



◦0◦

♥ Construire une matrice A carrée de taille 3 vérifiant $Tr(A) = 2$, $Tr(A^2) = 14$ et $Tr(A^3) = 20$. Calculez $Tr(A^4)$. (pensez à Viète).

Même question, avec la condition "aucun coefficient nul". (au, on avait le droit à des coefficients nuls avant !).

On la cherche et on la trouve diagonale.

$$a + b + c = 2$$

On veut $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ et on trouve (Viète plus un peu de travail) : $X^3 - 2X^2 - 5X + 6$ et donc les ra-

$$a^3 + b^3 + c^3 = 20$$

cines $-2, 1$ et 3 .

La matrice $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ convient.

De même que toute matrice mélangée comme $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou même $\begin{pmatrix} -2 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Et si on veut des coefficients non nuls, on fait un pas de côté avec $P \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$.

Les traces resteront les mêmes.

Par exemple $\begin{pmatrix} 16 & -9 & -39 \\ -6 & -5 & 18 \\ 4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ (mais quelle matrice P ai-je pu utiliser ?).

Toute autre solution se diagonalisera en $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et vérifiera $Tr(M^4) = (-2)^4 + 1^4 + 3^4$.

◦1◦

Prouvez que de toute suite de période 5 (*exactement*) on peut extraire une suite de période 11 (*exactement*).

La suite est périodique non constante. Elle prend donc au moins deux valeurs différentes.

De la forme $(a, b, c, d, e, a, b, c, d, e, a, b, c, d, e, a, b, c, d, e, \dots)$.

On construit une sous-suite qui prend dix fois de suite la valeur a , puis la valeur b (différente de a , sinon, c , ou d ou e). Puis à nouveau onze fois a , puis b . Et ainsi de suite.

Si la suite initiale s'appelle (u_n) , il suffit de dire $V_n = \begin{matrix} u_{5,n} & \text{si } n \neq 0 \\ u_{5,n+1} & \text{si } n = 0 \end{matrix} \begin{matrix} [11] \\ [11] \end{matrix}$.

L'erreur des élèves est de vouloir extraire une sous-suite selon un critère $b_n = a_{2,n}$ ou $b_n = a_{3,n+1}$ ou $b_n = a_{5,n+7}$ ou toute autre formule d'une rigidité cadavérique, qui n'accepte aucune fantaisie...

◦2◦

Donnez une formule pour le terme général de la matrice $\begin{pmatrix} 1.2 & 2.3 & 3.4 & \dots & n.(n+1) \\ 0 & 1.2 & 2.3 & \dots & (n-1).n \\ 0 & 0 & 1.2 & \dots & (n-2).(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1.2 \end{pmatrix}$.

Créez la sous Python. Calculez sa trace, son déterminant, son polynôme caractéristique, et inversez la.

On a une condition $i \leq k$ (indice de ligne et indice de colonne).

Les termes sont ensuite en $p * (p + 1)$ ou $(p + 2) * (p + 1)$ si p est la différence $k - i$.

Le plus simple est de remplir déjà avec des 0, puis de passer par-dessus :

def

Sa trace vaut $n.1.2$ car il y a n termes égaux à 2.

La matrice est triangulaire : déterminant $(1.2)^n$.

Le déterminant $\det(M - \lambda.I_n)$ est aussi un simple produit : $(2 - \lambda)^n$.

La vraie question est « son inverse ».

A faire.

◦3◦

On définit la suite réelle u par u_0 donné et $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1}$. Pour quelles valeurs de u_0 sait-on si u_5 existe ?
Pour quelles valeurs de u_0 la suite existe-t-elle "pour tout n " ?

u_0 existe toujours.

Existence de u_1 : $u_0 \geq 1$.

Existence de u_2 : $u_0 \geq 1$ puis $u_1 \geq 1$ et donc $\sqrt{u_0 - 1} \geq 1$.

Ceci se résume à $u_0 \geq 2$.

Existence de u_3 : $u_0 \geq 1$ et ensuite $u_1 \geq 2$ ce qui ramène à $u_0 \geq 5$.

Existence de u_4 : cette fois $u_1 \geq 26$.

Et pour qu'existe u_5 : $u_0 \geq$

On va définir la suite (r_n) des valeurs pour lesquelles se produit le basculement.

Si cette suite tend vers $+\infty$, alors quel que soit le choix de u_0 , la suite s'arrêtera à un rang.

◦4◦

Un nombre dernier est un nombre qui a beaucoup de diviseurs ; c'est à dire qui a plus de diviseurs que tous les entiers plus petits que lui. Écrivez un programme qui liste des quarante premiers entiers derniers (*et pas des quarante derniers nombres premiers*).

On va avoir besoin d'une procédure qui compte le nombre de diviseurs d'un entier n :

```
def NbDiv(n) :
    ....Nb = 0
    ....for k in range(1, n+1) :
    .....if n%k == 0 :
    .....Nb += 1
    ....return(Nb)
```

Ensuite, on met en boucle avec un NbMax qui monte dès qu'on a un nouveau record, et une liste L qu'on agrandit peu à peu :

```
L = []
NbMax = 0
for n in range(1, beaucoup) :
    ....if NbDiv(n) > NbMax :
    .....L.append(n)
    .....NbMax = NbDiv(n)
print(L)
```

Reste la question du beaucoup. Combien pour avoir 40 nombres derniers ?

On va remplacer la boucle for par une boucle while :

```
L = []
NbMax = 0
n = 1
while len(L) < 40 :
    ....if NbDiv(n) > NbMax :
    .....L.append(n)
    .....NbMax = NbDiv(n)
    ....n += 1
print(L)
```

Et plus proprement, pour ne pas calculer deux fois la même quantité :

```

L = []
NbMax = 0
n = 1
while len(L) < 40 :
    ....NbDivn = NbDiv(n)
    ....if NbDivn > NbMax :
    ....L.append(n)
    ....NbMax = NbDivn
    ....n += 1
print(L)

```

Liste des vingt premiers avec leur nombre de diviseurs :

[1, 1], [2, 2], [4, 3], [6, 4], [12, 6], [24, 8], [36, 9], [48, 10], [60, 12],
 [120, 16], [180, 18], [240, 20], [360, 24], [720, 30], [840, 32], [1260, 36],
 [1680, 40], [2520, 48], [5040, 60], [7560, 64]]

Au fait, pourquoi est on sûr qu'on aura bien 40 nombres derniers ?

Simplement parce que tout record finit par être dépassé. Si il y avait un dernier nombre dernier, il s'appellerait G et aurait D diviseurs. mais alors le nombre 2^D aurait $D + 1$ diviseurs. Fermez le ban, fin du raisonnement par l'absurde.

◦5◦

Soit A une matrice réelle de taille 3 sur 3 vérifiant $A^3 = -A$. Montrez que A n'est pas inversible.
 On suppose que A n'est pas la matrice nulle. Montrez que $\{U \mid A.U = 0_3\}$ (noté K) est de dimension 1. Montrez que si U est dans K , non nul, et que V n'y est pas, alors $(U, V, A.V)$ est libre. Montrez que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partons de $A^3 = -A$, passons au déterminant : $\det(A^3) = \det(-A)$.
 $(\det(A))^3 = (-1)^3 \cdot \det(A)$

L'équation $d^3 = -d$ a pour solutions 0, i et $-i$. mais ça c'est dans $\mathbb{C}$.

Et dans $\mathbb{R}$ la seule solution est 0.

La matrice a un déterminant nul, elle est non inversible.

La condition $A.U = 0_3$ n'est réalisable qu'avec des vecteurs de taille 3 (une seule colonne).

La présence du vecteur nul est une évidence, et la stabilité est acquise :

$A.(\lambda.U + \mu.V) = \lambda.A.U + \mu.A.V = \lambda.0_3 + \mu.0_3 = 0_3$.

On a un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Comme $\det(A)$ est nul, on a une relation de dépendance linéaire sur les trois colonnes de A :

$a.C_0 + b.C_1 + c.C_2 = 0_3$.

Le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est non nul et est dans I .

Le sous-espace K est au moins de dimension 1.

Avec le langage du cours à venir : le noyau est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ
 il contient d'autres vecteurs que le vecteur nul si et seulement si la
 matrice est non inversible.

Peut il être de dimension 3 cet ensemble ?

Non. Ce serait $\mathbb{R}^3$ tout entier. Et on déduirait alors $A = 0_{3,3}$.

Il reste à éliminer la dimension 2.

◦6◦

On note E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Exprimez $P \mapsto \int_0^1 P(t).dt$ comme combinaison linéaire de u, v et w en posant $u = (P \mapsto P(0))$, $v = (P \mapsto P(1))$ et $w = (P \mapsto P(2))$.
 Même question avec $P \mapsto P(3)$. Même question avec $P \mapsto P'(0)$.

◦7◦

La moyenne de Cesàro c'est $c_n = \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n+1}$. On sait que si la suite est croissante, sa moyenne de Cesàro l'est aussi.

On définit une moyenne pondérée $g_n = \frac{a_0 + 2.a_1 + 4.a_2 + \dots + 2^n.a_n}{2^{n+1} - 1}$ (le dénominateur étant bien la somme des coefficients).

A-t-on encore (a_n) croissante implique (g_n) croissante ?

Et si, pour ne pas s'embêter, on remplace g_n par $\frac{a_0 + 2.a_1 + 4.a_2 + \dots + 2^n.a_n}{2^{n+1}}$?

◦8◦

Montrez que si $((a_n)^2 - a_n)$ et $((a_n)^2 + a_n)$ convergent, alors (a_n) converge.

Vrai ou faux : si $((a_n)^2 - a_n)$ et $((a_n)^3 + a_n)$ convergent, alors (a_n) converge.

Si $((a_n)^2 - a_n)$ et $((a_n)^2 + a_n)$ convergent, alors leur différence converge. C'est aussi simple que ça.

Il ne reste qu'à diviser par 2.

Peut-on reconstruire a_n à partir de $(a_n)^2 - a_n$ et $(a_n)^3 + a_n$ par des combinaisons, produits, élévations au carré ?

Pas évident. Alors un contre-exemple ? Pas notre célèbre $((-1)^n)$.

Posons $b_n = (a_n)^2 - a_n$ et $c_n = (a_n)^3 + a_n$ pour tout n .

Et effaçons ces n en travaillant à l'étage des suites.

On a alors $b^3 - c^2 = -3.a^5 + a^4 - a^3 - a^2$. Elle converge comme différence de produits de suites convergentes.

On la note d . On a ensuite $d + 3.b.c = -2.a^4 + 2.a^3 - 4.a^2$. Elle converge à son tour.

On lui ajoute $2.b^2$ et voilà que $-2.a^3 - 2.a^2$ converge.

On combine avec $2.c$ et cette fois, c'est $-2.a^2 + 2.a$ qui converge.

On combine avec b et cette fois, c'est a qui converge. On l'a eue.

Attention | Tout raisonnement commençant par « notons α la limite de $(a_n)^2$ ou autre est entâché d'erreurs dès le début.

Il est fini le monde où toute suite converge.

N'écrivez jamais $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ si vous n'avez rien qui vous donne l'existence de cette limite..

◦9◦

On note P l'espace vectoriel des suites réelles périodiques, C l'espace vectoriel des suites réelles convergentes, et Z l'espace vectoriel des suites réelles qui convergent vers 0.

On note E l'espace $P + C$. A-t-on $E = P \oplus C$? A-t-on $E = P \oplus Z$?

Montrez que si u est dans E alors (u_{n+1}) est aussi dans E .

Montrez que si u est dans e alors $(u_{n+1} - u_n)$ (sa « dérivée ») est encore dans E .

Montrez que si une suite est dans E sa moyenne de Cesàro est dans E (question un peu difficile, si vous avez du mal, traitez juste le cas de la suite $((-1)^n)$).

E est-il stable par multiplication ?

◦10◦

On donne comme hypothèse : $\frac{u_{n+2}}{u_n} \mapsto_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}$. Un élève prétend en déduire : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \mapsto_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$. Prouvez lui qu'il a tort.

L'autre sens aurait été correct : si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\frac{1}{2}$

alors $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\frac{1}{4}$

Mais sinon, que pensez-vous de la suite

$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7	...	$2.p$	$2.p + 1$	...
1	$-\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{1}{64}$	$-\frac{\sqrt{3}}{64}$		$\frac{1}{4^p}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4^p}$	

Chaque rapport $\frac{u_{n+2}}{u_n}$ vaut $\frac{1}{4}$ (que n soit pair ou impair).

Mais le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vaut $-\sqrt{3}$ ou $\frac{-4}{\sqrt{3}}$ suivant la parité de n .

Il y a d'autres exemples possibles évidemment, avec l'entrelacement de deux suites « presque géométriques ».

◦11◦

On donne u_0 et on pose $u_{n+1} = (u_n)^3$ pour tout n . Exprimez u_n à l'aide de u_0 et n .

On donne v_0 et on pose $v_{n+1} = (v_n)^n$ pour tout n . Exprimez v_n à l'aide de v_0 et n .

$u_n = (u_0)^{3^n}$ pour tout n par récurrence sur n .

La suite n'est pas géométrique. C'est une faute d'élève vraiment buté que de qualifier de suite géométrique toute suite vérifiant $u_{n+1} = \lambda_n \cdot u_n$, avec un λ_n qui dépend de n ...

$v_n = 1$ dès que n a dépassé 1. En effet, $v_1 = (v_0)^0 = 1$ et après on y reste.

◦12◦

♥ On pose : $u_n = (-1)^n \cdot (2n + 1)$ pour tout n . Calculez $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ pour n de 0 à 7. Montrez que la suite u diverge, de même que sa moyenne de Cesàro. Montrez que la moyenne de Cesàro de sa moyenne de Cesàro converge.

Donnez une suite dont la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro converge vers 1 sans que sa moyenne de Cesàro ne converge.

♣ Donnez une suite dont la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro converge vers 1 sans que la moyenne de Cesàro de sa moyenne de Cesàro ne converge.

Rappel : la moyenne de Cesàro de la suite (a_n) est la suite (c_n) définie par $c_{n+1} = \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n+1}$.

◦13◦

♣ Créez une suite réelle positive non bornée dont la moyenne de Cesàro converge vers 0.

On va prendre plein de termes nuls, et de temps en temps un terme grand. Mais vraiment pas souvent, pour que la moyenne tende vers 0.

On dit que a_n est nul, sauf quand n est une puissance de 2. Et donc, pour $n = 2^k$, on posera $a_n = k$.

0	0	1	0	2	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	4	0	...
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

La suite (a_n) n'est pas bornée, puisque sa sous-suite (a_{2^k}) diverge vers $+\infty$.

Et la moyenne ?

Calculons par exemple c_{2^N} . C'est une somme de $2^N + 1$ termes, dont beaucoup sont nuls.

Mais il y a quand même $a_{2^0} = 0$, $a_{2^1} = 1$, $a_{2^2} = 2$ jusqu'à $a_{2^N} = N$.

La somme au numérateur vaut donc $1 + 2 + \dots + N$.

La moyenne de Cesàro vaut $\frac{2^N + 1}{2^N + 1}$.

Par croissances comparées, c'est la suite géométrique qui l'emporte sur le polynôme quand N tend vers l'infini.

Et si n n'est pas une puissance de 2 ? On le cerne entre deux puissances de 2 : $2^N \leq n < 2^{N+1}$.

Par exemple : $64 \leq 100 < 128$. Proprement : $N = \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(2)} \right\rfloor$.

La somme au numérateur vaut encore $1 + 2 + \dots + N$ (et depuis $u_{2^N} = N$, il n'y a eu que des 0 : $a_{2^N+1} = 0$, $a_{2^N+2} = 0$ et ainsi de suite).

Mais alors $c_n = \frac{N \cdot (N+1)}{2 \cdot (n+1)}$.

On l'encadre par 0 et $\frac{N \cdot (N+1)}{2 \cdot (2^N)}$ car $2^N \leq n$.

Quand n tend vers l'infini, N tend aussi vers l'infini, et les croissances comparées invoquées font encore tendre la-dite moyenne vers 0.

◦14◦

Trouvez des couples de suites servant d'exemple pour chacune des quatre cases :

	$u_n - v_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$	$u_n - v_n \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$
$u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$		
$u_n \not\sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$		

◦15◦

♥ Montrez qu'une suite complexe est périodique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

◦16◦

On sait que si u et v sont bornées, alors $u \cdot v$ l'est aussi. Montrez que la réciproque n'est pas vraie (peut-on avoir même "ni u ni v n'est bornée" ?).

Montrez que si $u + v$ et $u \cdot v$ sont bornées, alors u et v le sont aussi.

$(n \cdot \sin(n \cdot \pi/2))$ et $(n \cdot \cos(n \cdot \pi/2))$.

Viète !

◦17◦

Frais ou veau :

- 1◦ Si il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers α et une sous-suite de (b_n) qui converge vers β , alors il existe une sous-suite de $(a_n + b_n)$ qui converge vers $\alpha + \beta$?
- 2◦ Si toutes les suites extraites de (a_n) convergent, alors (a_n) converge.
- 3◦ Si il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers α alors il existe une sous-suite de $([a_n])$ qui converge vers $[\alpha]$.
- 4◦ Si il existe une sous-suite de $((a_n)^2)$ qui converge vers 1 alors il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers 1 ou -1 .
- 5◦ Si il existe une sous-suite de $((a_n)^2)$ qui converge vers 1 alors il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers 1 ou une sous-suite de (a_n) qui converge vers -1 .
- 6◦ Si il existe une sous-suite de $((a_n)^3)$ qui converge vers 1 alors il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers 1 ou -1 .

◦18◦

♥ Soit a une suite réelle positive ; on note A la série associée $(A_N = \sum_{k=0}^N a_k)$. Montrez que $(A_{2,n})$ converge si et seulement si (A_n) converge.
Et si on enlève « positive », est ce encore vrai ?

Comme a est positive, la série associée A est croissante.

Elle n'a alors que deux possibilités : converger

ou diverger vers $+\infty$.

Si elle divergeait, alors sa sous-suite $(A_{2,n})$ divergerait aussi.

Comme elle converge, on élimine cette possibilité.

Il ne nous reste que (A_n) converge.

Sinon, on pouvait aussi encadrer A_n par $A_{2,p}$ et $A_{2,p+2}$ pour $p = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (par positivité de la suite a)
et conclure par théorème d'encadrement.

Si la suite est de signe quelconque, on n'a plus accès à ces deux modèles d'arguments.

Mais ça ne vaut pas dire que c'est impossible de prouver que (A_n) converge.

Mais on a un contre-exemple. Et là, c'est sans faille.

Devinez lequel : $a_n = (-1)^n$ pour tout n .

La série $A_{2,n}$ vaut toujours 1, elle converge.

Mais (A_n) vaut $\left(\frac{1 - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)} \right)$. Elle diverge.

◦19◦

Un élève prétend qu'on a
 $\dim(F + G + H) = \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) - (\dim(F \cap G) + \dim(F \cap H) + \dim(F \cap H)) + \dim(F \cap G \cap H)$
Montrez par un simple contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ qu'il a tort (et pas seulement parce qu'il est élève).

Prenons dans le plan les trois droites $\text{Vect}(\vec{i})$, $\text{Vect}(\vec{j})$ et $\text{Vect}(\vec{i} + \vec{j})$.

$F + G + H$	F	G	H	$F \cap G$	$F \cap H$	$G \cap H$	$F \cap G \cap H$
$\mathbb{R}^2$	droite	droite	droite	$\{\vec{0}\}$	$\{\vec{0}\}$	$\{\vec{0}\}$	$\{\vec{0}\}$
2	1	1	1	0	0	0	0

◦20◦

Vrai ou faux : si $((u_n)^{15})$ et $((u_n)^{77})$ convergent alors (u_n) converge ?
Si $((u_n)^{15})$ ou $((u_n)^{77})$ diverge alors (u_n) diverge ?

Si $((u_n)^{15})$ converge (vers α) alors $((u_n)^{75})$ converge (vers α^5).

Par quotient, $\left(\frac{(u_n)^{77}}{(u_n)^{75}} \right)$ converge (vers un truc en $\frac{\beta}{\alpha^5}$ mais qu'importe).

Maintenant que $((u_n)^2)$ converge, on a aussi la convergence de $((u_n)^{14})$ (produit ou même puissance).

Et derechef par quotient, $\left(\frac{(u_n)^{15}}{(u_n)^{14}} \right)$ converge.

Les élèves ayant compris l'idée passeront tout de suite par $u = (u^{15})^{36} \cdot (u^{77})^{(-7)}$ en brûlant un cierge à Bézout.¹

1. Bézout dans tous les traits

La seconde question est équivalente à (u_n) converge $\Rightarrow ((u_n)^{15})$ et $((u_n)^{77})$ convergent).
Elle est donc vraie.

◦21◦

Vrai ou faux : la somme de deux suites non bornées est non bornée.

Vrai ou faux : la somme de deux suites réelles positives non majorées est non majorée.

La suite (n) n'est pas bornée, de même que la suite $(-n)$. Mais leur somme est bornée. On appelle ceci un contre-exemple.

En revanche, si les deux suites sont positives, on n'a plus le moyen de compenser l'une par l'autre.

Prenons (a_n) et (b_n) positives, et supposons les non majorées.

On traduit en écrivant la négation de « majorée » pour la suite (a_n) :

$$\forall M, \exists n, a_n > M$$

Mais par positivité de (b_n) on a forcément

$$\forall M, \exists n, a_n + b_n > M + 0 = M$$

C'est la quantification de $(a_n + b_n)$ non majorée.

On peut aussi partir de (a_n) et (b_n) positives, et prouver une contraposée :

si $(a_n + b_n)$ est majorée, alors (a_n) et (b_n) le sont.

Et ça repose sur $a_n \leq a_n + b_n \leq M$.

◦22◦

♥ Deux suites sont liées par $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 4u_n + v_n \end{cases}$ avec u_0 et v_0 donnés.

Montrez que si l'on a $\exists p \in \mathbb{N}, u_p = v_p = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n = 0$.

Montrez que si l'on a $\exists p \in \mathbb{N}, u_p = u_{p+1} = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n = 0$.

Montrez que si l'on a $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, p \neq q, u_p = u_q = 0$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n = 0$.

On suppose à un rang $p : u_p = v_p = 0$.

Alors par exemple au rang $p + 1 : \begin{cases} u_{p+1} = u_p + v_p = 0 \\ v_{p+1} = 4u_p + v_p = 0 \end{cases}$.

Et par récurrence, on propage aux rangs suivants.

proprement : si à un certain rang n supérieur ou égal à p on a $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors on l'a aussi au rang $n + 1$

en écrivant $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$.

On a la nullité de tout le monde au delà du rang p .

La récurrence doit aussi remonter, avec l'aide de la matrice inverse :

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Si deux termes u_p et u_{p+1} sont nuls, alors la relation $u_{p+1} = u_p + v_p$ permet de dire que v_p est nul aussi.

Et par la question précédente, tous les termes des deux suites sont nuls.

Si on suppose que deux termes différents de la suite u sont nuls u_p et u_q (avec $q > p$ sans restreindre la généralité), alors on va pouvoir montrer que u_p et v_p sont nuls, et on sera ramené au premier cas.

On écrit $\begin{pmatrix} u_q \\ v_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{q-p} \cdot \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$, ce qui donne $\begin{pmatrix} 0 \\ v_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{q-p} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ v_p \end{pmatrix}$.

Mais la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{q-p}$ est une matrice à coefficients entiers naturels strictement positifs qu'on va noter

$\begin{pmatrix} a_{q-p} & b_{q-p} \\ c_{q-p} & d_{q-p} \end{pmatrix}$ sans même les calculer.

La lecture de la première ligne de $\begin{pmatrix} 0 \\ v_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{q-p} & b_{q-p} \\ c_{q-p} & d_{q-p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ v_p \end{pmatrix}$ donne $v_p = 0$ comme demandé.

Le tout sans même diagonaliser la matrice ni calculer explicitement le terme d'indice n .

◦23◦

On note E l'ensemble des suites réelles périodiques. Montrez que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel. Montrez que tout élément de E admet une sous-suite convergente.

Pour tout u dans E , on note $\sigma(u)$ la suite (u_{n+1}) . Montrez que $\sigma(u)$ est dans E et que σ est une application linéaire. Montrez que ses seules valeurs propres sont 1 et -1 et donnez le sous-espace propre associé à chacune. Aurait-on pu trouver d'autres valeurs propres pour des suites complexes ?

Pour tout u dans E , on note $\varphi(u)$ la suite (u_{2n}) . Montrez que $\varphi(u)$ est dans E et que φ est une application linéaire.

Pour tout n , on note $\zeta(u)$ la suite de terme général $u_{2\lfloor n/2 \rfloor}$. Montrez que l'opérateur ζ est linéaire de E dans E et donnez son spectre.

Pour tout n , on note $\psi(u)$ la suite obtenue en permutant deux à deux les termes de la suite $u : (u_1, u_0, u_3, u_2, u_5, u_4, \dots)$. Donnez une formule générale pour $\psi(u)_n$ (et expliquez pourquoi la notation $\psi(u_n)$ n'a aucun sens). Montrez que ψ est une application linéaire de E dans E . Donnez ses valeurs propres et la dimension de chaque sous-espace propre.

$\vec{u}$ vecteur propre de f c'est $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\exists \lambda, f(\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$.

λ valeur propre de f c'est $\exists \vec{u} \neq \vec{0}, f(\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$.

Pour extraire une suite convergente d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ périodique de période p , il suffit de prendre la suite $(a_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Ou d'utiliser le théorème de Bolzano Weierstrass, mais il y a de l'abus là.

Si (a_n) est périodique de période p , alors (a_{n+1}) est périodique, de même période.

La linéarité s'écrit en travaillant au bon étage : On se donne deux suites (a_n) et (b_n) . On doit juste comparer $(a_{n+1} + b_{n+1})$ et $(a_{n+1}) + (b_{n+1})$.

On prend une valeur propre λ et un vecteur propre associé : une suite a vérifiant $\sigma(a) = \lambda \cdot a$.

On traduit $a_{n+1} = \lambda \cdot a_n$ pour tout n .

Ceci signifie que la suite a est une suite géométrique de raison λ .

Mais comme elle doit être périodique, il y a comme un petit problème.

Sauf si elle est constante ou géométrique de raison -1 .

Sur Con aurait pu prendre des suites géométriques dont la raison soit une racine p -ème de l'unité.

◦24◦

♥ Montrez en explicitant N_ε que la suite $\left(\ln \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right) \right)$ converge vers 0.

Montrez en explicitant N_ε que la suite $\left(\ln \left(\frac{2n+1}{n+3} \right) \right)$ converge vers $\ln(2)$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \lambda| \leq \varepsilon)$.

$\Rightarrow$	$\left[\frac{3 - e^\varepsilon}{2e^\varepsilon - 2} \right] + 1 \leq n$	$\Rightarrow$	$\left[\frac{6 - e^\varepsilon}{2(e^\varepsilon - 1)} \right] + 1 \leq n$
$\Rightarrow$	$\frac{3 - e^\varepsilon}{2e^\varepsilon - 2} \leq n$	$\Rightarrow$	$6 - e^\varepsilon \leq 2(e^\varepsilon - 1) \cdot n$
$\Rightarrow$	$3 - e^\varepsilon \leq (2e^\varepsilon - 2) \cdot n$	$\Rightarrow$	$2n + 6 \leq e^\varepsilon \cdot (2n + 1)$
$\Rightarrow$	$2n + 3 \leq e^\varepsilon \cdot (2n + 1)$	$\Rightarrow$	$\frac{2n + 6}{2n + 1} \leq e^\varepsilon$
$\Rightarrow$	$\frac{2n + 3}{2n + 1} \leq e^\varepsilon$	$\Rightarrow$	$\ln \left(\frac{2n + 6}{2n + 1} \right) \leq \varepsilon$
$\Rightarrow$	$\ln \left(\frac{2n + 3}{2n + 1} \right) \leq \varepsilon$	$\Rightarrow$	$0 \leq -\ln \left(\frac{2n + 1}{2n + 6} \right) \leq \varepsilon$
$\Rightarrow$	$0 \leq -\ln \left(\frac{2n + 1}{2n + 3} \right) \leq \varepsilon$	$\Rightarrow$	$\left \ln \left(\frac{2n + 1}{2n + 6} \right) \right \leq \varepsilon$
$\Rightarrow$	$\left \ln \left(\frac{2n + 1}{2n + 3} \right) \right \leq \varepsilon$	$\Rightarrow$	$\left \ln \left(\frac{2n + 1}{n + 3} \right) - \ln(2) \right \leq \varepsilon$

◦25◦

Colonne 1 : quelles propriétés passent de la suite (u_n) aux deux sous-suites $(u_{2,n})$ et $(u_{2,n+1})$.
 Colonne 2 : quelles propriétés passent des deux sous-suites $(u_{2,n})$ et $(u_{2,n+1})$ à la suite (u_n) .

propriété	colonne 1	colonne 2
croissante		
monotone		
périodique		
bornée		
convergente		
non convergente		
dont la série converge		
la différence de deux termes consécutifs tend vers 0		

◦26◦

♥ On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Montrez que cette suite est strictement croissante et ne peut pas converger.

Que déduisez vous ?

u, n = 1., 0

while u < 10 :

....u += 1/u

....n += 1

Que fait ce script ? Pourquoi fallait il mettre u = 1. ?

Il faut montrer que tous les termes de la suite existent. On va montrer qu'ils sont tous positifs.

Pour celà, on effectue une récurrence :

MP_n : u_n existe et est strictement positif.

C'est vrai pour u_0 .

Et si u_n existe et est strictement positif, alors son inverse existe, est positif, et la somme $u_n + \frac{1}{u_n}$ est strictement positive.

La récurrence ne pouvait se contenter d'essayer de propager « u_n existe », car l'existence de u_n ne prouve pas que u_{n+1} existera aussi.

De même, $u_n \neq 0$ ne garantit pas $u_{n+1} \neq 0$.

Tous les u_n sont positifs. Mais alors pour tout n : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

On reconnaît que la suite est croissante.

Là, raisonnement classique, par élimination.

Peut elle converger ?

Si elle converge vers une limite L , alors par passage à la limite dans $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$, on obtient $L = L + \frac{1}{L}$.

La suite ne peut pas converger.

Mais elle pourrait diverger sans pour autant tendre vers $+\infty$. En oscillant.

Mais elle est croissante.

Et une suite croissante n'a qu'une alternative : converger ou tendre vers $+\infty$.

Par élimination, elle diverge vers $+\infty$.

Ce script calcule de proche en proche les termes de la suite, et cherche le premier indice pour lequel la suite va dépasser 10.

On initialise avec u=1. au lieu de u=1 afin d'être sûr que les divisions ne seront pas des divisions euclidiennes (on force à dire « u est un flottant »). Sinon, suivant la version de Python, on a u=2 puis u=2+(1/2)=2+0 et la suite stagne à 2.

Atteindre 2 9 se fait assez rapidement :

Pour 10 c'est un peu plus long. Mais pas trop :

dépasser 2	à partir de $n = 1$	dépasser 7	à partir de $n = 23$
dépasser 3	à partir de $n = 4$	dépasser 8	à partir de $n = 31$
dépasser 4	à partir de $n = 7$	dépasser 9	à partir de $n = 39$
dépasser 5	à partir de $n = 12$	dépasser 10	à partir de $n = 49$
dépasser 6	à partir de $n = 17$	dépasser 20	à partir de $n = 198$

◦27◦

♡ Vrai ou faux : si la suite (a_n) a pour moyenne de Cesàro (c_n) alors la suite extraite $(a_{2.n})$ a pour moyenne de Cesàro la suite $(c_{2.n})$?

Faux.

(a_n) a pour moyenne de Cesàro	$c_0 = a_0$	$c_2 = \frac{a_0 + a_1 + a_2}{3}$	$c_1 = \frac{a_0 + a_1 + a_5}{5}$
	$c_1 = \frac{a_0 + a_1}{2}$	$c_3 = \frac{a_0 + a_1 + a_2 + a_3}{4}$	

Déjà, (c_2) n'a rien à avoir avec γ_1 qui vaut $\frac{a_0 + a_2}{2}$ (si c'est la moyenne de Cesàro de $(a_{2.n})$).

◦28◦

♡ Vers quoi convergent (si elles convergent) ?

1	2	3	4	5	6
$\left(\frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 - 1}}\right)$	$\left(\frac{3^n + 2^{2.n+1}}{3^n - 4^n}\right)$	$(\sqrt[n]{n^2})$	$\left(\frac{e^n}{n^n}\right)$	$\left(\frac{e^{2.n}}{n^n}\right)$	$\left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot k!\right)$

◦29◦

♠ Soit (a_n) une suite réelle. On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n, a_p \leq a_n\}$.

Déterminez A si (a_n) est croissante.

Déterminez A si (a_n) est décroissante.

On suppose A infini. On pose alors $n_0 = \min(n \mid n \in A)$, $n_1 = \min(n \mid n \in A \text{ et } n > n_0)$ et plus généralement $n_{k+1} = \min(n \mid n \in A \text{ et } n > n_k)$.

Montrez que chaque n_k existe.

Montrez que la suite $k \mapsto n_k$ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et que la suite (a_{n_k}) est décroissante.

On suppose A fini. Montrez $\exists K_0, \forall, (n \geq K_0 \Rightarrow (\exists p > n, a_p > a_n))$.

Déduisez $\exists K_1 > K_0, a_{K_1} > a_{K_0}$ puis $\exists K_2 > K_1, a_{K_2} > a_{K_1}$.

Construisez une suite (a_{K_i}) extraite de (a_n) , strictement croissante.

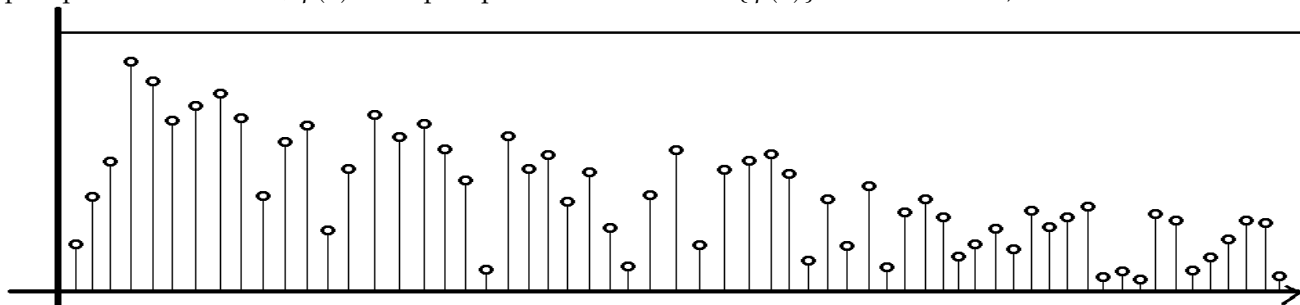
Je vous renvoie au cours.

Ou au fascicule « beaux théorèmes de Sup » :

On définit l'ensemble d'indices suivant : $\mathbb{A} = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n, u_p \leq u_n\}$ (il s'agit des indices des termes qui majorent tous les termes qui suivent).

$\mathbb{A}$ est une partie de $\mathbb{N}$ qui est soit infinie, soit finie.

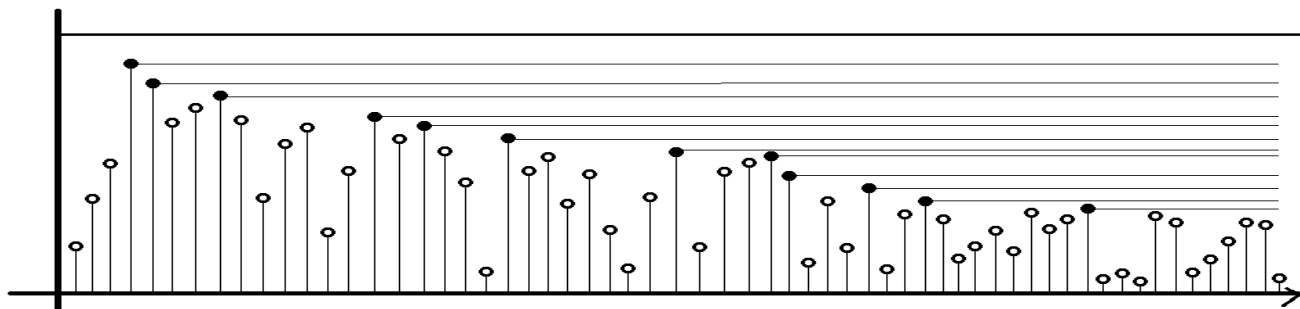
Premier cas : si $\mathbb{A}$ est infini, alors on en indexe les éléments par ordre croissant : $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{A}$ ($\varphi(0)$ est le plus petit élément de $\mathbb{A}$, $\varphi(1)$ est le plus petit élément de $\mathbb{A} - \{\varphi(0)\}$ et ainsi de suite).



Par construction, chaque indice $\varphi(k)$ vérifie $\forall p \geq \varphi(k), u_p \leq u_{\varphi(k)}$; en particulier $u_{\varphi(k+1)} \leq u_{\varphi(k)}$.

La suite $(u_{\varphi(k)})$ est décroissante. Elle est extraite de la suite (a_n) , donc elle est minorée.

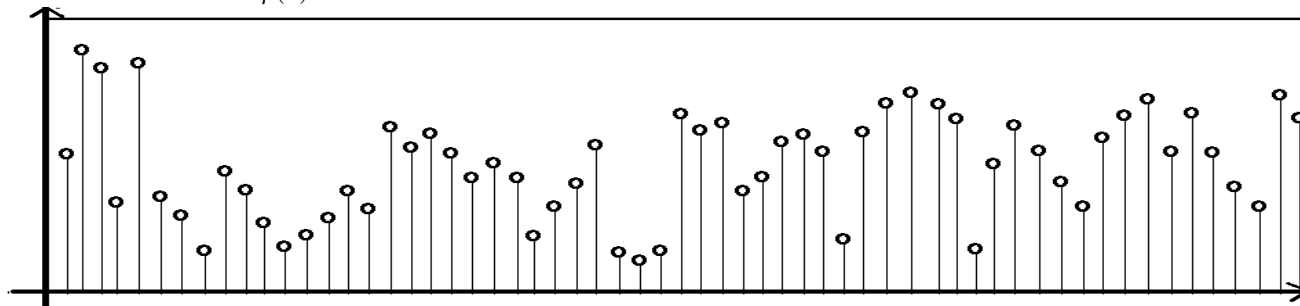
Elle converge vers son plus grand minorant.



Second cas : si $\mathbb{A}$ est fini, alors au delà d'un certain entier M , tous les entiers sont dans $\mathbb{A}^c$.

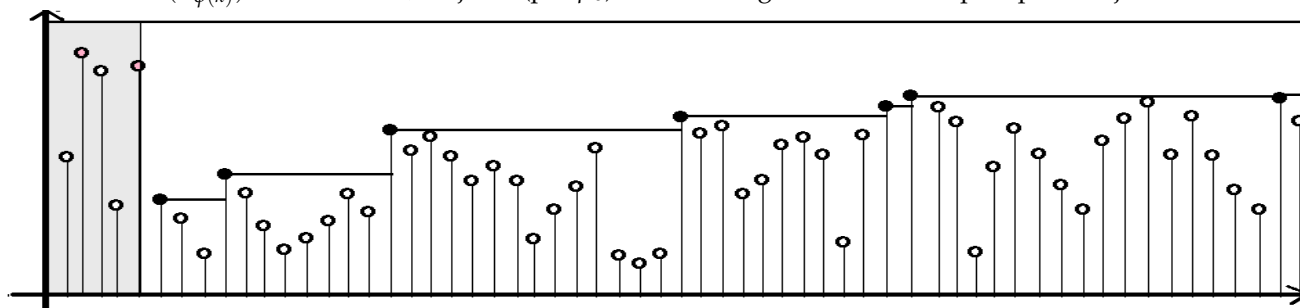
On pose alors $\varphi(0) = M + 1$. Par définition de $\varphi(0) \notin \mathbb{A}$, il existe au moins un élément p plus grand que $\varphi(0)$ vérifiant $u_p > u_{\varphi(0)}$. On prend le premier d'entre eux (qui ne peut pas être égal à $\varphi(0)$ par inégalité stricte) et on le note $\varphi(1)$.

On recommence : $\varphi(1)$ n'est pas dans $\mathbb{A}$, il existe donc au moins un indice p vérifiant $u_p > u_{\varphi(1)}$. Le premier d'entre eux sera noté $\varphi(2)$.



De proche en proche, on construit φ vérifiant $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ pour tout k (ainsi que $\varphi(k+1) > \varphi(k)$).

La sous-suite $(u_{\varphi(k)})$ est croissante, majorée (par β_0). Elle converge donc vers son plus petit majorant.



Dans les deux cas, on a construit une sous-suite monotone bornée, donc convergente.

◦30◦

On suppose $(a_n + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $(e^{a_n} + e^{b_n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$. Que pensez vous du raisonnement : on note α la limite de a et β la limite de b . On a alors $a = -b$ et $e^a + e^b = 2$; on déduit $ch(a) = 1$ puis $a = 0$ et $b = 0$. En quoi ce « raisonnement » est il faux ? Abouissez quand même au bon résultat.

Le raisonnement proposé est une monstrueuse connerie, dès sa première ligne.

Qui vous a dit que les suites avaient une limite ? Personne.

Rappelons au passage l'ânerie suivante : si $(a_n + b_n)$ et $(a_n \times b_n)$ convergent vers λ et μ , vers quoi convergent (a_n) et (b_n) ?

On note α la limite de (a_n) et β celle de (b_n) .

Par passage à la limite : $\alpha + \beta = \lambda$ et $\alpha \cdot \beta = \mu$.

On retrouve fièrement α et β par les formules de Viète.

Et on est un fieffé connard.

En effet, il se peut que ni a ni b ne converge.

Prenons $((-1)^n)$ et son opposé. Leur produit vaut -1 (converge) et leur somme vaut 0 (converge).

◦31◦

♥ Soit (a_n) une suite réelle. On suppose que $(a_{2.n+20})$, $(a_{2.n+9})$ et $(a_{13.n^2})$, convergent. Montrez qu'elles ont la même limite et que la suite (a_n) converge aussi.

On suppose que $(a_{2.n})$, $(a_{3.n+1})$, $(a_{5.n+7})$, $(a_{11.n+5})$ et $(a_{13.n+2})$, convergent. Montrez qu'elles ont la même limite mais que la suite (a_n) ne converge pas forcément.

On note α , β et γ les limites des trois sous-suites $(a_{2.n+20})$, $(a_{2.n+9})$ et $(a_{13.n^2})$.

On va montrer qu'elles sont égales, en trouvant une sous-suite commune à $(a_{2.n+20})$ et $(a_{13.n^2})$
une sous-suite commune à $(a_{2.n+9})$ et $(a_{13.n^2})$

La suite $(a_{13.(2.p+2)^2})$ est extraite de $(a_{2.n+20})$ avec $n = 26.p^2 + 52.p + 16$
elle converge donc vers α
est extraite de $(a_{13.n^2})$ avec $n = 2.p + 2$
elle converge donc vers γ

Par unicité de la limite : $\alpha = \gamma$.

Pour les autres, la suite $(a_{13.(2.p+1)^2})$ permet d'obtenir $\beta = \gamma$.

Par transitivité de l'égalité : $\alpha = \beta$.

Or, avec $(a_{2.n+20})$ et $(a_{2.n+9})$ on couvre tous les entiers à partir d'un certain rang.

Par recollement, la suite globale converge (ici, ce n'est pas la limite d'une somme, mais du recollement de deux suites).

H_0	$\forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon, \forall n, n \geq P_\varepsilon \Rightarrow a_{2.n+20} - \alpha \leq \varepsilon$
H_1	$\forall \varepsilon > 0, \exists I_\varepsilon, \forall n, n \geq I_\varepsilon \Rightarrow a_{2.n+9} - \alpha \leq \varepsilon$
[?]	$\forall \varepsilon > 0, \exists T_\varepsilon, \forall k, k \geq T_\varepsilon \Rightarrow a_k - \alpha \leq \varepsilon$

Il suffit, pour ε donné, de prendre $T_\varepsilon = \max(2.P_\varepsilon + 10, 2.I_\varepsilon + 9)$ et de vérifier, en écrivant k sous la forme $2.n + 20$ ou $2.n + 9$ suivant sa parité.

Avec $(a_{2.n})$, $(a_{3.n+1})$, $(a_{5.n+7})$, $(a_{11.n+5})$ et $(a_{13.n+2})$ on ne couvre pas toute la suite.

Certains termes (et même carrément une sous-suite) nous échappent.

Avec des *p.p.c.m.*, on peut relier ces suites entre elles.

Mais cherchons les entiers	congrus à 1	modulo 2
	congrus à 0	modulo 3
	congrus à 0	modulo 5
	congrus à 0	modulo 11
	congrus à 0	modulo 13

Ils sont de la forme $(3 \times 5 \times 11 \times 13).k$ avec k impair.

On décide donc de poser	$a_n = p$	si $\exists p, n = 3.5.11.13.(2.p + 1)$
	$= 0$	sinon

Les six sous-suites convergent vers 0. Mais la suite globale ne converge pas, car au moins une de ses sous-suites tend vers l'infini.

32

♥ On donne $a_n = n + 4 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Donnez la limite de $a_{2.n} - 2.a_n$ et de $n.(a_{n+1} - 2.a_n + a_{n-1})$ quand n tend vers l'infini.

On écrit $a_{2.n} = 2.n + 4 + \frac{1}{2.n} + o\left(\frac{1}{2.n}\right)$ puisque $2.n$ tend bien vers l'infini.

On compare avec $2.a_n = 2.n + 8 + \frac{1}{n} + 2.o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On soustrait : $a_{2.n} - 2.a_n = -4 - \frac{1}{2.n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Les deux termes $\frac{1}{2.n}$ et $o\left(\frac{1}{n}\right)$ tendent vers 0.
la différence a une limite, et elle vaut -4 .

On recommence	$a_{n+1} =$	$n + 1$	$+4$	$+\frac{1}{n+1}$	$+o\left(\frac{1}{n+1}\right)$
	$-2.a_n =$	$-2.n$	-8	$-\frac{2}{n}$	$+o\left(\frac{1}{n}\right)$
	$a_{n-1} =$	$n - 1$	$+4$	$+\frac{1}{n-1}$	$+o\left(\frac{1}{n-1}\right)$

On combine $n.(a_{n+1} - 2.a_n + a_{n-1}) = n.\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2.n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ en fusionnant les trois o en un seul.

Le terme en $n.o\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 par définition même.

Et $n.\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2.n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ aussi.

Bref, la forme indéterminée tend vers 0.

◦33◦

♥ Trouvez P vérifiant : $\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X-3} + \frac{1}{X-2}$.
 Trouvez Q vérifiant : $\frac{Q'(X)}{Q(X)} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{X-3} + \frac{3}{X-2}$.

Est il judicieux d'intégrer comme le proposerait spontanément le physicien : $\ln\left(\frac{P(x)}{P(0)}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{-1}\right) + \ln\left(\frac{x-3}{-3}\right) + \ln\left(\frac{x-2}{-2}\right)$.

Je n'en suis pas sûr. mais au moins, ça permet de deviner un polynôme : $P(X) = (X-1).(X-2).(X-3)$.

Il ne reste qu'à jouer au matheux : on propose/on vérifie.

On dérive : $P'(X) = 1.(X-2).(X-3) + (X-1).1.(X-3) + (X-1).(X-2).1$.

On divise : $\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{(X-2).(X-3) + (X-1).(X-3) + (X-1).(X-2)}{(X-1).(X-2).(X-3)} = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X-2} + \frac{1}{X-3}$.

La même idée donne le second : $Q(X) = (X-1).(X-3)^2.(X-2)^3$.

On dérive : $Q'(X) = 1.(X-2)^3.(X-3)^2 + (X-1).3.(X-2)^2.(X-3) + (X-1).(X-2).2.(X-3)$.

La division donne tout ce qu'on veut...

◦34◦

Si a est une suite réelle, on définit deux sur-suites (mot non homologué) :

$\ddot{a} = (a_0, a_0, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \dots)$ (on voit les deux points au dessus ? en tout cas, chaque terme est cité deux fois)

et $\ddot{\ddot{a}} = (a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, a_3, a_4, a_4, a_4, a_5, \dots)$ (le terme a_n est cité n fois).

Quelles propriétés passent

	de a à $\ddot{a}$	de $\ddot{a}$ à a	de a à $\ddot{\ddot{a}}$	de $\ddot{\ddot{a}}$ à a	de $\ddot{\ddot{a}}$ et $\ddot{a}$ à a
croissante					
périodique					
convergente					
géométrique					
divergente vers $+\infty$					

C'est un exercice « esprit MPSI2 ». On n'en trouve pas souvent des comme ça dans les livres ou aux concours, mais normalement, ça permet de comprendre les notions avec des petits questions pas trop compliquées.

	de a à $\ddot{a}$	de $\ddot{a}$ à a	de a à $\ddot{\ddot{a}}$	de $\ddot{\ddot{a}}$ à a	de $(\ddot{\ddot{a}}$ et $\ddot{a})$ à a
croissante	oui	oui	oui	non (1)	oui
périodique	oui (2)	oui	non (3)	oui (4)	oui
convergente	oui	oui	oui	oui	oui
géométrique	non	oui (4)	non	oui (4)	oui
divergente vers $+\infty$	oui	oui	oui	oui	oui

Pour la dernière colonne, si la propriété passe de $\ddot{a}$ à a , alors elle passe de $(\ddot{\ddot{a}}$ et $\ddot{a})$ à a en n'utilisant même pas $\ddot{a}$.

Le (1) contenait un piège. Si

$$(a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, a_3, a_4, \dots)$$

est croissante, la suite extraite

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$$

est croissante. mais qu'en est-il de $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$.

Pour (2), la période va en général doubler. Et pour la case d'à côté, elle réduit d'autant.

Pour (3), un contre-exemple classique peut nous servir : $((-1)^n)$. mais il faut détailler la démonstration si on veut vraiment être rigoureux..

Pour (4), la seule possibilité pour qu'une suite $\ddot{\ddot{a}}$ soit périodique est qu'elle soit constante, et la suite initiale l'est aussi, donc périodique.

J'ai numéroté aussi (4) le phénomène

$$(a_0, a_0, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \dots)$$

géométrique implique

$$(a_0, a_0, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \dots)$$

constante et ceci entraîne que (a_n) est géométrique de raison 1.

Pour la convergence, par exemple, un sens est facile.

En effet, $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ est une sous-suite de $(a_0, a_0, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \dots)$ (elle prend un terme sur deux).

das l'autre sens, si $|a_n - \alpha|$ est plus petit que ε pour N plus grand que N_ε alors le p^{ieme} terme de la suite $(a_0, a_0, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \dots)$ est proche de α à ε près pour p plus grand que $2.N_\varepsilon$.
Et le le p^{ieme} terme de la suite

$$\ddot{a} = (a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, a_3, a_4, a_4, a_4, a_5, \dots)$$

est proche de α à ε près pour p plus grand que $N_\varepsilon.(N_\varepsilon + 1)/2$.

◦35◦

Ça vous fait quel effet de savoir que vous êtes suspendu à la terre, retenu fort heureusement grâce à la gravitation qui vous empêche de tomber ?

Au fait, « galaktos » en grec ça veut dire lait. Quel rapport avec galaxie ?

Galaxie, c'est parce que la première galaxie connue est « la voie lactée ». Et on l'appelle ainsi à cause de la teinte de lait qu'elle donne dans le ciel.

Quant à l'idée de rester accroché « tête en bas » à la terre, elle me plaît. Tout repose sur « c'est quoi le haut, c'est quoi le bas ».

D'ailleurs, tenez un jour une mappemonde « dans le sens inverse », avec l'Australie et la grande part de l'Afrique dans l'hémisphère « du haut », et vous verrez que votre vision changera peut être.

◦36◦

On définit $f = X \mapsto M.X$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Donnez la dimension de P et une équation cartésienne de P .

Ajustez les coefficients de M pour avoir $\text{Im}(f) \subset P$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f)$. A-t-on $\text{Im}(f) = P$? Donnez une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$ (rappelle : $\text{Ker}(f)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs dont l'image est nulle).

L'application $X \mapsto M.X$ va bien de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ (formats compatibles). Et c'est la seule possibilité.

Elle est linéaire, puisque $M.(\lambda.X + \mu.Y) = \lambda.M.X + \mu.M.Y$ par distributivité.

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont indépendants. Ils engendrent donc un plan de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. On en trouve

une équation par condition de coplanarité :

$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. On peut aussi proposer $2.x - .y + .z = 0$. C'est l'équation d'un plan (dimension). il contient les deux vecteurs, c'est lui le plan cherché.

Chaque image $\begin{pmatrix} x & +2.y & +a.z & +t \\ 3.x & +c.y & +z & +d.t \\ e.x & -3.y & +f.z & +3.t \end{pmatrix}$ doit vérifier ce jeu d'équations.

Mais sous cette forme, on s'y perd un peu pour savoir qui on cherche, sachant $2.(x + 2.y + a.z + t) - (3.x + c.y + z + d.t) + (e.x - 3.y + f.z + 3.t) = 0$.

Mais quel est le rôle de x , de y et ainsi de suite...

La bonne approche de matheux, c'est de dire qu'on va regarder pour une base, ou pour l'image d'une base.

Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est l'image du premier vecteur de $\mathbb{R}^4$. Elle doit être dans P . On a donc $2.1 - 3 + e = 0$.

On recommence avec $\begin{pmatrix} 2 \\ c \\ -3 \end{pmatrix}$, image du second vecteur. Cette fois : $2.2 - c - 3 = 0$.

Et ainsi de suite.

On notera que par exemple la dernière équation $2.1 - d + 3 = 0$ correspond à avoir pris $x = y = z = 0$ et $t = 1$ dans une condition qui doit être vraie pour tout quadruplet (x, y, z, t) .

Sinon, la condition qui semble n'être que nécessaire est aussi suffisante.

L'image de chaque vecteur $x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 + x_4 \vec{e}_4$ est $x_1.f(\vec{e}_1) + x_2.f(\vec{e}_2) + x_3.f(\vec{e}_3) + x_4.f(\vec{e}_4)$, et la voilà

dans P par stabilité.

A ce stade : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ avec une relation entre les deux coefficients qui manquent.

On notera qu'on a en fait $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ou en transposant : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ce serait ça, transposer une matrice.

Mais il nous reste une information : le noyau : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On tient la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

On vérifie quand même que le troisième vecteur est dans P .

Pour le noyau, on doit juste résoudre :
$$\begin{array}{rrcr} x & +2.y & & +t & = & 0 \\ 3.x & +y & +z & +5.t & = & 0 \\ x & -3.y & +z & +3.t & = & 0 \end{array}$$

Trois équations pour quatre inconnues. On va avoir un espace de dimension $4 - 3$ ce qui fait 1.

On connaît déjà un vecteur dedans ! On a donc $\text{Ker}(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. De dimension 1.

Sauf que...

Une des équations ne sert à rien. C'est par exemple $L_3 = -2.L_1 + L_2$.

Le noyau est de dimension 2 :
$$\begin{array}{rrcr} x & +2.y & & +t & = & 0 \\ 3.x & +y & +z & +5.t & = & 0 \end{array}$$

On se donne x et y , et on trouve t et z .

Les vecteurs du noyau sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2.x + 9.y \\ -x - 2.y \end{pmatrix}$. Plus propre : $\begin{pmatrix} x & y \\ 2.x & +9.y \\ -x & -2.y \end{pmatrix}$.

Le noyau est de dimension 2, et c'est $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

◻37◻

Soit (a_n) une suite croissante admettant une sous-suite $(a_{\varphi(n)})$ décroissante. Montrez que (a_n) est constante à partir d'un certain rang.

La suite (a_n) est croissante. La sous-suite $(a_{\varphi(n)})$ est donc aussi croissante, par extraction.

Mais comme on la suppose aussi décroissante, elle est donc constante.

Notons C la valeur commune de tous les $c_{\varphi(n)}$.

L'objectif est alors de montrer que tous les a_k sont égaux à C à partir d'un certain rang. Quel rang ? Disons $\varphi(0)$.

On se donne un entier k quelconque plus grand que $\varphi(0)$. On l'encadre : $\varphi(0) \leq k \leq \varphi(k)$.

Mais par croissance, on a donc $C = a_{\varphi(0)} \leq a_k \leq a_{\varphi(k)} = C$.

Par antisymétrie de l'ordre : $a_k = C$.

◻38◻

On pose $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$, $D = \text{Vect}(\vec{i} + \alpha \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k})$. Résolvez $D \oplus P = \mathbb{R}^3$ d'inconnue réelle α .

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ est un plan. On en donne une base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$\text{Vect}(\vec{i} + \alpha \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k})$ est une droite de base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

Les deux espaces sont supplémentaires si et seulement si ces trois vecteurs forment une base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

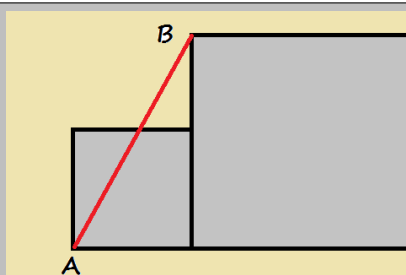
On calcule le déterminant et on demande qu'il soit non nul. La seule valeur interdite est $\alpha = 1$ (auquel cas le dernier est la somme des deux premiers²).

Autre approche : il faut et il suffit que la droite ne soit pas incluse dans le plan. Le vecteur $\vec{i} + \alpha \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$ ne doit pas vérifier l'équation du plan : $A + \alpha - 2 \neq 0$.

◦39◦

Sachant $x = 45678^3 - 45676^3$,
calculez $\sqrt{\frac{x-2}{6}}$.

Les deux figures en gris sont des carrés.



Sachant $AB=17$
retrouvez l'aire
en gris....

Posons

$a = 45677$ pour centrer les choses.

On a alors $x = 45678^3 - 45676^3 = (a+1)^3 - (a-1)^3 = (a^3 + 3a^2 + 3a + 1) - (a^3 - 3a^2 + 3a - 1)$.

On simplifie : $x = 6a^2 + 2$.

On soustrait, on divise par 6 : $\frac{x-2}{6} = a^2$.

La racine cherchée vaut donc $\boxed{45\,677}$

Le problème de géométrie utilise simplement le théorème de Pythagore.

On note a et b les côtés des deux carrés. Dans le triangle rectangle d'hypoténuse AB , on a $B^2 = a^2 + b^2$.

Mais les aires des deux carrés sont justement a^2 et b^2 . La somme des aires est donc $\boxed{17^2}$

◦40◦

◻ On note T_n le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebychev. Calculez $T_{12}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Partant de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$, on a $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

On a donc immédiatement $T_{12}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}\right) = \cos\left(12 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$.

◦41◦

Résolvez $T_n\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{1}{2}$ d'inconnue n (polynômes de Tchebychev).

Cette fois, $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

On résout donc $\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ d'inconnue n .

Le cas d'égalité des cosinus donne $n \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ ou $n \cdot \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

On a donc $S_n = \{4 + 24k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{-4 + 24k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ par exemple 4, 20, 28 et ainsi de suite.

◦42◦

Dans l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, on travaille avec la norme "infinie" ou norme de la convergence uniforme.^a Calculez la norme de $x \mapsto x^x$ et de $x \mapsto x^{\ln(x)}$ que vous commencerez par prolonger en 0 si c'est possible...

a. $\|f\| = \sup(|f(t)| \mid t \in [0, 1])$

2. comme le dit le chat de Philippe Geluck : « le jour où les premiers seront les derniers... et les derniers les premiers... alors ça ne changera strictement rien pour ceux qui sont au milieu »

Qui est cette application $x \mapsto x^x$? C'est $x \mapsto e^{x \cdot \ln(x)}$, définie sur $]0, 1]$. Mais il faut la prolonger en 0 par la valeur 0^0 que l'on a du mal à envisager très sereinement ? Non !

On connaît : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) = 0$ (c'est $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(t)}{t}$ en posant $t = \frac{1}{x}$). On compose avec l'exponentielle : $f(0) = 1$.

Le graphe de $x \mapsto x^x$ a le même sens de variations que $x \mapsto x \cdot \ln(x)$:

x	0		$\frac{1}{e}$	$]1/e, 1[$	1
$\ln(x) + 1$		-		+	
x^x	1		$e^{-1/e}$		1

Le maximum de la fonction et de sa valeur absolue vaut 1, atteint en 0 et en 1.

Pour $x^{\ln(x)}$, on passe encore par la forme $x \mapsto e^{(\ln(x))^2}$. Et cette fois, c'est raté, elle ne se prolonge pas en 1 ! Elle n'est pas bornée, elle n'a pas de norme.

◦43◦

Trouvez un nombre qui est soixante dix sept fois plus grand que le chiffre de ses unités.

On vaut $100.a + 10.b + c = 77.c$ en écrivant le nombre $\overline{abc}$.

$76.c$ doit être multiple de 10. C'est que c vaut 5 (ou 0, solution trop facile !).

La solution est **385** et c'est plié.

On pouvait aussi chercher tout de suite parmi les multiples de 77.

◦44◦

Le problème que Pavl Halmos aimait poser à ses étudiants : les concombres sont composés de quatre vingt dix neuf pour cent d'eau (si si, et nous, c'est plus que quatre vingt dix pour cent). Le Cours des Halles en bas de chez moi en a acheté cinq cent kilos. Mais après le week-end, ils ne sont plus formés que de quatre vingt dix huit pour cent d'eau. Combien de kilos lui reste-t-il à vendre ?

Les concombres sont constitués de matière non aqueuse et d'eau. Le pourcentage indiqué nous informe d'un rapport de masse : $\frac{\text{masse d'eau}}{\text{masse totale}} = \frac{99}{100}$. Connaissant la masse totale, on a la masse d'eau : 99×500 kilogrammes.

Et par soustraction, le un pour cent de la masse, c'est la matière non aqueuse : un pour cent des cinq cent kilos. Il a cinq kilos de matière qui ne soit pas de l'eau.

A la fin du week-end, il lui reste toujours ces cinq kilos de matière, et de l'eau. Combien ? Je ne sais pas, disons une masse m . Et on a cette fois : $\frac{m}{m+5} = \frac{98}{100}$. On effectue : $m = 245$. Putain de perte !

Ce qu'il lui reste est un stock de

5 kilos de matière non aqueuse	245 kilos d'eau	250 kilos de concombre
--------------------------------	-----------------	------------------------

 la moitié du stock s'est évaporée. Les concombres ont perdu la moitié de leur eau, et cela a juste fait passer un pourcentage de 99% à 98% ...

Ah, bientôt le retour de la saison des concombres, on va pouvoir remanger des légumes et fruits gorgés d'eau : concombres, tomates, melon, pêches...

Hors sujet : *En attendant, on reste sur les légumes de saison (courges, cardes, raves...). Et les fruits de saison (pommes de garde...).*

◦45◦

♥ Soit u une suite réelle. Montrez que si u converge, alors pour tout réel λ , $\lambda \cdot u_{n+1} + u_n$ converge aussi.

♥ On suppose que $u_{n+1} + u_n$ converge quand n tend vers l'infini. Montrez (par un contre-exemple) que u ne converge pas forcément.

♣ On suppose que $2 \cdot u_{n+1} + u_n$ (notée v) converge vers 0.

Calculez $\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \cdot 2^k \cdot v_k$. En utilisant le théorème de Césaro généralisé (c'est celui de Cesarbi dans l'exercice plus haut), déduisez que u converge aussi vers 0.

Montrez que si v converge vers α alors u converge (vers quoi ?).

Montrez que si $u_{n+1} + 2 \cdot u_n$ converge, alors u ne converge pas forcément.

Première question facile : théorèmes algébriques : $\lambda \cdot u_{n+1} + u_n$ converge vers $(1 + \lambda) \cdot \alpha$ si α est la limite de la suite.³

Un exemple où que $(u_{n+1} + u_n)$ converge mais pas (u_n) ? Non, franchement, je ne vois pas... vous croyez que ça sort tout seul les contre-exemples ?

3. et si on se dit que c'est juste le prof qui a oublié les parenthèses sans le faire exprès, confondant $(u_{n+1} + \lambda \cdot u_n)$ et $u_{n+1} + \lambda \cdot u_n$

Bon, on va voir...

Passons à l'exercice un peu sympathique.

On pose donc $v_n = 2.u_{n+1} + u_n$ et on calcule $\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} . 2^k . v_k = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} . 2^k . 2 . (u_{k+1} + u_k)$

On sépare en $\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} . 2^{k+1} . u_{k+1} + \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} . 2^k . u_k$.

On décale en $\sum_{p=1}^{n+1} (-1)^p . 2^p . u_p + \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} . 2^k . u_k$.

On soustrait même : $\sum_{p=1}^{n+1} (-1)^p . 2^p . u_p - \sum_{k=0}^n (-1)^k . 2^k . u_k$.

On simplifie la partie commune : $(-1)^{n+1} . 2^{n+1} . u_{n+1} - u_0$.

Que faire avec Césaro ?

La suite $((-1)^{k+1} . v_k)$ tend vers 0 comme la suite (v_k) .

Sa moyenne de Césaro, avec pondération $(1, 2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots)$ tend aussi vers 0.

On a donc $\frac{\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} . 2^k . v_k}{\sum_{k=0}^n 2^k}$ qui converge vers 0.

Avec nos simplifications : $\frac{(-1)^{n+1} . 2^{n+1} . u_{n+1} - u_0}{2^{n+1} - 1}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

On simplifie, et voilà (u_n) qui converge aussi vers 0.

Que fait on si (v_n) converge vers β pas forcément nul ?

On translate pour avoir une suite (w_n) qui converge vers 0, en remplaçant u_n par $u_n - \frac{\beta}{3}$.

Trouvons un exemple où $(u_{n+1} + 2.u_n)$ converge, mais pas (u_n) .

Prenons $u_n = (-2)^n$ pour tout n . Cette suite diverge (non bornée, une extraction qui part vers $+\infty$ et une autre vers $-\infty$).

Mais quand on somme $(-2)^{n+1} + 2.(-2)^n$ on trouve toujours 0 et là, cette suite converge.

◦46◦

♥ Complétez $(\vec{i} + \vec{k}, \vec{j} + \vec{k})$ en base de $\mathbb{R}^3$ (c'est à dire adjoignez un vecteur) sachant que sur cette base, $\vec{i}$ a pour composantes $(1, 1, 1)$.

Il manque un vecteur : $(\vec{i} + \vec{k}, \vec{j} + \vec{k}, \vec{e}_3)$.

Et si $\vec{i}$ a pour composantes $(1, 1, 1)$, c'est qu'on a $\vec{i} = 1.(\vec{i} + \vec{k}) + 1.(\vec{j} + \vec{k}) + 1.\vec{e}_3$.

On soustrait : $\vec{e}_3 = -\vec{j} - 2.\vec{k}$.

Et on vérifie que c'est bien une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$:

1	0	0
0	1	-1
1	1	-2

 $\neq 0$.

◦47◦

$\sqrt{10}, \sqrt{10.\sqrt{10}}, \sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10}}}, \sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10}}}}, \sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10.\sqrt{10}}}}}$

Mettez cette suite sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrez qu'elle est croissante, majorée et donnez sa limite.

$u_0 = \sqrt{10}$ et $u_{n+1} = \sqrt{10.u_n}$ c'est tout.

La suite est croissante. En effet, $u_1 = \sqrt{10;\sqrt{10}} \geq \sqrt{10} = u_0$

si à un rang n on a $u_{n+1} \geq u_n$

alors $10.u_{n+1} \geq 10.u_n$ (multiplicateur positif)

puis $\sqrt{10.u_{n+1}} \geq \sqrt{10.u_n}$ (application croissante)

et donc $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

Remarque : Ici, on a utilisé « f croissante implique (u_n) monotone ».

Méfiez vous, ce n'est pas « f croissante implique (u_n) croissante ».

Tout dépend de u_1 par rapport à u_0 .

Par exemple $x \mapsto x - 1$ est croissante, mais la suite « $u_{n+1} = u_n - 1$ » est décroissante...

On doit majorer la suite. On va la majorer par ce qui doit bien être sa limite : le point fixe.
On résout au passage $x = \sqrt{10.x}$ et on trouve $x = 10$ (ou $x = 0$, mais ça, on laisse de côté).

On a $u_0 \leq 10$.

On suppose pour un n donné : $u_n \leq 10$

$$10.u_n \leq 100$$

$$u_{n+1} = \sqrt{10.u_n} \leq \sqrt{100} = 10$$

La suite est croissante, majorée. Elle converge.

Et sa limite ne peut être que 10.

◦48◦

Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{\ln(n)}{\sqrt[n]{n}}$.

Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $n^{1/\sqrt{n}}$.

Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt[n]{n^{1/n}}$.

On écrit $\frac{\ln(n)}{\sqrt[n]{n}} = \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^{\frac{1}{\ln(n)}} = \exp\left(\frac{\ln\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}{\ln(n)}\right)$ (existence pour tout n sauf 0 et 1).

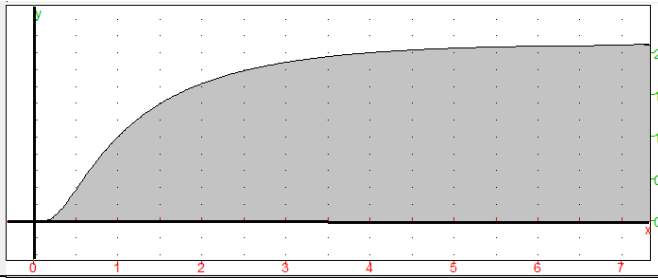
Dans la parenthèse on a un $\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$ qui tend vers 0 (croissances comparées avec $\ln(n)$ dans le rôle de x qui tend vers l'infini).

un $\frac{-\ln(n)}{\ln(n)}$ qui tend vers -1 .

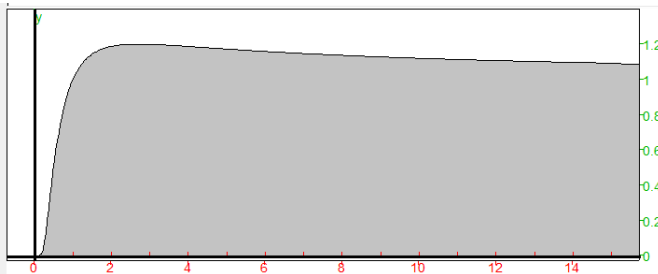
Le contenu de l'exponentielle tend vers -1 .

Par continuité de l'exponentielle, la limite vaut $\frac{1}{e}$.

$n^{1/\sqrt{n}} = \exp\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)$. On va trouver e^0 c'est à dire 1.



$\sqrt[n]{n^{1/n}} = (n^{1/2})^{1/n} = n^{1/(2n)} = \exp\left(\frac{\ln(n)}{2n}\right)$. Là encore, limite égale à 1.



◦49◦

♥ Montrez qu'on a $n \sim_{n \rightarrow +\infty} n+1$ mais pas $\sin(n) \sim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n+1)$.

♥ Montrez qu'on a $n \sim_{n \rightarrow +\infty} n+k$ pour tout k , mais qu'on n'a pas $n \sim_{n \rightarrow +\infty} n+n$.

Question évidentes. $\frac{n+1}{n}$ converge vers 1. mais $\frac{\sin(n+1)}{\sin(n)}$ vaut $\frac{\sin(n).\cos(1) + \cos(n).\sin(1)}{\sin(n)}$ et donc $\cos(1) + \tan(n).\sin(1)$.

La suite $\tan(n)$ ne converge pas (classique). La combinaison ne converge pas.

Le quotient $\frac{n+k}{n}$ vaut $1 + \frac{k}{n}$. Il converge vers 1.

Le rapport $\frac{n+n}{n}$ converge vers 2. Et pas vers 1.

Pourquoi $(\tan(n))$ ne converge pas ?

Par 'absurde, si elle convergeait vers a , alors la suite $(\tan(n+1))$ convergerait aussi vers a .

Or, $\tan(n+1) = \frac{\tan(1) + \tan(n)}{1 - \tan(1) \cdot \tan(n)}$. par passage à la limite et unicité de celle-ci : $a = \frac{a + \tan(1)}{1 - a \cdot \tan(1)}$.

Mais aussi $\tan(2n) = \frac{2 \cdot \tan(n)}{1 - (\tan(n))^2}$ et cette fois $a = \frac{2a}{1 - a^2}$.

Les deux équations n'ont pas de racine commune...

◦50◦

Résolvez $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ d'inconnue réelle x (peut-on considérer que 0 est solution ?)

x est forcément positif.

Et 0 est solution (on rappelle $0^0 = 1$ et c'est $0(1)^{0(1)}$ qui est indéterminé...

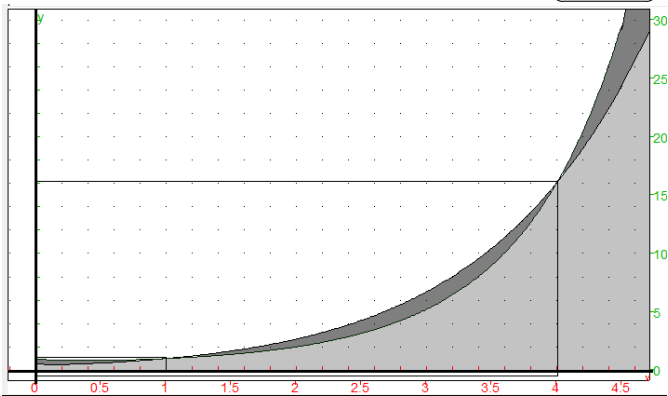
Et 1 est solution aussi.

Ensuite, pour résoudre, on passe au logarithme : $\sqrt{x} \cdot \ln(x) = x \cdot \ln(\sqrt{x})$.

L'équation devient $(\sqrt{x} - \frac{x}{2}) \cdot \ln(x) = 0$

$$\sqrt{x} \cdot (1 - \frac{\sqrt{x}}{2}) \cdot \ln(x) = 0$$

On a donc nos trois solutions (et elles seules) : **0, 4 et 1**



◦51◦

Montrez que si f est paire et dérivable, alors f' est impaire.

Donnez un contre-exemple à " f impaire implique f' paire".

On suppose $\forall x, f(x) = f(-x)$ et on dérive : $\forall x, f'(x) = -f'(-x)$ (il sort un signe moins à droite à cause de la dérivation composée).

On reconnaît que f' est impaire.

Blague (véridique) : Le prof demande à l'élève « montrez que f est impaire ». L'élève écrit « on calcule $f(2n+1)$ ».

La preuve ci-dessus semble donner « f impaire implique f' paire ».

Mais qui dit que f est dérivable.

Prenons $\text{Signe} = x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Elle est impaire. Mais pas dérivable. En tout cas, pas dérivable en 0 car elle n'y est même pas continue...

◦52◦

Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. D'ailleurs diagonalisez-la.

♣ Montrez qu'elle ne l'est pas si le corps de base est $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 5. Calculez quand même sa puissance 2015^{ième}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Sinon, l'équation caractéristique est $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$.

Le corps de base est si petit qu'il suffit de tester les cinq nombres un par un.

λ	0	1	2	3	4
λ^2	0	1	4	9	16
$\lambda^2 - 2\lambda - 1$	$-1 = 4$	$-2 = 3$	$-1 = 4$	2	$7 = 2$

Pas de valeur propre, pas de matrice D .
C'est tout ! Et j'en ai fait un trèfle ?

◦53◦

Quand on a une suite réelle (a_n) de limite α non nulle, on montre l'implication $|a_n - \alpha| \leq \alpha/2 \rightarrow |a_n| \geq \alpha/2$ en passant par $\alpha - \alpha/2 \leq a_n \leq \alpha + \alpha/2$. Montrez que ce résultat est vrai aussi dans $\mathbb{C}$.

On sait faire sur $\mathbb{R}$: à partir du rang $N_{\alpha/2}$, on a $|u_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{2}$, ce qui signifie $\alpha - \frac{\alpha}{2} \leq u_n \leq \alpha + \frac{\alpha}{2}$.

On obtient d'un côté $\frac{\alpha}{2} \leq u_n$, et u_n est « loin de 0 ».

Si α est négatif, on fait de même : à partir du rang $N_{|\alpha|/2}$, on a $|u_n - \alpha| \leq \frac{|\alpha|}{2}$ et on trouve $u_n \leq \frac{|\alpha|}{2}$, et u_n est négatif, « loin de 0 ».

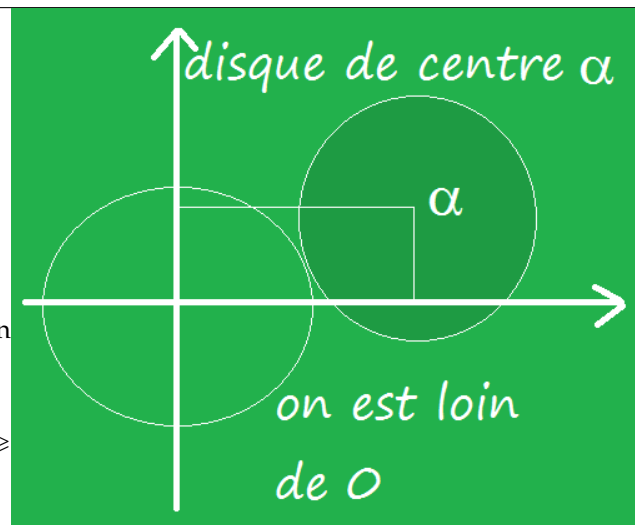
C'est ce qu'on utilise pour montrer que si une suite réelle a une limite non nulle, alors tous les termes de $\frac{1}{u_n}$ sont définis à partir d'un certain rang, et « loin de 0 ».

C'est ce qui permet aussi de dire que si f est continue en a avec $\alpha = f(a) \neq 0$, alors sur un intervalle $[a - \eta_{\alpha, |\alpha|/2}, a + \eta_{\alpha, |\alpha|/2}]$, f reste de signe constant.

Mais dans $\mathbb{C}$, comment passer de « z est proche de α » non nul à « z reste loin de 0 ».

On prend un disque de rayon « la moitié du module » :

$$|z - \alpha| \leq \frac{|\alpha|}{2} \Rightarrow |z| = |-z| = |\alpha - (\alpha - z)| \geq |\alpha| - |\alpha - z| = |\alpha| - |z - \alpha| \geq |\alpha| - \frac{|\alpha|}{2} = \frac{|\alpha|}{2}.$$



◦54◦

Montrez que de toute suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Montrez que de toute suite réelle on peut extraire au moins une sous-suite qui converge (au sens large, soit vers un réel, soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$).

Donnez une suite réelle non bornée, qui admet une sous-suite qui converge vers 1, une vers 0 et une vers -1 .

Montrez que de toute suite complexe convergente, on peut extraire une sous-suite bornée.

Une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ bornée ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Par principe des tiroirs, l'une d'entre (qu'on appellera β) elle est prise une infinité de fois. En indexant par ordre croissant la liste des indices pour lesquels la suite vaut β , on a une extraction. Et la suite extraite est constante, donc convergente.

Sinon, une suite bornée à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est aussi une suite réelle bornée. Elle admet donc au moins une sous-suite qui converge.

On prend une suite quelconque.

Si elle n'est pas majorée, alors on peut extraire une sous-suite qui tend vers $+\infty$.

En gros, il suffit de quantifier « non bornée » : $\forall A, \exists n, u_n > A$. On prend pour A des nombres de plus en plus grands et le tour est joué (il faut quand même construire $\varphi(n+1) = \inf(k \mid a_k \geq 2 \cdot a_{\varphi(n)})$).

Si elle n'est pas minorée, on fait de même (en changeant le signe) et on a une sous-suite qui diverge vers $-\infty$.

Dans le cas qui exclut les deux précédents, elle est majorée et minorée. Donc bornée. On utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass.

La suite $\left(\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right)$ prend sans arrêt les valeurs 0, 1, -1 (et 0 c'est deux fois plus souvent que les autres).

Sa sous suite $\left(\cos \left((2.n + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right)$ converge vers 0.

Sa sous suite $\left(\cos \left((4.n) \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right)$ converge vers 1.

Sa sous suite $\left(\cos \left((4.n + 2) \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right)$ converge vers -1.

Et si vous voulez moins périodique : $\left(2^{-n} + \cos \left((2.n + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right)$.

Toute suite complexe convergente est bornée, c'est tout !

◦55◦

La suite (u_n) est définie par $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n+u_n}}$. Donnez sa limite quand n tend vers l'infini.

On ne peut pas dire « je passe à la limite », car rien ne nous dit déjà que u_n a bien une limite. Et les formes sont indéterminées.

On va extraire explicitement u_n de la formule : $2\sqrt{n+u_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$, puis $u_n = \frac{1}{4(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2} - n$.

Sous cette forme, rien n'est évident, le dénominateur tend vers 0, la fraction tend vers l'infini, la forme est indéterminée.

Avant de réduire au dénominateur commun, utilisons la quantité conjugués :

$$u_n = \frac{1}{4 \left(\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right)^2} - n = \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2}{4} - n = \frac{n+1+n+2\sqrt{n^2+n}-4n}{4}$$

On simplifie : $u_n = \frac{2\sqrt{n^2+n} - (2n-1)}{4}$ et on va encore utiliser la quantité conjuguée :

$$u_n = \frac{4n^2 + 4n - (4n^2 - 4n + 1)}{4(\sqrt{4n^2 + 4n} + (2n+1))} = \frac{8n-1}{4(\sqrt{4n^2 + 4n} + (2n+1))}$$

L'heure est venue pour nous de passer aux équivalents : $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8n}{4(2n+2n)}$.

La suite est équivalente à une constante non nulle, elle converge vers celle-ci : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

On notera que c'est ici une formule qui peut évoquer à la fois une notion de dérivée :

$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1-n}$ est un taux d'accroissement de la fonction racine carrée, tandis que $\frac{1}{2\sqrt{n+u_n}}$ est la dérivée quelquepart entre n et $n+1$.

On peut aussi y voir du calcul intégral :

$$\int_{t=0}^1 \frac{dt}{2\sqrt{n+t}} = \int_{x=n}^{n+1} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \left[\sqrt{x} \right]_n^{n+1} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

◦56◦

Un élève a trouvé $N_\varepsilon = \frac{1-2e^\varepsilon}{1-e^\varepsilon}$ dans la quantification $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n, n \geq N_\varepsilon \rightarrow |u_n - a| \leq \varepsilon$. Donnez une suite dont il a pu partir.

Une solution naturelle consiste à remonter la formule : $n \geq \frac{1-2e^\varepsilon}{1-e^\varepsilon} \Leftrightarrow (e^\varepsilon - 1).n \geq (2e^\varepsilon - 1)$ (attention aux signes, $1 - e^\varepsilon$ est négatif...).

Ceci est équivalent à $e^\varepsilon.(n-2) \geq n-1$ puis $e^\varepsilon \geq \frac{n-1}{n-2}$ et même $\varepsilon \geq \ln \left(\frac{n-1}{n-2} \right)$. Prenons le cas d'égalité !

La suite $\left(\ln \left(\frac{n-1}{n-2} \right) \right)$ converge vers 0, et ce N_ε convient...

Une solution de facilité c'est : « la suite (u_n) est constante égale à a ».

Certes, pour tout ε , on pourrait prendre $N_\varepsilon = 0$ et tout irait bien. mais pourquoi alors ne pas prendre $N_\varepsilon = \frac{1-2e^\varepsilon}{1-e^\varepsilon}$? ça marche aussi !

◦57◦

Montrez que $\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$ et $\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right)$ forment un couple de suites adjacentes.

C'est la « généralisation » d'un exercice de l'I.S. dans lequel il y avait une série avec des $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k}$.

On nomme (A_n) et (B_n) nos deux suites. A_n contient un terme de plus que (B_n) mais avec un signe moins. c'est (A_n) la plus petite.

On se dit donc que c'est à elle de croître, et à (B_n) de décroître.

On vérifie aussi tout de suite : $B_n - A_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

On se donne n et on calcule $B_{n+1} - B_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n}$.

On peut être tenté d'écrire $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ et même $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Oui, c'est tentant, et peut être même bien, à condition de se souvenir que $\ln(1+x)$ est plus petit que x .

C'est une inégalité de convexité. On l'a par exemple en écrivant la formule de Taylor avec reste intégrale pour le logarithme entre 1 et $1+x$:

$$\ln(1+x) = \ln(1) + \frac{1}{1} \cdot x + \frac{x^2}{1} \cdot \int_0^1 (1-t) \cdot \frac{-1}{(1+tx)^2} dt$$

Le reste intégrale est négatif, c'est gagné.

Encore une fois, une idée simple comme $\ln(1+x) \leq x$.

Mais il y a une idée encore plus belle : $\ln(n+1) - \ln(n)$ c'est $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$. Et c'est plus une aire qu'on compare à celle d'un rectangle.

Le graphe de $t \mapsto \frac{1}{t}$ est entre $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n}$ sur l'intervalle $[n, n+1]$. On a donc $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n}$.

Et l'une des inégalités est celle que l'on veut.

Avec plus de rigueur mais en perdant un peu du côté visuel : $\forall t \in [n, n+1], \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$,

On intègre ensuite de n à $n+1$: $\frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{dt}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n}$.

Avec moins de réflexes de Sup, mais avec de bons réflexes de Terminale, pour montrer que $\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n}$ est négatif, il y a aussi l'idée de définir $x \mapsto \ln(1+x) - \ln(x) - \frac{1}{x}$, de la dériver et d'étudier ses variations. Elle croît. Et elle tend vers 0 à l'infini. Elle est donc négative...

Bref, la suite (B_n) est décroissante.

Pour la croissance de (A_n) , on calcule $A_{n+1} - A_n = \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1}$. Et c'est l'autre inégalité qui sert. Quelle chance !

Pour information, la limite commune de ces deux suites est γ , la constante d'Euler.

◦58◦

Un élève n'a pas bien copié la définition de la convergence d'une suite réelle u vers un réel a . Indiquez qui sont les suites vérifiant les propriétés suivantes :

a	$\forall \varepsilon \geq 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow u_n - a \leq \varepsilon$
b	$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n - a \leq \varepsilon$
c	$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \text{ et } u_n - a \leq \varepsilon$
d	$\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n - a \leq \varepsilon$
e	$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, u_n - a \leq \varepsilon$

◦59◦

On pose $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{n}}}}}$ et $v_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{2n}}}}}$.

Montrez : $v_n - u_n \leq \frac{n}{2^{n-1} \cdot \sqrt{(n-1)!}}$ (conjuguez, conjuguez il en restera quelque chose).

Déduisez que (u_n) et (v_n) forment un couple de suites adjacentes.

Écrivez un script **Python** qui pour ε donné calcule leur limite commune à ε près.

On en calcule un peu :

n	1	2	3	4	5
u_n	$\sqrt{1}$	$\leq \sqrt{1 + \sqrt{2}}$	$\leq \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$	$\leq \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4}}}}$	$\leq \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \sqrt{5}}}}}$
v_n	?	$\sqrt{1 + \sqrt{4}}$	$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{6}}}$	$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{8}}}}$	$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \sqrt{10}}}}}$

On voit bien que (u_n) croît, qu'elle est majorée par (v_n) . Pour le reste, c'est plus dur.

Commençons par la première inégalité par conjugaison :

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{2n}}}}} - \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{n}}}}} = \\
 &= \frac{(1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{2n}}}) - (1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{n}}})}{v_n + u_n}
 \end{aligned}$$

Les 1 s'en vont, il reste un numérateur qu'on conjugue aussi :

$$v_n - u_n = \frac{(2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{2n}}}) - (2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{n}}})}{(v_n + u_n) \cdot (\sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{2n}}}} + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{n}}}})}$$

Cette fois, les 2 s'en vont, et on re-conjugué :

$$v_n - u_n = \frac{(3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{2n}}) - (3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{n}})}{(v_n + u_n) \cdot (\sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{2n}}}} + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{n}}}}) \cdot (\sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{2n}}} + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{n}}})}$$

Il est un peu lourd de raconter ceci proprement, mais le numérateur fond petit à petit jusqu'à ce qu'il ne reste que $2n - n$ c'est à dire n .

Et au dénominateur, il reste des produits de termes comme

$$\sqrt{5 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{2n}}}} + \sqrt{5 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{n}}}}$$

Un tel terme se minore par $2 \cdot \sqrt{5 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{n}}}}$, ce qui va permettre de majorer $v_n - u_n$.
Chacun apporte un facteur 2.

Et pour chacun, on minore encore $2 \cdot \sqrt{5 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{n}}}} \geq 2 \cdot \sqrt{5}$.

Si on les garde tous, on minore le dénominateur par $2^{n-1} \cdot \sqrt{n-1} \cdot \sqrt{n-2} \dots \sqrt{1}$ et on majore la différence $v_n - u_n$ par $\frac{n}{2^{n-1} \cdot \sqrt{(n-1)!}}$ comme demandé.

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}}}}}$$

Pour la croissance de (u_n) , on doit comparer

$$\text{et } u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{n}}}}}$$

On commence par écrire $n + \sqrt{n+1} \geq n$, on passe à la racine (application croissante) et on ajoute $n-1$:

$$n-1 + \sqrt{n + \sqrt{n+1}} \geq n-1 + \sqrt{n}$$

on passe à la racine, on ajoute $n-2$:

$$n-2 + \sqrt{n-1 + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}} \geq n-2 + \sqrt{n-1 + \sqrt{n}}$$

et ainsi de suite.

Avec une récurrence si nécessaire, arrêtée au dernier rang, on aboutit à $u_{n+1} \geq u_n$.

De même, on part de $\sqrt{2.n} \geq \sqrt{n}$ pour arriver à

$$v_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{2.n}}}}} \geq \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{n}}}}} = u_n$$

en passant par

$$\sqrt{n-3 + \sqrt{n-2 + \sqrt{n-1 + \sqrt{2.n}}}} \geq \sqrt{n-3 + \sqrt{n-2 + \sqrt{n-1 + \sqrt{n}}}}$$

Ensuite, on doit comparer

$$v_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{2.n}}}}}$$

et

$$v_{n+1} = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n-1 + \sqrt{n + \sqrt{2.n+2}}}}}}$$

4

Comparons ce qu'il y a au bout : $2.n$ et $n + \sqrt{2.n+2}$. On a effectivement $n \geq \sqrt{2.n+2}$ en tout cas pour n plus grand que 3.

On ajoute n : $2.n \geq n + \sqrt{2.n+2}$, on passe à la racine $\sqrt{2.n} \geq \sqrt{n + \sqrt{2.n+2}}$, on ajoute $n-1$, on passe à la racine :

$$\sqrt{n-1 + \sqrt{2.n}} \geq \sqrt{n-1 + \sqrt{n + \sqrt{2.n+2}}}$$

et on recommence.

Finalement, $v_n \geq v_{n+1}$. La suite v décroît.

Résumé :

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq v_3$$

Le dernier détail qui manque : $v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Mais on l'a par encadrement avec la première inégalité démontrée.

Bref, (u_n) et (v_n) convergent. Vers la même limite.

Que je ne connais pas.

Pour le script Python, on ne va pas calculer les termes de la suite jusqu'au $n^{\text{ième}}$.

On va chercher n pour que l'encadrement soit bon (grâce à la première question).

Et ensuite, on va calculer chaque terme en mettant en boucle l'opération qui remonte. En effet, les termes de chaque suite ne se calculent pas les uns après les autres, mais chacun à partir de la fin.

Prenons le calcul de u_5 :

étape	0	1	2	3	4
	$\sqrt{5}$	$\sqrt{4 + \sqrt{5}}$	$\sqrt{3 + \sqrt{4 + \sqrt{5}}}$	$\sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \sqrt{5}}}}$	$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \sqrt{5}}}}}$

```
def suiteU(n):
    ....u=0
    ....for k in range(n):
    .....u = sqrt(n-k+u)
    ....return(u)
```

```
def suiteV(n):
    ....v=sqrt(2*n)
    ....for k in range(1,n):
    .....v = sqrt(n-k+v)
    ....return(v)
```

Il serait ensuite absurde de demander une valeur de n trop grande, Python ne travaille qu'avec un nombre fixé de chiffres derrière la virgule. Il est à noter qu'avec la précision tout juste digne de l'amphi 21, on trouve $\text{SuiteU}(20)=\text{SuiteV}(20)=1.757932756618005$

◦60◦

Montrez que pour tout choix de u_0 la suite $u_{n+1} = [e^{14 \cdot \cos(u_n/12)}]$ est périodique à partir d'un certain rang (indication : principe des tiroirs).

A partir du rang 1, la suite ne peut prendre que 'un nombre fini de valeurs. En effet, $e^{14 \cdot \cos(u_n/12)}$ est entre 0 et e^{14} .

4. un terme en $\sqrt{2.n}$ effacé un terme en n inséré, et une racine du double recréée

Sa partie entière n'a qu'un nombre fini de valeurs possibles (en l'occurrence $[e^{14} + 1]$ qu'on va noter N).

Les $N + 1$ entiers u_1 à u_{N+1} sont à placer dans N cases.

Il y en a donc deux qui prennent la même valeur.

$u_a = u_b$ avec $a < b$.

Mais alors $f(u_a) = f(u_b)$ (en notant f l'application d'itération).

En recommençant $u_{a+2} = u_{b+2}$ puis $u_{a+n} = u_{b+n}$ pour tout n .

A partir de là, la suite est périodique de période $b - a$.

◦61◦

Sachant que (a_n) est une suite arithmétique, $\sum_{k=0}^{100} a_k = 0$ et $\sum_{k=0}^{200} a_k = 20100$ calculez a_n pour tout n .

Comme la suite (a_n) est arithmétique, on a juste à compter les termes : $\sum_{k=0}^{100} a_k = 101 \cdot \frac{a_0 + a_{100}}{2}$ et $\sum_{k=0}^{200} a_k =$

$$201 \cdot \frac{a_0 + a_{200}}{2}.$$

On déduit donc tout de suite : $a_0 + a_{100} = 0$ et $a_0 + a_{200} = 200$.

On a donc un petit système : $\begin{cases} 2a_0 + 100r = 0 \\ 2a_0 + 200r = 200 \end{cases}$. Sans effort : $r = 2$ et $a_0 = -100$ et donc

$$a_n = 2n - 100$$

◦62◦

Il me semble évident qu'on a : $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}$, mais quand même prouvez le.

On va prendre n pair dans un premier temps. On écrit : $n = 2p$ et $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2p)$.

On regroupe les termes deux à deux : k avec $n - k + 1$: $n! = \prod_{k=1}^p k(n - k + 1)$.

On étudie le trinôme $X(n - X + 1)$. Son maximum vaut $\frac{(n+1)^2}{2}$ (positif, atteint en $\frac{n+1}{2}$).

On majore donc $n! \leq \left(\frac{(n+1)^2}{4}\right)^p$.

Comme p est égal à $\frac{n}{2}$ cela donne $n! \leq \frac{(n+1)^n}{2^n}$.

Quitte à faire passer $(n+1)^n$ de l'autre côté, on a $\frac{n!}{(n+1)^n} \leq \frac{1}{2^n}$.

Si n est impair, il reste un terme au milieu qu'on garde tel quel, et tout s'arrange à peu près pareil.

J'ai posé l'exercice en 2020. Voici deux propositions d'élèves.

Proposition de Math Max : on se souvient que la moyenne géométrique est plus petite que la moyenne arithmétique : $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$ et sa généralisation à n termes : $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

On l'écrit pour $n - 1$ termes : $\sqrt[n-1]{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \leq \frac{1 + 2 + \dots + n - 1}{n - 1}$.

On a donc $\left((n-1)!\right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{n(n-1)}{2(n-1)} = \frac{n}{2}$.

On élève à la puissance $n - 1$: $(n-1)! \leq \frac{n^{n-1}}{2^{n-1}}$. On multiplie par n : $n! \leq \frac{n^n}{2^{n-1}}$.

On passe au quotient : $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Pas mal non plus. On l'aura la bonne formule !

Proposition d'Alexandre : on montre le résultat pour n petit, jusqu'à 6. Ensuite, on fait une récurrence.

Pour un n donné (quelconque), on suppose $n! \cdot 2^n \leq n^n$ (objectif $(n+1)! \cdot 2^{n+1} \leq (n+1)^{n+1}$).

On part de $n! \cdot 2^n \leq n^n$ qu'on multiplie par $2 \cdot (n+1)$ (positif) : $(n+1)! \cdot 2^{n+1} \leq 2 \cdot n^n \cdot (n+1)$.

On veut majorer par $(n+1)^{n+1} = (n+1) \cdot (n+1)^n$.

Il suffit de majorer $2 \cdot n^n$ par $(n+1)^{n+1}$.

On calcule la différence de deux logarithmes : $n \cdot \ln(n+1) - (n \cdot \ln(n) + \ln(2))$.

On introduit $x \mapsto x \cdot \ln(x+1) - x \cdot \ln(x) - \ln(2)$ (notée f), de dérivée $f' = x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ (si si) et de

dérivée seconde $f'' = x \mapsto \frac{-1}{x.(x+1)^2}$.

f' est décroissante et tend vers 0 à l'infini, elle reste donc positive.

f est donc croissante, nulle en 1. Elle est donc positive.

$x.\ln(x+1) - x.\ln(x) - \ln(2)$ donc $\ln((x+1)^x) \geq \ln(2.x^x)$ et on a bien $2.n^n \leq (n+1)^n$ puis $(n+1)!.2^{n+1} \leq 2.n^n.(n+1) \leq (n+1)^n.(n+1) = (n+1)^{n+1}$.

◦63◦

Pour tout n , on pose $u_n = \cos(\pi.\sqrt{n^2+n})$. Un élève affirme : $\sqrt{n^2+n} \simeq n$ donc $\cos(\pi.\sqrt{n^2+n}) \simeq \cos(n.\pi)$ la suite ne va donc pas converger mais osciller entre -1 et 1 . Concluez qu'il est en P.C.

Donnez le développement de $\sqrt{n^2+n}$ sous la forme $n + a + o(1)$ (pensez à la quantité conjuguée). Déduisez que la suite u_n converge vers 0.

Question bonus : la série de terme général u_n converge-t-elle ?

Qu'en est il de la suite $u_n = \cos(\pi.\sqrt{n^2+2.n})$.

L'équivalent $\sqrt{n^2+n} \sim n$ est correct quand n tend vers l'infini.

On peut le multiplier par π .

Mais pas passer au cosinus.

En effet, l'équivalent dit juste $\sqrt{n^2+n} = n + o(n)$.

Et dans le cosinus, ce $o(n).\pi$ peut tout changer.

Imaginons que derrière le n de l'équivalent, on ait $\frac{1}{2} + o(1)$ (le $o(n)$ contient une limite finie, et des termes correctifs).

On a alors $\cos(n.\pi + \frac{\pi}{2} \dots)$ en notation de physicien. Et cette fois, tout tend vers 0.

Mais si le $o(n)$ est un $\frac{1}{3}$, ça change tout à nouveau...

On développe : $\sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

On déduit : $\sqrt{n^2+n} = n + \frac{1}{2} + o(1)$.

On peut cette fois passer au cosinus : $\cos(\sqrt{n^2+n}.\pi) = \cos\left(n.\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)\right) = (-1)^n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + o(1)\right)$.⁵

Le terme $(-1)^n$ n'y peut rien. On est face à un $O(1).o(1)$ avec nos notations.

◦64◦

Un élève n'a pas bien recopié la définition de la convergence d'une suite réelle u vers un réel a . Indiquez qui sont les suites vérifiant les propriétés suivantes :

a	$\forall \varepsilon \geq 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow u_n - a \leq \varepsilon$
b	$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n - a \leq \varepsilon$
c	$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \text{ et } u_n - a \leq \varepsilon$
d	$\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n - a \leq \varepsilon$
e	$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, u_n - a \leq \varepsilon$

a	$\forall \varepsilon \geq 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow u_n - a \leq \varepsilon$
	On a le droit de prendre $\varepsilon = 0$! A partir du rang N_0 la suite est constante égale à a . Ce qui correspond à ce que les plus mauvais croient être la convergence vers a ...

b	$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n - a \leq \varepsilon$
---	--

Toute suite vérifie ça. Qu'elle converge ou non !

Un $\exists$ suivi d'une implication, c'est si facile à avoir !

Par exemple $\exists n (n \geq 7 \Rightarrow n = 43)$ est totalement vrai. Il suffit de prendre $n = 2$ et on a faux implique on s'en fout...

je sais, c'est toujours contraire à ce que les élèves pensent car ils lisent trop vite les assertions mathématiques, en oubliant que l'essentiel, c'est... les variables (tiens, je l'ai déjà dit).

Pour tout N il suffit donc de prendre $n = N - 1$ et l'implication est vraie.

5. la formule $\cos(n.\pi + \theta) = (-1)^n \cdot \cos(\theta)$ est pour moi du cours, elle se justifie par un dessin, et c'est seulement si le correcteur est un emmerdeur que vous devrez la justifier autrement que par « demi-période » et « dessin sur le cercle trigonométrique ». E c'est seulement si vous avez affaire à un élève de Terminale qui n'a pas l'intention de faire des études scientifiques que vous lui écrirez $\cos(\pi.n) \cdot \cos(\theta) - \sin(\pi.n) \cdot \sin(\theta)$. Parce que là, franchement, c'est remplacer l'intelligence mathématique par le calcul...

c	$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \text{ et } u_n - a \leq \varepsilon$
	Ceci est faux. A cause du et. Cette affirmation semble prétendre qu'une fois N_ε connu, eh bien, tous les entiers sont plus grands que N_ε et en plus on a l'inégalité. Mais ! Si tous les entiers sont plus grands que N_ε, c'est donc que N_ε vaut 0 ! C'est la quantification qui le dit. Mais maintenant que l'assertion vient de forcer la main ainsi, on $u_n - a \leq \varepsilon$ pour tout n. Et pour tout ε. Vous savez quoi ? L'élève a écrit que la suite était constante égale à a. Il ne s'en doutait pas. Pour juste un mot...

Vous comprenez pourquoi un correcteur s'arrache les cheveux quand il lit vos quantifications qui ressemblent aux vraies mais contiennent souvent un truc de travers...

d	$\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n - a \leq \varepsilon$
	A partir du rang N qui ne dépend que de lui même, on a $ u_n - a $ qui est plus petit n'importe quel ε . La suite est constante égale à a à partir du rang N . Et ce rang N est donné par la quantification.
e	$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, u_n - a \leq \varepsilon$
	Même chose qu'au dessus.

Et malgré tout, après cet exercice, qui va quantifier correctement, sans oublier un symbole ici ou là, et sans transformer un $\Rightarrow$ en « du coup » ?

◦65◦

On note (E) l'équation $x + 1 + \frac{1}{x} = 0$, dont une racine sera notée x justement.

On multiplie par x^2 : $x^3 + x^2 + x = 0$.

On factorise : $x^3 + x.(x + 1) = 0$.

On remplace $x + 1$ par $-\frac{1}{x}$: $x^3 + x \cdot \frac{1}{x} = 0$.

On trouve $x^3 = -1$ qu'on résout : $x = -1$.

On reporte dans l'équation (E) : $1 + 1 + 1 = 0$. Problème ?

Bon, on est dans quel ensemble ?

Si on est dans $\mathbb{R}$ ce n'est pas un problème.

L'équation initiale n'a pas de racine. On peut déduire ce qu'on veut alors, sur le modèle « Faux implique Faux ».

On peut dire aussi qu'on a montré « si il y a une racine réelle, ce ne peut être que -1 , mais à cause des conditions nécessaires, il faut reporter, et on constate que -1 n'est pas racine ».

Si on est sur $\mathbb{C}$, le passage $x^3 = -1 \Rightarrow x = -1$ est faux.

On a juste $x^3 = -1 \Leftarrow x = -1$. Mais sinon, il y a aussi les deux racines de $x^2 + x + \frac{1}{x}$, comme par hasard...

◦66◦

Montrez que si f est une application continue strictement positive de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, alors l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)} dt \text{ vaut } 1/2.$$

Qu'est on tenté de faire quand on voit t et $1-t$? Surtout quand t va de 0 à 1 ? De renverser en posant $u = 1-t$

(comme on pose $i = n-k$ dans une somme comme $\sum_{k=0}^n a_{n-k} \cdot b_k$).

$$\text{On a alors } \int_0^1 \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)} dt = \int_{u=1}^{u=0} \frac{f(1-u)}{f(1-u) + f(u)} \cdot (-du).$$

On renverse par relation de Chasles, et on nomme I notre intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)} dt = \int_0^1 \frac{f(u)}{f(u) + f(1-u)} du.$$

La variable étant muette, on peut sommer les deux par linéarité :

$$2.I = \int_0^1 \frac{f(x) + f(1-x)}{f(x) + f(1-x)} dx = 1 \text{ et l'exercice est fini.}$$

On sait $\frac{1}{\infty} = 0$.

On va déduire

$$\frac{1}{0} = \infty$$

On fait tourner de $\pi/2$ chaque membre de $\frac{1}{\infty} = 0$.

On obtient $-18 = 0$

On ajoute 8 $-10 = 8$
de chaque côté

On tourne à nouveau $\frac{1}{0} = \infty$
de $\pi/2$

◦67◦

◦68◦

On se donne u_0 strictement positif. On définit $u_{n+1} = u_n + (u_n)^2$ pour tout n . Montrez que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. Montrez qu'il existe un rang R vérifiant $u_R \geq 2$. Déduisez $\forall n \geq R, u_n \geq 2^{n-R+1}$. Déduisez que la série de terme général $\frac{1}{1+u_n}$ converge. Montrez pour tout $n : \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+u_k} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}}$. Concluez.

Si u_0 est donné, par récurrence immédiate, chaque nouveau terme existe et est réel. La suite existe.

En écrivant $u_{n+1} - u_n = (u_n)^2$, on trouve une suite croissante.

Elle a alors deux possibilités : converger vers son plus petit majorant, ou tendre vers $+\infty$.

Si elle convergeait, sa limite λ devrait vérifier $\lambda = \lambda + \lambda^2$. La seule limite possible est 0. Mais 0 n'est pas un majorant de la suite ! C'est même un minorant.

Par élimination, c'est vers $+\infty$ qu'elle diverge.

Comme elle tend vers l'infini, à partir d'un certain rang, elle dépasse 2 (prendre $A = 2$ dans la quantification $\forall A, \exists G_A, \forall n, n \geq G_A \Rightarrow u_n \geq A$)

Mais alors, à ce rang, on a $u_R \geq 2$ puis $u_{R+1} = (u_R)^2 + u_R \geq 2^2$.

On part sur une récurrence. Prenons n quelconque plus grand que R . Supposons $u_n \geq 2^{n-R}$. On a alors

$$u_{n+1} = u_n + (u_n)^2 \geq (u_n)^2 \geq (2^{n-R})^2 = 2^{2n-2R} \geq 2^{n+1-R}$$

car $N - R \geq 1$.

Ayant $u_n \geq 2^{n-R}$ à partir du rang R , on a $0 \leq \frac{1}{u_n + 1} \leq 2^{R-n}$.

La série géométrique de terme général 2^{R-n} converge (sommes partielles calculables $\left(\sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{u_k + 1}\right) + \frac{1 - 2^{R-n-1}}{1 - 2^{-1}}$,

et admettant une $\left(\sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{u_k + 1}\right) + 2$). Par théorème de majoration sur les séries à termes positifs, la série de terme général positif $\frac{1}{u_n + 1}$ converge.

Mais on va la calculer explicitement. Par récurrence sur n on prouve

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{1+u_k} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}}$$

On initialise :

$$\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_0 \cdot (1 + u_0)} = \frac{1 + u_0 - 1}{u_0 \cdot (1 + u_0)} = \frac{1}{1 + u_0}$$

Si on suppose à un rang n donné $\sum_{k=0}^n \frac{1}{1+u_k} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}}$, on ajoute $\frac{1}{1+u_{n+1}}$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{1+u_k} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{1+u_{n+1}} = \frac{1}{u_0} - \frac{1 + u_{n+1} - 1}{u_{n+1} \cdot (1 + u_{n+1})} = \frac{1}{u_0} - \frac{1 + u_{n+1} - u_{n+1}}{u_{n+1} \cdot (1 + u_{n+1})} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}}$$

Quand n tend vers l'infini, on obtient la convergence, et aussi la somme de la série.

◦69◦

Combien y a-t-il de suites de longueur N faites de 1 et de -1 dont la somme vaut 0 ?

Combien y a-t-il de suites de longueur N faites de 1 et de -1 dont la somme vaut s ?

Combien y a-t-il de suites de longueur 100 faites de 1 et de -1 dont la somme vaut 10 et dont toutes les sommes partielles étaient positives.

On dénombre les mots faits de symboles 1 et -1 de longueur N . Il y en a a priori 2^N .

Mais on impose ensuite que la somme vaille 0. Ceci signifie qu'il y a

autant de 1 que de -1 . Il faut déjà que N soit pair. La somme $\sum_{k=1}^N \varepsilon_k$

avec les ε_k valant -1 ou 1 a en effet la même parité que N .

Ensuite, si N s'écrit $2.n$, il suffit de choisir les n emplacements pour les $+1$, et par complément, les -1 suivront.

On aboutit à $\binom{N}{n}$ ou encore $\binom{2.n}{n}$ On l'écrit aussi $\frac{(2.n)!}{(n!)^2}$.

Si l'on prend toujours N termes et qu'on impose une somme égale à s , on va considérer qu'il y a p nombres 1 et q nombres -1 . Ils forment une liste de longueur $p + q = N$, et de somme $p - q = s$. On isole : $p = \frac{N+s}{2}$. Il importe, comme tout à l'heure dans le cas $s = 0$, que N et s soient de même parité.

On est ramené au choix des p symboles 1 dans la liste de longueur n : $\binom{N}{p} = \frac{N!}{(\frac{N+s}{2})! (\frac{N-s}{2})!}$

La formule est bien d'écriture symétrique.

On cherche ensuite des suites $(1, 1, -1, 1, \dots)$ vérifiant $\sum_{k=1}^{100} \varepsilon_k = 10$ et $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k > 0$ pour tout n de 1 à 100. Pour avoir

$\sum_{k=1}^{100} \varepsilon_k = 10$, il faut et il suffit d'avoir 55 termes en $+1$ et 45 termes en -1 : $\frac{100!}{55!.45!}$.

Mais le premier terme de la somme est forcément un 1. On cherche donc ensuite des mots de 99 symboles : 54 termes $+1$ et 45 termes -1 : $\frac{99!}{54!.45!}$.

Ensuite, on passe par le complémentaire. On cherche les chemins s'annulant au moins une fois. Par principe de symétrie, pour chaque chemin de $(1, 1)$ à $(100, 10)$ passant par 0 il y a un chemin de $(1, -1)$ à $(100, 10)$ (passant évidemment par 0). Et pour chaque chemin de $(1, -1)$ à $(100, 10)$, on crée "par passage à la valeur absolue" un chemin de $(1, 1)$ à $(100, 10)$. On a une bijection entre deux ensembles, ce qui permet d'en dénombrer un en passant par l'autre.

Il y avait $\frac{99!}{54!.45!}$ chemins de $(1, 1)$ à $(100, 10)$, on soustrait $\frac{99!}{55!.44!}$ chemin de $(1, -1)$ à $(100, 10)$.

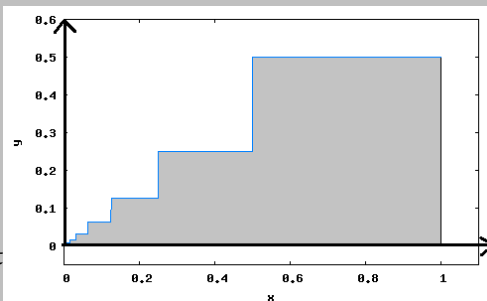
Le nombre cherché est $\frac{99!}{54!.45!} - \frac{99!}{55!.44!}$, ce qui en fait quand même 6 144 847 121 413 617 959 672 059 296.

Pour une histoire similaire de mots de longueur 6 de somme 2 sans somme partielle nulle, on aboutissait à $\frac{5!}{3!.2!} - \frac{5!}{4!.1!}$ c'est à dire $10 - 5 = 5$, de liste explicite

1	1	1	1	-1	-1	oui
1	1	1	-1	1	-1	oui
1	1	-1	1	1	-1	oui
1	-1	1	1	1	-1	non
1	1	1	-1	-1	1	oui
1	1	-1	1	-1	1	oui
1	-1	1	1	-1	1	non
1	1	-1	-1	1	1	non
1	-1	1	-1	1	1	non
1	-1	-1	1	1	1	non

◦70◦

♥ Prolongez par continuité en 0 l'application $x \mapsto 2^{\lfloor \ln(x) / \ln(2) \rfloor}$ et calculez son intégrale sur $[0, 1]$.

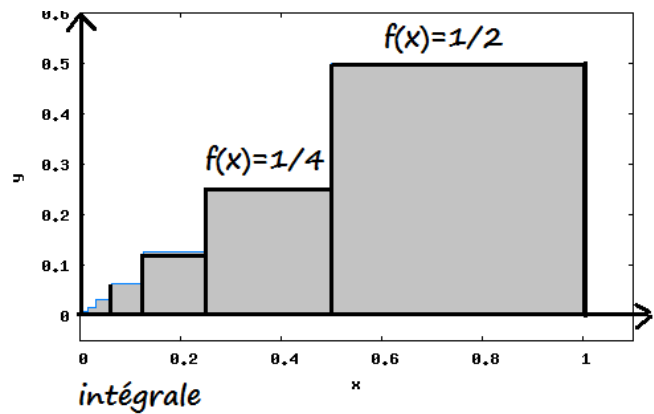
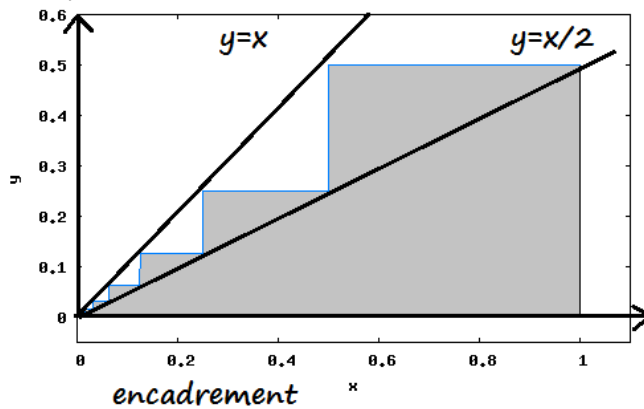


A cause du logarithme elle n'est pas définie en 0. Et on ne va la prolonger qu'à droite. On n'en revient pas aux ε , eux, c'est pour la théorie. Ensuite, pour la pratique, on encadre, on utilise des équivalents.

Ici, comme il y a une partie entière, on fait comme toujours avec elle, on l'encadre : $t - 1 < [t] \leq t$:
 $\frac{\ln(x)}{\ln(2)} - 1 \leq \left[\frac{\ln(x)}{\ln(2)} \right] \leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

On multiplie par $\ln(2)$ (positif), on passe à l'exponentielle (croissante) : $e^{\ln(x)-\ln(2)} \leq f(x) \leq e^{\ln(x)}$.

On reformule : $\frac{x}{2} \leq f(x) \leq x$. Quand x tend vers 0, les encadrants le font aussi, la fonction tend vers 0. On posera donc $f(0) = 0$. Sauf si on est con.



Pour l'intégrale, on utilise la relation de Chasles. On va découper $[0, 1]$ en intervalles où la partie entière du logarithme est constante. : $\left[\frac{\ln(x)}{\ln(2)} \right] = n$ avec n négatif.

Plus précisément, c'est sur $[2^{-N}, 1[$ qu'on va travailler, puis on fera tendre N vers 0.

$$2^{-n} \leq x < 2^{1-n}$$

$$-n \cdot \ln(2) \leq \ln(x) < (1-n) \cdot \ln(2)$$

Sur $[2^{-n}, 2^{-n+1}[$, on a

$$-n \leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)} < 1-n$$

$$-n = \left[\frac{\ln(x)}{\ln(2)} \right] < 1-n$$

$$f(x) = 2^{-n}$$

Chaque petite intégrale $\int_{2^{-n}}^{2^{1-n}} f(t) \cdot dt$ vaut donc $(2^{1-n} - 2^{-n}) \cdot 2^{-n}$.

Il reste à sommer jusqu'au rang n , puis jusqu'à l'infini : $\sum_{n=1}^N (2^{1-n} - 2^{-n}) \cdot 2^{-n} = \sum_{n=1}^N 2^{-2n} = \frac{\frac{1}{4} - o(1)}{1 - \frac{1}{4}}$.

L'aire totale vaut $\frac{1}{3}$. Un cadeau à qui le prouve géométriquement, par un simple puzzle (avec deux pièces identiques de même aire qui recouvrent un carré de côté 1)..

◊71◊

◊ 0 ◊

Une suite réelle a vérifie la propriété P si et seulement si on a $\sum_{k=0}^n (a_k)^2 \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n}$. Montrez qu'une suite vérifiant P est positive à partir d'un certain rang.

Prenons une suite vérifiant la propriété P . Le produit $a_n \cdot \sum_{k=0}^n (a_k)^2$ doit converger vers 1.

A partir d'un certain rang $N_{1/2}$, il est entre $1/2$ et $3/2$. Il est positif. On a donc a_n qui est du même signe que $\sum_{k=0}^n (a_k)^2$. Mais la somme de carrés est positive. A partir du rang $N_{1/2}$ (et même avant), a_n est positif.

◊ 1 ◊

Quelles sont les suites géométriques qui vérifient la propriété P ?

Prenons une suite géométrique de premier terme a_0 et de raison r a pour terme d'indice n le réel $a_n \cdot r^n$.

La raison sera positive, de même que le premier terme, pour que la suite soit bien positive à partir d'un certain rang, sinon, on élimine.

On somme les carrés : $\sum_{k=0}^n (a_k)^2 = (a_0)^2 \cdot \sum_{k=0}^n r^{2k} = \frac{1 - r^{2n+2}}{1 - r^2} \cdot (a_0)^2$.

L'équivalence demandée se traduirait par un quotient tendant vers 1 :

$$a_n \cdot \sum_{k=0}^n (a_k)^2 = (a_0)^3 \cdot \frac{1 - r^{2n+2}}{1 - r^2} \cdot r^n$$

On doit distinguer des cas (c'est là qu'on commence à faire des maths et pas juste du calcul ; c'est là qu'on commence à faire l'ingénieur) : tout dépend de la position de r par rapport à 1.

- Si r est entre 0 et 1, le produit tend vers 0 (le terme $(a_0)^3 \cdot \frac{1-r^{2n+2}}{1-r^2}$ reste borné).
 - Si r vaut 1, alors la formule est $a_n \cdot \sum_{k=0}^n (a_k)^2 = 1 \cdot (n+1)$. Ce terme ne tend pas vers 1.
 - Si r est plus grand que 1, le produit est égal à $(a_0)^3 \cdot \frac{r^{2n+2}-1}{r^2-1} \cdot r^n$, équivalent à $(a_0)^3 \cdot \frac{r^{3n+2}}{r^2-1}$. Encore raté.
- Aucune suite géométrique ne convient.

Il faut penser à traiter à part (et donc à traiter) le cas où la raison vaut 1. C'est toujours le truc à ne pas oublier avec les suites géométriques...

◇ 2 ◇

La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ vérifie-t-elle la propriété P ?

Tentons la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$. Le produit à étudier est $\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2}$. Le terme devant la somme tend vers 0, et la somme converge (oui, vers $\frac{\pi^2}{6}$). Le produit ne converge pas vers 1. Raté.

◇ 3 ◇

La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ vérifie-t-elle la propriété P ?

Tentons avec la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$. Cette fois, le produit est $\frac{H_{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ avec (H_n) la série harmonique. On connaît son comportement de type logarithmique $\frac{H_{n+1}}{\sqrt{n+1}} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$. Par croissances comparées, l'équivalent tend vers 0. Le produit tend aussi vers 0 (attention, ne pas dire "est équivalent à 0", ceci n'a pas de sens).

◇ 4 ◇

Montrez que la relation $u_0 = 1$ et pour tout n , " u_{n+1} est la racine positive de l'équation $x^3 \cdot u_n + x = u_n$ d'inconnue x " définit bien une suite réelle (prouvez l'existence de tous les termes). Montrez que cette suite est positive, décroissante. On note λ sa limite. Montrez qu'elle ne peut valoir que 0. Montrez que la suite (u_n) ainsi construite vérifie P .

On se donne donc $u_0 = 1$. Le premier terme de la suite existe.

Pour u_1 , on doit résoudre sur $\mathbb{R}^+$ l'équation $x^3 + x = 1$. On introduit l'application $\varphi_0 = x \mapsto x^3 + x - 1$. Elle est continue, strictement croissante, négative en 0. Et en 1 elle vaut 1. Par théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule au moins une fois. Par stricte monotonie, elle ne s'annule qu'une fois. C'est en u_1 .

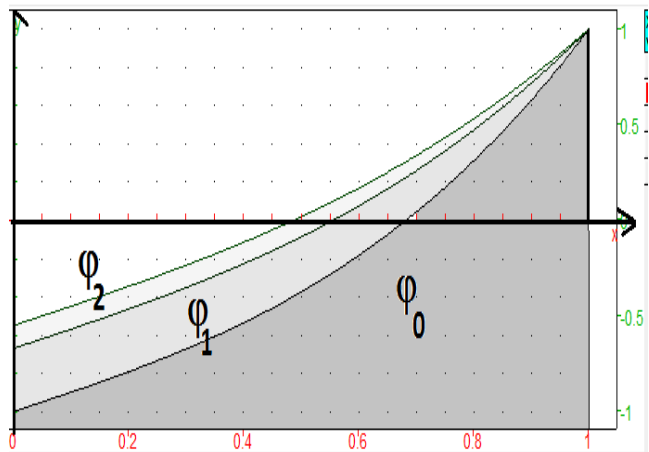
Et seuls les élèves le nez collé à la feuille et toute emplies de naïveté termanaliennes vont tenter de calculer u_1 .

On note qu'on a $0 < u_1 < 1$.

On cherche s'il existe bien un u_2 , unique, vérifiant $u_1 \cdot (u_2)^3 + u_2 = u_1$. On définit cette fois $\varphi_1 = x \mapsto u_1 \cdot x^3 + x - u_1$. C'est une application croissante sur $\mathbb{R}^+$.

En 0 elle est négative, en 1 elle vaut 1 : elle est positive. Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence de u_2 et la stricte monotonie donne son unicité.

Prenons n quelconque et supposons que u_n existe et est positif (racine positive d'une équation écrite au rang précédent). On doit montrer existence et unicité de u_{n+1} solution de l'équation $u_n \cdot x^3 + x = u_n$. On définit l'application $\varphi_n = x \mapsto u_n \cdot x^3 + x - u_n$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (pardon ? oui, on dérive et on a une somme de termes tous positifs...). Elle est continue. En 0 elle est négative et en 1 elle vaut $1 + u_n - u_n$; elle dépasse donc 1.



Le théorème des valeurs intermédiaires donne existence de u_{n+1} . La stricte monotonie donne son unicité. Le terme suivant existe, et la récurrence s'achève.

La suite u existe (mais vous n'avez pas de formule explicite, c'est fini le bac à sable appelé Terminale).

Elle est positive par construction.

Étudions sa monotonie. On regarde ce qu'on a fait pour l'existence et unicité de u_{n+1} . On a appliqué le théorème des valeurs intermédiaires sur $[0, 1]$ pour l'application $\varphi_n = x \mapsto u_n \cdot x^3 + x - u_n$. Mais si on l'applique sur $[0, u_n]$? On a alors $\varphi_n(0) = -u_n < 0$ et $\varphi_n(u_n) = (u_n)^4 > 0$.

C'est donc sur $[0, u_n]$ qu'on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. u_{n+1} est dans $[0, u_n]$ (strict).
On reformule : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$. C'est la décroissance attendue.

La suite u est décroissante minorée, elle converge.

Mais alors, en repartant de la relation $u_n \cdot (u_{n+1})^3 + u_{n+1} = u_n$, on obtient par passage à la limite $\lambda^4 + \lambda = \lambda$.
La seule valeur possible pour la limite est 0.

On a au rang 0 : $u \cdot \sum_{k=0}^0 (u_k)^2 = 1 \cdot (1^1) = 1$.

On calcule au rang 1 : $u_1 \cdot \sum_{k=0}^1 (u_k)^2 = u_1 \cdot (1 + (u_1)^2) = u_1 + (u_1)^3$. u_1 a été construit pour vérifier $1 \cdot (u_1)^3 + u_1 - 1 = 0$. Le produit vaut 1.

On a alors $1 + (u_1)^2 = \frac{1}{u_1}$ et on va s'en servir.

On regarde au rang 2 : $u_2 \cdot \sum_{k=0}^2 (u_k)^2 = u_2 \cdot (1 + (u_1)^2 + (u_2)^2) = u_2 \cdot \left(\frac{1}{u_1} + (u_2)^2 \right) = \frac{u_2 + u_1 \cdot (u_2)^3}{u_1} = \frac{u_1}{u_1} = 1$
puisque $u_1 \cdot (u_2)^3 + u_2 = u_1$.

On suppose, pour un n quelconque donné : $u_n \cdot \sum_{k=0}^n (u_k)^2 = 1$.

On calcule au rang suivant : $u_{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} (u_k)^2 = u_{n+1} \cdot \left((u_{n+1})^2 + \sum_{k=0}^n (u_k)^2 \right) = u_{n+1} \cdot \left((u_{n+1})^2 + \frac{1}{u_n} \right)$ par hypothèse de rang n .

On réduit au dénominateur commun $u_{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} (u_k)^2 = \frac{(u_{n+1})^3 \cdot u_n + u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{u_n}$ par construction de u_{n+1} .

La récurrence s'achève.

Pour tout n , on a $u_n \cdot \sum_{k=0}^n (u_k)^2 = 1$. On peut faire tendre n vers l'infini, il y a une limite et elle vaut 1

◻72◻

♥ $\begin{cases} x & +y & +z & = & 3 \\ x & +2.y & -z & = & 2 \\ 2.x & -5.y & +3.z & = & 0 \end{cases}$ a pour solution $(1, 1, 1)$. De combien augmente x pour le système $\begin{cases} x & +y & +z & = & 3 \\ x & +2.y & -z & = & 2 \\ 2.x & -5.y & +3.z & = & 5 \end{cases}$?

C'est vrai : $\begin{pmatrix} 1 & +1 & +1 \\ 1 & +2.1 & -1 \\ 2.1 & -5.1 & +3.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On écrit même $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le nouveau système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

de solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On compare : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ (en factorisant $A^{-1} \cdot U - A^{-1} \cdot V = A^{-1} \cdot (U - V)$).

La différence qui nous intéresse $x - 1$ est donc le premier terme du produit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

C'est donc 5 fois le coefficient de ligne 1 colonne 3 de la matrice inverse.

On sait le calculer : $\frac{1}{\det(M)} \cdot \text{cofacteur}$.

Finalement x a augmenté de $5.\frac{3}{13}$

◦73◦

Vrai ou faux : si $((u_n)^5)$ et $((u_n)^7)$ convergent alors (u_n) converge ?
Si $((u_n)^5)$ ou $((u_n)^7)$ diverge alors (u_n) diverge ?

Le quotient $\frac{(u_n)^7}{(u_n)^5}$ converger vers le quotient des limites.

Donc maintenant, $((u_n)^2)$ converge.

On l'élève au carré ($(u_n)^4$) converge (et on se moque de savoir vers quoi).

On passe au quotient $\frac{(u_n)^5}{(u_n)^4}$ converge. C'est fini.

Tout raisonnement commencement par « notons α la limite de la suite (u_n) est... tout sauf un raisonnement.

Rien ne dit que la suite a une limite justement.

Rappelons que « converger », c'est « avoir une limite »...

qu'il existe une quantité incommensurable de suites qui ne convergent même pas

Il y a plus rapide, avec directement $\frac{((u_n)^7)^3}{((u_n)^5)^4}$. Et c'est inspiré d'une identité de Bézout : $7 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = 1$.

Il faut penser à traiter à part le cas « si $((u_n)^5)$ converge vers 0 ».

En effet, on ne peut alors pas le mettre au dénominateur.

Mais si $((u_n)^5)$ converge vers 0 alors sa racine cinquième converge aussi vers 0.

D'ailleurs le coup de la racine cinquième marche très bien... sauf si on est sur $\mathbb{C}$ où un complexe a cinq racines cinquièmes.

74

François a posé l'addition suivante (il a fait vite, il y a une infinité de termes, mais il a tout calculé) : pouvez vous me dire quel sera le deux mille quinzième chiffre de la somme ?

Vous avez un joli Rubik's Cube en Apéricubes de la Vache qui Rit. Un ver a décidé d'en goûter chacun des vingt sept petits cubes. Il se déplace en passant d'un cube à son voisin ayant une face commune (*pas de passage en diagonale*). Il a commencé par le cube central. Pourra-t-il visiter tous les petits cubes ? Indication : coloriez les cubes en deux couleurs.

[illegible]

On va poser vraiment l'addition en espérant qu'il n'y a pas trop de chiffres qui remontent par des retenues ?

Non. On regarde que cette somme est : $1.10^{-1} + 2.10^{-2} + 3.10^{-3} + 4.10^{-4} + \dots$ malproprement.

Proprement c'est $\sum_n n.10^{-n}$.

Enfin, plus proprement, c'est la limite quand N tend vers l'infini de $\sum_{n=0}^N n.10^{-n}$.

Comment calculer cette série qui ressemble à une série géométrique ?

En libérant une variable.

Posons $f_N(x) = \sum_{n=0}^N x^n$ dont la valeur est connue : $f(x) = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$ (tant que x ne vaut pas 1).

On dérive : $f'_N(x) = \sum_{n=0}^N n.x^{n-1} = \frac{1-x^{N+1}}{(1-x)^2} - \frac{(N+1).x^N}{1-x}$.⁶

On multiplie par x : $x.f'_N(x) = \sum_{n=0}^N n.x^n = x.\frac{1-x^{N+1}}{(1-x)^2} - \frac{(N+1).x^{N+1}}{1-x}$.

On calcule en 10^{-1} : $x.f'_N(x) = \sum_{n=0}^N n.10^{-n} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1 - 10^{-N-1}}{(9/10)^2} - \frac{(N+1).10^{-N-1}}{9/10}$.

On fait tendre N vers l'infini : $\sum_{n=0}^N n.10^{-n} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{(9/10)^2}$.

6. oui, on a dérivé un produit, avec un terme d'exposant -1 c'est plus simple

Le nombre étudié vaut $\frac{10}{81}$

Surprise : | Ce nombre est finalement un rationnel !
 Son écriture décimale est périodique à partir d'un certain rang.
 On pose la division 0.12345679012345679012345679012345679012345679012346...
 Génial : c'est dès le début qu'on a une période, et elle est de 10.
 Vous connaissez tous ses chiffres, et le 2015^{ième} chiffre est un 5. Encadré d'un 4 et d'un 6.
 Finalement, un exercice sur les séries numériques.

Pour le cube, colorions effectivement un cube sur deux en noir et un sur deux en blanc.

Disons que le cube central est blanc. Voici les trois coupes :

N	B	N	B	N	B	N	B	N
B	N	B	N	B	N	B	N	B
N	B	N	B	N	B	N	B	N

Le ver part d'un cube blanc. A chaque déplacement, il change de couleur puisqu'il passe d'un cube à un de ses voisins directs.

Il doit visiter vingt sept cubes : BNBNNBN...BNB

Il finira donc dans un cube blanc ! Donc pas dans un coin.

Remarque : En plus, il ne finira même pas sur un blanc, car il y a 14 noirs
 13 blancs
 Il ne pourra donc même pas tout visiter...

◦75◦ Si l'on prend comme définition pour x réel $e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, justifiez $e^x \cdot e^{-x} = 1$ et $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.

La définition est elle cohérente pour $\left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$ (calculez module et argument de cette chose) ?

◦76◦ On note P le plan de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ d'équation $x + y - 2z = 0$, D la droite de vecteur directeur $\vec{i} + \vec{k}$ et D' la droite de vecteur directeur $\vec{j} + \vec{k}$.

Montrez : $\mathbb{R}^3 = P \oplus D = P \oplus D'$ (et ne simplifiez pas en $D = D'$).

On note p le projecteur sur P en effaçant la composante suivant D . Déterminez $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$.

On note p' le projecteur sur P en effaçant la composante suivant D' . Déterminez $p'(\vec{i})$, $p'(\vec{j})$ et $p'(\vec{k})$.

Résolvez $p(\vec{u}) = p'(\vec{u})$ d'inconnue vectorielle $\vec{u}$.

Résolvez $p(\vec{u}) + p'(\vec{u}) = \vec{0}$ d'inconnue vectorielle $\vec{u}$.

Résolvez $p \circ p'(\vec{u}) = p' \circ p(\vec{u})$ d'inconnue vectorielle $\vec{u}$.

P est de dimension 2, D et D' sont de dimension 1.

Si on n'a pas $D \subset P$, on a automatiquement $D \cap P = \{\vec{0}\}$, puis $D + P = D \oplus P$ et même par formule de Grassman : $D \oplus P = \mathbb{R}^3$.

De même pour D' .

Or, justement, $\vec{i} + \vec{k}$ n'est pas dans P (équation non vérifiée). le seul multiple de $\vec{i} + \vec{k}$ dans P est le vecteur nul.

On a tout ce qui a été dit.

Sinon, on peut aussi prendre une base de P : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ par exemple et vérifier qu'on complète bien en

base de $\mathbb{R}^3$:

1	1	1	$\neq 0$	et	1	1	0	$\neq 0$
-1	1	0			-1	1	1	
0	1	1			0	1	1	

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ définit une base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ que je vais appeler $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$,

avec $(\vec{a}, \vec{b})$ base de P et $(\vec{c})$ base de D .

Disposant de ces deux matrices inversibles, je les inverse :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a pour inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On interprète : $\vec{i} = 1.\vec{a} + 1.\vec{b} - 1.\vec{c}$, $\vec{j} = 0.\vec{a} + 1.\vec{b} - 1.\vec{c}$ et $\vec{k} = -1.\vec{a} - 1.\vec{b} + 2.\vec{c}$.

On pouvait aussi combiner à la main, ou résoudre un système.

On met un niveau de parenthèses : $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \vec{i} = & \vec{a} + \vec{b} & -\vec{c} \\ \hline \vec{j} = & \vec{b} & -\vec{c} \\ \hline \vec{k} = & -\vec{a} - \vec{b} & +2.\vec{c} \\ \hline \end{array}$ et on projette sur P en effaçant D :

$p(\vec{i}) =$	$\vec{a} + \vec{b}$	$+\vec{0}$
$p(\vec{j}) =$	$\vec{b}$	$+\vec{0}$
$p(\vec{k}) =$	$-\vec{a} - \vec{b}$	$+\vec{0}$

On revient sur la base canonique : $p(\vec{i}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $p(\vec{j}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $p(\vec{k}) = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On peut vérifier que ces vecteurs sont bien dans P .

Et on vérifie aussi que $\vec{i} - p(\vec{i})$ est bien colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, de même pour les autres.

Je vous le fais de la même façon pour p' ?

Par forcément.

Cette fois, pour $\vec{i}$ on dit que $\vec{i}$ va s'écrire $p'(\vec{i}) + \lambda.(\vec{j} + \vec{k})$ avec $p(\vec{i})$ dans P et $\lambda.(\vec{j} + \vec{k})$ dans D' .

On écrit sur la base canonique $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ avec $x + y - 2.z = 0$ et λ réel.

On a un petit système rapide à résoudre.

On peut aussi directement trouver λ : $\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & -\lambda \\ z & = & -\lambda \end{array}$ et la condition $x + y - 2.z = 0$ donne $\lambda = -1$.

On remplace : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et on projette $p(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On fait de même : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a cette fois $\begin{array}{|c|c|c|} \hline p'(\vec{i}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & p'(\vec{j}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & p'(\vec{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}$

Devez vous être surpris d'avoir $p'(\vec{j}) = -p'(\vec{k})$?

Non. On a donc $p'(\vec{j}) + p'(\vec{k}) = \vec{0}$, soit encore $p'(\vec{j} + \vec{k}) = \vec{0}$.

Mais quoi de plus naturel ? Ce vecteur est dans D' et par p' on efface ce qui est dans D .

Sinon, regardez, on va multiplier des matrices.

Notons P' la matrice inversible $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Elle nous dit comment décomposer sur la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un vecteur donné sur la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Prenons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Elle transforme $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ (elle efface ce qui est selon $\vec{c}$ et garde $\vec{a}$ et $\vec{b}$).

Enfin, notons P'^{-1} l'inverse de P' : $P'^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Elle prend un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sur la base cano-

nique et le transforme en $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ sur la base adaptée $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

La matrice de la projection est le produit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (tiens, $P.D.P^{-1}$).

On effectue $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et vous reconnaissez les trois colonnes.

L'équation $p(\vec{u}) = p'(\vec{u})$ admet des solutions évidentes.

Il y a bien sûr $\vec{0}$. Ses deux images sont nulles.

Mais il y a aussi tous les vecteurs de P .

En effet, si on prend $\vec{u}$ dans P , il se projette en lui-même : $p(\vec{u}) = \vec{u}$ et $p'(\vec{u}) = \vec{u}$.

On a bien pour eux $p(\vec{u}) = p'(\vec{u})$.

Mais sinon ? Sinon, ça ne me semble guère possible.

On part de $\vec{u}$ qu'on décompose en $\vec{u} = p(\vec{u}) + \lambda(\vec{i} + \vec{k})$ avec $p(\vec{u})$ dans P et $\lambda(\vec{i} + \vec{k})$ dans D

$$\vec{u} = p'(\vec{u}) + \mu(\vec{j} + \vec{k}) \text{ avec } p'(\vec{u}) \text{ dans } P \text{ et } \mu(\vec{j} + \vec{k}) \text{ dans } D'$$

Si on suppose $p(\vec{u}) = p'(\vec{u})$, on a en comparant $\lambda(\vec{i} + \vec{k}) = \mu(\vec{j} + \vec{k})$.

Et ceci n'est possible qu'avec $\lambda = \mu = 0$ (vecteurs non colinéaires, famille libre).

Il ne reste que $\vec{u} = p(\vec{u}) + \vec{0} = p'(\vec{u}) + \vec{0}$ et c'est un vecteur de P .

Peut-on avoir $p(\vec{u}) + p'(\vec{u}) = \vec{0}$?

Oui, pour le vecteur nul.

Mais sinon ?

L'équation $p'(p(\vec{u})) = p(p'(\vec{u}))$ a beaucoup de solutions.

Prenons un vecteur $\vec{u}$ et déterminons mentalement $p(\vec{u})$. C'est un vecteur de P , c'est déjà ce qu'on peut dire.

Mais alors, comment le projeter sur P par p' ? C'est fait, il est déjà dans P .

On a donc $p'(p(\vec{u})) = p(\vec{u})$.

Reprenons le même raisonnement avec $p'(\vec{u})$ qui est dans P .

On le décompose en $p'(\vec{u}) = p'(\vec{u}) + \vec{0}$ avec $p'(\vec{u})$ dans P et $\vec{0}$ dans D .

On projette par p en $p(p'(\vec{u})) = p'(\vec{u})$.

Ayant à la fois $p'(p(\vec{u})) = p(\vec{u})$ et $p(p'(\vec{u})) = p'(\vec{u})$, notre équation $p(p'(\vec{u})) = p'(p(\vec{u}))$ se ramène à $p'(\vec{u}) = p(\vec{u})$.

On l'a vu, les solutions sont les vecteurs de P . Encore eux.

◦77◦

Algorithme de Borchardt celui trigonométrique : on donne $0 < a_0 < b_0$, puis pour tout n de $\mathbb{N}$: $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$

et $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} \cdot b_n}$.

(a) Montrer que (a_n) et (b_n) sont convergentes de même limite, que l'on notera λ .

(b) On pose $q_n = \frac{a_n}{b_n}$; vérifiez : $q_{n+1} = \sqrt{\frac{1+q_n}{2}}$.

(c) Déduisez $a_n = b_n \cdot \cos(\alpha/2^n)$ où α est une mesure angulaire que vous définirez, puis $b_n = \frac{b_0 \cdot \sin(\alpha)}{2^n \cdot \sin(\alpha/2^n)}$.

(d) Déduisez : $\lambda = \frac{b_0 \cdot \sin(\alpha)}{\alpha} = \frac{\sqrt{b_0^2 - a_0^2}}{\text{Arccos}(b_0/a_0)}$ et $(b_n - a_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} b_0 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha) \cdot 2^{-2n-1}$.

(e) Que vaut donc λ dans le cas $a_0 = 1/2$ et $b_0 = 1/\sqrt{2}$?

A faire.