somme des coefficients de chaque ligne.
Et comme chaque ligne est formée des entiers de 1 à 9, la somme en question vaut 45.
Bref, $M.U = 45.U$.

On fait passer de l'autre côté : $M.U - 45.U = 0_9$.

On rend les formats plus compatibles : $M.U - 45.I_9.U = 0_9$ (qui aurait été assez stupide pour écrire $(M - 45).U = 0_9$? aucun d'entre vous j'espère, vu que j'insiste pour que vous n'écrivez pas des polymères de formules mais visualisiez les objets manipulés...).

On factorise : $(M - 45.I_9).U = 0_9$.
Ceci prouve que $M - 45.I_9$ ne peut pas être inversible (sinon en multipliant par son inverse, on aurait vite $U = 0_9$).
C'est donc que son déterminant est nul.

Des idées élémentaires à mettre bout à bout. Zéro calcul lourdingue. De l'algèbre linéaire. Des maths.

○16○ ♡ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Montrez qu'il n'y a pas de matrice M vérifiant $A.M = B$ *(pensez au déterminant, oh non, j'en ai trop dit !)*.
Remplacez le coefficient 5 de la matrice B par ce que vous voulez pour que l'équation ait une solution.
Combien en a-t-elle alors *(évidemment, je n'attends pas de vous que vous posiez un système de neuf équations à neuf inconnues, sauf si vous visez la P.S.I.X.)*.
Et qu'en est il alors de l'équation $M.A = B$ d'inconnue M ?

○17○ ♡ On pose $u_n = n^{1/n}$. Déterminer le plus grand terme de cette suite et sa limite.

Cette suite est bien définie à partir du rang 1, et c'est $\left(\exp\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right)_n$.
On peut la voir comme une fonction, pour laquelle on ne regarde que les abscisses entières.
Elle a le même sens de variation que son logarithme : $n \longmapsto \dfrac{\ln(n)}{n}$.
On rend la variable réelle le temps de lire les variations, afin de pouvoir dériver : $n \longmapsto \dfrac{1 - \ln(n)}{n^2}$.

La fonction réelle a son maximum en e.

La suite a son maximum en 2 ou 3 (croissante de 1 à 2 , décroissante de 3 à l'infini).
On compare $2^{1/2}$ et $3^{1/3}$.
Sans calculatrice, merci. Il suffit de les élever à la puissance 6 :

$$(2^{1/2})^6 = 2^3 = 8 < 9 = 3^2 = (3^{1/3})^6$$

Le plus grand terme est $\boxed{\sqrt[3]{3}}$

La limite en $+\infty$ est 1 car $\dfrac{\ln(n)}{n}$ tend vers $\boxed{0}$ (croissances comparées[3].

○18○ Calculez module et argument de $2^{i.\pi/3}$. Calculez module et argument de $e^{(e^{i.\pi/3})}$. Calculez module et argument de $(e^e)^{i.\pi/3}$.

$2^{i.\pi/3}$	$e^{i.\ln(2).\pi/3}$	1	$\dfrac{\ln(2).\pi}{3}$
$e^{(e^{i.\pi/3})}$	$e^{\frac{1+i.\sqrt{3}}{2}}$	$e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$(e^e)^{i.\pi/3}$	$e^{i.e.\pi/3}$	1	$\dfrac{e.\pi}{3}$

Aucun de ces angles n'est sympathique ni classique.
L'exercice devrait être un classique en Terminale, pour vous habituer à manipuler l'exponentielle complexe...

3. au pluriel, car pour les comparer, il en faut plusieurs, on réfléchit, merci !

∘19∘ Pouvez vous trouvé les quatre erreurs qu'il y à dans cette phrases ?

« trouvé » au lieu de « trouver »	« à » au lieu de « a »
phrases au pluriel	« quatre » au lieu de « trois »

∘20∘ ♡ Ajustez pour qu'elles aient même trace, même somme des mineurs de taille 2 et même déterminant :
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & & \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 13 \\ & -5 & 42 \\ -11 & -1 & 18 \end{pmatrix}$.

On appelle mineurs de taille 2 de la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ chacun des trois déterminants $\begin{vmatrix} a & b & \\ a' & b' & \\ & & . \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & & c \\ & . & \\ a'' & & c'' \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} . & & \\ & b' & c' \\ & b'' & c'' \end{vmatrix}$ (que vaut cette somme si la matrice est triangulaire ?)

On égalise les traces $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 13 \\ & -5 & 42 \\ -11 & -1 & 18 \end{pmatrix}$.

On nomme les deux coefficients : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 13 \\ b & -5 & 42 \\ -11 & -1 & 18 \end{pmatrix}$.

On égalise les déterminants $2.a - 4 = -13.b - 379$.
On égalise la somme des mineurs de taille 2 : $4 = 4$.

Finalement, même si on s'attendait à deux conditions et un système, on n'en a qu'une.
Par exemple : $b = 1$ et $a = -194$.

Question : les deux matrices sont elles alors semblables ?
Oui, par transitivité, en les rendant semblables à la même matrice diagonale.

∘21∘ ♡ Donnez deux matrices carrées de taille 2 de trace 6 et de déterminant 9. Lesquelles sont diagonalisables ?

Une seule sera diagonalisable, celle qui est déjà diagonale : $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Toutes les autres ont une valeur propre double et ne se diagonalisent pas.
Comme $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

∘22∘ ♣ (a_n) est une suite d'entiers naturels. On suppose : $((a_n)!)$ est croissante, $(a_{n!})$ est décroissante et a_{12} vaut 12 que vaut a_{2019} ?

(a_n) est une suite d'entiers naturels. On peut donc définir $(a_n)!$ pour tout entier naturel n. Pour que cette suite soit croissante, il faut et il suffit, « par composition inverse » que (a_n) soit croissante. A un petit détail près : la suite peut « s'amuser un certain temps » à prendre les valeurs 0 et 1 ; l'application avec des factorielles sera croissante, car constante. Mais comme un terme vaut 12, la suite est contrainte de croitre (mais elle pourrait faire des bêtises du style

$$(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 12, \ldots)$$

et par la fonction factorielle, on obtiendrait

$$(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 24,\ 479001600, \ldots)$$

Mais la suite « extraite » $(a_1,\ a_1,\ a_2,\ a_6,\ a_{24},\ a_{120},\ \ldots)$ devrait décroître. Or, la voici extraite d'une suite croissante.
Elle est donc à la fois croissante et décroissante. Elle est constante.
La suite croissante contient une suite constante.
Comme un terme vaut 12, $\boxed{\text{ils valent tous 12}}$

Une remarque d'ailleurs, due à monsieur Pierre de Fermat : comment la suite d'entiers naturels $(a_{n!})$ peut elle décroitre sans devenir stationnaire ?

∘23∘

On sait que $\begin{pmatrix} -3 & 12 & -4 \\ 7 & & 10 \\ & -81 & \end{pmatrix}$ *(notée M)* a pour vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et pour valeur propre -3.
Calculez son déterminant. Diagonalisez la.

$$\begin{pmatrix} -3 & 12 & -4 \\ 7 & & 10 \\ & -81 & \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donc $\alpha = 1$ et quelques équations rapides.
On trouve déjà $\begin{pmatrix} -3 & 12 & -4 \\ 7 & -26 & 10 \\ a & -81 & b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ avec $a + 2.b - 81 = 2$.
Ensuite

$$\begin{pmatrix} -3 & 12 & -4 \\ 7 & -26 & 10 \\ a & -81 & b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \beta . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

donc $\beta = 4$ et d'autres équations pour b tout seul.
La matrice est finalement $\begin{pmatrix} -3 & 12 & -4 \\ 7 & -26 & 10 \\ 21 & -81 & 31 \end{pmatrix}$.
On a deux des ses valeurs propres : 1 et 4.
On trouve la troisième par la trace : -3 (pour que la somme vaille 2).

Le déterminant est alors le produit -12.

Remarque : *Sans effort, S.V.P.*
On ne se rue pas sur « j'ai appris tout petit à calculer des déterminants 3 sur 3 par la règle de Sarrus.
On réfléchit !

De même, pour diagonaliser, on réfléchit. Qui sont les crétins qui vont aller chercher le polynôme caractéristique, puis le résoudre ?
On a les trois valeurs propres : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
On a deux vecteurs propres : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ? \\ 1 & 1 & ? \\ 2 & 3 & ? \end{pmatrix}$.
On doit juste résoudre $M.U = -3.U$ ensuite, en imposant même une condition puisqu'on sait par avance qu'il y a une infinité de solutions.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Remarque : *Un exercice excellent pour voir i vous avez compris ce que c'est que diagonaliser.*
Ou si vous savez juste diagonaliser pour avoir des points en suivant toujours la même méthode.
Devinez quel est le profil recherché par les concours.
Devinez quel est le profil recherché par les sociétés (sauf par celles qui vont vous payer mille deux cent euros par mois, parce que vous valez juste un peu plus qu'un ordinateur).

∘24∘

Déterminez la somme des chiffres de $45 \times 999...99$ *(il y a 45 chiffres 9)*.

On regarde les premiers

45×999	45×9999	45×99999	45×999999	$45 \times 99\ldots9$
44955	449955	4499955	44999955	$449\ldots955$

On le prouve : $45 \times 99\ldots9 = 45.(10^{n+1} - 1) = 45.10^{n+1} - 45$.
Le nombre $449\ldots955$ est parfait : $449\ldots955 + 55 = 45000\ldots0$.

On a donc juste à calculer $4 + 4 + 9 \times (n-2) + 5 + 5$ pour avoir la somme des chiffres.

$18 + 9.43 = 405$

Et avec Python pour vérifier :

```
a = '9'*45 #le symbole '9' dupliqué 45 fois
```

(vérification : ’99999999999999999999999999999999999999999999’)

```
b = 45*int(a) #conversion en int et multiplication
```
(vérification : 4499999999999999999999999999999999999999999955)

```
bb = str(b) #reconversion en string pour lire les chiffres un à un
```
(vérification ’4499999999999999999999999999999999999999999955’)
```
s = 0
for chiffre in b :
....s += int(chiffre)
```

∘25∘ On donne $Card(A) = 10$, $Card(B) = 15$, $Card(C) = 20$, $Card(A \cap B) = 7$, $Card(A \cap C) = 9$ et $Card(B \cap C) = 8$. Pouvez vous déduire la valeur de $Card(A \cup B \cup C)$? Pouvez vous encadrer la valeur de $Card(A \cup B \cup C)$?

Sur les cardinaux, a formule du crible existe (en passant par les fonctions indicatrices) :

$Card(A \cup B \cup C) =$	$Card(A)$	$-Card(B \cap C)$	
	$+Card(B)$	$-Card(A \cap C)$	$+Card(A \cap B \cap C)$
	$+Card(C)$	$-Card(A \cap B)$	

On remplace ce qu’on peut remplacer (après avoir vérifié les cohérences du type $E \subset F \Rightarrow Card(E) \leqslant Card(F)$)

$Card(A \cup B \cup C) =$	10	-8	
	$+15$	-9	$+Card(A \cup B \cup C)$
	$+20$	-7	

On trouve $21 - Card(A \cap B \cap C)$.
Le cardinal ne peut pas dépasser 21, c’est spur.

D’autre part, par inclusion de $A \cap B \cap C$ dans $A \cap B$ et les autres, son cardinal ne peut pas dépasser 7.
On encadre $\boxed{14 \leqslant Card(A \cup B \cup C) \leqslant 21}$

Il faudrait ensuite donner des exemples pour lesquels ces valeurs extrêmes sont atteintes.
Ou raffiner encore en montrant des impossibilités.

∘26∘ Pouvez vous compléter pour qu’elle soit nilpotente : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & & -3 & \\ 2 & 0 & -2 & \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On nomme les éléments, puis on résout

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & a & -3 & b \\ 2 & 0 & -2 & c \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & a & -3 & b \\ 2 & 0 & -2 & c \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dès la première ligne, c’est raté. Elle ne sera pas nilpotente d’indice 2. Mais peut être plus.
On tente en lui imposant une trace nulle et un déterminant nul (la seule valeur propre acceptable est 0 et la trace est la somme des valeurs propres).
a est nul.
On attaque ensuite $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & b-4c+4 \\ b & 3 & -b-6 & 6-3c \\ c & 2 & -c-4 & 4-2c \\ 0 & 1 & -2 & 2-c \end{pmatrix}$.
Comme elle est aussi nilpotente, sa trace est nulle : $c = 1$.
On passe à $A^2 = \begin{pmatrix} b-2 & 1 & -b & 2b-3 \\ 0 & b & -2b & 4b-6 \\ 0 & 1 & -2 & 2b-3 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}$. Et cette fois, b vaut 2 :

A^0	A	A^2	A^3	A^4
$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1&-4&2\\3&0&-3&2\\2&0&-2&1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&-5&2\\2&3&-8&3\\1&2&-5&2\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&-2&1\\0&2&-4&2\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$
$\{\overrightarrow{0}\}$	$(\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix})$	$(\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix})$	$(\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix})$	$\mathbb{R}^4$
$\mathbb{R}^4$	$2.z = y + t$		$(\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix})$	$\{\overrightarrow{0}\}$

Et je vous offre les puissances, puis les noyaux et images.

∘27∘

Racines carrées de la dérivation *(oral de concours)*. On note $(E, +, .)$ l'espace vectoriel des polynômes et D l'endomorphisme de dérivation. On cherche à savoir si il existe un endomorphisme T de E vérifiant $T \circ T = D$ *(racine carrée de la dérivation)*. On suppose qu'un tel endomorphisme T existe. Montrez alors $\{0\} \subset Ker(T) \subset \mathbb{R}_0[X]$.
Déduisez que la dimension de $Ker(T)$ vaut 0 ou 1.
Montrez que si $Ker(T)$ est de dimension 0, alors $Ker(T^2)$ l'est aussi. Concluez.
Montrez que si $Ker(T)$ est de dimension 1, alors $Ker(T^3)$ et $Ker(T^4)$ sont aussi de dimension 1. Concluez.

On a sû définir la dérivation d'ordre $\frac{1}{2}$ *sur les fonctions dans le cours d'analyse. Celle qui, quand on l'applique deux fois, donne la dérivation classique.*
On a tout fait pour qu'elle soit linéaire. Mais elle a un défaut : elle transforme les polynômes en choses avec des exposants non entiers et des $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *qui traînent...*
Mais ne peut on rêver de créer une application linéaire qui fasse « la moitié du chemin de la dérivation » ? On veut $T \circ T = (P \longmapsto P')$.
On va montrer par argument de dimensions que c'est impossible.
En gros, la dérivation d'ordre 1 *a une noyau de dimension* 1 *(les constantes), quelle devrait être la dimension du noyau de la dérivation d'ordre* $\frac{1}{2}$.
Pour la cohérence aussi, le noyau de $P \longmapsto P''$ *est de dimension* 2 *formé des fonctions affines.*

C'est parti. Le cours nous assure que le vecteur nul (ici le polynôme nul) est dans le noyau de T du moment que T est bien un morphisme.
En effet, $T(0) = 0$ par théorème dit de Paris 6.

Ensuite, si P est dans $Ker(T)$, alors on a $T(P) = 0$ et donc $T(T(P)) = T(0) = 0$ (en fait, je devrais écrire 0 avec une flèche au dessus pour bien dire « polynôme nul »).
On reconnaît que P est dans $Ker(T \circ T)$.
Mais comme $T \circ T$ est la dérivation, ceci signifie $P' = 0$. P est donc un polynôme constant.
On a prouvé $P \in Ker(T) \Rightarrow P \in \mathbb{R}_0[X]$.

L'inclusion des espaces se traduit sur les dimensions : $0 = \dim(\{0\}) \leqslant \dim(Ker(T)) \leqslant \dim(\mathbb{R}_0[x]) = 1$.

Montrez que si $Ker(T)$ est de dimension 0, alors $Ker(T^2)$ l'est aussi. Concluez.

On suppose donc $\dim(Ker(T)) = 0$, c'est à dire $Ker(T) = \{0\}$.
On s'interroge sur $Ker(T^2)$ sans retourner dire que c'est $Ker(P \longmapsto P')$.
Soit P dans $Ker(T^2)$. On traduit : $T(T(P)) = 0$. On reconnaît $T(P) \in Ker(T)$.
Comme on a supposé $Ker(T) = \{0\}$, ceci donne $T(P) = 0$.
Et en re-commençant : $P = 0$.

En fait, on a aussi directement $(Ker(T) = \{0\}) \Rightarrow (T$ *injective*$) \Rightarrow (T^2$ *injective*$) \Rightarrow (Ker(T^2 = \{0\})$.

Mais on avait $Ker(T^2) = \mathbb{R}_1[X]$ d'où contradiction.

$Ker(T)$ ne peut pas être de dimension 0.

Il est donc de dimension 1 *? Beh non..*

Montrez que si $Ker(T)$ est de dimension 1, alors $Ker(T^3)$ et $Ker(T^4)$ sont aussi de dimension 1. Concluez.

Si l'on suppose $\dim(Ker(T)) = 1$, alors on a $Ker(T) = \mathbb{R}_0[X] = Ker(T^2)$.[4]

Regardons alors $Ker(T^3)$.
On prend P dans $Ker(T^3)$. On traduit $T^3(P) = 0$ et donc $T^2(T(P)) = 0$.
$T(P)$ est dans $Ker(T^2)$. Mais notre hypothèse sur les dimensions dit $Ker(T^2) = Ker(T)$.
Ayant $T(P) \in Ker(T)$, on a donc $T(T(P)) = 0$ soit $P \in Ker(T^2)$.
On vient de prouver $Ker(T^3) \subset Ker(T^2)$. Et on a toujours $Ker(T^2) \subset Ker(T^2)$.
On vient d'arriver à

$$Ker(T^3) = Ker(T^2) = Ker(T)$$

On poursuit avec un résultat déjà acquis $Ker(T^3) \subset Ker(T^4)$ (facile : $(T^3(P) = 0) \Rightarrow (T(T^3(P)) = 0)$).
On prend P dans $Ker(T^4)$. On traduit : $T^4(P) = 0$ et même $T^2(T^2(P)) = 0$.
On reconnaît $T^2(P) \in Ker(T^2)$.
Mais comme $Ker(T^2)$ est égal à $Ker(T)$, on a donc $T^2(P) \in Ker(T)$.
Ceci se traduit par $T(T^2(P)) = 0$ et P est dans $Ker(T^3)$.

On a donc $Ker(T) = Ker(T^2) = Ker(T^3) = Ker(T^4)$ en ayant juste utilisé $Ker(T) = Ker(T^2)$.

Mais T^4 n'est autre que $P \longmapsto P''$ et il a pour noyau $\mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2.
On a une contradiction.

Bref, $Ker(T)$ ne peut être que de dimension 0 ou 1, et chacun des deux cas conduit à une contradiction. On ne peut trouver T vérifiant $T^2 = (P \longmapsto P')$.

Plusieurs parties de cet exercice correspondant au grand classique des noyaux itérés :

$Ker(Id) \subset Ker(f) \subset (Ker(f^2) \subset (Ker(f^3) \ldots \subset Ker(f^n) \subset Ker(f^{n+1}) \subset$
et si à un moment le noyau n'a pas augmenté, il n'augmentera plus.

∘28∘

Sur les trois angles de $(A,\ B,\ C)$, le plus grand angle est le triple du plus petit, et le dernier angle est le double du petit. Que pouvez vous déduire ?

On nomme α, β et γ les trois angles, supposés triés par ordre croissant (symétrie des rôles).

On a alors le système $\begin{array}{llll} \gamma & = 3.\alpha & - & \\ \beta & = 2.\gamma & & \\ \alpha & +\beta & +\gamma & = \pi \end{array}$. On trouve le triplet $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Un triangle bien connu, celui de votre équerre..

∘29∘

♡ Un dé à six faces non équilibré porte la valeur 1 sur deux de ses faces, la valeur 2 sur deux autres et la valeur 3 sur les deux dernières *(c'est finalement ce qu'on pourrait appeler un dé à trois faces et il est non équilibré je le rappelle)*.
On lance ce dé, l'espérance du résultat est $47/22$. Écrivez l'équation linéaire concernant $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
La variance est $365/484$ *(rappel : $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$)*.
Complétez : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$. Calculez alors les trois probabilités.
Que serait ce problème avec un dé à quatre faces numérotées a, b, c et d ? Que vient faire ici VanDerMonde ?

Notons p_k la probabilité $P(X = k)$.
Comme l'univers se réduit à trois états, on a $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Le calcul de l'espérance donne $1.p_1 + 2.p_2 + 3.p_3 = E(X)$ (moyenne).

4. inclusion et égalité des dimensions

De manière similaire $1.p_1 + 4.p_2 + 9.p_3 = E(X^2)$ (moyenne des carrés).

Dans nos moyennes, il n'y a pas de dénominateur, puisque $p_1 + p_2 + p_3$ vaut 1.

Par définition de la variance : $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (en fait $Var(X) = E((X - E(X))^2)$ mais ça revient au même).
Il suffit de faire ensuite passer de l'autre côté.

On met bout à bout nos informations et on écrit sous forme de système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 47/22 \\ 117/22 \end{pmatrix}$$

Quitte à inverser la matrice de VanDerMonde :

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 1 \\ 47/22 \\ 117/22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 47/22 \\ 117/22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/22 \\ 5/22 \\ 10/22 \end{pmatrix}$$

Bonne nouvelle, les probabilités sont positives.

∘30∘ a, b, c et d sont quatre réels, montrez que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) & \cos(d) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) & \cos(2.c) & \cos(2.d) \\ \cos(3.a) & \cos(3.b) & \cos(3.c) & \cos(3.d) \end{vmatrix}$ est égal à $8.(\cos(d) - \cos(c)).(\cos(d) - \cos(b)) \ldots$ *(complétez)*. Indication : Tchebychev, combinaisons et VanDerMonde.

∘31∘

$X^3 + X^2 - 3.X + 1$	$X^2 - 3.X + 2$	$2.X^3 + 3.X^2 + X - 6$	$4.X^3 - 5.X^2 + 1$

Montrez que ces polynômes sont tous nuls en 1. Montrez (astucieusement ?) que la famille est liée.

La première question n'est que calcul.

Pour la seconde, on n'est plus dans $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$ de dimension 4.
On est dans un sous-espace strict, celui des polynômes nuls en 0.
Il est donc au mieux de dimension 3.
Et dans cet espace, on a quatre vecteurs. Inutile de chercher d'avantage.

∘32∘

Le but de ce petit (?) problème : étudier les matrices réelles symétriques. On va montrer le théorème spectral : elles se diagonalisent en base orthonormée. On montrera donc que leurs valeurs propres sont réelles, et qu'on peut construire une base faite de vecteurs propres deux à deux orthogonaux et normés pour le produit scalaire usuel sur $(\mathbb{R}^n, +, .)$. On commencera par une étude rapide en dimension 2, puis un exemple en dimension 3. Ensuite, on montre le théorème spectral par récurrence sur la taille des familles faites de vecteurs propres deux à deux orthogonaux. Le théorème spectral fera partie de votre cours l'an prochain.

I∼0) Montrez que les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique de taille 2 sont réelles.
I∼1) Pouvez vous construire une matrice réelle symétrique de taille 2 de spectre $\{1, 3\}$ dont au moins un coefficient vaut 5.
I∼2) Pouvez vous construire une matrice réelle symétrique de taille 2 de spectre $\{1, 3\}$ dont au moins un coefficient vaut 2.
I∼3) Montrez que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique mais non diagonalisable.

II∼0) *On définit :* $M = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Donnez son spectre *(indice : il est dans $\mathbb{Z}$)*.
II∼1) Trouvez un vecteur propre de norme 1 pour chaque valeur propre. Montrez qu'ils forment alors une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
II∼2) Déduisez l'existence d'une matrice P et d'une matrice D vérifiant $M = P.D.P^{-1} = P.D.{}^tP$.

III∼0) On pose $U = P.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculez ${}^tU.M.U$.
III∼1) Trouvez un vecteur normé de $\mathbb{R}^3$ vérifiant ${}^tU_0.M.U_0 = 0$.

III$\sim$2) Trouvez un vecteur normé V_0 vérifiant ${}^tV_0.M.V_0 = 0$ et ${}^tV_0.U_0 = 0$.(calcul atroce)
III$\sim$3) Montrez que $(U_0,\ V_0,\ U_0 \wedge V_0)$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ et montrez que la matrice de f sur cette base a non seulement une trace nulle, mais même une diagonale nulle.(aucun calcul)

IV$\sim$0) $(E, +, ., \phi)$ *est un espace pré-hilbertien*[5]*, dans lequel on a pris deux vecteurs unitaires et orthogonaux* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$*. On définit* $f = \overrightarrow{u} \longmapsto \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a}$. Montrez que f est un endomorphisme de E. Donnez son noyau.
IV$\sim$1) Donnez son spectre et ses sous-espaces propres.
IV$\sim$2) Montrez : $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ \phi(f(\overrightarrow{u}),\ \overrightarrow{v}) = \phi(f(\overrightarrow{v}),\ \overrightarrow{u})$.

V$\sim$0) $(\mathbb{R}^n, +, .)$ *est l'espace euclidien muni de son produit scalaire usuel* ϕ*, et* f *est un endomorphisme de* $(\mathbb{R}^n, +, .)$ *de matrice* S *sur la base canonique vérifiant* $\forall(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) \in E^2,\ \phi(\overrightarrow{a},\ f(\overrightarrow{b})) = \phi(\overrightarrow{b},\ f(\overrightarrow{a}))$. Déduisez : ${}^tS = S$.
On pose note D_f *l'ensemble des familles* ϕ*-orthonormées formées de vecteurs propres de* f*.*
V$\sim$1) Montrez que $\det(S - \lambda.I_n)$ est un polynôme admettant au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Déduisez qu'il existe U et V dans $\mathbb{R}^n$ et μ dans C vérifiant $S.(U + i.V) = \mu.(U + i.V)$. En montrant ${}^t(U - i.V).S.(U + i.V) = {}^tU.S.U + {}^tV.S.V = \mu.({}^tU.U + {}^tV.V)$, montrez que μ est réel, et que U ou V est vecteur propre de S.
V$\sim$2) Déduisez qu'il y a dans D_f des familles de cardinal 1.

VI$\sim$0) *On suppose qu'une famille* $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k})$ *est une famille de* D_f*, avec* $k < n$*. On pose alors* $P = Vect(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k})$ (donnez sa dimension) *et* $Q = \{\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \overrightarrow{u} \in P,\ \phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{u}) = 0\}$. Montrez que Q est un espace vectoriel non réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$. Montrez : $\forall \overrightarrow{u} \in P,\ f(\overrightarrow{u}) \in P$. Montrez : $\forall \overrightarrow{a} \in Q,\ f(\overrightarrow{a}) \in Q$.
VI$\sim$1) Montrez qu'il existe dans Q au moins un vecteur propre de f de norme 1, noté $\overrightarrow{c}$.
VI$\sim$2) Montrez que $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{c})$ est dans D_f.
VI$\sim$3) Déduisez qu'il existe dans D_f une famille de cardinal n.

Matrices symétriques de taille 2. TD21

On prend une matrice réelle symétrique de taille 2 : $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ *(les trois nombres a, b et c sont réels)*.

On écrit son polynôme caractéristique : $X^2 - (a + c).X + (a.c - b^2)$. On en calcule le discriminant : $(a + c)^2 - 4.(a.c - b^2) = (a - c)^2 + 4.b^2$. C'est une somme de carrés de réels, c'est donc un réel positif. On a deux valeurs propres réelles $\dfrac{a + c + \sqrt{(a - c)^2 + 4.b^2}}{2}$ et $\dfrac{a + c + \sqrt{(a - c)^2 + 4.b^2}}{2}$. Mais ce que je préfère encadrer c'est $\boxed{(a - c)^2 + 4.b^2}$ qui est l'argument, et parce que le développement/factorisation $(a + c)^2 - 4.a.c = (a - c)^2$ est à maitriser.

On en veut une de spectre $\{1,\ 3\}$. On pourrait prendre $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Mais il faut qu'au moins un coefficient vaille 5.
C'est quand même jouable si on impose une trace égale à 4 et un déterminant égal à 3 *(relations racines coefficients)*.

- On peut partir de $\begin{pmatrix} 5 & . \\ . & * \end{pmatrix}$ et compléter peu à peu $\begin{pmatrix} 5 & . \\ . & -1 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 5 & . \\ . & -1 \end{pmatrix}$ ah non il faut $-5 - a^2 = 3$!
- C'est pareil si on part de $\begin{pmatrix} * & . \\ . & 5 \end{pmatrix}$.
- On recommence $\begin{pmatrix} * & 5 \\ . & * \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} * & 5 \\ 5 & * \end{pmatrix}$ par symétrie ; il faut deux nombres a et b vérifiant $a + b = 4$ et $a.b - 25 = 3$, encore raté.

Bref, c'est impossible.

En revanche avec un coefficient égal à 2 : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ convient.

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique, c'est évident. Mais comme elle n'est pas réelle, le théorème spectral ne peut s'appliquer. On va montrer qu'elle n'est pas diagonalisable.

Trace	Déterminant	Polynôme caractéristique	Spectre
2	1	$X^2 - 2.X + 1$	$\{1,\ 1\}$

5. *espace vectoriel avec un produit scalaire*

On trouve un vecteur propre de valeur propre 1 : $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Mais on n'en trouve pas d'autres *(à part ses multiples)*.
On peut même dire que la matrice n'est pas diagonalisable par un bref raisonnement par l'absurde. Si elle l'était, la seule matrice D possible serait $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mais alors $P.D.P^{-1}$ serait encore I_2, ce qui n'est pas le cas pour M.

A retenir : une matrice de taille 2 *ayant une valeur propre double n'est diagonalisable que si elle est déjà diagonale.*

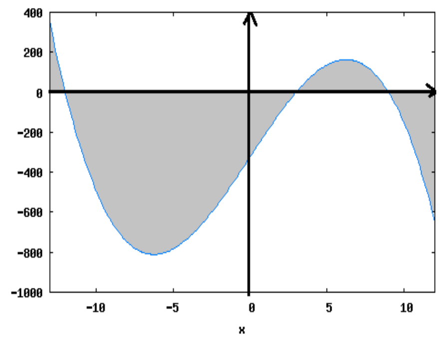
La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

TD21

On cherche $\det(M - X.I_3)$. C'est $\begin{vmatrix} -1-X & 8 & -6 \\ 8 & -3-X & 2 \\ -6 & 2 & 4-X \end{vmatrix}$. On développe.

Ou alors on utilise trace *(0)* et déterminant *(−324)*, et somme des mineurs de taille 2 : $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = -117$. Bref, on trouve : $\boxed{-X^3 + 117.X - 324}$

On cherche les racines.
Pas évident. On ne va quand même pas utiliser les formules de Cardan. Si on profitait de l'indication : les racines sont entières.
Leur produit vaut -324. On factorise $-2.2.3.3.3.3$. Et leur somme est nulle.
On teste donc des racines comme 2, 4, 3, 6, 9.
On trouve déjà 3. On factorise : $(3 - X).(X^2 + 3.X - 108)$. On résout cette fois l'équation de degré 2. On trouve le spectre : $\boxed{\{3,\ 9,\ -12\}}$



On résout alors $M.X = 3.X$: $\begin{array}{rrrl} -x & +8.y & -6.z & = 3.x \\ 8.x & -3.y & +2.z & = 3.y \\ -6.x & +2.y & +4.z & = 3.z \end{array}$.

Le système dégénère $\begin{array}{rrrl} -4.x & +8.y & -6.z & = 0 \\ 8.x & -6.y & +2.z & = 0 \\ -6.x & +2.y & +z & = 0 \end{array}$ qui donne $\begin{array}{rrrll} 2.x & -4.y & +3.z & = 0 & L_1/2 \\ & 10.y & -10.z & = 0 & L_2 + 2.L_1 \\ & 10.y & -10.z & = 0 & L_3 et L_1 \end{array}$.

Il reste deux équations : $Ker(M - 3.I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix})$. On veut un vecteur normé : $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

On fait de même avec les autres valeurs propres

3	9	-12
$\begin{array}{rrrl} -x & +8.y & -6.z & = 3.x \\ 8.x & -3.y & +2.z & = 3.y \\ -6.x & +2.y & +4.z & = 3.z \end{array}$	$\begin{array}{rrrl} -x & +8.y & -6.z & = 9.x \\ 8.x & -3.y & +2.z & = 9.y \\ -6.x & +2.y & +4.z & = 9.z \end{array}$	$\begin{array}{rrrl} -x & +8.y & -6.z & = -12.x \\ 8.x & -3.y & +2.z & = -12.y \\ -6.x & +2.y & +4.z & = -12.z \end{array}$
$Ker(M - 3.I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix})$	$Ker(M - 9.I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$	$Ker(M + 12.I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$
$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

Mais pourquoi persistez vous à rédiger comme un élève de collège avec des calculs à peu près bien présentés chacun l'un après l'autre, avec une obéissance butée et bornée à des consignes datant du collège. C'est gentil de montrer que vous savez calculer. mais ce n'est pas des calculateurs qu'on veut, c'est des ingénieurs. Et un ingénieur montre ce qui est essentiel : les résultats, et il les présente sous forme lisible par un tableau. On grandit, les mômes. L'objectif n'est plus d'avoir le brevet.

On vérifie leur orthogonalité deux à deux : $\begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = 0$ et ainsi de suite.
Ils forment une famille orthonormée, donc une famille libre.
Ils sont trois dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$, ils forment donc une base.

Qui s'est contenté de montrer "orthonormée" en calculant et a oublié "base" ? Bref, qui a eu encore le nez dans le guidon au lieu de se demander ce qu'on attend de vous ?   *Mais sincèrement, j'en ai marre que vous ne preniez pas de recul et que vous soyez juste heureux d'avoir fait le bon calcul. J'ai déjà à la maison des enfants d'une dizaine d'année, j'en ai marre d'en avoir aussi au lycée.*

On a des vecteurs propres et des valeurs propres. En quantité suffisante. La matrice est diagonalisée.
On vérifie quand même

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

ou aussi

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

On transforme en

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Il faudrait encore prouver que l'inverse de $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ est la transposée de $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. La démarche effectivement lourde est de calculer l'inverse et de montrer qu'il coïncide avec la transposée *(qui est ici la matrice elle même)*.
Intelligemment, pour prouver $P^{-1} =^t P$, il suffit de prouver ${}^tP.P = 0$.
Or, le calcul de ${}^tP.P$ consiste à faire tomber les colonnes de P sur les lignes de ${}^tP$ *(qui sont en fait les colonnes de P)*. Bref, les colonnes de P se rencontrent deux à deux. On trouve leurs produits scalaires deux à deux. Des 0 et des 1.

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On retient, en notant $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ trois vecteurs colonne qu'on écrit aussi en ligne :

$${}^tP.P = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\overrightarrow{a}|^2 & \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}.\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} & |\overrightarrow{b}|^2 & \overrightarrow{b}.\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{a}.\overrightarrow{c} & \overrightarrow{b}.\overrightarrow{c} & |\overrightarrow{c}|^2 \end{pmatrix}$$

c'est une matrice de Gram, et si la base est orthonormée, c'est I_3.

L'inverse d'une matrice de base orthonormée est sa transposée.   *Et si on l'applique aux matrices de permutations, c'est un cadeau.*

Qu'on ait pris ma matrice de passage P ou une autre, $P.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la somme des trois vecteurs propres. Dans mon exemple et dans les autres (l'ordre dans lequel on cite les vecteurs importe peu, ce qui importe, c'est les signes) :

$\begin{pmatrix} 1/3 & +2/3 & +2/3 \\ 2/3 & +1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & +1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/3 & +2/3 & -2/3 \\ 2/3 & +1/3 & +2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$
$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & +2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & +2/3 & +1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$	

Même si vous n'avez pas pris le même vecteur que votre voisin, vous trouvez ${}^tU.M.U = 0$.

Et c'est normal. U est la somme de trois vecteurs propres deux à deux orthogonaux $\overrightarrow{p_3}$, $\overrightarrow{p_9}$ et $\overrightarrow{p_{-12}}$. Le calcul ${}^tU.M.U$ correspond à $(\overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_9} + \overrightarrow{v_{-12}}).f(\overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_9} + \overrightarrow{v_{-12}})$. Comme ce sont des vecteurs propres, on trouve

$(\overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_9} + \overrightarrow{v_{-12}}).(3 \times \overrightarrow{v_3} + 9 \times \overrightarrow{v_9} - 12 \times \overrightarrow{v_{-12}})$. Comme ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux, on trouve $3 \times \overrightarrow{v_3}.\overrightarrow{v_3} + 9 \times \overrightarrow{v_9}.\overrightarrow{v_9} - 12 \times \overrightarrow{v_{-12}}.\overrightarrow{v_{-12}}$. Comme ces vecteurs sont normés, il reste $3.1 + 9.1 - 12.1$ *(somme des valeurs propres)*. Bref, la somme est nulle *(et dans le cas général, c'est la trace)*.

La question suivante veut un vecteur normé vérifiant ${}^tU_0.M.U_0 = 0$. Il suffit de prendre U et de le renormer :

$\dfrac{1}{3.\sqrt{3}}.\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	ou $\dfrac{1}{3.\sqrt{3}}.\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$	ou $\dfrac{1}{3.\sqrt{3}}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

ou même leurs opposés.

On cherche ensuite un vecteur orthogonal au premier vecteur trouvé : $5.x + y + z = 0$ (ou $x + 5.y - z = 0$ ou $x - y + 5.z = 0$). On veut qu'il vérifie une histoire de "trace" $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$.

J'ai fini par trouver le vecteur $\begin{pmatrix} 3.\sqrt{13} - 13 \\ 13 - 15.\sqrt{13} \\ 52 \end{pmatrix}$ si si ! Il ne reste plus qu'à le normer.

On a deux vecteurs normés U_0et V_0, orthogonaux entre eux. Le vecteur $U_0 \wedge V_0$ est par construction orthogonal à U_0 et à V_0. Sa norme vaut $|U_0| \times |V_0| \times \sin(\widehat{U_0, V_0})$, ce qui fait 1.
On a d'ores et déjà : $(U_0,\ V_0,\ U_0 \wedge V_0)$ est une famille orthonormée. Comme elle a le bon cardinal, c'est une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

Va-t-on calculer explicitement la matrice de passage et l'inverser ?
Non ! On sait quand même une chose : la matrice sur cette base est semblable à la matrice initiale. Sa trace reste nulle.
Ensuite, qui est le terme de position $(1,\ 1)$? C'est la composante de $f(U_0)$ suivant le vecteur U_0.

Mais comme la base $(U_0,\ V_0,\ U_0 \wedge V_0)$ est orthonormée, on récupère la composante par produit scalaire : ${}^tU_0.M.U_0$ vaut 0.

De même, le terme de position $(2, 2)$ est la composante de $f(V_0)$ suivant V_0. On la calcule aussi par produit scalaire : $V_0.M.V_0$. Là aussi, c'est 0.

Pour le dernier, on ne va pas calculer $f(U_0 \wedge V_0); (U_0 \wedge V_0)$, c'est trop lourd.
Mais il suffit de se souvenir que la somme des trois termes diagonaux est la trace. Elle est nulle. Les deux premiers sont nuls. Le dernier l'est donc aussi.

Une application en $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a}$. TD21

L'application $f = \overrightarrow{u} \longmapsto \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a}$ prend un vecteur de E et donne un vecteur de $Vect(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})$, donc de E.
On prouve la linéarité par $\phi(\overrightarrow{a}, \alpha.\overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \alpha.\overrightarrow{u}).\overrightarrow{a} = \alpha.(\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a})$ et un résultat similaire pour les sommes.

On détermine son noyau en résolvant $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ d'inconnue $\overrightarrow{u}$.
Comme $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont indépendants, on trouve la condition nécessaire $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} = 0$ et $\phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}) = 0$ *(sans flèche au dessus)*.
On trouve l'ensemble des vecteurs orthogonaux à la fois à $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$. Pas grand chose de plus à dire.
On a donc $Im(f) = Vect(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})$ et $Ker(f) = \Big(Vect(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})\Big)^{\perp}$.

On cherche des vecteurs propres $\overrightarrow{u}$ et les valeurs propres allant avec. Si on a des réflexes basiques, on se dit "je détermine la matrice, puis $\det(M - \lambda.I_n)$, puis je résous, puis je cherche des vecteurs propres".
C'est trop dur, on ne sait même pas en quelle dimension on travaille.
Si on revient à la définition : $f(\overrightarrow{u}) = \lambda.\overrightarrow{u}$.
On veut donc $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a} = \lambda.\overrightarrow{u}$.
Quitte à diviser par λ, $\overrightarrow{u}$ est dans $Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Mais on ne sait pas si tous les vecteurs de $Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ conviennent, et ceci ne donne pas la valeur de λ.
On écrit a priori : $\overrightarrow{u} = \alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b}$ et on reporte (on joue par condition nécessaire et suffisante en faisant des aller-retours).

$$f(\overrightarrow{u}) = \phi(\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} + \phi(\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{a}$$

on développe

$$f(\overrightarrow{u}) = \alpha \times \overrightarrow{b} + \beta \times \overrightarrow{a}$$

(orthonormalité)
On veut que ceci soit égal à $\lambda.\overrightarrow{u}$, c'est à dire à $\lambda.\alpha.\overrightarrow{a} + \lambda.\beta.\overrightarrow{b}$.
Par liberté de la famille orthonormée : $\lambda.\alpha = \beta$ et $\lambda.\beta = \alpha$.
On reporte l'une dans l'autre : $\lambda^2.\alpha = \alpha$ et $\lambda.\alpha = \beta$.
On n'a pas le choix : λ^2 vaut -1 (sinon, α est nul, puis β aussi et le vecteur $\overrightarrow{u}$ est nul, ce qui n'est pas accepté).
Pour λ égal à 1, on trouve $\alpha = \beta$ et on a les vecteurs propres : $\alpha.(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$.
Pour λ égal à -1, on trouve $\alpha = -\beta$ et on a les vecteurs propres : $\alpha.(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$.

On résume

valeur propre	1	-1	1
vecteurs propres	$Vect(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$	$Vect(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$	$Vect(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^\perp$
multiplicité	1	1	$n-2$

Ah oui, il fallait garder aussi la valeur propre 0. Il y a un moment où on a divisé par λ, il fallait donc traiter à part le cas $\lambda = 0$. Rappelons que le vecteur $\overrightarrow{u}$ ne doit pas être nul dans $f(\overrightarrow{u}) = \lambda.\overrightarrow{u}$, alors que λ peut l'être. Le noyau est le sous-espace propre de valeur propre 0.

On se donne $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et on calcule

$$\phi(\overrightarrow{v},\ f(\overrightarrow{u})) = \phi\Big(\overrightarrow{v},\ \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b}\Big) = \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\phi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{b}) + \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\phi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{b}$$

On fait le même calcul pour $\phi(\overrightarrow{u},\ f(\overrightarrow{v}))$ et on trouve la même chose.
L'application f est symétrique, au sens qui va être exploré dans la suite.

Symétrie de la matrice S. TD21

On a supposé : $\forall(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}),\ \phi(\overrightarrow{a}, f(\overrightarrow{b})) = \phi(\overrightarrow{b}, f(\overrightarrow{a}))$.
On traduit : $\forall(A, B) \in \mathbb{R}^3,\ {}^tA.(S.B) = {}^tB.(S.A)$.

La fausse même pas bonne idée : on simplifie par A ou par B.
Pourquoi c'est n'importe quoi ? parce que ni A ni B n'est une matrice carrée. Comment voulez vous pouvoir multiplier par l'inverse. Là encore, avoir de telles idées, c'est manipuler les formules sans chercher à savoir ce qu'il y a derrière. C'est comme le chimiste qui dirait : tiens, et si je mélange $C_3H_5(OH)_3$ avec HNO_3, ça peut donner $C_3H_5(NO_3)_3$ et H_2O, je vais essayer, c'est le même genre de formules que dans le cours sur l'eau.

On a donc

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s_1^1 & s_1^2 & s_1^3 \\ s_2^1 & s_2^2 & s_2^3 \\ s_3^1 & s_3^2 & s_3^3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s_1^1 & s_1^2 & s_1^3 \\ s_2^1 & s_2^2 & s_2^3 \\ s_3^1 & s_3^2 & s_3^3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Ce n'est pas une manipulation cabalistique. C'est des maths. Et le plus important, c'est le $\forall(A, B)$.
On peut donc prendre des cas particuliers pour A et B, avec l'espoir qu'ils nous mènent à la bonne réponse. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s_1^1 & s_1^2 & s_1^3 \\ s_2^1 & s_2^2 & s_2^3 \\ s_3^1 & s_3^2 & s_3^3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s_1^1 & s_1^2 & s_1^3 \\ s_2^1 & s_2^2 & s_2^3 \\ s_3^1 & s_3^2 & s_3^3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On aboutit à $s_1^2 = s_2^1$. On fait de même avec chaque couple fait de deux vecteurs de la base canonique : $s_i^k = s_k^i$.
La matrice est symétrique.

D'accord, je l'ai rédigé ici pour une matrice de taille 3. Il faudrait le faire en taille n. Avec des points de suspension. Ou dire que le "lemme d'identification" est dans le cours.

Existence d'un vecteur propre. TD21

La quantité $\det(S - \lambda.I_n)$ est un polynôme en λ.
Qui a oublié cette partie de la question ?
C'est $\sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).\alpha_1^{\sigma(1)}.\alpha_2^{\sigma(2)} \dots \alpha_n^{\sigma(n)}$ où chaque α_i^k est s_i^k *(si i est différent de k)* ou $s_i^i - \lambda$ (si i est égal à k). Chaque $\alpha_i^{\sigma(i)}$ est une fonction de λ de degré 0 ou 1. Chaque produit $Sgn(\sigma).\alpha_1^{\sigma(1)}.\alpha_2^{\sigma(2)} \dots \alpha_n^{\sigma(n)}$ est un polynôme en λ dont le

degré n'excèdera pas n. la somme est un polynôme dont le degré ne va pas excéder n.
Pour ceux qui ont besoin de tout voir, en taille 3 :

$$(s_1^1-\lambda).(s_2^2-\lambda).(s_3^3-\lambda)-(s_1^1-\lambda).s_2^3.s_3^2-s_1^2.s_2^1.(s_3^3-\lambda)+s_1^2.s_2^3.s_3^1+\dots$$

Le polynôme est vraiment de degré n, car seul $\sigma = Id$ apporte une terme de degré n, qui est alors celui de $(s_1^1-\lambda).(s_2^2-\lambda)\dots(s_n^n-\lambda)$.

Il ne reste plus qu'à dire que le théorème fondamental de l'algèbre *(de d'Alembert-Gauss)* garantit l'existence d'au moins une racine pour un tel polynôme non constant *(et en fait autant que son degré)*.

On a une valeur propre. $\det(S-\lambda_0.I_n)$ est nul pour cette valeur μ. L'application $X \longmapsto (S-\mu.I_n).X$ *(de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$)* n'est ni injective ni surjective. Il y a au moins un vecteur non nul dans son noyau. Ce vecteur vérifie $(S-\mu.I_n).X_0 = 0_n$ *(vecteur nul de taille n)*.
Mais comme μ était dans $\mathbb{C}$, il a fallu travailler dans $\mathbb{C}^n$. Le vecteur X_0 est donc de la forme $U+i.V$ en séparant composante par composante partie réelle et partie imaginaire.
On a donc

$$S.(U+i.V) = \lambda_0.(U+i.V)$$

On peut séparer en partie réelle et partie imaginaire, mais attention, μ s'écrit $\alpha+i.\beta$ et c'est plus compliqué que ça n'en a l'air.

Pour comprendre qu'il fallait jouer entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$: la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -5 & 0 & -11 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $-X^3+3.X^2-4.X+2$, pour spectre $\{1,\ 1-i,\ 1+i\}$. Mais si on cherche un vecteur propre de valeur propre $1+i$, on est obligé d'aller le chercher dans $\mathbb{C}$, et on trouve par exemple $\begin{pmatrix} 2+i \\ -2-3.i \\ -1 \end{pmatrix}$, que l'on peut désosser en $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + i.\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Étudions comme demandé ${}^t(U-i.V).S.(U+i.V)$. On développe par distributivité ou multilinéarité : ${}^tU.S.U + i.{}^tU.S.V - i.{}^tV.S.U +{}^t V.S.V$.
Que dire de ${}^tU.S.V - {}^tV.S.U$? On le lit comme $\phi(\overrightarrow{u},\ f(\overrightarrow{v}))-\phi(\overrightarrow{v},\ f(\overrightarrow{u}))$. Par symétrie de S, c'est nul. On a donc

$${}^t(U-i.V).S.(U+i.V) = {}^tU.S.U +{}^t V.S.V = \phi(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u})+\phi(\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{v})$$

Mais si on prend d'une autre façon ce calcul, on trouve

$${}^t(U-i.V).S.(U+i.V) = {}^t(U-i.V).\mu.(U+i.V)$$

car on a un vecteur propre de valeur propre μ. On développe encore :

$$\mu.{}^t(U-i.V).(U+i.V) = \mu.({}^tU.U +{}^t V.V + i.{}^tU.V - i.{}^tV.U)$$

Les deux réels ${}^tU.V$ et ${}^tV.U$ sont égaux *(pour certains, c'est $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$, pour d'autres, c'est la transposée d'un réel)*.
On égalise tout :

$${}^t(U-i.V).S.(U+i.V) = {}^tU.S.U +{}^t V.S.V$$

et

$${}^t(U-i.V).S.(U+i.V) = \mu.({}^tU.U +{}^t V.V)$$

Quel intérêt ? Par transitivité : $\boxed{\mu.({}^tU.U +{}^t V.V) = {}^tU.S.U +{}^t V.S.V}$
Mais le membre de droite est réel, puisque U et V sont des vecteurs réels, de même que la matrice S.
C'est donc que le membre de gauche est réel. On simplifie, et μ est réel.
Quand je dis "on simplifie", c'est que on divise par le réel ${}^tU.U +{}^t V.V$. Encore faut il que ce réel soit non nul. C'est le cas, puisque on y reconnaît $|\overrightarrow{u}|^2+|\overrightarrow{v}|^2$.
Il se peut que $\overrightarrow{u}$ soit nul, ou $\overrightarrow{v}$. Mais ce qui n'est pas possible c'est que les deux le soient, puisque leur somme est le vecteur propre.

Bilan : les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique sont réelles.

Vous recroiserez ce théorème en Spé.

Attention, ne généralisez pas "les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles" ; ce serait faux. Il est important que la matrice soit réelle.

On revient à ce qu'on a prouvé : la matrice S a au moins une valeur propre μ et cette valeur propre est réelle.
On revient alors à $S.(U+i.V) = \mu.(U+i.V)$ *(vecteur propre)*.
On développe $S.U + i.S.V = \mu.U + i.\mu.V$.

Maintenant que la valeur propre est réelle, on peut identifier : $S.U = \mu.U$ et $S.V = \mu.V$.

> On pourrait aller trop vite et affirmer : on a même deux vecteurs propres.
> Mais attention, il se peut que l'un soit nul *(ou que les deux soient proportionnels)*.
> Mais ce qui est impossible, c'est que les deux soient nuls *(leur somme est le vecteur propre pris dans $\mathbb{C}^n$ initialement)*.
> On a donc non seulement une valeur propre réelle, mais aussi un vecteur propre réel.

On a montré que f admettait un vecteur propre de matrice U sur la base canonique et une valeur propre associée μ.
Mais on voulait des familles orthonormées de vecteurs propres.
cela dit, pour une famille de cardinal 1, c'est juste "normée".
Il suffit de prendre le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}$. Il est resté vecteur propre de valeur propre μ et il est normé.

Agrandissement de famille de D_f. TD21

On suppose donc que l'on a une famille $(\overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_k})$ dans D_f. Ce sont donc k vecteurs normés, deux à deux orthogonaux, et chacun est vecteur propre de f , de valeur propre μ_i puisqu'il faut bien donner un nom.
L'espace vectoriel engendré P est de dimension k *(famille orthonormée donc libre)*.
On regarde ensuite l'ensemble $Q = \{\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \overrightarrow{u} \in P,\ \phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{u}) = 0\}$.
C'est une partie de $\mathbb{R}^n$.
Le vecteur nul en fait partie, puisqu'il est orthogonal à tout le monde.
Si deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont dans Q, alors $\forall \overrightarrow{u} \in P$, $\phi(\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{u}) = \alpha.\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{u}) + \beta.\phi(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{u}) = 0 + 0 = 0$.
Le vecteur $\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b}$ est dans Q.
On a un espace vectoriel.

Pourquoi n'est il pas réduit au seul vecteur nul ?
Un vecteur $\overrightarrow{a}$ est dans Q si et seulement si il est orthogonal à chaque vecteur $\overrightarrow{e_1}$ de la base *(il faut être orthogonal à chacun car chacun est dans P, mais ensuite, l'orthogonalité à chacun entraine l'orthogonalité à leurs combinaisons)*.
Q est le noyau de $\overrightarrow{a} \longmapsto (\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e_1}), \ldots \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e_k}))$
On a une application de E dans $\mathbb{R}^k$. Son ensemble image est inclus dans $\mathbb{R}^k$, il est donc au plus de dimension k.
Par soustraction, le noyau est au moins de dimension $n-k$ *(formule du rang)*.
En fait, Q est exactement de dimension $n - \dim(P)$.

Pour la stabilité, on prend $\overrightarrow{u}$ dans P. Il s'écrit comme combinaison $\alpha_1.\overrightarrow{e_1} + \ldots + \alpha_k.\overrightarrow{e_k}$. On calcule son image par f : $f(\overrightarrow{u}) = \alpha_1.f(\overrightarrow{e_1}) + \ldots + \alpha_k.f(\overrightarrow{e_k})$ par linéarité. Mais chaque $\overrightarrow{e_i}$ est un vecteur propre de f, son image est donc de la forme $\lambda_i.\overrightarrow{e_i}$ pour une valeur propre λ_i. On a donc $f(\overrightarrow{u}) = \alpha_1.\lambda_1.\overrightarrow{e_1} + \ldots + \alpha_k.\lambda_k.\overrightarrow{e_k}$. C'est une combinaison des $\overrightarrow{e_i}$, c'est un vecteur de P.

On prend un vecteur $\overrightarrow{a}$ de Q. Il est orthogonal à tous les vecteurs de P. Qu'en est il de son image $f(\overrightarrow{a})$? On regarde donc si elle est orthogonale à tous les $\overrightarrow{u}$ de P. On calcule donc $\phi(f(\overrightarrow{a}),\ \overrightarrow{u})$ pour n'importe quel $\overrightarrow{u}$ de P. Mais par symétrie, ceci vaut $\phi(\overrightarrow{a},\ f(\overrightarrow{u}))$. D'après ce qu'on vient de montrer, $f(\overrightarrow{u})$ est encore dans P. Par appartenance de $\overrightarrow{a}$ à Q, ce produit scalaire est nul.
On résume : $\forall \overrightarrow{u} \in P$, $\phi(f(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{u}) = \phi(\overrightarrow{a}, f(\overrightarrow{u})) = 0$. On reconnaît : $f(\overrightarrow{a}) \in Q$.

On peut regarder f sur le sous-espace vectoriel Q. On vient de montrer que les images des éléments de Q sont dans Q. L'application f va de Q dans Q. On peut donc considérer f comme un endomorphisme de Q dans Q.
Proprement, on dit que la restriction $f_{|Q}$ de f à Q est un endomorphisme de Q.
La propriété $\forall(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, $\phi(\overrightarrow{a}, f(\overrightarrow{b})) = \phi(\overrightarrow{b}, f(\overrightarrow{a}))$ était valable sur $(\mathbb{R}^n)^2$, elle le reste sur Q^2.
Bref, f est un endomorphisme symétrique de Q.
On a montré que tout endomorphisme symétrique admettait au moins un vecteur propre normé *(si l'espace n'était pas réduit à $\overrightarrow{0}$, ce qui est le cas ici)*.
Il y a donc au moins un vecteur propre de f dans Q qui est de norme 1, on en prend un qu'on note $\overrightarrow{\varepsilon}$.

Mais alors la famille $(\overrightarrow{e_1},\dots \overrightarrow{e_k},\ \overrightarrow{\varepsilon})$ est encore une famille de vecteurs propres de f. Ils sont tous normés, puisque $\overrightarrow{\varepsilon}$ l'est aussi.
Les premiers vecteurs étaient deux à deux orthogonaux. Le dernier est orthogonal aux précédents, car il est dans Q.
Bref, $(\overrightarrow{e_1},\dots \overrightarrow{e_k},\ \overrightarrow{\varepsilon})$ est une famille de vecteurs propres de f, orthonormée.

Ceci peut correspondre à l'hérédité d'une récurrence. On agrandit peu à peu la famille de vecteurs propres deux à deux orthogonaux.
Jusqu'à atteindre la dimension de l'espace vectoriel ambiant.

En fait, la preuve conduit ici est un peu différente. On prend les familles de vecteurs propres deux à deux orthogonaux. On sait qu'il y en a *(au moins, il y en a de cardinal* 1*)*. Leur cardinal ne peut pas dépasser n. On en prend une dont le cardinal est le plus grand possible *(toute partie finie non vide majorée de* $\mathbb{N}$ *a un plus grand élément)*. On le note k. Si k n'est pas égal à n, on peut agrandir en $(\overrightarrow{e_1},\dots \overrightarrow{e_k},\ \overrightarrow{\varepsilon})$ qui est encore dans D_f. ceci contredit la maximalité. C'est donc que k vaut n. Il y a au moins une famille orthonormée de vecteurs propres de cardinal n. Comme elle est orthonormée, elle est libre. Et par cardinalité, c'est une base. On a une base orthonormée faite de vecteurs propres.

On a bien prouvé que toute application linéaire symétrique admettait une base orthonormée de vecteurs propres.
Si on part d'une matrice symétrique, le même résultat dit qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres.
La matrice de passage P passe de la base canonique orthonormée à la nouvelle base, orthonormée aussi. Elle vérifie donc ${}^tP.P = I_n$. On a donc une formule en $S = P.D.P^{-1} = P.D.{}^tP$.

∘33∘ Déterminez les triplets $(a,\ b,\ c)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $\left(\begin{pmatrix} a.b \\ b \\ a \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} b \\ b.c \\ c \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a \\ c \\ a.c \end{pmatrix}\right)$ soit libre.

Il faut et il suffit que le déterminant soit non nul.
Il vaut $a.b.c.(a.b.c - a - b - c + 2)$ (pas mieux que Sarrus ici).

• Si a, b ou c est nul, la famille est liée. Par exemple $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} b \\ b.c \\ c \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ a deux vecteurs colinéaires.

• Si $a.b.c + 2$ est égal à $a + b + c$, il y a une relation de dépendance linéaire à trouver.

• Sinon, la famille est libre.

∘34∘ On se donne n réels a_1 à a_n. Pour tout k, on note $S_k = \sum\limits_{i=0}^{n}(a_i)^k$ et σ_k la k^{ieme} fonction symétrique des racines $\sigma_k = \sum\limits_{i_1<i_2<\dots<i_k} a_{i_1}.a_{i_2}\dots a_{i_k}$.
Exprimez à l'aide des S_k

$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 4.\sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 & 0 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 \\ 4.\sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 5.\sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$

Exprimez à l'aide des σ_k :

$\begin{vmatrix} S_1 & 1 \\ S_2 & S_1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 \\ S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & 3 \\ S_4 & S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & 0 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & 3 & 0 \\ S_4 & S_3 & S_2 & S_1 & 4 \\ S_5 & S_4 & S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$

Donnez *(même sans preuve)* la formule générale, mais pas avec des points de suspension, mais une formule pour le terme général de la matrice dont on calcule le déterminant.

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix} = (\sigma_1)^2 - 2.\sigma_2 = \left(\sum a_k\right)^2 - 2.\sum_{i,j} a_i.a_j = \sum_k (a_k)^2 = S_2$$

puisque $(\sigma_1)^2$ est le carré de la somme (somme des carrés plus somme des doublets).

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix} = (\sigma_1)^3 + 3.\sigma_3 - 3.\sigma_1.\sigma_2 = \left(\sum_k a_k\right)^3 - 3.(\sum_{i,j} a_i.a_j).\left(\sum_k a_k\right) + 3.\sum_{i,j,k} a_i.a_j.a_k$$

Or, la somme $\left(\sum a_k\right)^3$ contient • la somme des cubes
• la somme des termes an $(a_i)^2.a_j$ (avec facteur 3 venant de $\frac{3!}{2!.1!}$)
• la somme des termes an $a_i.a_j.a_k$ (avec facteur 6 venant de $\frac{6!}{1!.1!.1!}$)

Le terme $(\sum_{i,j} a_i.a_j\Big).\Big(\sum_k a_k\Big)$ contient • la somme des $a_i.aj.a_k$
• mais aussi la somme des $(a_i)^2.a_k$ pour $i = k$ et celle des $a_i.(a_j)^2$

Bref, après simplifications, il ne reste que

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix} = \sum_k (a_k)^3 = S_3$$

Pour ceux qui le souhaitent : $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3.(a^2.b+a^2.c+b^2.a+b^2.c+c^2.a+c^2.b)+6.(a.b.c)$
$3.(a+b+c).(a.b+a.c+b.c) = 3.(a^2.b+a^2.c+b^2.a+b^2.c+c^2.a+c^2.b)+9.(a.b.c)$

Un calcul courageux donne $\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 4.\sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix} = \sum_k (a_k)^4 = S_4$.

Et si on ose, le dernier déterminant donne S_5(somme des puissnces cnquièmes).

De même

$$\begin{vmatrix} S_1 & 1 \\ S_2 & S_1 \end{vmatrix} = \Big(\sum_k a_k\Big)^2 - \sum_k (a_k)^2 = 2.\sigma_2$$

(toujours la somme des carrés et le carré de la somme)

puis

$$\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 \\ S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix} = \Big(\sum_k a_k\Big)^3 - 3.\Big(\sum_k a_k\Big).\Big(\sum_i (a_i)^2\Big) + 2.\Big(\sum_i (a_i)^3\Big) = 6.\sigma_3$$

Là encore, en version rapide dans $(a+b+c)^3 - 3.(a+b+c).(a^2+b^2+c^2) + 2.(a^3+b^3+c^3)$
les a^3 sont au nombre de $1-3+2$, ils s'en vont
les $a^2.b$ sont au nombre de $3-3$, ils s'en vont
les $a.b.c$ sont au nombre de 6 et c'est tout

Je vous laisse imaginer la suite.

Et vous me laissez trouver un joli devoir pour expliquer ces formules.

∘35∘

L'application $\cos^3.\sin$ est elle dans l'espace vectoriel engendré par $(s_0,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5)$ où l'on pose $s_k = (\theta \longmapsto \sin(k.\theta))$.
Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces six vecteurs.

Les formules de Tchebytchev donnent $\sin(x) = \sin(x).1$

$$\sin(2.x) = \sin(x).2.\cos(x)$$
$$\sin(3.x) = \sin(x).(4.\cos^2(x) - \cos(x))$$
$$\sin(4.x) = \sin(x).(8.\cos^3(x) - 4.\cos(x))$$

pour tout x
On combine $\sin(4.x) + 2.\sin(2.x) = 8.\sin(x).\cos^3(x)$ pour tout x.
On divise par 8 et surtout on libère x : $\sin.\cos^3 = \frac{s_4 + 2.s_2}{8}$.
La réponse est « oui » : elle est dans l'espace vectoriel.

---

s_0 peut être enlevée de la famille, elle n'engendre rien...
Ensuite, les cinq fonctions sont indépendantes (=forment une famille libre).
La relation $\alpha_1.s_1 + \alpha_2.s_2 + \alpha_3.s_3 + \alpha_4.s_4 + \alpha_5.s_5 = 0$ (fonction nulle) conduit à $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$.
On écrit $\alpha_1.\sin(x) + \alpha_2.\sin(2.x) + \alpha_3.\sin(3.x) + \alpha_4.\sin(4.x) + \alpha_5.\sin(5.x) = 0$ pour tout x
et on regarde en des x particuliers bien choisis pour obtenir un système non dégénéré.
Ou alors on dérive et on calcule aussi en quelques points bien choisis.

La dimension de l'espace vectoriel engendré est donc 5.

◦36◦

♡ Un tétraèdre régulier a pour sommets A, B, C et D et pour centre O.
On note M la matrice dont les quatre colonnes sont $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$.
Montrez que ${}^tM.M$ est de la forme $\begin{pmatrix} c & n & n & n \\ n & c & n & n \\ n & n & c & n \\ n & n & n & c \end{pmatrix}$.

Montrez : $\begin{vmatrix} c & n & n & n \\ n & c & n & n \\ n & n & c & n \\ n & n & n & c \end{vmatrix} = (c+3.n).(n-c)^3$.

Justifiez : $\det({}^tM.M) = 0$. Pourquoi n'a-t-on pas $\det(M) = 0$?
Déduisez que l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ vaut $Arccos(-1/3)$ *(que les physiciens et chimistes vous demandent de retenir par ♡ sous la forme idiote de 109 degrés et je ne sais combien de secondes car ils aiment la complication inutile)*.

La matrice M est de la forme $\begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \\ z_A & z_B & z_C & z_D \end{pmatrix}$.
Le produit donne

$$\begin{pmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \\ x_D & y_D & z_D \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \\ z_A & z_B & z_C & z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_A)^2+(y_A)^2+(z_A)^2 & & & \\ x_A.x_B+y_A.y_B+z_A.z_B & (x_B)^2+(y_B)^2+(z_B)^2 & & \\ & & (x_C)^2+\ldots+(z_C)^2 & \\ & & & (x_D)^2 \end{pmatrix}$$

Les trois termes diagonaux sont égaux, c'est $OA^2 = OB^2 = OC^2$.

Les six autres termes sont des produits scalaires $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ et autres.
Ils sont tous égaux, puisque O est le centre du tétraèdre.

Bref, on a une matrice de la forme indiquée avec $c = |OA|^2$ et $n = |OA|.|OB|.\cos(AOB)$.

Le calcul $\begin{vmatrix} c & n & n & n \\ n & c & n & n \\ n & n & c & n \\ n & n & n & c \end{vmatrix} = (c+3.n).(n-c)^3$ se fait en sommant d'abord toutes les colonnes sur la première.
On a alors un $c+3.n$ qu'on sort :

$$\begin{vmatrix} c & n & n & n \\ n & c & n & n \\ n & n & c & n \\ n & n & n & c \end{vmatrix} = (c+3.n).\begin{vmatrix} 1 & n & n & n \\ 1 & c & n & n \\ 1 & n & c & n \\ 1 & n & n & c \end{vmatrix} = (c+3.n).\begin{vmatrix} 1 & n & n & n \\ 0 & c-n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c-n \end{vmatrix}$$

On n'a pas $\det(M) = 0$ car M n'est pas carrée. Elle n'a même pas de déterminant.

◦37◦

Le corps est $(\{0,1,2,3,4\}, +, \times)$ pour l'addition et la multiplication modulo 5. On prend l'espace vectoriel $(\{0,1,2,3,4\}^3, +, .)$. Donnez une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ du plan d'équation $x + 2.y + 3.z = 0$. Combien ce plan a-t-il de vecteurs ? Quelle est sa dimension ?
Combien existe-t-il de vecteurs $\overrightarrow{u}$ tels que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{u})$ soit une base de $(\{0,1,2,3,4\}^3, +, .)$.

Les vecteurs sont de la forme $\begin{pmatrix} 3.y+2.z \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On les écrit $y.\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On peut donner cinq valeurs à y et autant à z.
Il y a donc 25 vecteurs dans ce plan.
Et comme tout « plan », il est de dimension 2.

On peut compléter en choisissant a, b et c pour rendre $\begin{pmatrix} 3 & 2 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$ inversible (comme ça on aura une base).
Il y a 125 triplets possibles.
Et seulement 25 à éviter (les vecteurs du plan).
On a donc 100 choix possibles pour ce troisième vecteur.
Remarque : | *Tout sauf un vecteur du plan, c'est même géométriquement facile à comprendre.*

∘38∘

♡ Montrez que l'équation $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = (\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ n'a pas de solution.
Montrez que l'équation $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) = (\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$ a des solutions.
Parmi les solutions l'équation $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = (\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$ y en a-t-il qui sont solutions de $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{k}) = (4.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k})$.

Pour que $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = (\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ ait une solution, il faut déjà que $(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ soit orthogonal à $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ (et aussi à $\overrightarrow{a}$, et que la norme soit correcte, mais qu'importe).
Or, $(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ et $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ ont pour produit scalaire 1 et pas 0.

$\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) = (\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$ a au moins une solution : $\overrightarrow{j} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) = (\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$.
Je la qualifie de solution particulière.
On a aussi des solutions « homogènes » : $(\alpha.\overrightarrow{i} + \alpha.\overrightarrow{k}) \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) = \overrightarrow{0}$.
On trouve que les $\overrightarrow{j} + \alpha.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$ sont une famille entière de solutions.
Ce sont même toutes les solutions.

Peut on choisir α pour avoir aussi

$$\left(\overrightarrow{j} + \alpha.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})\right) \wedge (\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{k}) = (4.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k})$$

On veut $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: on résout $-2.\alpha = 1$, $\alpha + 2 = 1$ et $-\alpha = 1$. C'est incohérent.

∘39∘

Montrez : $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$ (juste avec la relation de Chasles et la multilinéarité).

Partons de $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$ avec l'aide de Chasles et de ses relations :

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \wedge (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$$
$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB})$$
$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB})$$

en jouant sur les signes moins

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB})$$

puisque $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB})$ est nul.

∘40∘

♡ Montrez que la famille des $X^k.(1-X)^{6-k}$ *(pour k de* 0 *à* 6*)* est une base de $(\mathbb{R}_6[X], +, .)$. Calculez le déterminant de cette famille par rapport à la base canonique.

On change l'ordre des questions. Si le déterminant est bien non nul, on aura gagné...

L'espace vectoriel est de dimension 7, la matrice exprimant les vacteurs est de format 7 sur 7. Courage.
Les vecteurs sont dans l'ordre $(1-X)^6 = 1 - 6.X + 15.X^2 - 20.X^3 + 15.X^4 - 6.X^5 + X^6$ d'où la première colonne
$X.(1-X)^5 = X - 5.X^2 + 10.X^3 - 10.X^4 + 5.X^5 - X^6$ d'où la seconde
$X^2.(1-X)^4 = X^2 - 4.X^3 + 6.X^4 - 4.X^5 + X^6$ d'où la troisième
jusqu'à X^6 qui donne un seul coefficient non nul sur la dernière

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 10 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & -10 & 6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & -4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Il est bien égal à 1 ce déterminant !

◦41◦

♡ Donnez une base de l'ensemble E_6 des suites réelles périodiques de période 6 après avoir vérifié qu'il s'agit bien d'un espace vectoriel. Donnez une base de l'ensemble E_8 des suites de période 8. Qui est $E_6 \cap E_8$? Donnez en une base $(a,\ b)$.
Reprenez vos bases de E_6 et E_8 pour qu'elles contiennent a et b.
Montrez que la somme d'une suite de période 6 et d'une suite de période 8 est de période 24.
Montrez qu'il existe des suites de période 24 qui ne sont pas somme d'une suite de période 6 et d'une suite de période 8 *(soit par un argument de dimension, soit en donnant un exemple)*.

Toute suite périodique de période 6 est de la forme $(a, b, c, d, e, f, a, b, c, d, e, f, a, b, c, d, e \ldots)$.
Elle se décompose d'une façon unique à l'aide des six suites suivantes :

$$\begin{array}{l} (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots) \\ (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots) \\ (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ \ldots) \\ (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots) \\ (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots) \\ (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots) \end{array}$$

C'est la définition de « base ».

Pour les suites périodiques de période 8, on fait de même.

$E_6 \cap E_8$ est fait des suites périodiques de période 2.
Toute suite périodique de période 2 est a fortiori périodique de période 6 : $u_{n+6} = u_{n+4} = u_{n+2} = u_n$
périodique de période 8 : $u_{n+8} = u_{n+4.2} = u_n$
Toute suite périodique de périodes 6 et 8 vérifie $a_{n+2} = a_{(n+2)+6} = a_{n+8} = a_n$ pour tout n.
Elle est périodique de période 2.

L'espace des suites $2-$périodiques ont pour base (1) et $((-1)^n)$ par exemple.

Si une suite (a_n) est périodique de période 6 alors $a_{n+24} = a_{n+6.4} = a_n$
(b_n) est périodique de période 8 alors $b_{n+24} = b_{n+8.3} = b_n$ pour tout n
alors la suite $(a_n + b_n)$ est bien périodique de période 24.

Mais les suites de période 24 ne sont pas somme de suites périodiques de périodes 6 et 8.
En effet, la suite $(1, 0, 0, 0 \ldots 0, 1, 0, 0 \ldots)$ avec juste un terme sur 24 égal à 1 ne peut pas être somme de (a_n) et (b_n) de périodes respectives 6 et 8.

Illogicien : *L'élève qui n'a pas le sens de la logique (ou l'a perdu au contact d'individus peu scrupuleux sur le raisonnement) va dire*
« Mais si ! Cette suite est bien une somme $(a_n + b_n)$ avec (a_n) de période 6 et (b_n) de période 8 puisque on a bien
$(u_{n+24} = a_{n+24} + b_{n+24} = a_{n+6.4} + b_{n+8.3} = a_n + b_n = u_n$ ».
Et alors ? Ça ne prouve rien.
Ça montre juste qu'il n'y a pas d'incohérence de ce côté là. Mais il peut y en avoir ailleurs, non ?
Ce qui est nécessaire n'est pas forcément suffisant.
Disons juste que cet argument aurait plutôt servi à invalider « elle est somme d'une suite 7 périodique et d'une suite $5-$périodique ».

Supposons qu'elle soit la somme de (a_n) et (b_n) de périodes respectives 6 et 8.

On a alors $\begin{array}{ccc} a_0 & +b_0 & = & 1 \\ a_2 & +b_2 & = & 0 \\ a_8 & +b_8 & = & 0 \\ a_{18} & +b_{18} & = & 0 \end{array}$ et donc $\begin{array}{ccc} a_0 & +b_0 & = & 1 \\ a_2 & +b_2 & = & 0 \\ a_2 & +b_0 & = & 0 \\ a_0 & +b_2 & = & 0 \end{array}$.

Quand on en somme deux, on a $a_0 + b_0 + a_2 + b_2 = 1 + 0$.

Quand on somme les deux autres, on a $a_2 + b_0 + a_0 + b_2 = 0$.
On aboutit à une contradiction.

∘42∘ Simplifiez $\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{b+a} & \frac{1}{2.b} \end{vmatrix}$. Montrez : $\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{b+a} & \frac{1}{2.b} & \frac{1}{b+c} \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{c+b} & \frac{1}{2.c} \end{vmatrix} = \dfrac{(a-b)^2.(a-c)^2.(a-d)^2}{8.a.b.c.(a+b)^2.(a+c)^2.(b+c)^2}$ en supposant que a, b, $c$et d sont quatre nombres strictement positifs.

Inventez la formule pour le déterminant de la matrice de taille n sur n de terme général $\dfrac{1}{a_k + a_i}$. Est elle cohérente pour n égal à 1.

Écrivez un script Python qui pour une liste $[a_1, \dots a_n]$ donnée calcule le déterminant en question.

Calculez aussi celui de $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b.a} & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c.a} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d.a} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d^2} \end{pmatrix}$ et enfin de $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b.a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c.a} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d.a} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$ Exprimez le dernier en supposant que a, b, c et d sont les racines de $X^4 - S.X^3 + D.X^2 - T.X + P$.

Le plus simple est le second : $\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b.a} & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c.a} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d.a} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d^2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{a.b}.\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d^2} \end{vmatrix} = 0$ car il y a deux colonnes égales.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b.a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c.a} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d.a} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} = \frac{1}{a}.\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} = \frac{1}{a.b.c.d}.\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2.b.c.d}.\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

On est ramené à $\dfrac{1}{(a.b.c.d)^2}.\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix}$.

On calcule le déterminant par combinaisons en lignes $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1-b & c-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c & d-1 \end{vmatrix}$ $(L_3 < L_3 - L_2$ et $L_4 < L_4 - L_3)$
puis en colonnes $(C_3 < C_3 - C_2$ et $C_4 < C_4 - C_3)$:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & 1-b & 0 \\ 0 & 1-b & b+c-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c & c+d-2 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne
$a.\begin{vmatrix} b & 1-b & 0 \\ 1-b & b+c-2 & 0 \\ 0 & 1-c & c+d-2 \end{vmatrix}$ et $-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-b & b+c-2 & 0 \\ 0 & 1-c & c+d-2 \end{vmatrix}$
On trouve au final

$$a.b.c.d - (a.b + a.c + a.d + b.c + b.d + c.d) + 2.(a + b + c + d) - 3$$

Vous pouvez avoir une erreur de calcul, je ne vous en voudrai pas. Mais si vous obtenez une formule non symétrique dans les racines sans indiquer qu'il doit y avoir une erreur, c'est là que je vous en veux...

Si a, b, c et d sont les racines de $X^4 - S.X^3 + D.X^2 - T.X + P$, on a $P - D + 2.S - 3$, qu'on pouvait retrouver en développant $\sum\limits_{\sigma \in S_4} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}.a_3^{\sigma(3)}.a_4^{\sigma(4)}$.

Pour $\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{b+a} & \frac{1}{2.b} & \frac{1}{b+c} \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{c+b} & \frac{1}{2.c} \end{vmatrix}$ on fait des combinaisons en lignes :

$L_2 < -L_2 - L_1$: $\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{(b+a)} - \frac{1}{2.a} & \frac{1}{2.b} - \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{c+b} & \frac{1}{2.c} \end{vmatrix}$

On réduit au dénominateur commun : $\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{a-b}{(b+a).(2.a)} & \frac{a-b}{(2.b).(a+b)} & \frac{a-b}{(a+c).(b+c)} \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{c+b} & \frac{1}{2.c} \end{vmatrix}$

et on sort $a-b$: $(a-b).\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{(b+a).(2.a)} & \frac{1}{(2.b).(a+b)} & \frac{1}{(a+c).(b+c)} \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{c+b} & \frac{1}{2.c} \end{vmatrix}$.

On fait de même avec $L_3 - L_1$:

$$(a-b).(a-c).\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{(b+a).(2.a)} & \frac{1}{(2.b).(a+b)} & \frac{1}{(a+c).(b+c)} \\ \frac{1}{(2.a).(c+a)} & \frac{1}{(a+b).(c+b)} & \frac{1}{(2.c).(a+c)} \end{vmatrix}$$

On factorise en colonne : $\dfrac{(a-b).(a-c)}{(2.a).(a+b).(a+c)}.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{(b+a)} & \frac{1}{(2.b)} & \frac{1}{(b+c)} \\ \frac{1}{(c+a)} & \frac{1}{(c+b)} & \frac{1}{(a+c)} \end{vmatrix}$.

On travaille cette fois en colonne

$$\frac{(a-b).(a-c)}{2.a.(a+b).(a+c)}.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{(b+a)} & \frac{1}{(2.b)} - \frac{1}{(b+a)} & \frac{1}{(b+c)} - \frac{1}{(b+a)} \\ \frac{1}{(c+a)} & \frac{1}{(c+b)} - \frac{1}{(c+a)} & \frac{1}{(2.c)} - \frac{1}{(c+a)} \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne :

$$\frac{(a-b).(a-c)}{2.a.(a+b).(a+c)}.\begin{vmatrix} \frac{a-b}{(2.b).(b+a)} & \frac{a-c}{(b+c).(b+a)} \\ \frac{a-b}{(c+b).(c+a)} & \frac{a-c}{(2.c).(c+a)} \end{vmatrix}$$

On sort tout ce qu'on peut : $\dfrac{(a-b)^2.(a-c)^2}{(2.a.(a+b)^2.(a+c)^2}.\begin{vmatrix} \frac{1}{(2.b)} & \frac{1}{(b+c)} \\ \frac{1}{(c+b)} & \frac{1}{(2.c)} \end{vmatrix}$.

On termine, par développement simple ou par $\dfrac{1}{4.b.c} - \dfrac{1}{(b+c)^2}$.

On trouve bien $\dfrac{(a-b)^2.(a-c)^2.(a-d)^2}{8.a.b.c.(a+b)^2.(a+c)^2.(b+c)^2}$.

On conjecture une formule générale :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+a_1} & \frac{1}{a_1+a_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+a_n} \\ \frac{1}{a_1+a_2} & \frac{1}{a_2+a_2} & & \frac{1}{a_2+a_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{a_1+a_n} & \frac{1}{a_2+a_n} & & \frac{1}{a_n+a_n} \end{vmatrix} = \frac{(produit\ des\ differences)^2}{produit\ des\ sommes}$$

On peut y mettre des points de suspension : $\boxed{\dfrac{(a_1-a_2)^2.(a_1-a_3)^2\ldots(a_{n-1}-a_n)^2}{2^n.a_1\ldots a_n.(a_1+a_2)^2\ldots(a_{n-1}+a_n)^2}}$

Proprement, le numérateur est $\prod_{i<j}(a_j-a_i)^2$ ou $\prod_{i\neq j}|a_j-a_i|$ pour que chaque terme y soit deux fois.

Le dénominateur n'a pas à mettre à part les termes $i=j$:

$$\prod_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}}(a_i+a_j)$$

Chaque terme pour i différent de j est présent deux fois. Chaque terme pour i égal à j n'y est qu'une fois, avec son coefficient 2.

On résume $\boxed{\dfrac{\prod_{i<j}(a_j-a_i)^2}{\prod_{i,j}(a_i+a_j)}}$; il y a $\dfrac{n.(n-1)}{2}$ carrés au numérateur, soit un degré $n.(n-1)$; il y a n^2 termes au dénominateur.

Pour n égal à 1, on a un produit vide au numérateur, et le seul terme (a_1+a_1) au dénominateur. La formule coïncide avec $\left|\ \frac{1}{a_1+a_1}\ \right|$. Comme toujours tout est logique en maths.

On écrit un script qui calcule numérateur et dénominateur par des boucles :

```
def Hilbert(L) : #ce sont des déterminants de Hilbert
....n = len(L) #pour ne pas resolliciter len(L) à chaque fois
....Num, Den = 1 , 1 #et pas 0, évidemment
....for ai in L :
.......for aj in L :
..........Den *= (ai+aj)
....for j in range(n) :
.......for i in range(i) : #on impose i<j
...........Num *= L[j]-L[i]
....Num = Num*Num #on veut des carrés
....return(Num, Den) #ou return(Num/Den)
```

◦43◦ ♣ On sait : $A.B=\begin{pmatrix}3&1&-3\\1&&-3\\5&1&-5\end{pmatrix}$ et $B.A=\begin{pmatrix}-4&2&3\\-6&4&\\2&&1\end{pmatrix}$. Complétez les termes qui manquent *(indication : pensez aussi aux carrés)*. Si vous trouvez deux solutions, choisissez celle avec des entiers.
Diagonalisez $A.B$ *(matrice de passage P, matrice diagonale D pour laquelle l'idée des carrés sera aussi utile)* et aussi $B.A$ *(matrice de passage Q)*.
Si je propose $A=P.D.Q^{-1}$, vous la calculez puis vous complétez pour trouver B ?

On peut avoir à la fois $A.B=\begin{pmatrix}3&1&-3\\1&a&-3\\5&1&-5\end{pmatrix}$ et $B.A=\begin{pmatrix}-4&2&3\\-6&4&b\\2&c&1\end{pmatrix}$, puisque le produit matriciel n'est pas commutatif. Mais il y a quand même des conditions nécessaires.
On doit déjà avoir $Tr(A.B)=Tr(B.A)$ suivant une formule célèbre du cours.
On trouve immédiatement : $\boxed{a=3}$
On a aussi $\det(A.B)=\det(B.A)$ en transitant par $\det(A).\det(B)$.
On calcule $\det(A.B)=-4$ en développant par rapport à la colonne qu'on veut.
On a donc après calcul : $\boxed{4.b.c+4.b-18.c-28=-4}$
Il nous faut d'autres relations.
L'énoncé parle des carrés. On a d'une part $A.B.A.B$ et d'autre part $B.A.B.A$ *(et pas $A.B.B.A$, c'est pas l'Eurovision 1974)*.
On passe de l'une à l'autre en faisant sauter A au dessus : $Tr(A.(B.A.B))=Tr((B.A.B).A)$.
On déduit que $(A.B)^2$ et $(B.A)^2$ ont la même trace *(vous avez omis de citer cet argument ? vous avez perdu car par exemple, $(A.B)^2$ n'a pas forcément la même trace que $A.B.B.A$)*.
On calcule les deux, ou juste leurs termes diagonaux car on est efficace [6].

$$(A.B)^2=\begin{pmatrix}3&1&-3\\1&3&-3\\5&1&-5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3&1&-3\\1&3&-3\\5&1&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&&\\&7&\\&&7\end{pmatrix}$$

et

$$(B.A)^2=\begin{pmatrix}-4&2&3\\-6&4&b\\2&c&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-4&2&3\\-6&4&b\\2&c&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&&\\&b.c+4&\\&&b.c+7\end{pmatrix}$$

On a une nouvelle relation : $10+2.b.c+11=9$
On trouve la valeur de $b.c$: $b.c=-6$
On reporte dans l'autre équation : $2.b-9.c=24$
On résout le système : $\left\{\begin{array}{ccccc}b&\times&c&=&-6\\2.b&-&9.c&=&24\end{array}\right|$. On peut faire appel aux formules de Viète sur $2.b$ et $-9.c$ de somme 24 et de produit 108. On peut aussi résoudre pour une fois en remplaçant le résultat d'une équation dans l'autre : b vérifie $b^2-12.b+27=0$.
On extrait deux couples solutions : $\boxed{b=6 \text{ et } c=-2}$ $\boxed{b=9 \text{ et } c=-\frac{2}{3}}$

6. je ne me moquerai pas de Laurine qui traite des questions non demandées, ce serait méchant, je cacherai donc son prénom

Notre paresse naturelle nous incite à prendre comme proposé $b = 6$ et $c = -2$.

$A.B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$	$B.A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
Trace 1	Trace 1
Déterminant -4	Déterminant -4

Il faut trouver une matrice diagonale D semblable à $A.B$.

Cette fois encore, la trace et le déterminant ne suffiront pas. La matrice D est formée de trois coefficients : $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

On doit avoir $Tr(A.B) = Tr(D)$, $\det(A.B) = \det(D)$. Bon début dit le père François *(oui, Viète)* : $\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ et } \alpha.\beta.\gamma = -4}$

Mais il nous manque une équation. Et on repense aux carrés : $(A.B)^2 = P.D^2.P^{-1}$, donc $Tr((A.B)^2) = Tr(D^2)$. On ajoute la relation $\boxed{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9}$

On identifie classiquement : $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2.(\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma)$: $\boxed{\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma = -4}$

A présent on a tout : α, β et γ sont les trois racines de $X^3 - X^2 - 4.X + 4$.

On a une racine évidente : -1. On factorise $(X - 1).(X^2 - 4)$. On a trois racines tout aussi évidentes : 1, -2 et 2 :

$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$ il y a cinq autres matrices diagonales possibles par permutations.

On a trouvé la matrice diagonale (utilisable pour $A.B$ et $B.A$), il faut trouver les matrices de passage P et Q. On les cherche sous la forme simplifiée $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(P) = 1$
$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(Q) = 1$

Les matrices de passage trouvées sont inversibles.

Suivant l'ordre dans lequel vous aurez mis les coefficients diagonaux de D, vous obtiendrez des matrices dont les colonnes seront mélangées. Dans le même ordre que les valeurs propres.

Comme la suite le demande, on les inverse par les cofacteurs : $\boxed{Q^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$ *(on vérifie si nécessaire)* : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ On calcule alors :

$$\boxed{A = P.D.Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \\ -8 & 4 & 5 \end{pmatrix}}$$

On cherche B de produit $A.B$ imposé. On peut extraire B par $A^{-1}.(A.B)$.

Mais on peut aussi se dire qu'on veut :

$(P.D.Q^{-1}).B = A.B = P.D.P^{-1}$ et $B.(P.D.Q^{-1}) = B.A = Q.D.Q^{-1}$.

L'illumination vient : $B = Q.P^{-1}$.

Ah tiens, il faut aussi inverser P, par la méthode des cofacteurs $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On effectue le calcul : $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

On vérifie en calculant alors $A.B$ et $B.A$.
Remarque : il y a bien d'autres solutions. Une infinité même.

∘44∘

♡ Un triangle du plan a pour sommets A, B et C de coordonnées $(a',\ a'')$, $(b',\ b'')$ et $(c',\ c'')$. L'aire du triangle est notée S. Montrez $2.S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a' & a'' \\ 1 & b' & b'' \\ 1 & c' & c'' \end{vmatrix}$.

Le cours nous indique déjà : $2.S = \det_C(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})$. Avec des coordonnées : $2.S = \begin{vmatrix} b'-a' & c'-a' \\ b''-a'' & c''-a'' \end{vmatrix}$.
Un déterminant nous est donné qu'on arrange par combinaisons du type $C_k \leftarrow C_k - C_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a' & b'-a' & c'-a' \\ a'' & b''-a' & c''-a'' \end{vmatrix}$$

On développe ce déterminant par rapport à la première ligne, et on retrouve $2.S$ comme promis.

Et c'est aussi $\begin{vmatrix} 1 & a' & a'' \\ 1 & b' & b'' \\ 1 & c' & c'' \end{vmatrix}$ car une matrice et sa transposée ont le même déterminant.

Déduisez : $4.S^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a'^2+a''^2 & 1+a'.b'+a''.b'' & 1+a'.c'+a''.c'' \\ 0 & 1+a'.b'+a''.b'' & 1+b'^2+b''^2 & 1+b'.c'+b''.c'' \\ 0 & 1+a'.c'+a''.c'' & 1+b'.c'+b''.c'' & 1+c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$

Cette question n'était pas juste là pour que vous fassiez appel à $\det({}^tM) = \det(M)$. C'est une piste.

On calcule $4.S^2 = 2.S.2.S = \begin{vmatrix} 1 & a' & a'' \\ 1 & b' & b'' \\ 1 & c' & c'' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$, voilà l'idée.

Or, le déterminant du produit est le produit est le produit des déterminants :

$$4.S^2 = \begin{vmatrix} 1+a'^2+a''^2 & 1+a'.b'+a''.b'' & 1+a'.c'+a''.c'' \\ 1+a'.b'+a''.b'' & 1+b'^2+b''^2 & 1+b'.c'+b''.c'' \\ 1+a'.c'+a''.c'' & 1+b'.c'+b''.c'' & 1+c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$$

Quand on développe le déterminant proposé

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a'^2+a''^2 & 1+a'.b'+a''.b'' & 1+a'.c'+a''.c'' \\ 0 & 1+a'.b'+a''.b'' & 1+b'^2+b''^2 & 1+b'.c'+b''.c'' \\ 0 & 1+a'.c'+a''.c'' & 1+b'.c'+b''.c'' & 1+c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$$

par rapport à sa première colonne donne celui de l'énoncé.

Il était possible évidemment d'aboutir au même résultat par de laborieux calculs et développement complet de toutes les formules. C'était bien moins intelligent, mais ça rapportait tous les points. Et ça faisait passer le temps...

puis $-4.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ 1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ 1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$

On part du déterminant proposé et on le travaille par combinaisons en lignes et en colonnes. On soustrait la première ligne aux autres :

$$4.S^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ -1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ -1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$$

Ca ne ressemble pas encore au déterminant demandé. Il manque le 0 en haut. Et il manque le signe moins.
Pour le signe moins, la multilinéarité le donne :

$$-4.S^2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ 1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ 1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$$

Il y a cette fois un -1 en haut.

Mais quel est son cofacteur ? C'est $\begin{vmatrix} a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$

Si celui ci est nul, les deux déterminants $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ 1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ 1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ 1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ 1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$ seront égaux.

Il suffit pour celà de prouver que ces colonnes sont coplanaires.
Or, ce sont toutes trois des combinaisons de deux colonnes élémentaires :

$\begin{pmatrix} a'^2+a''^2 \\ a'.b'+a''.b'' \\ a'.c'+a''.c'' \end{pmatrix} = a'.\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} + a''.\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a'.b'+a''.b'' \\ b'^2+b''^2 \\ b'.c'+b''.c'' \end{pmatrix} = b'.\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} + b''.\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a'.c'+a''.c'' \\ b'.c'+b''.c'' \\ c'^2+c''^2 \end{pmatrix} = c'.\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} + c''.\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$	

Trois vecteurs dans le plan engendré par $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$, leur déterminant est bien nul.

$$\boxed{\text{et } -16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2.a'^2-2.a''^2 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.a'.c'-2.a''.c'' \\ 1 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.b'^2-2.b''^2 & -2.b'.c'-2.b''.c'' \\ 1 & -2.a'.c'-2.a''.c'' & -2.b'.c'-2.b''.c'' & -2.c'^2-2.c''^2 \end{vmatrix}}$$

On repart de $-4.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ 1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ 1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$ et multiplie par -8 (je sais on aurait voulu tout multiplier par 4, mais on va bien voir) ; ceci revient à multiplier trois colonnes par -2 :

$$8.4.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2.a'^2-2.a''^2 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.a'.c'-2.a''.c'' \\ 1 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.b'^2-2.b''^2 & -2.b'.c'-2.b''.c'' \\ 1 & -2.a'.c'-2.a''.c'' & -2.b'.c'-2.b''.c'' & -2.c'^2-2.c''^2 \end{vmatrix}$$

On a les bons "double produits", mais on a des -2 en trop sur la premeière ligne. Alors on sort un facteur -2 de la première ligne :

$$8.4.S^2 = -2.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2.a'^2-2.a''^2 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.a'.c'-2.a''.c'' \\ 1 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.b'^2-2.b''^2 & -2.b'.c'-2.b''.c'' \\ 1 & -2.a'.c'-2.a''.c'' & -2.b'.c'-2.b''.c'' & -2.c'^2-2.c''^2 \end{vmatrix}$$

Le facteur -2 en trop s'en va, c'est fini, on a la formule de l'énoncé.

Peu de gens savent par exemple qu'on a $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & -\beta' & -\gamma' \\ \alpha'' & -\beta'' & -\gamma'' \end{vmatrix}$*. Mais je n'irai pas prétendre que ce soit un grand avantage pour vous de le savoir.*

et enfin $-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & AB^2 & AC^2 \\ 1 & AB^2 & 0 & BC^2 \\ 1 & AC^2 & BC^2 & 0 \end{vmatrix}$ *(déterminant de Cayley-Menger [a]).*

a. Karl Menger mathématicien du vingtième siècle né à Vienne mais devenu américain en 1937, connu pour son "éponge" fractale, de volume nul et d'aire infinie

On a nos doubles produits. Il nous faut des termes en $(a'-b')^2+(a''-b'')^2$. On va utiliser la première colonne et la première ligne pour les avoir. On ajoute $(a'^2+a''^2).C_1$ à la colonne C_2 :

$$-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a'^2-a''^2 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.a'.c'-2.a''.c'' \\ 1 & a'^2-2.a'.b'-2.a''.b''+a''^2 & -2.b'^2-2.b''^2 & -2.b'.c'-2.b''.c'' \\ 1 & a'^2-2.a'.c'-2.a''.c''+a''^2 & -2.b'.c'-2.b''.c'' & -2.c'^2-2.c''^2 \end{vmatrix}$$

On ajoute ensuite $(b'^2+b''^2).C_1$ sur la colonne C_3 et ce dont on se doute sur la colonne C_4 :

$$-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a'^2-a''^2 & b'^2-2.a'.b'-2.a''.b''+b''^2 & c'^2-2.a'.c'-2.a''.c''+c''^2 \\ 1 & a'^2-2.a'.b'-2.a''.b''+a''^2 & -b'^2-b''^2 & c'^2-2.b'.c'-2.b''.c''+c''^2 \\ 1 & a'^2-2.a'.c'-2.a''.c''+a''^2 & b'^2-2.b'.c'-2.b''.c''+b''^2 & -c'^2-c''^2 \end{vmatrix}$$

On est en bon chemin, il manque encore des termes pour nos identités remarquables en

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (a'^2-2.a'.b'+b'^2)+(a''^2-2.a''.b''+b''^2)$$

et pour avoir des 0 sur la diagonale. On travaille en ligne : $L_2 \leftarrow L_2+(a'^2+a''^2).L_1$:

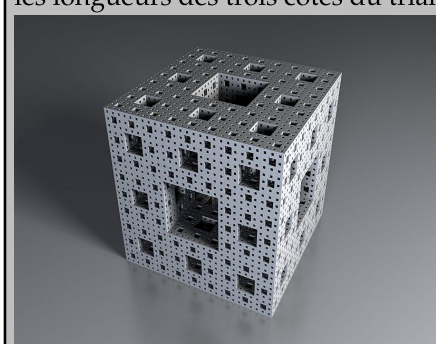
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b'^2-2.a'.b'+a'^2+a''^2-2.a''.b''+b''^2 & c'^2-2.a'.c'+a'^2+a''^2-2.a''.c''+c''^2 \\ 1 & a'^2-2.a'.b'-2.a''.b''+a''^2 & -b'^2-b''^2 & c'^2-2.b'.c'-2.b''.c''+c''^2 \\ 1 & a'^2-2.a'.c'-2.a''.c''+a''^2 & b'^2-2.b'.c'-2.b''.c''+b''^2 & -c'^2-c''^2 \end{vmatrix}$$

On élimine encore sur les autres lignes et on a enfin ces carrés de normes attendus :

$$-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & AB^2 & AC^2 \\ 1 & AB^2 & 0 & BC^2 \\ 1 & AC^2 & BC^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Moralité : si on connaît juste les trois longueurs et aucun angle, on peut quand même calculer l'aire. Et on a la formule similaire en dimension n.

Retrouvez la formule dite de Heron [a] : $S = \sqrt{\dfrac{(a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)}{16}}$ où a, b et c désignent les longueurs des trois côtés du triangle.



a. Heron d'Alexandrie, premier siècle, mathématicien grec, auteur de nombreux livres et d'astucieux systèmes mécaniques

Oui, c'est le même Heron que dans la formule de Euclide et Héron, généralisation du théorème de Pythagore avec un angle non droit : $c^2 = a^2+b^2-2.a.b.\cos(\gamma)$ appelée aussi formule d'Al-Kashi.

On note a, b et c les trois longueurs des côtés pour simplifier et faire comme tout le monde :

$-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$ On développe par rapport à une colonne :

$$-16.S^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c^2 & b^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \end{vmatrix}$$

et on recommence, regroupe : $\boxed{16.S^2 = 2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2 + 2.b^2.c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$

On sent venir les formules de Viète, et pourtant...

Pour établir la formule de Heron, il suffit de comparer la somme $2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2 + 2.b^2.c^2 - a^4 - b^4 - c^4$ et le produit $(a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)$.

Connaissant Simon F., je me doute qu'il va juste écrire "*on développe le membre de droite et on retrouve celui de gauche*".

Mais il faut prouver que vous l'avez fait. Et que vous l'avez fait intelligemment :

$(a+b+c).(a+b-c) = (a+b)^2 - c^2$	$(c+b-a).(c+a-b) = c^2 - (a-b)^2$

On développe pour finir le produit de ces deux termes :

$(a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b) = -c^4 - (a+b)^2.(a-b)^2 + c^2.((a+b)^2 + (a-b)^2)$

On a le terme $-c^4$.

Le produit $(a+b)^2.(a-b)^2$ vaut $(a^2-b^2)^2$ et apporte a^4, b^4et $2.a^2.b^2$ avec les bons signes.

Il reste $c^2.((a+b)^2 + (a-b)^2)$ de valeur $c^2.(2.a^2 + 2.b^2)$ et on a les derniers double produits.

On a donc sans gros effort

$$\boxed{2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2 + 2.b^2.c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = (a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)}$$

On reporte, et on a la formule de Heron $S = \sqrt{\dfrac{(a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)}{16}}$ plus connue sous la forme $\boxed{S = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}}$ où p est le demi-périmètre $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

♣ 0 ♣ Pour un tétraèdre de $\mathbb{R}^3$, la formule est $288.V^3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & AB^2 & AC^2 & AD^2 \\ 1 & AB^2 & 0 & BC^2 & BD^2 \\ 1 & AC^2 & BC^2 & 0 & CD^2 \\ 1 & AD^2 & BD^2 & CD^2 & 0 \end{vmatrix}$ *(dite formule de Piero della Francesca*[a]*)*. Prouvez la.

a. *XV^{eme} siècle, mathématicien italien (oui, avec ce nom) qui formalisa la notion de perspective et volumes dans $\mathbb{R}^3$ et reste d'ailleurs connu comme peintre*

Même type de calculs.

◦45◦ Donnez le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et montrez que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres (valeur propre ?). Donnez un dernier vecteur propre, formant une base de $(\mathbb{R}^4, +, .)$ avec des trois autres (on supposera $a+b+c+d$ non nul).

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \\ d & d & d & d \end{pmatrix}$$

c'est bien une matrice carrée.

Le déterminant de $M - X.I_4$ donne $X^4 - (a+b+c+d).X^3$ si on fait le calcul.

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \\ d & d & d & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} .(a+b+c+d)$$

C'est une formule du type $M.U = \lambda.U$ avec $\lambda = a+b+c+d$ (la valeur propre)

et $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ (le vecteur propre, non nul)

De même $\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \\ d & d & d & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} .(0)$.

On a un vecteur propre (non nul) et c'est la valeur propre qui est nulle *(ça c'est autorisé)*.

Remarque :	*Un vecteur propre est non nul, sinon $M.0_n = \lambda.0_n$ est sans intérêt.* *La valeur propre λ associée au vecteur propre a le droit d'être nulle.* *Et d'ailleurs, le cas « il y a une valeur propre nulle » est le cas où on peut avoir à la fois* *M non inversible* *M diagonalisable* *Pourquoi confondez vous inversibilité et diagonalisabilité.* *Inversibilité, c'est facile, on calcule un déterminant.* *Diagonalisabilité nécessite de trouver D et P, c'est plus « chaud ».*

On écrit nos couples

valeur propre	$a+b+c+d$	0	0	0
vecteur propre	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

On en déduit

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & -1 & 0 & 0 \\ c & 0 & -1 & 0 \\ d & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Et si ! D est diagonale : $D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ si vraiment vous n'avez pas les trous en face de yeux.

◦46◦ Montrez que $(3.\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i} + 4.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k},\ -2.\overrightarrow{i} - 4.\overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{k})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Décomposez $\overrightarrow{j}$ sur cette base. Donnez un vecteur non nul qui garde les mêmes composantes sur cette base que sur la base canonique.

On calcule juste : $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4$.

Ensuite, on inverse : $\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 & 2 \\ -1 & -1 & 5/2 \end{pmatrix}$. Et on interprête :

$\overrightarrow{j} = -\dfrac{1}{2}.(3.\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}) - \dfrac{1}{2}.(\overrightarrow{i} + 4.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}) - 1.(-2.\overrightarrow{i} - 4.\overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{k})$.

On peut aussi l'obtenir « à la main », en effecutant des combinaisons telles que

$$(\overrightarrow{i} + 4.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}) + (-2.\overrightarrow{i} - 4.\overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{k}) = -\overrightarrow{i}$$

(d'ailleurs la première colonne de la matrice inverse)

$$(3.\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}) - (\overrightarrow{i} + 4.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}) = 2.\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j}$$

il ne reste qu'à enlever $\overrightarrow{i}$ et diviser par 2.

Le vecteur nul a les mêmes composantes sur les deux bases : trois 0. Mais est ce le seul ?
En général, tous les vecteurs changent de composantes quand ils changent de base.
Ici, on veut $x.(3.\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}) + y.(\overrightarrow{i} + 4.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}) + z.(-2.\overrightarrow{i} - 4.\overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{k}) = x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k}$
(le vecteur a pour composantes x, y et z sur les deux bases).

On résout $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on des solutions : tous les multiples de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}$ est bien aussi $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

C'était prévisible qu'il y ait des solutions, car $\begin{pmatrix} 3-1 & 1 & -2 \\ 2 & 4-1 & -4 \\ 2 & 2 & -2-1 \end{pmatrix}$ *avait un déterminant nul.*

◦47◦ J'ai tracé un quadrilatère $(A,\ B,\ C,\ D)$ dans le plan. J'ai mesuré ses quatre côtés et une de ses diagonales. J'ai trouvé les mesures suivantes, triées par ordre croissant : $\boxed{4 \mid 8 \mid 11 \mid 20 \mid 30}$
Dites moi laquelle est la longueur d'une des diagonales *(et prouvez le)*.

Indiquez comment retrouver alors la longueur de l'autre diagonale. Combien de valeurs peut prendre cette longueur de l'autre diagonale ?

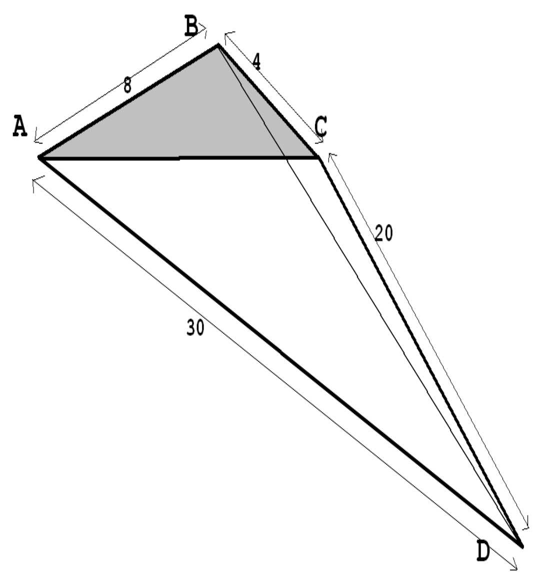
Point de départ de cet exercice : si on a un triangle, on mesure les longueurs des côtés ; mais si on a les longueurs des côtés, on n'a pas forcément un triangle.

Par exemple, il est impossible d'avoir un triangle $(A,\ B,\ C)$ vérifiant $AB = 1$, $BC = 2$ et $AC = 15$, on est d'accord.
Or, un quadrilatère dont on a tracé une des diagonales est fait de deux triangles accolés. Il y a donc des relations entre les cinq longueurs données.
Alors, quelles sont les conditions sur les trois longueurs d'un triangle ?
On considéré un triangle de sommets A, B et C et de côtés a, b et c *(notation canonique : $AB = c$ et ainsi de suite)*. Quitte à ordonner, on suppose $a \leqslant b \leqslant c$. On a trois inégalités triangulaires à écrire et manipuler *(sachant $a \leqslant b \leqslant c$)* :

$AB \leqslant AC + BC$	$c \leqslant a + b$	$c - b \leqslant a$	formule 1
$AC \leqslant AB + BC$	$a \leqslant b + c$	peu utile	
$BC \leqslant AB + AC$	$b \leqslant a + c$	$b - a \leqslant c$	formule 2

Quitte maintenant à choisir le nom des quatre sommets du quadrilatère, on les nomme dans l'ordre A, B, C et D, et on considère que la diagonale mesurée est AC.
La question est : de 4 8 11 20 30, qui est AC ? On raisonne en étudiant chaque cas, un par un. On élimine ceux qui sont incohérents, et s'il n'en reste qu'un, c'est le bon.

On suppose $AC = 4$. On a alors deux triangles (ABC) et (ACD) dont le plus petit côté vaut 4. La formule (1) nous dit que la différence des deux autres cotés ne peut pas dépasser 4. C'est possible avec un triangle de mesures $(4, 8, 11)$, mais on n'a plus de possibilités pour l'autre : $(4,\ 20,\ 35)$ n'est pas cohérent.
On élimine $AC = 4$.



• On suppose $AC = 8$. Là encore, il faut deux couples de côtés dont la différence ne dépasse pas 8. C'est encore possible avec $(4,\ 8,\ 11)$ mais pas avec $(8,\ 20,\ 30)$ *(et je ne parle pas des $(4,\ 8,\ 20)$ et autres)*.
On élimine $AC = 4$.

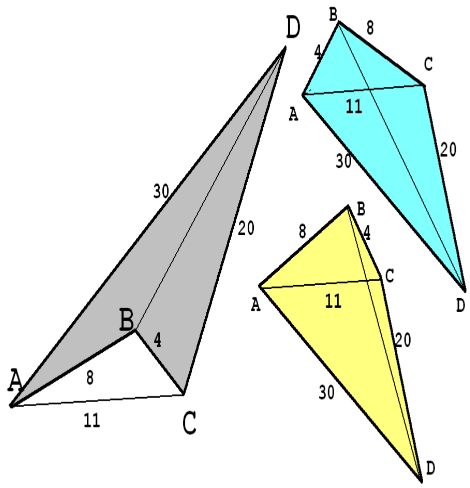
• On suppose $AC = 11$. On peut assembler un triangle $(4, 8, 11)$ et un triangle $(11, 20, 30)$. Il n'y a aucune incohérence.
On peut garder $AC = 11$.

• On suppose $AC = 20$ *(une grande diagonale !)*. Les côtés du quadrilatère valent 4, 8, 11 et 30. On a donc deux triangles dont un côté vaut 20. L'un d'entre eux est de la forme $(x, 20, 30)$, et l'autre prend les deux longueurs qui restent. Mais, qu'il s'agisse de $(11,\ 8,\ 20)$, $(4,\ 8,\ 20)$, $(4,\ 11,\ 20)$ c'est incohérent.
On élimine $AC = 20$.

• On suppose $AC = 30$. C'est encore pire. Comment pouvez vous alors avoir deux triangles de grand côté 30, avec les longueurs 4, 8, 11 et 20 ? Déjà, $4 + 8 + 11 + 20$ n'atteint pas 60.

Bref, $\boxed{\text{par élimination, il ne reste que } AC = 11}$
L'un des côtés du quadrilatère vaut 30. Il faut donc avec un côté de longueur au moins $30 - 11$. La seule solution est donc 20.
Les deux derniers côtés sont 4 et 8.
On a deux solutions *(à symétrie et rotation près)* :

$AB = 8$	$BC = 4$	$CD = 20$	$DA = 30$
$AB = 4$	$BC = 8$	$CD = 20$	$DA = 30$



On va chercher à mesurer l'autre diagonale dans le premier cas. Mais il y a l'autre cas.
On choisit un repère associé à notre problème, comme toujours en géométrie cartésienne.
On place l'origine en A qui a alors pour coordonnées $(0, 0)$.
On oriente l'axe Ox pour que C soit dessus : $C(11,\ 0)$.
On doit alors placer B à distance 8 de A ($x^2 + y^2 = 64$) et à distance 4 de C ($(x-11)^2 + y^2 = 16$). On résout et on choisit l'orientation de Oy pour que y_B soit positif : $B\Big(\dfrac{169}{22},\ \dfrac{22.\sqrt{2415}}{484}\Big)$.
On fait de même pour placer D : $x^2 + y^2 = 900$, $(x-11)^2 + y^2 = 400$: $D\Big(\dfrac{621}{22},\ \dfrac{66.\sqrt{5551}}{484}\Big)$.

Il ne reste plus qu'à calculer la distance BC *(application numérique totalement inutile :* $\sqrt{\dfrac{128\,339 + 21.\sqrt{273\,585}}{}}$ *soit environ 24)*.
Mais il y a d'autres solutions $\boxed{\text{quatre quadrilatères dont deux convexes}}$ en changeant des signes...

∘48∘ ♡ Quels sont les vecteurs de C que l'on peut ajouter à B pour en faire une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$: $B = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$, $C = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right]$.

∘49∘ Quelle est la dimension de $Vect(\cos,\ \sin,\ \exp,\ \exp^2,\ \cos^2,\ \sin^2)$?
Quelle est la dimension de $Vect(\cos(x),\ \sin(x),\ \exp(x),\ \cos(2.x),\ \sin(2.x))$?

Pour $Vect(\cos,\ \sin,\ \exp,\ \exp^2,\ \cos^2,\ \sin^2)$, les objets sont bien des vecteurs, en tant que fonctions.
La dimension ne peut pas dépasser 6, car on a une famille génératrice de six vecteurs.
Reste à savoir si elle est libre.
Si elle l'est, elle forme une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre. Et la dimension vaut donc 6.
On suppose donc, pour un sextuplet[7] donné (a, b, c, d, e, f) : $a.\cos + b.\sin + c.\exp + d.\exp^2 + e.\cos^2 + f.\sin^2 = 0$ (fonction nulle).
On traduit : $\forall x,\ a.\cos(x) + b.\sin(x) + c.e^x + d.e^{2.x} + e.\cos^2(x) + f.\sin^2(x) = 0$. Et on joue sur le $\forall x$ pour annuler les coefficients.
Les idées sont classiques : regarder en quelques points bien choisis, dériver, regarder encore en quelques points, regarder vers $+\infty$.
Je vais commencer par l'idée de $+\infty$.
On commence par diviser par $e^{2.x}$ (non nul) :

$$\forall x,\ \frac{a.\cos(x) + b.\sin(x)}{e^{2.x}} + c.e^{-x} + d + \frac{e.\cos^2(x) + f.\sin^2(x)}{e^{2.x}} = 0$$

On fait tendre x vers $+\infty$ (c'est vrai pour tout x !) : $0 + d + 0 = 0$.

On recommence en effaçant $d.e^{2.x}$ et en divisant juste cette fois par e^x :

$$\forall x,\ \frac{a.\cos(x) + b.\sin(x)}{e^x} + c + \frac{e.\cos^2(x) + f.\sin^2(x)}{e^x} = 0$$

Cette fois, c'est c qui est nul.
On s'est débarrassé des exponentielles (qui n'auraient pas pû être égales à des lignes trigonométriques !).

On repart de $\forall x,\ a.\cos(x) + b.\sin(x) + e.\cos^2(x) + f.\sin^2(x) = 0$ et on regarde en particulier en 0 et en π : $a + e = 0$ et $-a + e = 0$.

7. j'ai peur : par quoi mon correcteur orthographique va-t-il me proposer de remplacer « sextuplet » si il ne le trouve pas dans sa base de données ?

Cette fois, c'est a et e qui sont nuls.
On regarde en $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{-\pi}{2}$.
Et c'est fini !

La dimension vaut 6.

Et pour $Vect(\cos(x),\ \sin(x),\ \exp(x),\ \cos(2.x),\ \sin(2.x))$?
Eh bien, pour tout x, ce sont des réels.
On est donc dans $(\mathbb{R}, +, .)$, de dimension 1, et on a pris six vecteurs (dont plusieurs non nuls).
La dimension vaut toujours 1.

Il ne faut effectivement pas confondre $Vect(\cos(x),\ \sin(x),\ \exp(x),\ \cos(2.x),\ \sin(2.x))$ de cette question avec

$$Vect(x \longmapsto \cos(x),\ x \longmapsto \sin(x),\ x \longmapsto \exp(x),\ x \longmapsto \cos(2.x),\ x \longmapsto \sin(2.x))$$

de la question précédente...

◦50◦ Une matrice carrée M est nilpotente si il existe un entier k vérifiant $M^k = O_n$. Ayant constaté que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont des matrices nilpotentes linéairement indépendantes, l'élève Tongrocuge-Doipassé déduit « l'espace vectoriel des matrices nilpotentes de taille 3 sur 3 est de dimension 6 ». Le colleur Hizenioublack corrige « non, au moins de dimension 6, mais peut être plus ».
Montrez que les deux sont vraiment cons comme c'est pas permis.

Certes les six matrices obtenues sont indépendantes.
Il suffit de partir de $a.A + b.B + \ldots = 0_{3,3}$ et d'obtenir $a = b = \ldots = 0$ en regardant où sont placés les 1.

Mais les matrices nilpotentes ne forment pas un espace vectoriel !
La somme de deux matrices nilpotentes ne l'est plus forcément.
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes, mais $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est plus.
Comment parler alors de dimension ?

En revanche, il peut être intéressant de regarder la dimension du plus petit espaces vectoriel contenant les matrices nilpotentes.
Ce sera ici 8.

◦51◦ (♡ en dimension 2 ou 3) En considérant que la base canonique de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ est de la forme $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}\right)$ (on promène les 1 le long de chaque ligne dans l'ordre) ;
la base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}\right)$ est elle de même orientation qu'elle (cette fois, les 1 se promènent de colonne en colonne) ?
Rappel : pour dire si deux bases B et $\mathbb{B}$ ont la même orientation, on exprime les vecteurs de B sur la base $\mathbb{B}$ et on regarde le signe du déterminant obtenu.

Il faut donc écrire en colonne la matrice qui exprime les vecteurs de la nouvelle base par rapport à ceux de l'ancienne base.
Et attention, les vecteurs sont eux même des matrices...
Par exemple, pour n égal à 2 *(je ne commence pas par 0 ou 1)* :

1	0	0	0	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^*$
0	0	0	0	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^*$
0	1	0	0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^*$
0	0	0	1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^*$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	

La matrice de changement de base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et elle a pour déterminant -1.

Passons à la taille 3 :

1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si j'ai bien rempli, il y a dans la matrice de taille 9 sur 9 un seul 1 par ligne et par colonne.
C'est une matrice de permutation.
Pour trouver sa signature, il suffit de compter les échanges de colonnes.
Et finalement, il suffit de compter des bicycles :

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Il y en a trois, la signature vaut -1, et le déterminant aussi.
Les deux bases sont orientées en sens contraire.

Pour n quelconque, il a a n matrices qui sont à la même place dans les deux descriptions *(celles où le* 1 *est sur la diagonale)*.
Il reste $n^2 - n$ éléments qui s'échangent deux à deux.

On a besoin de $\dfrac{n.(n-1)}{2}$ bicycles.

La signature vaut $\boxed{(-1)^{\frac{n.(n-1)}{2}}}$ *(et c'est aussi le déterminant du changement de base)*.

◦52◦

E est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 nuls en 1.
Complétez le tableau.
Pour celles qui sont des bases, regroupez les en deux groupes en fonction de leur orientation relative.

	génératrice	base
$(1, X, X^2, X^3)$		
$((X-1),\ (X-1)^2,\ (X-1)^3)$		
$(X-1),\ (X-1).(X-2),\ (X-1).(X-2).(X-3))$		
$(X-1),\ (X-1).(X-2),\ (X-1).(X-2)^2)$		
$(X-1,\ (X-1)^2,\ (X-1).(X-2),\ (X-1).(X-3))$		
$((X-1)^2.(X-2),\ (X-1).(X-2)^2,\ X-1)$		
$((X-1),\ (X-1).X,\ (X-1).X^2)$		

◦53◦

Montrez que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\right)$ est liée dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles vous pouvez enlever n vecteurs de la famille alors qu'elle reste liée.
Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles vous pouvez enlever n vecteurs de la famille pour qu'elle devienne libre.

Cinq vecteurs dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
Et en plus, il y a le vecteur nul !
Si j'en enlève cinq, elle est vide, et donc libre.
Si j'en enlève plus que 5, je suis fort !
Si j'en enlève un, deux, trois ou quatre, je peux choisir de garder le vecteur nul. Et elle reste liée.

Si j'en enlève un seul (quel qu'il soit) elle a toujours trop de vecteurs.

Si j'en enlève deux, et que je garde $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}\right)$, j'ai mal joué, elle est liée.

Mais si je garde $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\right)$ elle est libre (déterminant non nul). C'est donc le choix que je ferai.

Si on me demande d'en enlever plus, je commence par en enlever deux : $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\right)$, et l'en enlève encore à cette famille libre. Elle reste libre.

◦54◦

Soient A et B deux matrices carrées de taille 2. Montrez que la famille $(A^2,\ B^2,\ A.B,\ A.B.A,\ B.A.B)$ est liée.

Mais c'est idiot ! Cinq matrices dans un espace vectoriel de dimension 4 ! L'exercice est fini.
Oui, l'espace des matrices 2 sur 2 est de dimension 4 et pas 2, il faut quand même être un peu logique et compter les nombres à choisir...

◦55◦

♡ Un élève a l'intention de démontrer que la famille $(\cos,\ \cos^2,\ \cos^3,\ \sin)$ est liée dans $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, .)$. Il veut pour un quadruplet donné $(a,\ b,\ c,\ d)$: $a.\cos + b.\cos^2 + c.\cos^3 + d.\sin = 0$ *(fonction nulle)*. Il calcule en 0 en $\pi/4$ et en $\pi/2$.

Il aboutit au système $\left\{\begin{array}{ccccc} a & +b & +c & & = 0 \\ \sqrt{2}.a/2 & +b/2 & +\sqrt{2}.c/4 & +\sqrt{2}.d/2 & = 0 \\ & & & +d & = 0 \end{array}\right.$. Il trouve une solution non nulle $(a, b, c, d) = (\sqrt{2}/2,\ -(2+\sqrt{2})/2,\ 1,\ 0)$ *(vérifiez)*. Pourquoi son raisonnement est il faux ?

L'élève a prouvé

$$\Big(a.\cos + b.\cos^2 + c.\cos^3 + d.\sin = 0\Big) \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} a & +b & +c & & = 0 \\ \sqrt{2}.a/2 & +b/2 & +\sqrt{2}.c/4 & +\sqrt{2}.d/2 & = 0 \\ & & & +d & = 0 \end{array}\right.$$

puis

$$\Big((a, b, c, d) = (\sqrt{2}/2,\ -(2+\sqrt{2})/2,\ 1,\ 0)\Big) \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} a & +b & +c & & = 0 \\ \sqrt{2}.a/2 & +b/2 & +\sqrt{2}.c/4 & +\sqrt{2}.d/2 & = 0 \\ & & & +d & = 0 \end{array}\right.$$

Et alors ?

Ce que l'on n'a pas c'est

$$\Big((a,b,c,d) = (\sqrt{2}/2,\ -(2+\sqrt{2})/2,\ 1,\ 0)\Big) \Rightarrow \Big(a.\cos + b.\cos^2 + c.\cos^3 + d.\sin = 0\Big)$$

Au mieux :

$$\Big((a,b,c,d) = (\sqrt{2}/2,\ -(2+\sqrt{2})/2,\ 1,\ 0)\Big) \Rightarrow \Big(\exists x,\ a.\cos(x) + b.\cos^2(x) + c.\cos^3(x) + d.\sin(x) = 0\Big)$$

Pour famille liée, on aurait voulu

$$\Big((a,b,c,d) = (\sqrt{2}/2,\ -(2+\sqrt{2})/2,\ 1,\ 0)\Big) \Rightarrow \Big(\forall x,\ a.\cos(x) + b.\cos^2(x) + c.\cos^3(x) + d.\sin(x) = 0\Big)$$

Et sinon, on peut montrer : $\Big(\forall x,\ a.\cos(x) + b.\cos^2(x) + c.\cos^3(x) + d.\sin(x) = 0\Big) \Rightarrow \Big((a,b,c,d) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)\Big)$.
Calculez par exemple en $\pi/2$, puis en 0.
Ensuite, dérivez et calculez en 0. Terminez en calculant en $\pi/3$.

D'ailleurs, d'un point de vue logique, partir de $\Big(a.\cos + b.\cos^2 + c.\cos^3 + d.\sin = 0\Big)$ et n'utiliser que trois valeurs de x sent mauvais.
On a quatre nombres à déterminer a, b, c et d. Il vaut mieux avoir quatre relations pour bien avancer !

∘56∘

Montrez que si $(S_1, \dots S_p)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ et $(A_1, \dots A_q)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$, alors $(S_1, \dots S_p, A_1, \dots A_q)$ n'est pas forcément une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$.
Montrez que si $(S_1, \dots S_p)$ est une famille libre de $(S_n(\mathbb{R}), +, .)$ et $(A_1, \dots A_q)$ est une famille libre de $(A_n(\mathbb{R}), +, .)$, alors $(S_1, \dots S_p, A_1, \dots A_q)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$.
Rappel : $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ est l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n sur n ; S_n en est le sous-espace des matrices symétriques (définition : ${}^tS = S$) et enfin A_n en est le sous-espace des matrices antisymétriques (définition : ${}^tA = -A$) .

Pour le cas « $(S_1, \dots S_p)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ et $(A_1, \dots A_q)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ », un contre-exemple suffit.
La famille (I_n) est libre (un vecteur, non nul).
La famille $(2.I_n)$ l'est aussi (même raison).
Mais la famille $(I_n,\ 2.I_n)$ ne l'est pas (vecteurs colinéaires).

Passons au cas où on met bout à bout • une famille libre de matrices symétriques
• une famille libre de matrices antisymétriques
Traduisons les hypothèses :
• $\forall(\alpha_1, \dots \alpha_p) \in \mathbb{R}^p,\ \Big((\alpha_1.S_1 + \ldots + \alpha_p.S_p = 0_{n,n}) \Rightarrow (\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0)\Big)$
• $\forall(\beta_1, \dots \beta_q) \in \mathbb{R}^q,\ \Big((\beta_1.A_1 + \ldots + \beta_q.A_q = 0_{n,n}) \Rightarrow (\beta_1 = \ldots = \beta_q = 0)\Big)$
mais aussi $\forall i,\ {}^t(S_i) = S_i$ et $\forall i,\ {}^t(A_j) = -A_j$.

Surtout, on n'invente pas un truc débile du style « on additionne les hypothèses et on met ensemble les conclusions », ce serait un truc idiot sans queue ni tête, et pire encore, sans logique.

Exemple : Que pensez vous de l'élève qui écrit : $\forall x,\ \cos^2(x) = 1/2 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$
$\forall x,\ \sin(x)^2 = 1/2 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$
donc
$\forall x,\ \cos^2(x) + \sin(x)^2 = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$
Oui, il faudrait le mettre dans tous les livres de maths cet exemple de raisonnement d'élève...

On va s'intéresser à la liberté de la grande famille des S_i et A_j.
On se donne donc $p+q$ réels qu'on note naturellement α_i et β_j.
On suppose $\alpha_1.S_1 + \ldots + \alpha_p.S_p + \beta_1.A_1 + \ldots + \beta_q.A_q = 0_{n,n}$.
On veut arriver à la nullité des α_i et des β_j.
Mais pour cela, il faudrait passer de $\alpha_1.S_1 + \ldots + \alpha_p.S_p + \beta_1.A_1 + \ldots + \beta_q.A_q = 0_{n,n}$ à $\alpha_1.S_1 + \ldots + \alpha_p.S_p = 0_{n,n}$ et $\beta_1.A_1 + \ldots + \beta_q.A_q = 0_{n,n}$
ce qui n'est pas évident, car on ne passe pas d'une égalité à deux (c'est la base même des raisonnements bien bâtis, on n'écrit rien sans réfléchir).
Mais si on part de

$$\alpha_1.S_1 + \ldots + \alpha_p.S_p + \beta_1.A_1 + \ldots + \beta_q.A_q = 0_{n,n}$$

et qu'on transpose ?

$$\alpha_1.^t(S_1) + \ldots + \alpha_p.^t(S_p) + \beta_1.^t(A_1) + \ldots + \beta_q.^t(A_q) =^t (0_{n,n}) = 0_{n,n}$$

On tient compte des hypothèses « (anti)-symétriques :

$$\alpha_1.S_1 + \ldots + \alpha_p.S_p - \beta_1.A_1 + \ldots - \beta_q.A_q = 0_{n,n}$$

Mais on a aussi toujours $\alpha_1.S_1 + \ldots + \alpha_p.S_p + \beta_1.A_1 + \ldots + \beta_q.A_q = 0_{n,n}$.
On somme, et on soustrait : $\alpha_1.S_1 + \ldots + \alpha_p.S_p = 0_{n,n}$ et $\beta_1.A_1 + \ldots + \beta_q.A_q = 0_{n,n}$.
cette fois, on a nos deux égalités.
Il est temps d'utiliser les deux hypothèses « famille libre » pour conclure d'une part les α_i sont nuls
d'autre part les β_j sont nuls.

∘57∘ Montrez que dans $(\mathbb{R}, +, .)$, vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la famille $(\cos(\theta), \cos(2.\theta), \cos(3.\theta))$ est liée pour tout θ.
Pour quelles valeurs de θ dans $(\mathbb{R}, +, .)$, vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, la famille $(\cos(\theta), \cos(2.\theta), \cos(3.\theta))$ est-elle libre ?
$\theta = 0, \theta = \dfrac{\pi}{3}, \theta = \dfrac{\pi}{12}, \theta = \dfrac{\pi}{4}, \theta = \dfrac{\pi}{2}, \theta = \dfrac{\pi}{5}$

$(\cos(\theta), \cos(2.\theta), \cos(3.\theta))$ est une famille de trois réels.
C'est à dire de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 1 (la droite). Bien sûr qu'elle est liée.
Tous ces réels sont proportionnels entre eux (le rapport de proportion dépend de θ, mais surveillez bien la position du « $\forall\theta$ »).

Mais en revanche, quand on regarde $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel, c'est plus étrange.
Les coefficients dans les combinaisons linéaires sont uniquement des rationnels.
1 et 2 sont donc colinéaires, avec rapport de proportionnalité 2.
Mais 1 et π ne sont pas proportionnels, et forment donc une famille libre.
De même, 1, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ forme une famille libre (trois directions d'espaces différentes puisque sur la droite engendrée par 1, il n'y a que les rationnels, et dans $Vect(1, \sqrt{2})$, on n'a que les $a + b.\sqrt{2}$ avec a et b rationnels ; raté pour attraper $\sqrt{3}$).

θ	$\cos(\theta)$	$\cos(2.\theta)$	$\cos(3.\theta)$	
0	1	1	1	liée : $1.1 + (-1).1 + 0.1 = 0$
$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	-1	liée : $2.\dfrac{1}{2} + 0.\dfrac{-1}{2} + 1.(-1) = 0$
$\dfrac{\pi}{12}$	$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	libre (mais c'est long)
$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	liée, à cause de 0, mais pas que..
$\dfrac{\pi}{2}$	0	-1	0	liée, encore à cause de 0
$\dfrac{\pi}{5}$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$	$\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$	liée $0.\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} + 1.\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} + (-1).\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$