

LYCEE CHARLEMAGNE

Vendredi 17 mars

M.P.S.I.2



2022

2023

DS07

Entrainement

I~0) Calculez $\det(VdM(1, j, j^2))$, $\det(VdM(1, i, -1, -i))$ et $\det(VdM(1, e^{i.\pi/3}, e^{2.i.\pi/3}, e^{3.i.\pi/3}, e^{4.i.\pi/3}, e^{5.i.\pi/3}))$. 5 pt.

Comparaison des moyennes

II~0) a et b sont deux réels strictement positifs. Dérivez deux fois $t \mapsto \ln((1-t).a + t.b) - (1-t). \ln(a) - t. \ln(b)$ (notée f) ; calculez $f(0)$ et $f(1)$ et montrez que f est croissante puis décroissante sur $[0, 1]$ et déduisez son signe sur $[0, 1]$. 3 pt.

II~1) Déduisez 2 pt.

$$\forall (a_1, a_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \ln\left(\frac{\lambda_1.a_1 + \lambda_2.a_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \geq \frac{\lambda_1.\ln(a_1) + \lambda_2.\ln(a_2)}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

II~2) Montrez alors par récurrence sur n : 3 pt.

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, \ln\left(\frac{\lambda_1.a_1 + \dots + \lambda_n.a_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}\right) \geq \frac{\lambda_1.\ln(a_1) + \dots + \lambda_n.\ln(a_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$$

II~3) Déduisez 2 pt.

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, \ln\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \geq \frac{\ln(a_1) + \dots + \ln(a_n)}{n} \text{ et } \sqrt[n]{a_1 \times \dots \times a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

Inégalité de Hadamard

On va prouver l'inégalité de Hadamard :

soient $U_1, \dots, U_n$ n vecteurs colonne de $\mathbb{C}^n$ et C la matrice de colonnes U_1 à U_n alors on a $|\det(C)| \leq |U_1| \dots |U_n|$ où $|U|$ est le module du vecteur complexe $\sqrt{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2}$.

III~0) Si C est la matrice complexe de coefficient général c_i^k (i ligne de 1 à p , k colonne de 1 à q), on définit C^* la matrice de terme général $\gamma_i^k = \overline{c_k^i}$ (conjuguée de la transposée). Montrez : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \forall (C, D) \in (M_{p,q}(\mathbb{C}))^2, (\alpha.C + \beta.D)^* = \overline{\alpha}.C^* + \overline{\beta}.D^*$. 1 pt.

III~1) Montrez pour deux matrices C et D de formats compatibles : $(C.D)^* = D^*.C^*$ (et pas juste par un « on voit bien que »). 2 pt.

III~2) Montrez que pour C dans $M_{p,q}(\mathbb{C})$, la matrice $C^*.C$ existe et donnez son format, vérifiez que ses termes diagonaux sont réels positifs. 2 pt.

III~3) Montrez que pour tout vecteur colonne U de $\mathbb{C}^n$, $U^*.U$ est un réel positif. Dans quel cas est il nul ? 2 pt.

III~4) On pose pour cette question $r = e^{2.i.\pi/5}$ et $C = VdM(1, r, r^2, r^3, r^4)$. Calculez $C^*.C$ et donnez la valeur de $|\det(C)|$. 3 pt.

IV~0) Soit C une matrice carrée complexe de format n , on pose $A = C^*.C$, montrez : $\det(A) = |\det(C)|^2$. 2 pt.

IV~1) Montrez : $\forall k, a_k^k \in \mathbb{R}^+$ et $A^* = A$. Montrez que si l'un des a_k^k est nul, alors on a $\det(C) = 0$ et montrez que l'inégalité de Hadamard est alors vérifiée. 4 pt.

V~0) On supposera donc pour la suite $\forall k, a_k^k \in \mathbb{R}^{+*}$. On définit les matrices $D = \text{Diag}(\sqrt{a_1^1}, \dots, \sqrt{a_n^n})$ et $B = D^{-1}.A.D^{-1}$. Montrez $\text{Tr}(B) = n$ et $\det(B) \in \mathbb{R}^+$. Montrez : $B^* = B$. 4 pt.

V~1) Montrez que pour tout vecteur colonne U de $\mathbb{C}^n$, $U^*.B.U$ est un réel positif. 2 pt.

V~2) Soit λ une racine (éventuellement complexe) de $\det(B - \lambda.I_n) = 0$. Montrez qu'il existe au moins un vecteur U non nul dans $\mathbb{C}^n$ vérifiant $B.U = \lambda.U$. 1 pt.

V~3) Montrez alors $U^*.B.U = \lambda.U^*.U$ et $(U^*.B.U)^* = \overline{\lambda}.U^*.U$. 2 pt.

V~4) Déduisez : toutes les valeurs propres de U sont réelles et positives. 2 pt.

V~5) Déduisez à l'aide de la partie I : $\det(B) \leq \left(\frac{\text{Tr}(B)}{n}\right)^n$. Déduisez : $\det(A) \leq a_1^1 \times \dots \times a_n^n$. 2 pt.

V~6) Retrouvez alors l'inégalité de Hadamard. 2 pt.

Hadamard rencontre VanDerMonde

V~7) Si Ω est une partie du plan, on appelle diamètre de Ω le maximum des AB quand A et B décrivent Ω . Quel est la diamètre du disque de rayon 1 et de centre 0 ? 1 pt.

V~8) Si Ω est une partie du plan, on appelle triamètre de Ω le maximum des $(AB) \times (AC) \times (BC)$ quand A, B et C décrivent Ω . Donnez le triamètre d'un segment de longueur L . 3 pt.

V~9) Soient A, B et C les points d'affixes $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$ et $e^{i\gamma}$. Montrez : 2 pt.

$$(AB) \times (AC) \times (BC) = 8 \times \left| \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \right| \times \left| \sin\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right) \right| \times \left| \sin\left(\frac{\gamma - \alpha}{2}\right) \right|$$

V~10) Annulez simultanément ces deux dérivées $(x \mapsto \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(x+y))'$ et $(y \mapsto \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(x+y))'$. 1 pt.

V~11) Déduisez $8 \times \left| \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \right| \times \left| \sin\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right) \right| \times \left| \sin\left(\frac{\gamma - \alpha}{2}\right) \right| \leq (3)^{3/2}$. 3 pt.

V~12) Déterminez le triamètre du cercle de rayon 1 et de centre 0. 2 pt.

V~13) Plus généralement, le n -amètre d'une partie Ω est le maximum des produits $\prod_{i < k} (A_i A_k)$ quand $(A_1, \dots, A_n)$ décrit Ω^n . Montrez que si les points $(A_k)_{k \leq n}$ ont pour affixes $(a_k)_{k \leq n}$, $\prod_{i < k} (A_i A_k) = |\det(\text{VdM}(a_1, \dots, a_n))|$. 2 pt.

V~14) Montrez en utilisant le théorème de Hadamard que le n -amètre du disque de centre 0 et de rayon 1 est majoré par $\prod_{k=1}^n \sqrt{n}$. 2 pt.

V~15) Montrez que le n -amètre du disque de centre 0 et de rayon 1 est exactement égal à $n^{n/2}$. 3 pt.

Hadamard : le retour sur $\mathbb{R}$

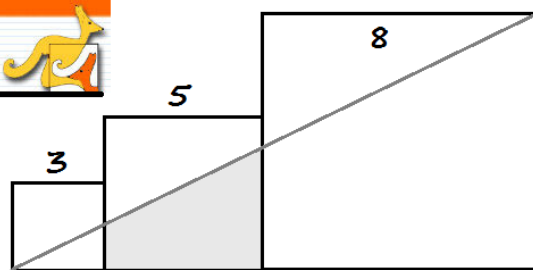
VI~0) Montrez pour une matrice réelle A à coefficients entre -1 et 1 : $|\det(M)| \leq n^{n/2}$. Donnez une matrice de taille 2 sur 2 à coefficients entre -1 et 1 de déterminant maximal. 2 pt.

VI~1) Montrez pour une matrice réelle à coefficients entre 0 et 1 : $|\det(M)| \leq \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n}$ (indication : agrandir avec une colonne de $1/2$, une presque ligne de 0, faire des combinaisons en colonne et appliquer le résultat de Jacques Hadamard). 3 pt.

VI~2) Donnez une matrice de taille 3 sur 3 à coefficients entre 0 et 1 de déterminant maximal. 2 pt.

VI~3) Justifiez : $\frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n} = o(n^{n/2})_{n \rightarrow +\infty}$. 2 pt.

Volé au Kangourou des mathématiques 2023. 5 pt.

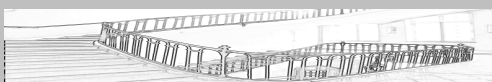
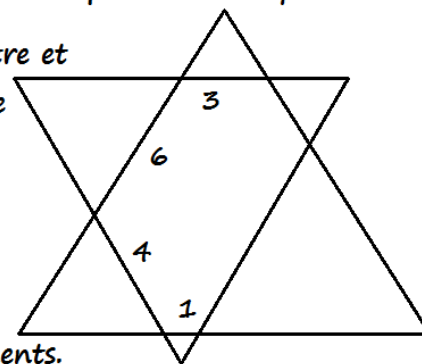


Les trois figures sont des carrés.
Calculez l'aire de la partie grisée.

J'ai raté mon dessin d'étoile de David. Les deux triangles sont quand même "parallèles".

Trouvez le périmètre et l'aire de l'hexagone central.

Les nombres indiquent la longueur de certains segments.

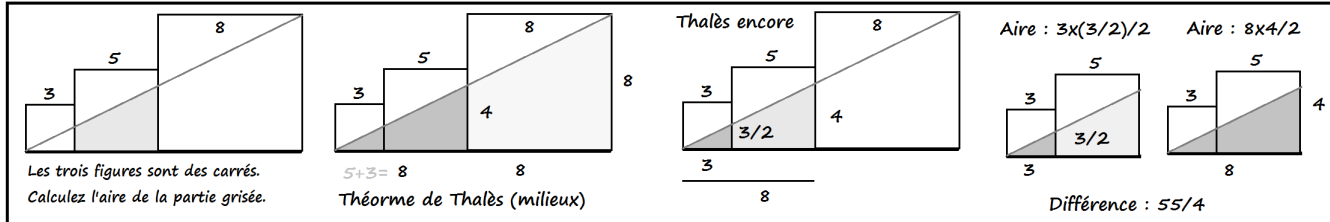




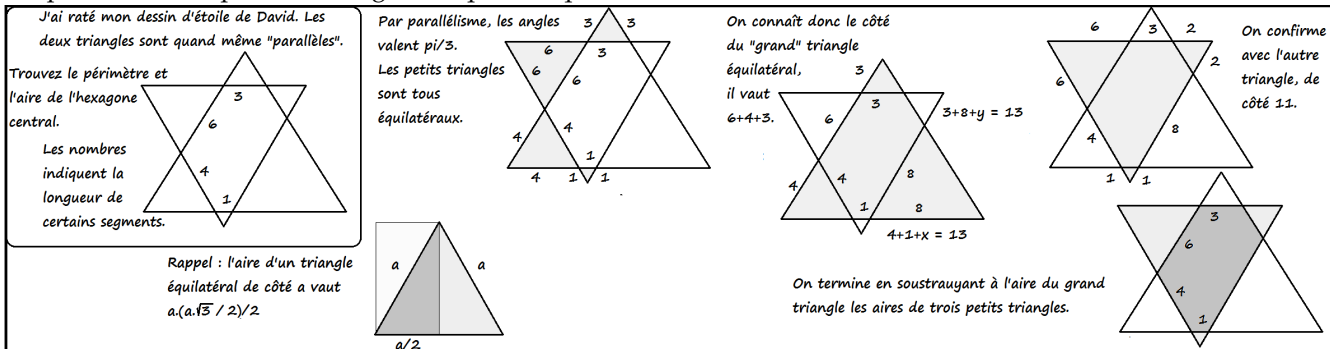
Questions d'un Kangourou.

DS07

Pour le premier exercice, il suffit d'appliquer le théorème de Thalès et d'utiliser la formule donnant l'aire d'un trapèze (hauteur fois moyenne des deux bases), ou de soustraire l'aire d'un petit triangle rectangle à celle d'un grand triangle rectangle.



Pour le second, on calcule la longueur du côté de chaque triangle équilatéral. On trouve 11 et 13.
On peut alors compléter les longueurs qui manquent : 8 et 2.



L'aire de l'hexagone est une différence d'aires : un grand triangle moins trois petits.

On trouve suivant le découpage $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (11^2 - 1^2 - 2^2 - 6^2)$ ou $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (13^2 - 3^2 - 4^2 - 8^2)$.

Dans les deux cas : $20\sqrt{3}$ u.a.



Quelques déterminants de VanDerMonde pour commencer.

DS07

En appliquant juste la règle de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j^4 \end{vmatrix} = j^5 + j^2 + j^2 - j - j^4 - j^4 = 3j^2 - 3j = 3(j^2 - j) = 3(-i\sqrt{3})$$

En sommant les colonnes (puis les lignes) et en développant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -i & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & i & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -i & 0 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix} = -16i$$

On peut aussi utiliser la formule

$$\begin{pmatrix} i-1 & -1-1 & -i-1 \\ -1-i & -i-i & -i+1 \end{pmatrix}.$$

D'ailleurs, pour $VdM(1, r, r^2, r^3, r^4, r^5)$ avec $r = e^{i\pi/3}$ (racine sixième de l'unité), on utilise la formule produit et on trouve 216

$$\begin{pmatrix} r-1 & r^2-1 & r^3-1 & r^4-1 & r^5-1 \\ r^2-r & r^3-r & r^4-r & r^5-r & \\ r^3-r^2 & r^4-r^2 & r^5-r^2 & & \\ r^4-r^3 & r^5-r^3 & & & \\ r^5-r^4 & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r-1 & r^2-1 & r^3-1 & r^4-1 & r^5-1 \\ r-1 & r^2-1 & r^3-1 & r^4-1 & r^5-1 \\ r-1 & r^2-1 & r^3-1 & r^4-1 & r^5-1 \\ r-1 & r^2-1 & r^3-1 & r^4-1 & r^5-1 \\ r-1 & r^2-1 & r^3-1 & r^4-1 & r^5-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r^4 \\ r^6 \\ r^6 \\ r^6 \\ r^4 \end{matrix}$$

Les r^{10} s'en vont. Il reste $(r-1)^5 \cdot (r^2-1)^4 \cdot (r^3-1)^3 \cdot (r^4-1)^2 \cdot (r^5-1)$.

Mais on a quand même $r = -j^2$ et donc $(r-1)^5 = (-j^2-1)^5 = (j)^5 = j^2$

$$\begin{aligned} (r^2-1)^4 &= (j-j^2)^4 = (i\sqrt{3})^4 = 9 \\ (r^3-1)^3 &= (-1-1)^3 = -8 \\ (r^4-1)^2 &= (j^2-1)^2 \\ (r^5-1) &= (-j-1) \end{aligned}$$

Le calcul se termine sans grand effort.

On verra plus loin une méthode plus astucieuse, en calculant $V^ \cdot V$ et en passant au déterminant.*



Inégalités avec des logarithmes.

DS07

On note que quand t décrit $[0, 1]$, $1-t$ et t sont positifs, de même que $(1-t) \cdot a + t \cdot b$.

On calcule cette fonction en 0 et en 1 elle vaut 0

On dérive $t \mapsto \ln((1-t) \cdot a + t \cdot b) - (1-t) \cdot \ln(a) - t \cdot \ln(b)$

$$\text{en } t \mapsto \frac{b-a}{(1-t) \cdot a + t \cdot b} + \ln(a) - \ln(b).$$

Pas facile d'en trouver le signe.

On re-dérive $t \mapsto -\frac{(b-a)^2}{((1-t) \cdot a + t \cdot b)^2}$.

La dérivée seconde est négative. C'est donc que la dérivée première est décroissante.

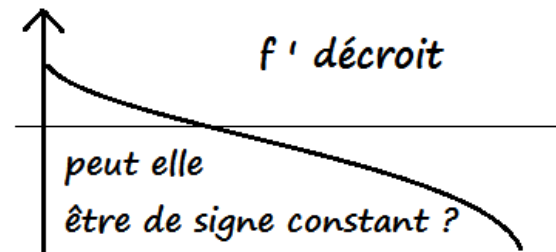
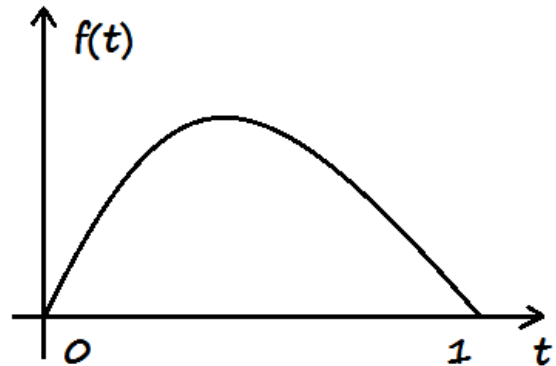
On a trois possibilités :

- elle reste positive
- elle passe du positif au négatif
- elle reste négative

On élimine la première et la dernière.

En effet, si f' reste de signe constant, f est monotone. Et elle ne peut pas prendre la même valeur aux deux extrémités de l'intervalle.

Il ne reste qu'une possibilité : f' est positive, s'annule (on ne sait pas trop où) puis devient négative. f est donc croissante puis décroissante.



Puisque l'application est croissante, puis décroissante, nulle en 0 et en 1, elle est positive entre 0 et 1.

On a donc $\forall t \in [0, 1], \ln((1-t) \cdot a + t \cdot b) \geq (1-t) \cdot \ln(a) + t \cdot \ln(b)$.

Quel rapport avec $\ln\left(\frac{\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \geq \frac{\lambda_1 \cdot \ln(a_1) + \lambda_2 \cdot \ln(a_2)}{\lambda_1 + \lambda_2}$?

Pour a_1 et a_2 donnés, prenons $a = a_1$ et $b = a_2$

Pour λ_1 et λ_2 donnés, prenons $t = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$

On vérifie qu'il est entre 0 et 1 (réels positifs, et dénominateur plus grand que le numérateur).

On constate alors $1 - t = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \ln \left((1-t) \cdot a + t \cdot b \right) & \geq & (1-t) \cdot \ln(a) & + & t \cdot \ln(b) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot a_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot a_2 \right) & \geq & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \ln(a_1) & + & \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \ln(a_2) \end{array}$$

Attention à qui est donné et qui vous définit. Vous devez définir a, b et t à partir de a_1, a_2, λ_1 et λ_2 .

En effet, vous devez prouver un résultat en $\forall(a_1, a_2), \forall(\lambda_1, \lambda_2)$, c'est donc qu'on vous donne a_1 et autres. Ce n'est pas à vous de les choisir.

Et comme vous avez déjà démontré un résultat en $\forall(a, b), \forall t$, vous pouvez l'utiliser pour tous les a, b et t que vous voulez.

A condition quand même de vérifier que t est bien entre 0 et 1.

Bref, du travail de matheux sur les variables avant même de calculer.

La chose sur laquelle on va vous juger, justement !

On a prouvé

$$\forall(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, \forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, \ln \left(\frac{\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_n \cdot a_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \right) \geq \frac{\lambda_1 \cdot \ln(a_1) + \dots + \lambda_n \cdot \ln(a_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$$

pour n égal à 2. C'est un bon début. Il nous manque l'hérédité.

On se donne n et on suppose l'inégalité correcte pour n termes

$$\ln \left(\frac{\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_n \cdot a_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \right) \geq \frac{\lambda_1 \cdot \ln(a_1) + \dots + \lambda_n \cdot \ln(a_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$$

On se donne un $(n+1)^{ieme}$ réel a_{n+1} et un $(n+1)^{ieme}$ coefficient λ_{n+1} . On veut établir le résultat au rang $n+1$.

Prenons $a = \frac{\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_n \cdot a_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$ et $b = a_{n+1}$ puis $t = \frac{\lambda_{n+1}}{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) + \lambda_{n+1}}$ On a alors

$$(1-t) \cdot a + t \cdot b = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) + \lambda_{n+1}} \cdot \frac{\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_n \cdot a_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} + \frac{\lambda_{n+1}}{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) + \lambda_{n+1}} \cdot a_{n+1}$$

On a bien $\frac{\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_n \cdot a_n + \lambda_{n+1} \cdot a_{n+1}}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1}}$.

Quant au membre de droite, il donne bien

$$(1-t) \cdot \ln(a) + t \cdot \ln(b) = \frac{\lambda_1 \cdot \ln(a_1) + \dots + \lambda_n \cdot \ln(a_n) + \lambda_{n+1} \cdot \ln(a_{n+1})}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1}}$$

Bref, on a finalement $\ln \left(\frac{\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_n \cdot a_n + \lambda_{n+1} \cdot a_{n+1}}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1}} \right) \geq \frac{\lambda_1 \cdot \ln(a_1) + \dots + \lambda_n \cdot \ln(a_n) + \lambda_{n+1} \cdot \ln(a_{n+1})}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1}}$.

On a prouvé

$$\forall(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, \forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, \ln \left(\frac{\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_n \cdot a_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \right) \geq \frac{\lambda_1 \cdot \ln(a_1) + \dots + \lambda_n \cdot \ln(a_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$$

On prend à présent le cas particulier où tous les λ_i valent 1 (réel positif) :

$$\forall(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, \ln \left(\frac{1 \cdot a_1 + \dots + 1 \cdot a_n}{n} \right) \geq \frac{1 \cdot \ln(a_1) + \dots + 1 \cdot \ln(a_n)}{n}$$

On passe à l'exponentielle en citant l'argument : application croissante :

$$\forall(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \exp \left(\frac{\ln(a_1) + \dots + \ln(a_n)}{n} \right) = \exp \left(\frac{1}{n} \cdot \ln(a_1 \times \dots \times a_n) \right)$$

On simplifie en rappelant $\sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(A)}{n}}$ et on a bien la comparaison des moyennes attendue.

La moyenne arithmétique $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ dépasse toujours la moyenne géométrique $\sqrt[n]{a_1 \times \dots \times a_n}$.

Le coup de génie ensuite va être de considérer la somme $a_1 + \dots + a_n$ comme la trace (somme des valeurs propres)
le produit $a_1 \times \dots \times a_n$ comme le déterminant (produit des valeurs propres).



Résultats préliminaires sur les étoiles.

DS07

Le résultat $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \forall(C, D) \in (M_{p,q}(\mathbb{C}))^2, (\alpha.C + \beta.D)^* = \bar{\alpha}.C^* + \bar{\beta}.D^*$ est une application directe de la définition.

La formule $(C.D)^* = D^*.C^*$ est aussi assez évidente. Conjuguer le produit ou multiplier les conjugués, c'est pareil, non ?

Ensuite, la transposition change l'ordre.

Mais il faut quand même donner une preuve propre. On introduit donc des notations :

matrice	C	D	$C.D$	$(C.D)^*$	D^*	C^*	$D^*.C^*$
terme général	c_i^j	d_j^k	$s_k^i = \sum_j c_i^j \cdot d_j^k$	$\sigma_k^i = \overline{c_i^k}$	$\delta_k^j = \overline{d_j^k}$	$\alpha_j^i = \overline{c_i^j}$	$\sigma_k^i = \sum_j \delta_k^j \cdot \alpha_j^i$
formule			$s_k^i = \overline{\sum_j c_i^j \cdot d_j^k} = \sum_j \overline{c_i^j} \cdot \overline{d_j^k} = \sum_j \overline{c_i^j} \times \overline{d_j^k}$				$\sigma_k^i = \sum_j \overline{d_j^k} \cdot \overline{c_i^j}$

Il y a bien égalité des termes généraux.

Prenons une matrice éventuellement rectangulaire (p lignes et q colonne)s.

La matrice C^* est une transposée (q lignes et p colonne)s.

Le produit se calcule et donne une matrice carrée :

$$\begin{array}{|c|} \hline p \\ \hline q \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline q \\ \hline p \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline q \\ \hline q \end{array} \text{ à } q \text{ lignes et } q \text{ colonnes.}$$

Mais la question est plus longue que ça. Ce n'est pas juste une question de format. Il faut montrer que les coefficients sont réels.

En version « pour comprendre »

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \\ \bar{a'} & \bar{b'} & \bar{c'} & \bar{d'} \\ \bar{a''} & \bar{b''} & \bar{c''} & \bar{d''} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \\ d & d' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 & & & \\ & \text{"pareil"} & & \\ & & |a''|^2 + |b''|^2 + |c''|^2 + |d''|^2 & \\ & & & \end{pmatrix}$$

En version propre.

Le terme général de la diagonale de la matrice est de la forme

$$\sum_{i=1}^n \gamma_k^i \cdot c_i^k = \sum_{i=1}^n \overline{c_i^k} \cdot c_i^k = \sum_{i=1}^n |c_i^k|^2$$

On a la somme des carrés des modules de termes de la colonne.

On se donne U et on calcule $U^*.U$. Le calcul est direct :

$$U^*.U = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \dots & \bar{u}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \bar{u}_1 \cdot u_1 + \bar{u}_2 \cdot u_2 + \dots + \bar{u}_n \cdot u_n = |u_1|^2 + |u_2|^2 + \dots + |u_n|^2$$

C'est visiblement un réel positif, et même strictement positif (sauf dans l'unique cas du vecteur nul).

Une matrice de VanDerMonde qui revient.

On a la matrice C , sa transposée/conjugués C^* puis la matrice produit, mais déjà, il faut simplifier C . Et quelle que soit la convention prise entre la matrice de VanDerMonde et sa transposée, il n'y a pas de différence !

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 \\ 1 & r^2 & r^4 & r^6 & r^8 \\ 1 & r^3 & r^6 & r^9 & r^{12} \\ 1 & r^4 & r^8 & r^{12} & r^{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 \\ 1 & r^2 & r^4 & r & r^3 \\ 1 & r^3 & r & r^4 & r^2 \\ 1 & r^4 & r^3 & r^2 & r \end{pmatrix}$$

Pour la conjugaison, on va utiliser $\bar{r} = r^4$ et $\bar{r^2} = r^3$ et autres

$$C^* \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 \\ 1 & r^2 & r^4 & r & r^3 \\ 1 & r^3 & r & r^4 & r^2 \\ 1 & r^4 & r^3 & r^2 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 \\ 1 & r^2 & r^4 & r & r^3 \\ 1 & r^3 & r & r^4 & r^2 \\ 1 & r^4 & r^3 & r^2 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r^4 & r^3 & r^2 & r \\ 1 & r^3 & r & r^4 & r^2 \\ 1 & r^2 & r^4 & r & r^3 \\ 1 & r & r^2 & r^3 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 \\ 1 & r^2 & r^4 & r & r^3 \\ 1 & r^3 & r & r^4 & r^2 \\ 1 & r^4 & r^3 & r^2 & r \end{pmatrix}$$

Les termes diagonaux sont à chaque fois des sommes de cinq 1 (1 rencontre m1, rencontre r^4 et r^2 rencontre r^3). Les termes hors de la diagonale valent 0 (somme $1 + r + r^2 + r^3 + r^4$ prise dans le désordre, mais toujours somme des racines de l'unité, ou $\frac{1-r^5}{1-r}$ selon les goûts). Bref : $C^* \cdot C = 5.I_5$

On passe au déterminant : $\det(C^*) \cdot \det(C) = \det(5.I_5) = 5^5$.

Pour passer de C à C^* • on transpose : sans effet sur le déterminant.

• on conjugue : idem.

On montre ici proprement $\det(C^*) = \overline{\det(C)}$

En effet, si on pose γ_k^i le terme général de C^* , on a

$$\begin{aligned} \overline{\det(C)} &= \overline{\sum_{\sigma} \text{Sgn}(\sigma) \cdot c_1^{\sigma(1)} \dots c_n^{\sigma(n)}} = \sum_{\sigma} \overline{\text{Sgn}(\sigma) \cdot c_1^{\sigma(1)} \dots c_n^{\sigma(n)}} = \\ &= \sum_{\sigma} \overline{\text{Sgn}(\sigma)} \cdot \overline{c_1^{\sigma(1)}} \dots \overline{c_n^{\sigma(n)}} = \sum_{\sigma} \text{Sgn}(\sigma) \cdot \gamma_{\sigma(1)}^1 \dots \gamma_{\sigma(n)}^n = \det({}^t C^*) = \det(C^*) \end{aligned}$$

Ce résultat servira de nouveau plus loin.

On a donc obtenu finalement $\overline{\det(C)} \cdot \det(C) = 5^5$ soit $|\det(C)| = 5^{5/2}$



Théorème de Hadamard proprement dit.

DS07

On part de la matrice C et on effectue le calcul $C^* \cdot C$.

Elle existe, elle est carrée, et ses termes diagonaux sont de la forme $\sum_{j=1}^n |c_j^k|^2$. Le calcul a déjà été fait.

On calcule $A^* = (C^* \cdot C)^* = C^* \cdot (C^*)^* = C^* \cdot C = A$.

On a utilisé $(C \cdot D)^* = D^* \cdot C^*$ mais aussi $(C^*)^* = C$.

En effet, son terme général est α_k^i qui donne a_i^k par double transposition et passage deux fois au conjugué.

On a déjà montré $\det(C^*) = \overline{\det(C)}$

On multiplie : $\overline{\det(C)} \cdot \det(C) = \det(C^*) \cdot \det(C) = \det(C^* \cdot C) = \det(A)$.

Supposons que l'un des a_k^k soit nul. On a alors $\sum_{i=1}^n |c_i^k|^2 = 0$.

Comme c'est une somme de carrés de modules, on n'a pas le choix : c_1^k, c_2^k jusqu'à c_n^k sont nuls. La matrice C a une colonne entière de nulle. Son déterminant est nul.

Dans ce cas, on a $\det(C) = 0 \leq \prod_{k=1}^n |C_k|^2$.

On va donc mettre de côté ce cas et passer au cas général où les a_k^k sont tous strictement positifs.

La matrice diagonale D est inversible, d'inverse $\text{Diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1^1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n^n}}\right)$.

Quand on multiplie à droite par D^{-1} , chaque colonne de A est divisée par son $\sqrt{a_k^k}$.

Quand on multiplie à gauche, c'est chaque ligne qui est divisée par son $\sqrt{a_i^i}$.

Vérifiez de tête :

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{a_1^1} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{a_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{a_3^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_3^2 & a_1^3 \\ a_3^3 & a_1^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{a_1^1} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{a_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{a_3^3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{a_1^1} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{a_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{a_3^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^1/\sqrt{a_1^1} & a_2^1/\sqrt{a_2^2} & a_3^1/\sqrt{a_3^3} \\ a_2^1/\sqrt{a_1^1} & a_2^2/\sqrt{a_2^2} & a_2^3/\sqrt{a_3^3} \\ a_3^1/\sqrt{a_1^1} & a_3^2/\sqrt{a_2^2} & a_3^3/\sqrt{a_3^3} \end{pmatrix}$$

La nouvelle matrice a pour terme général $\frac{a_i^k}{\sqrt{a_i^i} \cdot \sqrt{a_k^k}}$

En particulier, tous les termes diagonaux sont égaux à 1. On somme, la trace de B vaut n

Le calcul de B^* est direct :

$$B^* = (D^{-1} \cdot A \cdot D^{-1})^* = (D^{-1})^* \cdot A^* \cdot (D^{-1})^* = (D^{-1}) \cdot A \cdot (D^{-1}) = B$$

En effet, la matrice D est diagonale (rien ne change si on passe à sa transposée), et ses coefficients sont réels. On a montré aussi plus haut $A^* = A$.

Les matrices vérifiant $M^ = M$ seront qualifiées de hermitiennes (hommage à Charles Hermite).
Et elles ont un rôle essentiel en algèbre linéaire.*

Le déterminant de B est le produit $\det(D)^2 \cdot \det(A)$. Et $\det(A)$ est un carré de module. C'est un réel positif.

On va calculer $U^* \cdot B \cdot U$ (formats compatibles).

C'est une matrice de taille 1 sur 1, c'est donc un complexe.

On l'écrit $U^* \cdot (D^{-1} \cdot C^* \cdot C \cdot D^{-1}) \cdot U$.

On regroupe même : $(U^* \cdot D^{-1} \cdot C^*) \cdot (C \cdot D^{-1} \cdot U)$.

Comme D est diagonale à coefficients réels, ceci devient même $(U^* \cdot (D^{-1})^* \cdot C^*) \cdot (C \cdot D^{-1} \cdot U)$.

On réussit même à l'écrire $(C \cdot D^{-1} \cdot U)^* \cdot (C \cdot D^{-1} \cdot U)$.

Si on pose $V = C \cdot D^{-1} \cdot U$, on a un nombre de la forme $V^* \cdot V$.

C'est un réel positif.

La difficulté : • quand faut-il en revenir aux coefficients,

• quand peut-on se contenter de rester à l'étage des formules sur les matrices ?

$\det(B - \lambda \cdot I_n)$ est le polynôme caractéristique de B .

C'est un polynôme de degré n dont des coefficients sont la trace et le déterminant de B .

Et ses racines sont les valeurs propres.

*Vous allez me dire que c'est ensuite direct : à chaque valeur propre, on associe un vecteur propre.
Mais si on doit le prouver.*

$B - \lambda \cdot I_n$ a un déterminant nul. Elle est donc non inversible. Le système $(B - \lambda \cdot I_n) \cdot U = 0_n$ est dégénéré. Il admet donc une solution non nulle.

On a un vecteur vérifiant $B \cdot U - \lambda \cdot I_n \cdot U = 0_n$ soit $B \cdot U = \lambda \cdot U$.

Notre vecteur propre vérifie donc $B \cdot U = \lambda \cdot U$.

On multiplie à gauche par U^* (formats compatibles). On a $U^* \cdot B \cdot U = U^* \cdot (\lambda \cdot U) = \lambda \cdot U^* \cdot U$ car les nombres sont sans format et traversent tout.

On calcule alors (mais de plusieurs façons) : $(U^* \cdot B \cdot U) = U^* \cdot B^* \cdot (U^*)^* = U^* \cdot B \cdot U$ car $B^* = B$ et $(U^*)^* = U$.

On attaque par un autre angle : $(U^* \cdot B \cdot U)^* = (\lambda \cdot U^* \cdot U)^* = \overline{(\lambda \cdot U^* \cdot U)}$ par définition.

Mais la transposée d'un réel est ce réel lui-même : $(U^* \cdot B \cdot U)^* = (\lambda \cdot U^* \cdot U)^* = \overline{\lambda \cdot U^* \cdot U} = \overline{\lambda} \cdot \overline{U^* \cdot U}$.

Mais le complexe $U^*.U$ est en fait un réel positif :

$$(U^*.B.U)^* = (\lambda.U^*.U)^* = \overline{\lambda.U^*.U} = \overline{\lambda}.\overline{U^*.U} = \overline{\lambda}.U^*.U$$

Et si on met tout bout à bout :

$$\lambda.U^*.U = (U^*.B.U) = (U^*.B.U)^* = (\lambda.U^*.U)^* = \overline{\lambda.U^*.U} = \overline{\lambda}.U^*.U$$

En reliant : $\lambda.U^*.U = \overline{\lambda}.U^*.U$. Et comme $U^*.U$ est non nul (somme de carrés de modules), $\lambda = \overline{\lambda}$.

Le complexe λ (racine du polynôme caractéristique) est forcément réel.

Le polynôme caractéristique de C n'a que des racines réelles.

Néanmoins, si je repars de $U^*.B.U = \lambda.U^*.U$ et de $U^*.B.U \in \mathbb{R}^+$, j'ai même en une fois $\frac{U^*.B.U}{U^*.U} = \lambda$ (le dénominateur est un réel non nul).

C'est bon, les racines du polynôme caractéristique sont toutes réelles, et positives.

Attention, dans le quotient $\frac{U^*.B.U}{U^*.U}$ il n'y a pas de simplification formelle.

Par exemple
$$\frac{\begin{pmatrix} \overline{u_1} & \overline{u_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \overline{u_1} & \overline{u_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}.$$

À présent que les racines du polynôme caractéristique sont toutes réelles, on peut leur appliquer le résultat sur les moyennes :

$$\sqrt[n]{\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n} \leq \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n}$$

Mais les relations coefficients racines dans le polynôme caractéristique permettent d'identifier somme et produit des racines

$$\det(B) = \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n \leq \left(\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n} \right)^n = \left(\frac{\text{Tr}(B)}{n} \right)^n$$

Quelques questions plus haut, on a calculé les coefficients diagonaux de B et sa trace : $\text{Tr}(B) = n$.

Revenons à son déterminant :

$$\det(B) = \det(D^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(D^{-1}) = \frac{\det(A)}{\det(D)^2} = \frac{\det(A)}{(\sqrt{a_1^1} \times \dots \times \sqrt{a_n^n})^2} = \frac{|\det(C)|^2}{a_1^1 \times \dots \times a_n^n}$$

On a donc $\frac{|\det(C)|^2}{a_1^1 \times \dots \times a_n^n} \leq 1$ soit bel et bien $|\det(C)| \leq \sqrt{a_1^1} \times \dots \times \sqrt{a_n^n}$ avec chaque $\sqrt{a_k^k}$ égal à $\sqrt{\sum_{i=1}^n |c_i^k|^2}$ (norme du vecteur colonne).

Le théorème de Hadamard est établi.



Diamètre.

DS07

Pour le disque, la distance de A à B est toujours plus petite que 2 : $AB \leq AO + OB \leq 1 + 1$.

Et ce majorant 2 est atteint. (Le diamètre du disque vaut 2.)

Le trimètre fait intervenir trois points.

On prend donc A , B et C sur un segment de longueur L . On veut maximiser le produit des trois longueurs. On sait que l'on va mettre deux points aux extrémités pour maximiser un produit, et le troisième point au milieu pour équilibrer les choses.

On a envie de dire qu'on va prendre $AC = L$, $AB = \frac{L}{2}$ et $BC = \frac{L}{2}$ (car B serait le milieu).

On va montrer que la diamètre du segment vaut $\frac{L^3}{4}$ (homogène à un cube, c'est bon).

Reste à le prouver.

On va prendre trois points sur le segment $[OL]$ de longueur L et les repérer par leur distance à une extrémité fixée O .

En prenant les mesures algébriques, on a $AB = b - a$, $AC = c - a$ et $BC = c - b$. Le produit à maximiser est

$$|b - a| \cdot |c - a| \cdot |c - b|$$

Quitte à profiter de la symétrie des rôles, on va supposer que l'ordre des points sur le segment est O, A, B, C et L .

Les valeurs absolues s'en vont et on veut maximiser $(b - a) \cdot (c - a) \cdot (c - b)$ avec $0 \leq a \leq b \leq c \leq L$.

On prendra des inégalités strictes, car si deux points sont confondus, le produit des distances est nul et guère maximal.

Pour maximiser $(b - a) \cdot (c - a) \cdot (c - b)$ vue comme fonction de a , il suffit de prendre $a = 0$ car sur $[0, b]$, l'application $a \mapsto (b - a) \cdot (c - a) \cdot (c - b)$ est décroissante.

On a donc maintenant $b \cdot c \cdot (c - b)$ (on s'en doutait, on prend A à une extrémité du segment).

Mais ensuite, $c \mapsto b \cdot c \cdot (c - b)$ est croissante sur $[b, c]$. Pour maximiser, on prend donc $c = L$.

On a donc maintenant $b \mapsto b \cdot L \cdot (L - b)$.

Le maximum de cette fonction parabolique est en $b = \frac{L}{2}$ et on a bien $\frac{L^3}{4}$.

Passons au disque. On a cette fois des termes tels que $|e^{i\beta} - e^{i\alpha}|$ puisque la distance est la norme du vecteur, et que ce vecteur se calcule par différence des affixes.

Mais un calcul classique (là on revient au début d'année) donne

$$|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = \left| e^{i \frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot \left(e^{i \frac{\beta-\alpha}{2}} - e^{i \frac{\beta-\alpha}{2}} \right) \right| = \left| e^{i \frac{\alpha+\beta}{2}} \right| \cdot \left| e^{i \frac{\beta-\alpha}{2}} - e^{i \frac{\beta-\alpha}{2}} \right| = 1 \cdot \left| 2i \sin \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \right|$$

(qui a perdu du temps avec des calculs de trigonométrie atroces dont il se sentait fier avant de lire la correction ?)

On fait de même avec les deux autres modules de différences. On a donc bien

$$(AB) \times (AC) \times (BC) = |e^{i\alpha} - e^{i\beta}| \cdot |e^{i\beta} - e^{i\gamma}| \cdot |e^{i\gamma} - e^{i\alpha}| = \left| 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right| \times \left| 2 \sin \left(\frac{\beta - \gamma}{2} \right) \right| \times \left| 2 \sin \left(\frac{\gamma - \alpha}{2} \right) \right|$$

Comment va-t-on disposer nos trois sommets pour maximiser ce produit ?

Évidemment, on pourrait majorer ces sinus par 1.

Mais un tel majorant n'est pas réalisable. Il exigerait en effet $\frac{\alpha - \beta}{2} = \pm \frac{\pi}{2}$, $\frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\gamma - \alpha}{2} = \pm \frac{\pi}{2}$.

Et en sommant : $0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$ et même en jouant sur les trois signes, on ne eut obtenir que $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ ou $-\frac{3\pi}{2}$.

On étudie donc une fonction de deux variables x et y . Qui seraient x et y ?

Réponse : $x = \frac{\beta - \alpha}{2}$, $y = \frac{\gamma - \beta}{2}$ et donc $y + x = \frac{\gamma - \alpha}{2}$

Comme α , β et γ sont entre 0 et 2π , quitte à les supposer dans l'ordre $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq 2\pi$, les demi angles sont entre 0 et π et ont un sinus positif. On peut effacer es valeurs absolues autour des sinus.

On a donc une fonction de deux variables $(x, y) \mapsto \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot |\sin(y + x)|$.

On dérive comme proposé.

En maths, on retrouve l'avantage par rapport à la physique.

$(x \mapsto \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(x + y))'$ a un sens et ne nécessite pas de ∂ et de racontars « à y constant ».

C'est de dire que y doit être constant, une fois qu'on a dit que LA variable est x , non ?

Les physiciens ayant la fâcheuse habitude de ne pas préciser qui sont les variables, ils sont obligés de dire qui ne l'est pas (et qui est donc constant). Bonjour la définition « en creux ».

$$\begin{aligned} (x \mapsto \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(x+y))' &= (x \mapsto \cos(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(x+y) + \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \cos(x+y)) \\ (y \mapsto \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(x+y))' &= (y \mapsto \sin(x) \cdot \cos(y) \cdot \sin(x+y) + \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \cos(x+y)) \end{aligned}$$

Pour trouver le maximum, on annule les deux dérivées (maximum à la fois en x et en y).

On demande donc $\sin(y) \cdot \sin(x+y) = 0$ et $\sin(x) \cdot \sin(y+x) = 0$.

Ne me dites pas que vous n'avez pas reconnu $\cos \cdot \sin + \sin \cdot \cos$ dans nos formules !

On en va pas annuler $\sin(x)$ et/ou $\sin(y)$, le produit serait alors nul, et pas maximal.

On va donc annuler $\sin(2x+y)$ et $\sin(x+2y)$.

On ne le fera pas avec $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ qui conduisent à $x = y = 0$.

On va essayer avec $\begin{cases} x + 2y = \pi \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ x est négatif. On refuse.

On va poursuivre avec $\begin{cases} x + 2y = \pi \\ 2x + y = \pi \end{cases}$. Cette fois : $x = y = \frac{\pi}{3}$.

On trouve alors $\frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\pi}{3}$ puis $\frac{\gamma - \beta}{2} = \frac{\pi}{3}$.

On a donc $(e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}) = (e^{i\alpha}, e^{i\alpha} \cdot e^{2i\pi/3}, e^{i\alpha} \cdot e^{4i\pi/3})$ Les sommets d'un triangle équilatéral.

On a la solution attendue : le triangle équilatéral, de sommets 1, j et j^2 (à rotation près).



Et avec VanDerMonde et Hadamard ?

DS07

Le cours nous informe sur la valeur du déterminant de VanDerMonde :

$$\det(Vdm(a_1, \dots, a_n)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_1)^{n-1} & (a_2)^{n-1} & \dots & (a_n)^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < k \leq n} (a_k - a_i)$$

On passe au module (module du produit, produit des modules) :

$$\det(VdM(a_1, \dots, a_n)) = \prod_{i < k \leq n} |a_k - a_i| = \prod_{i < k \leq n} |A_i A_k|$$

puisque chaque module de différence est une distance entre deux points.

Mais la matrice V est une matrice complexe carrée à laquelle on peut appliquer la formule de Hadamard.

Il suffit de calculer la norme de chaque colonne : $\sqrt{1 + |a_k| + |a_k|^2 + \dots + |a_k|^{n-1}}$.

Bref, on a $\prod_{i < k \leq n} |A_i A_k| = |\det(VdM(a_1, \dots, a_n))| \leq \prod_{k=1}^n \sqrt{1 + |a_k| + |a_k|^2 + \dots + |a_k|^{n-1}}$

Et où sont les A_k ? dans le disque unité. Donc chaque affixe est inférieure ou égale à 1 :

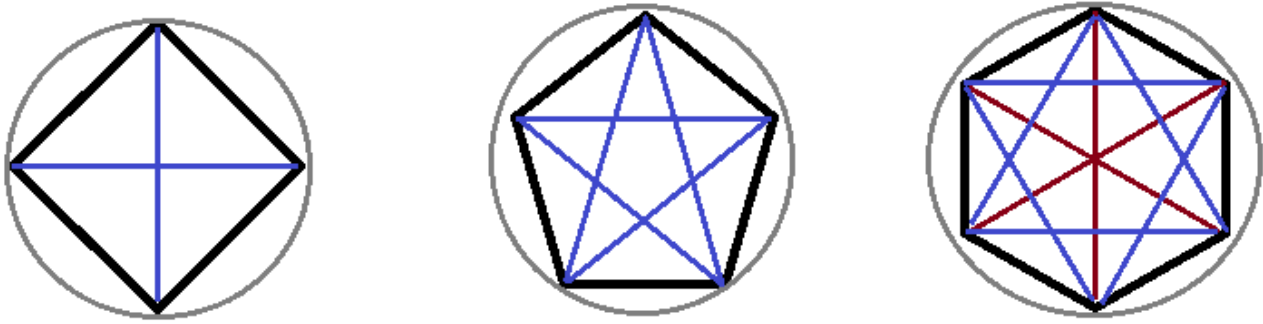
$$\prod_{i < k \leq n} |A_i A_k| = |\det(VdM(a_1, \dots, a_n))| \leq \prod_{k=1}^n \sqrt{1 + |a_k| + |a_k|^2 + \dots + |a_k|^{n-1}} \leq \prod_{k=1}^n \sqrt{1 + 1 + 1 + \dots + 1}$$

et dans chaque somme il y a bien n termes (de a^0 à $|a|^{n-1}$). La majoration est bien en $(\sqrt{n})^n$ ce qui fera $n^{n/2}$.

Peut-on atteindre cette majoration ?

Oui, avec des points équitablement répartis.

Prenons les sommets d'un polygone régulier à n sommets, d'affixes $e^{i \cdot 2k \cdot \pi / n}$.



Le produit des distances est alors juste le déterminant de la matrice de VanDerMonde $VdM(1, r, \dots, r^{n-1})$ en posant $r = e^{2.i.k.\pi/n}$.

Mais reprenons l'idée de l'hexagone et calculons $V^*.V$.

Le terme général de V est $a_i^k = (r^{k-1})^{j-1}$ (indexation matheuse) c'est à dire $r^{(j-1).(k-1)}$.

Le terme général de V^* est alors $\alpha_k^j = \overline{a_j^k} = r^{-(j-1).(k-1)}$.

Rappelons ici : $\bar{r} = r^{-1}$.

Le terme général de la matrice produit est alors

$$b_i^k = \sum_{j=1}^n \alpha_i^j . a_j^k = \sum_{j=1}^n \overline{a_j^k} . a_j^k = \sum_{j=1}^n r^{-(i-1).(j-1) + (j-1).(k-1)}$$

On se dit qu'on aurait dû prendre une indexation pythonienne, de 0 à $n-1$.

$$b_i^k = \sum_{j=1}^n r^{(j-1).(k-i)} = \sum_{j=1}^n (r^{(k-i)})^{j-1}$$

On distingue deux cas : $k = i$ les n termes valent 1

$k \neq i$ r^{k-i} est une racine de l'unité, la somme vaut $\frac{1 - (r^{k-i})^n}{1 - r^{k-i}}$ ce qui fait 0.

Bref, $b_k^k = n$ (si $i = k$) et sinon $b_i^k = 0$.

On a montré donc $V^*.V = n.I_n$.

On passe au déterminant : $\det(V^*). \det(V) = \det(V^*.V) = \det(n.I_n) = n^n$.

On a donc $|\det(V)| = n^{n/2}$.

Le majorant est atteint, c'est lui le maximum (borne supérieure).



Inégalités de Hadamard pour les matrices réelles.

DS07

On applique le résultat connu sur les matrices complexes :

$$|\det(M)| \leq |U_1| \times |U_2| \dots \times |U_n| = \sqrt{(a_1^1)^2 + \dots + (a_n^1)^2} \times \dots \times \sqrt{(a_1^n)^2 + \dots + (a_n^n)^2}$$

Comme chaque coefficient est entre -1 et 1 , chaque racine est plus petite que $\sqrt{n}$ et le produit ne dépasse par $(n^{1/2})^n$ ce qui fait bien $n^{n/2}$.

Pour n égal à 2, peut on atteindre $2^{2/2}$? Oui, avec $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Pour les matrices à coefficients entre 0 et 1, laissons nous guider par l'énoncé, avec une narration en taille 3 :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & a & b & c \\ \frac{1}{2} & a' & b' & c' \\ \frac{1}{2} & a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & a - \frac{1}{2} & b - \frac{1}{2} & c - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & a' - \frac{1}{2} & b' - \frac{1}{2} & c' - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & a'' - \frac{1}{2} & b'' - \frac{1}{2} & c'' - \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Le déterminant est resté le même (développer par rapport à la première lignes), puis par combinaisons il n'a toujours pas changé.

Mais maintenant on a une matrice de taille $n + 1$ dont tous les coefficients α_i^k (i de 0 à n et k aussi) sont entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

On majore par inégalité de Hadamard :

$$\det(\text{matrice}_{n+1}) \leq \sqrt{(\alpha_0^0)^2 + \dots + (\alpha_n^0)^2} \times \sqrt{(\alpha_0^1)^2 + \dots + (\alpha_n^1)^2} \dots \times \sqrt{(\alpha_0^n)^2 + \dots + (\alpha_n^n)^2}$$

Chaque racine se majore par $\sqrt{\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4}}$ soit $\frac{\sqrt{n+1}}{2}$.

Et il y en a $n + 1$. On a donc $|\det(\text{matrice}_{n+1})| \leq \left(\frac{\sqrt{n+1}}{2}\right)^{n+1}$.

On multiplie par 2 :

$$\det(A) \leq 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{n+1}}{2}\right)^{n+1} = \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n}$$

Cette majoration est meilleure que celle obtenue en disant « les coefficients sont entre 0 et 1 donc entre -1 et 1 » :

$$\frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n} < n^{n/2}.$$

Une matrice de taille 3 à coefficients entre 0 et 1 et de déterminant 2 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ écrivez si vous le voulez la

matrice de taille 4 sur 4 qui lui correspond. Moi j'ai $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dont les vecteurs colonne sont deux à

deux orthogonaux !

Mais aussi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2 est le maximum, puisque c'est $\frac{(3+1)^{(3+1)/2}}{2^3}$ notre maximum de tout à l'heure.

Le quotient $\frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n}$ s'écrit $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/2} \cdot \frac{(n+1)^{1/2}}{2^n}$.

La forme indéterminée $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/2}$ est dans le cours à un exposant $\frac{1}{2}$ près : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge vers e .

Rappel : le logarithme de $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ vaut $n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et un développement limité donne $n \cdot \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.
La limite du logarithme vaut 1.

Il reste ensuite $\sqrt{n+1}$ (équivalent en fait à $\sqrt{n}$ face à 2^n).

Les « polynômes » en n s'écrasent devant les exponentielles.

On a donc $\frac{\sqrt{n+1}}{2^n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.

