



◦0◦

Montrez que si f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie $\int_{-1}^1 f(t).dt = 0$ alors elle admet au moins un point fixe (on pourra étudier $f - Id$ sur $[-1, 1]$ et montrer qu'elle ne peut pas rester de signe constant).

Un classique. Un point fixe, c'est une solution de $f(x) = x$ (« fixe » car f n'a aucun effet sur lui). Mais il faut le voir comme une intersection du graphe avec la bissectrice (encore un dessin, encore un dessin !).

On va donc tout naturellement étudier $f - Id$. Ou ce que vous appelez $f(x) - x$. A tort, puisque $f(x) - x$ est un pauvre nombre et pas un graphe ni une fonction.

On pose $g = f - Id$ et on calcule $\int_0^1 g(t).dt = \int_0^1 f(t).dt - \int_0^1 t.d t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

Cette intégrale est nulle. La fonction g ne peut pas être toujours positive (son intégrale serait positive) ni toujours négative (son intégrale serait négative).

Elle change donc de signe.

Et en tant que fonction continue qui change de signe sur un intervalle, elle s'annule au moins une fois.

Et toc ! Zéro calcul, juste de l'intuition et un dessin.

Si si, un dessin. Si le graphe de f était toujours sous la bissectrice, son intégrale ne pourrait pas valoir $1/2$. De même si il était toujours au dessus. Donc, g est vraiment la bonne fonction...

◦1◦

♡ Montrez que si f est lipschitzienne de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ alors $1/f$ l'est aussi (il faudra penser à introduire $\inf(f(x) \mid x \in [0, 1])$).

Un exercice de colle classique, vous risquez de l'avoir la semaine prochaine.¹

Calculons

$$\left| \frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)} \right| = \frac{|f(a) - f(b)|}{|f(a).f(b)|} \leq \frac{K.|b - a|}{|f(a).f(b)|}$$

On a le droit, f ne s'annule jamais.

Mais il y a un problème : $\frac{K}{|f(a).f(b)|}$ dépend encore de a et b .

Il faut donc majorer ce majorant. Pour le majorer, il faut minorer $|f(a)|$ et $|f(b)|$.

Et c'est là qu'on fait intervenir le segment $[0, 1]$. Sur ce segment, $|f|$ est bornée et atteint ses bornes :

$\exists c \in [0, 1], \forall x \in [0, 1], f(c) \leq f(x) $	$\exists d \in [0, 1], \forall x \in [0, 1], f(x) \leq f(d) $
minorant	majorant

On peut donc passer aux inverses positifs, et on obtient $\left| \frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)} \right| \leq \frac{K}{|f(c)|^2} . |b - a|$. Le rapport $\frac{K}{(f(c))^2}$ convient.

On note que $\frac{K}{f(c)^2}$ peut faire penser à $-\frac{f'(c)}{f(c)^2}$ dans la dérivation de $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$.

On note que si f avait eu une borne inférieure et non un minimum atteint, on ne pouvait plus majorer ainsi. La borne inférieure aurait pu être 0, certes non atteinte, mais dont on pouvait s'approcher à loisirs.

◦2◦

Construire une suite qui admet une sous-suite strictement croissante de limite 1 et une sous-suite strictement décroissante de limite 0.

Ce serait avoir $1 - \frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n+1}$ comme sous suites.

On peut jouer sur $(-1)^n$ avec $\frac{(-1)^n}{n+1}$ qui va donner une part de ce qu'on attend.

Mais il y a aussi le 1 ou 0 devant.

Et lui, on l'a avec $\frac{1 - (-1)^n}{2}$.

¹. tiens, je ne pensais pas pouvoir la dire en plein confinement, cette phrase classique ; et pourtant...merci les colleurs !

On propose donc $u_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

3.

En quels point la dérivée de $x \mapsto |\ln(|x|)|$ est elle discontinue ?

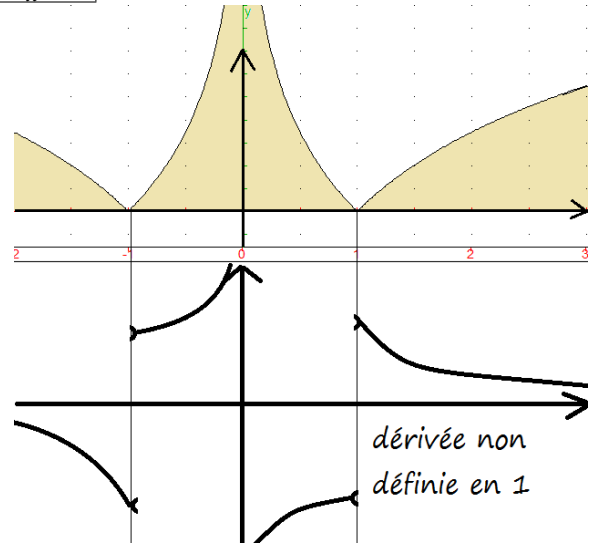
Attention, la question est précise². Et la réponse le sera aussi : nulle part.

Déjà, le domaine de définition : $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Mais quel est ensuite le domaine de définition de la dérivée ? $] -\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Et sur tout ce domaine, la dérivée est continue.

	$] -\infty, -1[$	-1	$] -1, 0[$		$]0, 1[$	1	$]1, +\infty[$
$f(x)$	$ \ln(-x) $		$ \ln(-x) $		$ \ln(x) $		$ \ln(x) $
	$\ln(-x)$	0	$-\ln(-x)$		$-\ln(x)$	0	$\ln(x)$
$f'(x)$	$\frac{1}{x}$		$-\frac{1}{x}$		$-\frac{1}{x}$		$\frac{1}{x}$



Vous avez été tentés de proposer -1 et 1 ?

Mais en ces points, f' n'est même pas définie, comment pourriez vous parler de continuité ?

Certes, la dérivée saute en ces points, et admet une limite à droite et une limite à gauche distinctes.

Mais ne lui faites pas dire ce qu'elle ne dit pas.

.

4.

♥ On définit $f = x \mapsto \exp([\ln(x)])$. Prolongez la par continuité en 0 (encadrement, pas d'épsilon). Est elle alors dérivable ?

Calculez $\int_0^1 f(t).dt$.

f n'est pas définie en 0, mais largement à droite de 0 : sur $]0, +\infty[$, on va donc regarder si $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{[\ln(x)]}$ existe. Et si elle existe, on verra sa valeur.

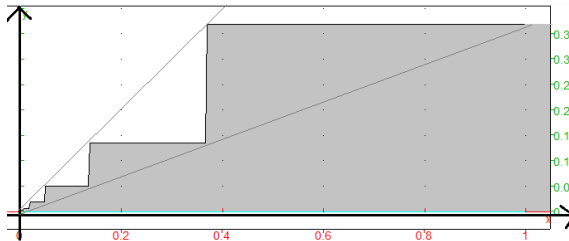
On utilise la formule $t - 1 \leq [t] \leq t$ pour tout t (stricte à gauche, et alors ?).

On a donc $\ln(x) - 1 \leq [\ln(x)] \leq \ln(x)$ puis $e^{\ln(x)-1} \leq e^{[\ln(x)]} \leq e^{\ln(x)}$ et donc $\frac{x}{e} \leq f(x) \leq x$.

Comme $\frac{x}{e}$ et x tendent vers 0 quand x tend vers 0, par encadrement, $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

On posera donc $f(0) = 0$. Prolongée par continuité.

En revanche, f est discontinue en chaque e^{-n} pour n dans $\mathbb{N}$.



Pour ce qui est de la dérivabilité, le réflexe est de revenir à la définition (pas au calcul, il n'y en a pas de possible ici).

On regarde si les taux d'accroissement ont une limite en 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{e^{[\ln(x)]}}{x}$$

L'astuce consiste à écrire que ceci vaut $e^{[\ln(x)] - \ln(x)}$.

Que fait cette différence quand x tend vers 0 ? Elle passe son temps à se promener entre 0 et -1 . Elle n'aura pas de limite.

Proprement, on prend des x dont le logarithme est entier : $x_n = e^{-n} : \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = e^0$. Un tel taux tend vers 1.

Puis on prend des x dont le logarithme est « demi-entier » : $y_n = e^{-n-0,5} : \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = e^{-0,5}$. Un tel taux tend vers $1/\sqrt{e}$.

Le critère séquentiel assure que $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ n'a pas de limite en 0. f n'est pas dérivable en 0 (à droite, parce qu'à gauche, la question ne se pose même pas).

Et pour le calcul de l'intégrale ? Il faut appliquer la relation de Chasles, et pas qu'un peu.
On découpe tout $[0, 1]$ et même $]0, 1]$ en fait, avec les points de discontinuité e^{-n} .

$$]0, 1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]e^{-n-1}, e^{-n}]$$

Sur chaque intervalle $]e^{-n-1}, e^{-n}]$, f est constante, égale à e^{-n-1} .

Et chaque intervalle est de longueur $e^{-n} - e^{-n-1}$.

On a un rectangle d'aire $(e^{-n} - e^{-n-1}) \cdot e^{-n-1}$.

On somme cette infinité de rectangles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n-1} \cdot (e^{-n} - e^{-n-1})$$

(je n'aime pas la notation $\sum_{n=0}^{+\infty}$, mais je crains qu'avec la vraie notation $\sum_{n \geq 0}$ ne vous permette pas d'y voir une infinité de termes).

On simplifie en $\left(1 - \frac{1}{e}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n}$. On a une série géométrique de raison e^{-2} différente de 1 :

$$\left(1 - \frac{1}{e}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n} = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{e} - \frac{1}{e^{(2n+2)}}}{1 - \frac{1}{e^2}}$$

L'intégrale vaut $\frac{1}{1+e}$.

5.

♥ Montrez que si f est càdlàg et paire, alors elle est continue en tout point.

La composée de deux applications càdlàg est-elle càdlàg ?

La composée de deux applications càdlàg croissantes est-elle càdlàg ?

Si f est càdlàg et g continue, qui est càdlàg ? $f \circ g$ ou $g \circ f$.

En tout point a , f est continue à droite en a .

Mais f est continue à droite en $-a$ ($\lim_{\substack{x \rightarrow -a \\ x > -a}} f(x) = f(-a)$).

Changeons le nom de la variable : $\lim_{\substack{-x \rightarrow -a \\ -x > -a}} f(-x) = f(-a) = f(a)$.

Profitions de la parité : $\lim_{\substack{-x \rightarrow -a \\ -x > -a}} f(-x) = \lim_{\substack{-x \rightarrow -a \\ -x > -a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a)$

Par parité, ceci entraîne que f est continue à gauche en a .

Étant continue à droite et à gauche en a , elle est continue en a .

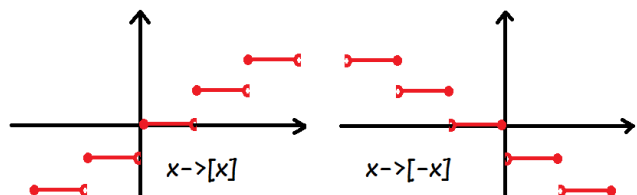
Étant continue en tout point, elle est continue.

L'application $x \mapsto -x$ est càdlàg, puisque continue en tout point.

Et elle va permettre par composition de retourner l'axe des abscisses.

Et si $x \mapsto f(x)$ est càdlàg, $x \mapsto f(-x)$ est plutôt càglàd, puisqu'on a renversé le temps.

La composée $x \mapsto -x \mapsto [x]$ est donc la composée de deux applications càdlàg, mais elle n'est plus càdlàg (en 1, elle vaut -1 , et sa limite à droite existe et vaut 0).



On prend f croissante et càdlàg et g aussi.

On se place en a .

Et on fait tendre x vers a par valeur supérieure.

$f(x)$ tend vers $f(a)$, encore par valeur supérieure (croissance de f et caractère càd...).

Alors $g(f(x))$ tend vers $g(f(a))$ (caractère càdlàg de g).

$g \circ f$ est continue à droite.

Et on fait tendre x vers a par valeur inférieure.

$f(x)$ tend vers une limite λ , encore par valeur inférieure (croissance de f et caractère ...làg).

Alors $g(f(x))$ tend vers μ (caractère ...làg de g en λ).

$g \circ f$ a une limite à gauche en a .

Si f est càdlàg et g continue alors $g \circ f$ est càdlàg.

◦6◦

♥ a et b sont deux réels strictement positifs donnés. Déterminez la limite quand x tend vers 0 de $\frac{a^x - b^x}{x}$.

Forme indéterminée. Oui.

Comment la lever ?

Avec des développements limités et le retour à la bonne forme :

$$\frac{a^x - b^x}{x} = \frac{e^{x \cdot \ln(a)} - e^{x \cdot \ln(b)}}{x} = \frac{(1 + x \cdot \ln(a) + o(x)) - (1 + x \cdot \ln(b) + o(x))}{x} = \ln(a) - \ln(b) + o(1)$$

La limite vaut $\ln(a) - \ln(b)$.

Avec la règle de l'Hôpital.

On a une forme indéterminée, on convertit le quotient en quotient des dérivées. En fait, pour tout x , il existe c entre 0 et x vérifiant

$$\frac{a^x - b^x}{x} = \frac{\ln(a) \cdot a^x - \ln(b) \cdot b^x}{1}$$

si si : $x \mapsto a^x$ c'est $x \mapsto e^{x \cdot \ln(a)}$ et ça se dérive en $x \mapsto \ln(a) \cdot e^{x \cdot \ln(a)}$.

Quand x tend vers 0, c tend aussi vers 0 et la forme indéterminée ne l'est plus : la limite existe, et elle vaut $\ln(a) - \ln(b)$.

Avec un taux d'accroissement.

On pose $f = x \mapsto a^x - b^x$. On a $f(0) = 0$.

On a donc $\frac{a^x - b^x}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x}$ et ce quotient tend vers $f'(0)$ c'est à dire... $\boxed{\ln(a) - \ln(b)}$

◦7◦

Le théorème de convergence logarithmique dit « soit (a_n) une suite, on suppose que $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ converge vers une limite λ dans $[0, 1[$, on déduit que (a_n) converge vers 0 ». Un élève dont je tairai le nom^a a inventé une réciproque. Montrez qu'il a tort. Et dites moi qui c'est.

Mais si (a_n) est monotone ?

^a. à vous d'en inventer un qui fasse un mauvais calembour

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0.

Mais le rapport de deux termes tend vers 1.

Et la suite $(2^{(-1)^n - n})$ converge aussi vers 0 (c'est $(2^0, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^{-4}, 2^{-3}, 2^{-6}, 2^{-5}, \dots)$).

Et le rapport de deux termes consécutifs vaut tantôt 2 tantôt $\frac{1}{4}$. Il ne converge pas...

La suite du premier exemple converge vers 0 en étant monotone. Que voulez vous de plus !

◦8◦

z_0 est un complexe donné, on définit $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$. Donnez module et argument de z_n pour tout n (oui, ici, ce n'est surtout pas la forme cartésienne qui va servir).

Montrez que $(|z_n|)$ et $(\text{Arg}(z_n))$ convergent.

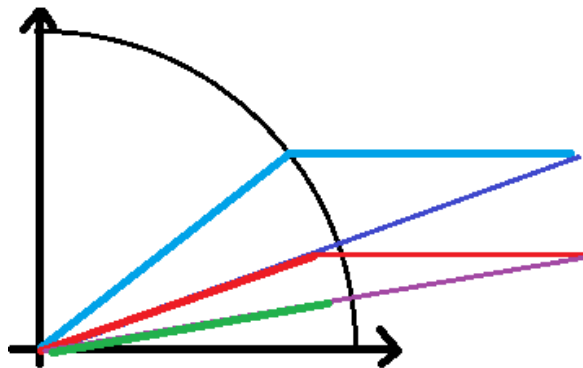
On pose $z = \rho \cdot e^{i\theta}$ et on calcule : $\frac{|z| + z}{2} = \rho \cdot \frac{1 + e^{i\theta}}{2} = \rho \cdot \frac{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}}{2} \cdot e^{i\theta/2} = \rho \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\theta/2}$.

Si on écrit donc $z_n = \rho_n \cdot e^{i \cdot \theta_n}$ alors on a $\rho_{n+1} = \rho_n \cdot \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$ et $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.

Par récurrence évidente : $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$.

On reporte alors :

$$\rho_n = \rho_0 \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\theta_k}{2}\right) = \rho_0 \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{k+1}}\right).$$



Peut on faire quelquechose de ce produit ?

Oui. Un classique. On le multiplie par $\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)$ « à droite » :

$$\rho_n \cdot \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = \rho_0 \cdot \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta_0}{4}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n-1}}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)$$

$$\rho_n \cdot \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = \rho_0 \cdot \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta_0}{4}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n-1}}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \theta_0}{2^n}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\rho_n \cdot \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = \rho_0 \cdot \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta_0}{4}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n-1}}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta_0}{2^{n-1}}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\rho_n \cdot \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = \rho_0 \cdot \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta_0}{4}\right) \dots \sin\left(\frac{\theta_0}{2^{n-2}}\right) \cdot \frac{1}{4}$$

$$\text{jusqu'à } \rho_n \cdot \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = \rho_0 \cdot \sin(\theta_0) \cdot \frac{1}{2^n}$$

Mais le premier membre est équivalent à $\rho_n \cdot \frac{\theta_0}{2^n} = \rho_0 \cdot \sin(\theta_0) \cdot \frac{1}{2^n}$ quand n tend vers l'infini (équivalent $\sin(\theta) \sim \theta$ en 0).

On simplifie : ρ_n tend vers $\rho \cdot \frac{\sin(\theta)}{\theta}$.

On a donc une limite : $\rho \cdot \frac{\sin(\theta)}{\theta} \cdot e^{i \cdot 0}$ c'est à dire $\rho \cdot \frac{\sin(\theta)}{\theta}$.

◦9◦

Faux : si u_n tend vers a quand n tend vers l'infini, alors $u_{n+1} \cdot u_{n+2} \dots u_{2n}$ tend vers a^n quand n tend vers $+\infty$.

Vrai ou faux : si u_n tend vers $a > 1$ quand n tend vers l'infini, alors $u_{n+1} \cdot u_{n+2} \dots u_{2n}$ est équivalent à a^n quand n tend vers $+\infty$.

Première partie de la question : on tend vers une limite, et pas vers une autre suite qui bouge !

Deuxième partie de la question : on doit étudier le quotient $\frac{u_{n+1} \cdot u_{n+2} \dots u_{2n}}{a^n}$.

On regarde son logarithme : $\ln(u_{n+1}) + \ln(u_{n+2}) + \dots \ln(u_{2n}) - n \cdot \ln(a)$.

On y lit une moyenne de Cèsaro ?

$$n \cdot \frac{(\ln(u_{n+1}) - \ln(a)) + (\ln(u_{n+2}) - \ln(a)) + \dots + (\ln(u_{n+n}) - \ln(a))}{n}$$

Le quotient tend bien vers 0. mais la forme redevient indéterminée.

Il n'est pas dit que ce produit va tendre vers 0.

Et on peut aller chercher quelquechose de simple : prenons (u_n) qui tend vers 1.

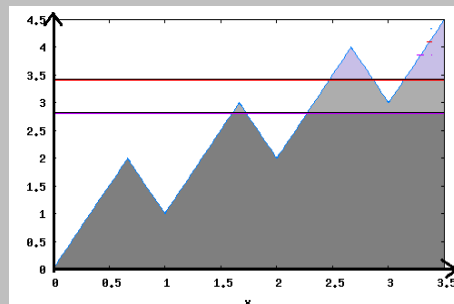
◦10◦

♣ On définit : $f = x \mapsto 2 - |3x - 2|$ et $g = x \mapsto [x] + f(x - [x])$. Représentez f et g . Montrez que g est continue et lipschitzienne.

Montrez que pour tout λ réel l'équation $g(x) = \lambda$ d'inconnue x a exactement trois solutions.

Montrez qu'il n'existe pas d'application h continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel λ l'équation $h(x) = \lambda$ ait exactement deux solutions.

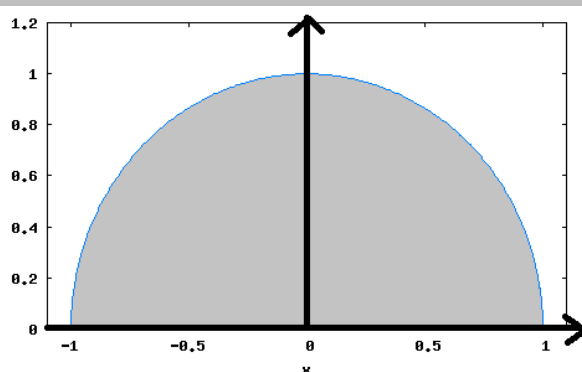
A faire.



Soit f une application de classe C^1 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. La longueur de l'arc de la courbe représentative de f est donnée par la formule $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$ (que l'on ne justifiera que plus tard dans l'année et qui était donnée et admise aussi dans le sujet de concours^a dont je me suis ici inspiré). Vérifiez la formule pour $f = t \mapsto \alpha \cdot t$ sur le segment $[a, b]$.

Vérifiez la formule pour $f = t \mapsto \sqrt{1 - t^2}$ sur le segment $[-1/2, 1/2]$ puis sur un segment $[a, b]$ inclus dans $[-1, 1]$.

a. C.C.P filière PSI 2014



On a intérêt à trouver la longueur d'un arc de cercle, puisque c'est ici l'équation d'un cercle.

Oui, je sais, pour vous, le cercle, centré sur l'origine, c'est $x^2 + y^2 = 1$. Et donc le demi cercle c'est $y = \sqrt{1 - x^2}$. L'application est dérivable et on trouve

$$\sqrt{1 + (f'(t))^2} = \sqrt{1 + \frac{(-t)^2}{(\sqrt{1 - t^2})^2}} = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$$

Intégrer se fait sans difficulté :

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt = \text{Arcsin}(b) - \text{Arcsin}(a)$$

Ici, les bornes choisies donnent $\pi/3$, ce qui est bien le tiers de l'arc de cercle supérieur.

On est d'accord, le cercle est la ligne, le disque est la surface.

Faire des maths, c'est déjà nommer convenablement les objets, pour se comprendre !

Et sur $[-1, 1]$ entier, on trouve π .

Calculez la longueur du graphe du cosinus hyperbolique sur $[0, 1]$.

On a donc $y = ch(t)$, d'où $f'(t) = sh(t)$ et $\sqrt{1 + (f'(t))^2} = ch(t)$ grâce à la relation de Pythagore et à la positivité du cosinus hyperbolique.

On sait intégrer aisément : $\int_0^1 ch(t) dt = sh(1)$.

Et on sait intégrer entre deux points quelconques. C'est ce qui explique « à rebours » que le cosinus hyperbolique intervienne dans des problèmes physiques de corde qui pend entre deux points, sous le nom de chaînette.

Calculez la longueur du graphe de $t \mapsto t^2$ sur $[0, 1]$ (vous serez amené(e) à effectuer un changement de variable hyperbolique).

C'est étrange, mais avec une fonction aussi simple que $t \mapsto t^2$ (arc de parabole), le calcul est laborieux.

On doit calculer ici $\int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt$.

On va poser $2t = sh(u)$ pour retrouver le $\sqrt{1 + sh^2(t)}$ de tout à l'heure, si pratique à convertir.

Simplement, il faut changer les bornes (formule connue, avec des logarithmes), et l'élément différentiel : $dt = ch(u).du/2$.

$$\int_0^1 \sqrt{1+4.t^2}.dt = \int_{u=0}^{\ln(2+\sqrt{1+2^2})} \sqrt{1+sh^2(u)} \cdot \frac{ch(u).du}{2} = \int_{u=0}^{\ln(2+\sqrt{1+2^2})} \frac{ch^2(u).du}{2}$$

On remplace $ch^2(u)$ par $\frac{1+ch(2.u)}{2}$ et on intègre. Le terme en $sh(2u)$ va se simplifier en l'écrivant

$$\frac{(2+\sqrt{5})^2 - \left(\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right)^2}{2}$$

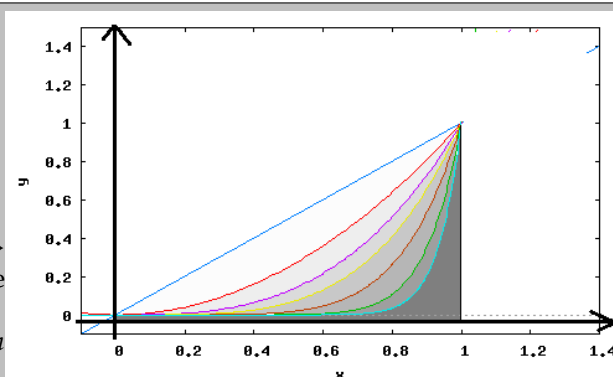
et même $\frac{(2+\sqrt{5})^2 - (2-\sqrt{5})^2}{2}$.

Tous calculs (assez lourds) faits :

$$\int_0^1 \sqrt{1+4.t^2}.dt = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{4}$$

Une primitive de $t \mapsto \sqrt{1+4.t^2}$ est $t \mapsto \frac{t.\sqrt{1+4.t^2}}{2} + \frac{\ln(2.t+\sqrt{1+4.t^2})}{4}$. On peut vérifier.

Pour tout n , on note L_n la longueur de l'arc de $x \mapsto x^n$ entre 0 et 1. Donnez la forme intégrale de cette longueur. Calculez L_1 et L_2 . Émettez une conjecture sur la limite de L_n quand n tend vers l'infini.



La formule est $L_n = \int_0^1 \sqrt{1+n^2.x^{2.n-2}}.dx$.

Pour L_1 , c'est facile, on trouve $L_1 = \int_0^1 \sqrt{2}.dx = \sqrt{2}$.

C'est logique, c'est la diagonale d'un carré.

L_2 fait l'objet du calcul précédent : $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{4}$.

Les valeurs approchées sont $L_1 \simeq 1,41$ à 10^{-2} près et $L_2 \simeq 1,47$ à 10^{-2} près.

Il est normal graphiquement déjà que L_2 soit plus grand que L_1 .

Ensuite, plus n grandit, plus le graphe se rapproche de deux segments : l'un horizontal de $(0,0)$ à $(1,0)$ et le suivant vertical de $(1,0)$ à $(1,1)$.

La longueur devrait normalement tendre vers 2.

Je suis surpris qu'on ne demande de justifier que L_n augmente avec n .

On pose pour tout n $\varphi_n = t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+n^2.t^{2.n-2}} + n.t^{n-1}}$, $\mu_n = \int_0^1 \varphi_n(t).dt$. Montrez alors $L_n = \int_0^1 t^{n-1}.dt + \mu_n$.

On se laisse porter, en partant du plus difficile, pour aboutir au plus simple :

$$\int_0^1 n.t^{n-1}.dt + \mu_n = \int_0^1 \left(n.t^{n-1} + \frac{1}{\sqrt{1+n^2.t^{2.n-2}} + n.t^{n-1}} \right).dt = \int_0^1 \left(n.t^{n-1} + \frac{\sqrt{1+n^2.t^{2.n-2}} - n.t^{n-1}}{(1+n^2.t^{2.n-2}) - (n.t^{n-1})^2} \right).dt$$

On a ici conjugué. Le dénominateur vaut 1. Le numérateur vaut $\sqrt{1+n^2.t^{2.n-2}} - n.t^{n-1}$.

Le contenu de la grande parenthèse vaut $\sqrt{1+n^2.t^{2.n-2}}$. On a donc bien $\int_0^1 n.t^{n-1}.dt + \mu_n = \int_0^1 \sqrt{1+n^2.t^{2.n-2}}.dt$,

qu'on appelle L_n .

Il ne fallait surtout pas se dire « je calcule $n \cdot \int_0^1 t^{n-1} \cdot dt$ ». Il faut comprendre que c'est ensuite qu'on le fera, mais que c'est sous la forme $n \int_0^1 t^{n-1} \cdot dt$ que ce terme est utile..

Montrez : $\mu_n \leq 1$ et $L_n < 2$ pour tout n . Pour tout n , on pose $a_n = e^{-2 \cdot \frac{\ln(n)}{n-1}}$.

Dans $\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 \cdot t^{2n-2} + n \cdot t^{n-1}}}$, le dénominateur est fait d'un radical plus grand que 1 et d'un terme positif. L'ensemble est plus grand que 1. On passe à l'inverse : $\forall t \in [0, 1], \varphi_n(t) \leq 1$. On intègre de 0 à 1 : $\mu_n < 1$. On ajoute l'intégrale $n \cdot \int_0^1 t^{n-1} \cdot dt$ et on majore finalement L_n par 2.

J'ai hésité un temps à écrire même $\mu_n < 1 \leq 1$. Qu'en pensez vous ?

On va en fait le faire tendre vers 1 par encadrement. mais on va devoir découper grâce à la relation de Chasles.

Montrez : $\forall t \in [0, a_n], \varphi_n(t) \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}}$. Déduisez $\mu_n \geq \frac{a_n}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}}$.

Montrez par encadrement que la suite (μ_n) admet pour limite 1 quand n tend vers l'infini. Validez alors votre conjecture.

On a réussi à majorer μ_n par 1 et à le minorer par $\frac{a_n}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}}$.

Quand n tend vers l'infini, le dénominateur tend vers 1 (*facile*) et le numérateur a_n égal à $e^{-2 \cdot \frac{\ln(n)}{n-1}}$ tend aussi vers 1 (*par croissances comparées, $-2 \cdot \frac{\ln(n)}{n-1}$ tend vers 0*).

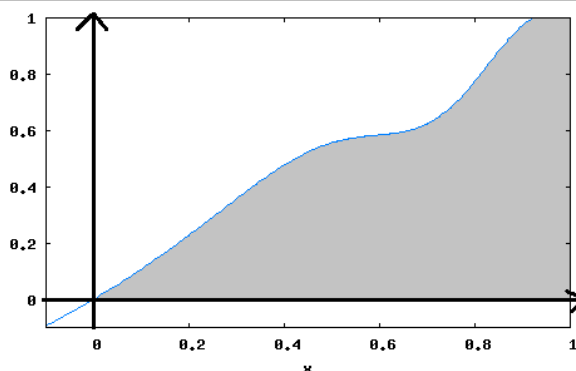
Par encadrement, μ_n converge vers 1.

Il est temps pour nous de calculer l'intégrale dans $L_n = n \cdot \int_0^1 t^{n-1} \cdot dt + \mu_n$. Elle vaut effectivement 1.

Par addition, L_n tend vers 2.

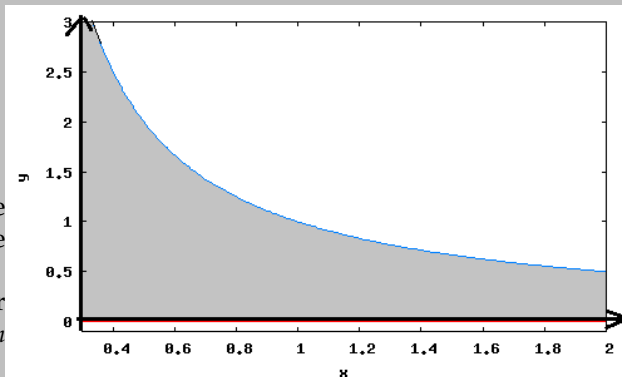
L'enchaînement des questions est ici vraiment dans l'esprit des sujets de concours.

Montrez pour $f \in C^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, croissante et vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, alors la longueur du graphe de f est entre 1 et 2 (*indication : $\sqrt{1 + a^2}$ contre $1 + a$*).



On prend l'application $t \mapsto 1/t$ (arc d'hyperbole). Le segment sera $[1/2, 1]$. Donnez l'expression intégrale de la longueur (mais ne la calculez pas).

Montrez que c'est aussi la longueur du graphe sur $[1, 2]$ (justifiez par changement de variable et aussi par un argument géométrique).



Donnez la forme de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $t \mapsto (1+t)^{1/2}$, et calculez la valeur de cette dérivée $n^{\text{ième}}$ en 0 (j'attends un numérateur en $(2n)!$).

Écrivez la formule de Taylor pour $t \mapsto (1+t)^{1/2}$ entre 0 et x (positif) à l'ordre n et majorez le reste par $x^{n+1} \cdot (2n+2)!$.

$2^{2n+2} \cdot (2n+1) \cdot (n+1)!^2$.

Déduisez que pour tout t de $]0, 1[$, on a

$$\left| \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2} - \frac{1}{t^2} - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \frac{(2k)!}{(2k-1) \cdot 2^{2k} \cdot (k!)^2} \cdot t^{4k-2} \right| \leq \frac{t^{4n-1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2} \cdot (2n+1) \cdot (n+1)!}$$

Déduisez que $1 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \frac{(2k)!}{(2k-1) \cdot (4k-1) \cdot 2^{2k} \cdot (k!)^2} \cdot (1-2^{1-4k})$ converge vers la longueur du graphe de $t \mapsto 1/t$ sur $[1/2, 1]$ quand n tend vers l'infini.

◦12◦

Petit quiz très formateur.

si f est ☐ sur $] -\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ alors elle l'est aussi sur tout $\mathbb{R}$.

Quels mots pouvez mettre dans le cadre :

croissante	continue	monotone
bornée	continue à droite	lipschitzienne

Donnez un argument, ou sinon un contre-exemple.

Même question avec « si f est ☐ sur $] -\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$ alors elle l'est aussi sur tout $\mathbb{R}$ ». (pas pareil...)

A faire.

I~0) On note E l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

L'espace des applications lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour les stabilités, on rappelle que si f et g sont lipschitziennes des rapports K_f et K_g alors $f + g$ est lipschitzienne de rapport $K_f + K_g$ (pas forcément le meilleur, mais qu'importe). Et $\lambda \cdot f$ est lipschitzienne de rapport $|\lambda| \cdot K_f$. Enfin, l'application nulle est lipschitzienne de rapport 0 (par exemple).

I~1) Montrez que $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur $m(E, +, \cdot)$, sachant que l'on pose $\|f\| = \sup(|f(t)| \mid t \in [0, 1])$.

N est une norme sur $(F, +, \cdot)$ où F est un espace vectoriel

Le mnémotechnique pour retenir cette liste, c'est "Sophie a perdu son haut" si vous reprenez l'idée de François-Xavier il y a déjà dix huit ans de ça, et si vous voulez j'ai des photos de la Sophie en question.

E	Existence	pour tout $\vec{u}$ de E , $N(\vec{u})$ existe
P	Positivité	$\forall \vec{u} \in E, N(\vec{u}) \geq 0$
S	Séparation	$\forall \vec{u} \in E, \vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow N(\vec{u}) > 0$ $\forall \vec{u} \in E, N(\vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$
H	Homogénéité	$\forall (\lambda, \vec{u}) \in \mathbb{R} \times E, N(\lambda \cdot \vec{u}) = \lambda \cdot N(\vec{u})$
I	Inégalité triangulaire	$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, N(\vec{u} + \vec{v}) \leq N(\vec{u}) + N(\vec{v})$

Je vous donne quand même le début d'une des preuves pour que vous ne vous contentiez pas d'affirmations péremptores "il est évident que" :

on se donne f et g ; pour tout x , on a : $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$ et ensuite, à vous de rédiger avec des mots et pas avec des trucs dont vous dites que c'est des maths...

On montre que $\|\cdot\|$ est une norme.

Existence Chaque application lipschitzienne est continue sur le segment $[0, 1]$ donc bornée et atteint ses bornes. Mais c'est plutôt à $|f|$ qu'il faut appliquer le théorème de compacité.

Positivité La borne supérieure $\|f\|$ majore au moins $|f(0)|$. par transitivité, elle est positive.

Séparation Supposons $\|f\|$ nulle. Alors pour tout t de $[0, 1]$, on a $|f - t| \leq \|f\|$ par définition de la borne supérieure. Par antisymétrie, chaque $f(t)$ est nul. C'est la définition de f est nulle de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

On peut montrer $((\vec{u} \neq \vec{0}) \Rightarrow (\|\vec{u}\| > 0))$ ou $((\|\vec{u}\| = 0) \Rightarrow (\vec{u} = \vec{0}))$. Par contraposée.

Inégalité triangulaire On prend f et g . Pour tout t de $[0, 1]$, on a $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$ par inégalité triangulaire. Par définition de « la borne supérieure est un majorant » : $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \|f\| + \|g\|$. Le réel $\|f\| + \|g\|$ est un majorant de $\{|f(t) + g(t)| \mid t \in [0, 1]\}$. Par définition du plus petit majorant de cet ensemble, on a $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

C'est le type de question classique sur lequel on pourra vous tester aux oraux de concours. Un passage aux bornes supérieures à savoir mener proprement, sans se contenter de dire « il est évident que ». savoir rendre propre et rigoureux ce qui semble évident, c'est des maths. Et du travail d'ingénieur.

Homogénéité Là aussi, ça se fait proprement. Pour tout t de $[0, 1]$, on a $|\lambda \cdot f(t)| = |\lambda| \cdot |f(t)| \leq |\lambda| \cdot \|f\|$. Le réel $|\lambda| \cdot \|f\|$ majore l'ensemble $\{|\lambda \cdot f(t)| \mid t \in [0, 1]\}$. Par définition du plus petit majorant : $\|\lambda \cdot f\| \leq |\lambda| \cdot \|f\|$. Zut, il en manque la moitié. Mais si on l'applique à $\frac{1}{\lambda}$ et $\lambda \cdot f$, on a $\left\| \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \cdot f \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \|\lambda \cdot f\|$. On a donc $\|f\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \|\lambda \cdot f\|$. On a l'autre inégalité.

Celle là, elle est vraiment particulière, et il faut avoir le profil « étoile » pour en goûter la saveur, plutôt que d'affirmer $\text{Sup}(|\lambda| \cdot y \mid y \in E) = |\lambda| \cdot \text{Sup}(y \mid y \in E)$.

I~2) Pour f dans E , on pose $L(f) = \text{Sup} \left\{ \frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} \mid 0 \leq a < b \leq 1 \right\}$. Montrez que L est une semi-norme sur $(E, +, \cdot)$ (semi-norme, c'est EPHI).

Existence Pour définir $L(f) = \text{Sup} \left(\frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} \mid 0 \leq a < b \leq 1 \right)$, il faut prouver que l'on a affaire à une partie de $\mathbb{R}$ non vide, majorée. On y trouve au moins $\frac{|f(1) - f(0)|}{1 - 0}$. Cette partie est majorée par K puisqu'on a dit $\exists K, \forall (x, y), |f(x) - f(y)| \leq K \cdot |y - x|$. On a donc une borne supérieure qui est « le plus petit rapport de Lipschitz ».

Positivité Cette quantité est toujours positive, puisque c'est le plus petit majorant d'un ensemble de réels positifs.

Homogénéité Si on passe de f à $\lambda \cdot f$, tous les taux d'accroissement sont multipliés par $|\lambda|$, leur borne supérieure aussi (il faudrait normalement le traiter en deux majorations comme à la question « norme »).

Inégalité triangulaire On se donne f et g . Pour tout couple (a, b) , on a

$$\frac{|f(b) + g(b) - f(a) - g(a)|}{|b - a|} \leq \frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} + \frac{|g(b) - g(a)|}{|b - a|} \leq L(f) + L(g)$$

par définition de « majorant »

Le réel $L(f) + L(g)$ majore tous les taux d'accroissements de $f + g$. par définition, $L(f + g)$ est le plus petit majorant de ces taux, donc $L(f + g) \leq L(f) + L(g)$.

Pour ce qui est de la séparation, on ne l'a pas. Si $L(f)$ est nulle, cela veut juste dire que tous les taux d'accroissement sont nuls, f est juste constante et pas forcément identiquement nulle.

I~3) Montrez pour f de classe C^1 : $L(f) = \|f'\|$. Et si vous préférez des photos de François-Xavier, j'ai aussi.

Supposons f de classe C_1 . L'application f' est donc continue. On peut donc définir sa norme $\|f'\|$ (maximum de $|f'|$ sur $[0, 1]$).

Pour tout couple (a, b) , on a $|f(b) - f(a)| \leq \|f'\| \cdot |b - a|$. C'est le résultat du cours qui dit que pour montrer qu'une application est lipschitzienne, il suffit de borner sa dérivée.

En effet,

$$|f(b) - f(a)| = \left| \int_a^b f'(t) \cdot dt \right| \leq \int_a^b |f'(t)| \cdot dt \leq \int_a^b \|f'\| \cdot dt = (b - a) \cdot \|f'\|$$

Il ne reste qu'à diviser.

Le réel $\|f'\|$ est un majorant de l'ensemble des $\frac{|f(b) - f(a)|}{b - a}$. Par définition du plus petit majorant, $L(f)$ est

plus petit que $\|f'\|$.

Ensuite, pour tout a , $f'(a)$ est la limite des $\frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|}$ quand x tend vers a . Chacun de ces taux est majoré par

$L(f)$. La limite de ces taux (qui existe par dérivabilité) est encore plus petite que $L(f)$.

Le réel $L(f)$ est un majorant de $\{|f'(a)| \mid a \in [0, 1]\}$. Par définition du plus petit majorant : $\|f'\| \leq L(f)$.

On a deux inégalités qui se transforment en une égalité par antisymétrie de l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$.

I~4) Calculez la norme $\|f\|$ et la semi-norme pour les applications suivantes :

$$s_n = \theta \mapsto \sin(n\theta) \quad c_n = \theta \mapsto \cos(n\theta) \quad x \mapsto x^n \quad x \mapsto |2x - 1| \quad x \mapsto \ln(1 + x)$$

Quand les applications offertes sont de classe C^1 , pour trouver leur rapport de Lipschitz $L(f)$, il suffit de chercher le maximum de leur dérivée en valeur absolue.

fonction	$s_n = \theta \mapsto \sin(n\theta)$	$c_n = \theta \mapsto \cos(n\theta)$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto 2x - 1 $	$x \mapsto \ln(1 + x)$
dérivée	$\theta \mapsto n \cdot \cos(n\theta)$	$c_n = \theta \mapsto -n \cdot \sin(n\theta)$	$x \mapsto n \cdot x^{n-1}$	pas dérivable	$x \mapsto \frac{1}{x+1}$
maximum	n en $\theta = 0$	n en $\theta = \pi/(2n)$	n en $x = 1$		1 en $x = 0$

On mettra de côté le cas de $x \mapsto x^0$, constante sur $[0, 1]$, dont le rapport de Lipschitz est nul.

L'application $x \mapsto |2x - 1|$ n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$. Le graphe « en V » a un point anguleux.

Sur le premier segment, f est lipschitzienne de rapport 2 car affine de la forme $t \mapsto 1 - 2t$.

Sur le segment suivant, elle est encore lipschitzienne de rapport 2 car de la forme $t \mapsto 2t - 1$.

Mais de là à conclure... Dans la quantification $\forall(a, b) \in [0, 1]^2$, $|f(b) - f(a)| \leq 2|b - a|$, il faut étudier tous les cas :

a et b dans $[0, 1/2]$	a dans $[0, 1/2]$ et b dans $[1/2, 1]$
b dans $[0, 1/2]$ et a dans $[1/2, 1]$	a et b dans $[1/2, 1]$

Si a est dans $[0, 1/2]$ et b dans $[1/2, 1]$, on a quand même $||2a - 1| - |2b - 1|| \leq 2|a - b|$ par la seconde inégalité triangulaire.

L'application $x \mapsto |2x - 1|$ (variante de $t \mapsto |t|$) est bien lipschitzienne, de rapport 2, atteint pour des couples du même « demi-intervalle ».

I~5) Montrez que $f \mapsto |f(0)| + L(f)$ est une norme (notée Λ). Montrez pour tout f de $\|f\| \leq \Lambda(f)$. Existe-t-il K vérifiant $\forall f \in E, L(f) \leq K \|f\|$.

Maintenant, on prend $f \mapsto |f(0)| + L(f)$.

Existence $L(f)$ existe, de même que $|f(0)|$.

Positivité C'est une somme de deux réels positifs.

Homogénéité Pour f et λ donnés, on a bien $|\lambda \cdot f(0)| + L(\lambda \cdot f) = |\lambda| \cdot |f(0)| + |\lambda| \cdot L(f)$.

Inégalité triangulaire On se donne f et g , on somme deux formules déjà connues (l'inégalité triangulaire usuelle et inégalité triangulaire pour L) : $|(f + g)(0)| \leq |f(0)| + |g(0)|$ et $L(f + g) \leq L(f) + L(g)$.

Séparation Le seul point intéressant de la question. On se donne f . On suppose $|f(0)| + L(f) = 0$. Comme ce sont deux réels positifs, chaque des deux est nul. L'égalité $L(f) = 0$ force f à être constante, par exemple égale à sa valeur en 0. L'autre égalité dit « mais $f(0)$ est nul ». C'est fini, f est nulle. Par contraposée, si f n'est pas identiquement nulle, elle a une norme strictement positive.

Si on se donne f dans E et x dans $[0, 1]$, on a $f(x) = f(x) - f(0) + f(0)$ donc

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leq L(f) \cdot |x - 0| + |f(0)|$$

par caractère lipschitzien ($L(f)$ est le plus petit rapport de Lipschitz, c'en est bien un).

On majore x par 1 : $|f(x)| \leq L(f) + |f(0)| = \Lambda(f)$.

Le réel $\Lambda(f)$ est un majorant de $(|f(t)| \mid t \in [0, 1])$. par définition de plus petit des majorants, on a $\|f\| \leq \Lambda(f)$.

En revanche, les s_n définies plus haut (c'est $\theta \mapsto \sin(n\theta)$) ont toutes pour norme 1 : $\|s_n\| = 1$.

En revanche leur norme de Lipschitz vaut n .

On ne peut donc pas avoir pour tout f de E : $\Lambda(f) \leq K \|f\|$. Il suffirait, pour un K proposé, de donner s_n avec n plus grand que K .

II~0) Une suite (f_n) d'éléments de E vérifie $\forall \varepsilon, \exists K_\varepsilon, \forall(p, q), K_\varepsilon \leq p \leq q \Rightarrow L(f_p - f_q) \leq \varepsilon$. Montrez que pour tout x de $[0, 1]$, la suite $(f_n(x))$ converge vers un réel que l'on va noter $f(x)$.

L'hypothèse $\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon, \forall (p, q), K_\varepsilon \leq p \leq q \Rightarrow L(f_p - f_q) \leq \varepsilon$ dit que (f_n) est une suite de Cauchy pour la norme Λ .

On se donne x dans $[0, 1]$ (lui il ne bouge pas, c'est n qui va bouger).

La majoration $|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p - f_q| \leq \Lambda(f_p - f_q)$ (définition de la borne supérieure et question précédente) permet de dire que $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy.

Comme on est dans $\mathbb{R}$, elle converge.

*Si vous oubliez de préciser qu'on est dans $\mathbb{R}$, vous avez perdu !
Sinon, la valeur de la limite de la suite n'est pas connue.*

II~1) Montrez que f ainsi définie (limite des f_n) est dans E .

Il reste à prouver que f est à son tour lipschitzienne.

Pour x et y donnés, ainsi d'ailleurs que n , on a $|f_n(x) - f_n(y)| \leq L(f_n) \cdot |x - y| \leq \Lambda(f_n) \cdot |x - y|$.

Mais le rapport $\Lambda(f_n)$ dépend encore de n .

Mais la suite $\Lambda(f_n)$ vérifie $|\Lambda(f_p) - \Lambda(f_q)| \leq \Lambda(f_p - f_q) \leq \varepsilon$ pour p et q plus grands que K_ε . Elle est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle converge donc dans $\mathbb{R}$ vers une limite qu'on va noter μ . Oh, et puis on n'a pas besoin de tant. Elle est majorée par un réel qu'on va appeler M .

Mais alors on a donc $|f_n(x) - f_n(y)| \leq L(f_n) \cdot |x - y| \leq \Lambda(f_n) \cdot |x - y| \leq M \cdot |x - y|$.

On ne garde que le début et la fin, et on fait tendre n vers l'infini (on sait que $f_n(x)$ et $f_n(y)$ convergent).

On a finalement $|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|$. L'application f est à son tour lipschitzienne.

III~0) Pour tout x de $[0, 1]$ et tout n on pose $F_{n+1}(x) = F_n(x) + \frac{x - (F_n(x))^2}{2}$ et $F_0(x) = 0$. Montrez que chaque F_n est un polynôme et donnez son degré. Chaque P_n est-il dans E ?

On se donne x . On pose donc $F_{n+1}(x) = F_n(x) + \frac{x - (F_n(x))^2}{2}$ et $F_0(x) = 0$. Par récurrence immédiate, tous les termes de la suite existent.

Étudions l'application $t \mapsto t + \frac{x - t^2}{2}$ (x est fixé, on peut la nommer φ_x).

Elle va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle a pour dérivée $1 - t$. Elle est croissante puis décroissante.

Elle coupe la bissectrice en $-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x}$, ce qui est avant 1.

On a donc : $\forall t \in [-\sqrt{x}, \sqrt{x}], -\sqrt{x} = \varphi_x(\sqrt{x}) \leq \varphi_x(t) \leq \varphi_x(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$.

Par récurrence immédiate, comme $P_0(x)$ est entre $-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x}$, tous les termes de la suite sont entre $-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x}$.

Si vous ne me faites pas cette récurrence qui prouve que tous les termes sont dans le bon intervalle, n'espérez pas avoir plus du tiers des points. Cela signifie en effet que vous confondez un résultat sur le premier terme de la suite avec un résultat sur tous les termes : si, sur l'intervalle I le graphe de f est au dessus de la bissectrice, alors il y a trois conclusions, dont une totalement débile (celle que vous me balancez parce que vous avez des réflexes de « formules par cœur » et pas une vision des objets et des variables) :

- si u_0 est dans I alors $u_1 \geq u_0$ (passionnant, la suite est croissante... pour un rang)
- tous les u_n sont dans I donc pour tout n , alors pour tout n , $u_{n+1} \geq u_n$
- si u_0 est dans I alors la suite est croissante (crénisme pur)

III~1) Montrez que la suite $(F_n(x))$ est croissante majorée et converge (étudiez $t \mapsto t + \frac{x - t^2}{2}$ sur $[0, 1]$).

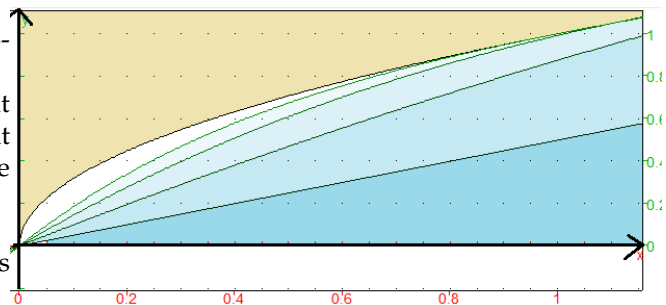
III~2) La limite des P_n est-elle dans E ?

Maintenant, directement, si $F_n(x)$ est entre $-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x}$ alors $x - (F_n(x))^2$ est positif. On a donc $F_n(x) + \frac{x - (F_n(x))^2}{2} \geq F_n(x)$.

La suite est croissante. Comme elle est croissante majorée, elle converge, vers son plus petit majorant.

Ce majorant est forcément un point fixe. Ce ne peut être que $\sqrt{x}$ ou $-\sqrt{x}$. Comme les termes de la suite sont positifs (croissante, de premier terme 1), la seule limite possible est donc $\sqrt{x}$.

Pour tout x la suite $(F_n(x))$ converge en croissant vers $\sqrt{x}$.



L'application obtenue à la limite a perdu son caractère lipschitzien.

Par récurrence sur n , chaque F_n est un polynôme. C'est d'abord le polynôme nul, puis le polynôme $x \mapsto \frac{x}{2}$. Au rang suivant, on trouve $x \mapsto x - \frac{x^2}{8}$. Ensuite, on a $x \mapsto \frac{192x - 80x^2 + 16x^3 - x^4}{128}$ (je ne vous ai pas demandé de le calculer).

Si F_n est un polynôme en x (à coefficients rationnels), de degré 2^{n-1} , alors $(F_n)^2$ est de un polynôme de degré $(2^{n-1}) \cdot 2$.

Par addition et soustraction, F_{n+1} est encore un polynôme et son terme dominant ne peut venir que de $-\frac{(F_n)^2}{2}$.

Notre récurrence prouve que P_n est de degré 2^{n-1} (pour n non nul).

Chaque P_n a pour dérivée un polynôme. Cette dérivée est alors bornée sur le segment $[0, 1]$. Ayant une dérivée bornée, chaque P_n est dans E .

En revanche, la limite des P_n n'est pas dans E .

◦13◦

♥ Complétez $F = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2a + \heartsuit b \\ 3a - b \end{pmatrix}$ sachant que F admet plusieurs points fixes sur $\mathbb{R}^2$ (un point fixe de f c'est une solution de $f(x) = x$).

Déterminez $F \circ F \circ F \circ F$. Résolvez $F(F(U)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un point fixe, c'est un vecteur propre de valeur propre 1 : $M.U = U$.

On en détecte la présence (autre que $U = 0_2$ puisqu'on a dit plusieurs) en disant que l'équation $(M - 1.I_2).U = 0_2$ admet d'autres solutions que la solution triviale.

On annule donc $\det(M - 1.I_2)$. Avec ici $M = \begin{pmatrix} -2 & \heartsuit \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Et sans calcul, car on est en maths : 1 est valeur propre, et la trace vaut -3 .

C'est donc que l'autre valeur propre vaut -4 .

Le produit des valeurs propres vaut -4 .

Le déterminant vaut -4 .

♥ vaut 2.

On vérifie alors $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et tous les multiples conviennent encore.

Pour ce qui est de F^4 , on élève la matrice à la puissance 4.

A la main : $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$ logiquement de spectre $\{1, 16\}$ et déterminant 16.

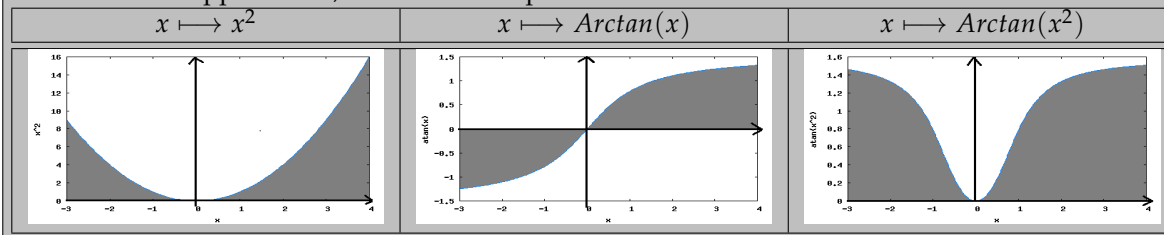
$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 154 & -102 \\ -153 & 103 \end{pmatrix}$$

à mettre sous forme $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 154a - 102b \\ \dots \end{pmatrix}$.

Disposant de M^2 inversible, on résout $M^2.U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et on trouve $\begin{pmatrix} 13/16 \\ 19/16 \end{pmatrix}$.

◦14◦

Parmi ces trois applications, combien sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}$



$x \mapsto x^2$	$x \mapsto \text{Arctan}(x)$	$x \mapsto \text{Arctan}(x^2)$
pas lipschitzienne	lipschitzienne	lipschitzienne
dérivée non bornée	dérivée bornée	dérivée bornée

Sinon, « à la main »³, pour $x \mapsto x^2$, on écrit la négation :

3. ce qui se traduit par « vace son cerveau »

$$\forall K, \exists (a, b) |a^2 - b^2| > K \cdot |a - b|$$

Pour K donné, il suffit de choisir $a = K + 1$ et $b = 0$.

Pour Arctan , on borne la dérivée, ou on écrit (ce qui revient au même) :

$$|\text{Arctan}(b) - \text{Arctan}(a)| = \left| \int_a^b \frac{dt}{1+t^2} \right| \leq \left| \int_a^b dt \right| = |b - a|$$

Pour bornée $x \mapsto \frac{2x}{1+x^4}$ (dérivée de la dernière), on en dresse le tableau de variations.

◦15◦

Qui, de $\theta \mapsto \sin(\tan(\theta))$ et $\theta \mapsto \tan(\sin(\theta))$ est lipschitzienne sur $] -\pi/2, \pi/2[$?

La première ne l'est pas. Certes le sinus reste borné, mais la tangente le fait osciller de plus en plus vite.

On prend $x_n = \text{Arctan}(2.n.\pi)$ et $y_n = \text{Arctan}\left(2.n.\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

Ces deux valeurs sont dans $] -\pi/2, \pi/2[$ (très proche de l'extrémité droite, là où tout se passe...).

On calcule $\sin(\tan(x_n)) = 0$ et $\sin(\tan(y_n)) = 1$.

De x_n à y_n la fonction grimpe de 1, alors que x_n et y_n sont très proches.

Le taux d'accroissement $\frac{|f(y_n) - f(x_n)|}{|y_n - x_n|}$ vaut $\frac{1}{|y_n - x_n|}$

et tend vers $+\infty$ (dénominateur tendant vers $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$).

Quel que soit K donné, il existe donc au moins un n vérifiant $\frac{1}{|y_n - x_n|} > K$.

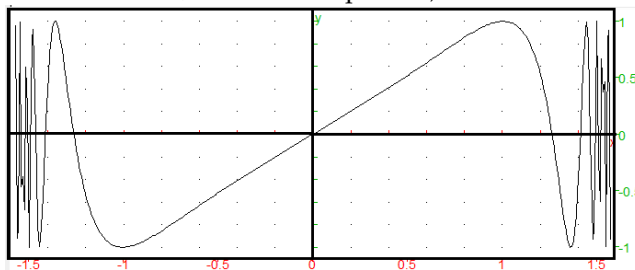
C'est lui qu'on va prendre.

La seconde l'est.

$\sin$ est lipschitzienne de rapport 1.

$\sin(x)$ reste entre -1 et 1 .

Et $\tan$ est lipschitzienne sur $[-1, 1]$ (dérivée bornée).



Un logiciel graphique ne peut pas rendre compte du phénomène. Il se perd en $\pi/2$, n'arrivant pas à avoir assez de points pour tracer une sinusoïde accélérée...

◦16◦

Montrez que $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \cos(\sqrt{2}.x)$ sont périodiques.

On suppose que $x \mapsto \cos(x) + \cos(\sqrt{2}.x)$ est périodique de période p . Montrez alors $\cos(p) + \cos(\sqrt{2}.p) = 2$.

Déduisez $\cos(p) = 1$ et $\cos(\sqrt{2}.p) = 1$. Concluez.

◦17◦

♡ Montrez que si f est lipschitzienne de $] -\infty, 0]$ dans $\mathbb{R}$ (rapport H) et de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ (rapport K) alors elle l'est de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On écrit deux hypothèses et une conclusion cherchée :

H^-	$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^-, f(y) - f(x) \leq H \cdot y - x $
H^+	$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+, f(y) - f(x) \leq K \cdot y - x $
?	$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, f(y) - f(x) \leq R \cdot y - x $

La rapport sera bien $R = \text{Max}(H, K)$.

Mais il y a quatre cas à traiter pour x et y dans $\mathbb{R}$:

	$x \leq 0$	$x \geq 0$
$y \leq 0$	$ f(y) - f(x) \leq H \cdot y - x \leq \text{Max}(H, K) \cdot y - x $	ah oui tiens !
$y \geq 0$	fallait y penser	$ f(y) - f(x) \leq K \cdot y - x \leq \text{Max}(H, K) \cdot y - x $

Prenons x négatif et y positif.

On intercale 0 entre x et y .

On écrit $|f(y) - f(x)| = |f(y) - f(0) + f(0) - f(x)| \leq |f(y) - f(0)| + |f(0) - f(x)|$.

Comme y et 0 sont positifs, on peut majorer

$$|f(y) - f(0)| \leq K \cdot |y - 0| \leq \text{Max}(H, K) \cdot |y| = \text{Max}(H, K) \cdot y.$$

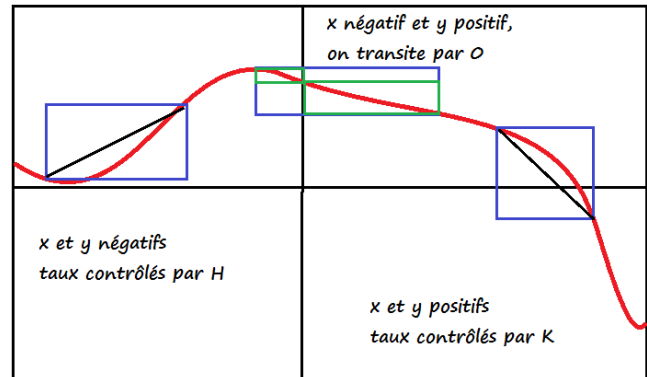
Comme x et 0 sont négatifs, on peut majorer

$$|f(0) - f(x)| \leq H \cdot |x - 0| \leq \text{Max}(H, K) \cdot |x| = \text{Max}(H, K) \cdot (-x).$$

On somme donc :

$$|f(y) - f(x)| \leq \text{Max}(H, K) \cdot (y - x) = \text{Max}(H, K) \cdot |y - x|.$$

L'autre cas est totalement symétrique...



◦18◦

Montrez que si f est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $|f|$ l'est aussi.

Montrez que $x \mapsto (-1)^{[x]}$ n'est pas lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais que sa valeur absolue l'est aussi.

On suppose $|f|$ lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (rapport K), et continue.

On se donne a et b . Montrez que si $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe, alors on a $|f(b) - f(a)| \leq K \cdot |b - a|$.

On les suppose cette fois de signes opposés. Montrez qu'il existe c entre a et b vérifiant $f(c) = 0$. Montrez alors

$$|f(b) - f(a)| \leq |f(b)| + |f(a)| \leq K \cdot |c - b| + K \cdot |c - a| \leq K \cdot |b - a|$$

Concluez : f est à son tour lipschitzienne.

A faire.

◦19◦

♥ Montrez que $x \mapsto \tan(x)$ est lipschitzienne de $[-\pi/3, \pi/3]$ dans $\mathbb{R}$ mais pas de $[0, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ (on pourra montrer que sinon, elle serait bornée).

$$|\tan(x) - \tan(y)| = \left| \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\sin(y)}{\cos(y)} \right|$$

$$|\tan(x) - \tan(y)| = \left| \frac{\sin(x) \cdot \cos(y) - \sin(y) \cdot \cos(x)}{\cos(x) \cdot \cos(y)} \right|$$

$$|\tan(x) - \tan(y)| = \left| \frac{\sin(x - y)}{\cos(x) \cdot \cos(y)} \right|$$

$$|\tan(x) - \tan(y)| \leq \left| \frac{\sin(x - y)}{\cos(\pi/3) \cdot \cos(\pi/3)} \right|$$

$$|\tan(x) - \tan(y)| \leq \frac{|x - y|}{\cos^2(\pi/3)}$$

Du pur raisonnement de maths. Juste de la trigonométrie et des majorations dans le bon sens...

Avez vous cette approche, ou sortez vous de gros théorèmes ? Etes vous matheux ou...

Si f est K lipschitzienne de $[0, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$, alors $|f(x) - f(0)| \leq K \cdot |x - 0| \leq K \cdot \frac{\pi}{2}$.

L'application serait bornée...

◦20◦

Montrez que si f et $[f]$ sont lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors f est bornée (raisonnez, n'écrivez pas plein de formules).

Mais ! La partie entière fait des sauts aux abscisses entières. Elle n'est donc pas continue.

Donc pas lipschitzienne.

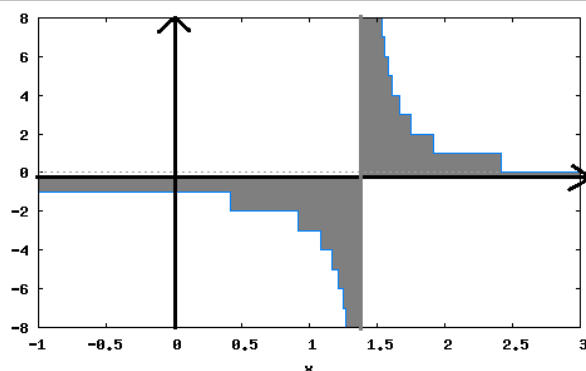
Pour que $[f]$ reste lipschitzienne, il faut que f reste bornée entre deux entières. Donc bornée.

◦21◦

Montrez que $x \mapsto \cos(e^x)$ n'est pas lipschitzienne (étudiez le taux d'accroissement entre $\ln(k \cdot \pi)$ et $\ln((k+1) \cdot \pi)$ pour k entier).

A faire.

♡ Montrez que $x \mapsto \frac{1}{x - \sqrt{2}}$ est continue sur $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue. Même question avec $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x - \sqrt{2}} \right\rfloor$ (partie entière).



L'application $x \mapsto \frac{1}{x - \sqrt{2}}$ est définie en tout point de $\mathbb{Q}$.
Et elle y est continue.

Le seul point qui poserait problème est $\sqrt{2}$. Et il n'est pas dans $\mathbb{Q}$.

Pour ce qui est de « pas uniformément continue », on va montrer une négation :

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in \mathbb{Q}^2, |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$$

On notera qu'il on écrit $\exists \varepsilon_0$ en lui donnant un nom avec indice, car il est particulier.

Bon, en fait, ça marcherait avec n'importe lequel, mais ici on va prendre 1.

En revanche, réfléchissez. dans l'uniforme continuité, on écrit $\forall \varepsilon, \exists \eta_{\varepsilon}$ car η se calcule à partir de ε . Il est « fonction de ε ».

On lui donne donc un nom qui tient compte de sa filiation (comme les noms russes en Ivanof, Petrof ou les noms anglais en Jackson, Richardson...)

En revanche, c'est n'avoir rien compris que d'écrire dans la négation $\exists \varepsilon, \forall \eta_{\varepsilon}, \dots$

En effet, pourquoi dire que η dépend de ε alors qu'il est quelconque.

Avoir compris cette distinction « qui dépend de qui », c'est faire des maths.

Recopier des formules par cœur sans comprendre le lien entre les variables, c'est faire... je sais pas moi, des « sciences » mais pas des maths.

On propose donc $\varepsilon_0 = 1$.

Pour tout η , on va prendre x et y autour de $\sqrt{2}$, proches à η près l'un de l'autre.

Dans $\left[\sqrt{2} - \frac{\eta}{2}, \sqrt{2} - \frac{\eta}{4}\right]$ on peut trouver un rationnel x (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Dans $\left[\sqrt{2} + \frac{\eta}{4}, \sqrt{2} + \frac{\eta}{2}\right]$ on peut trouver un rationnel y (densité ou même $\sqrt{2} + (x - \sqrt{2})$, comprenez vous?).

$\left[\sqrt{2} - \frac{\eta}{2}, \sqrt{2} - \frac{\eta}{4}\right]$	$\left[\sqrt{2} - \frac{\eta}{4}, \sqrt{2}\right]$	$\left[\sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{\eta}{4}\right]$	$\left[\sqrt{2} + \frac{\eta}{4}, \sqrt{2} + \frac{\eta}{2}\right]$
x			y
	$\eta/2$		
$\eta/2$		$\eta/2$	

La différence entre abscisses est plus petite que η .

La différence entre ordonnées se calcule

$$\left| \frac{1}{x - \sqrt{2}} - \frac{1}{y - \sqrt{2}} \right| = \left| \frac{y - x}{(x - \sqrt{2})(y - \sqrt{2})} \right|$$

On la minore : $|y - x|$ est plus grand que $\eta/2$.

$|x - \sqrt{2}|$ est plus petit que $\eta/2$

$|y - \sqrt{2}|$ est plus petit que $\eta/2$

le quotient est plus grand que $\frac{\eta/2}{\eta^2/4}$ ce qui fait $\frac{2}{\eta}$.

C'est plus grand que 1.

Sauf si η vaut plus que 2, mais ce sont les η petits qui nous concernent.

Sinon, on peut exploiter la suite de l'exercice. Si elle était uniformément continue sur $\mathbb{Q}$ elle se prolongerait en une application continue sur $\mathbb{R}$ tout entier par densité. Ce qui n'est pas le cas.

Passons à $x \mapsto \left[\frac{1}{x - \sqrt{2}} \right]$.

Sur $\mathbb{R}$, on la devine non définie en $\sqrt{2}$ et discontinue chaque fois qu'on passe par une valeur qui fait sauter la partie entière.

On remonte : $\frac{1}{x - \sqrt{2}} = n$ dans $\mathbb{Z}$ donne $x = \frac{1}{n} + \sqrt{2}$ avec n dans $\mathbb{Z}^*$.

Coup de chance, ces points de discontinuité ne sont pas dans $\mathbb{Q}$.

Partout ailleurs, l'application est continue.

Inutile de se prendre la tête à distinguer « continue à droite/continue à gauche ».

Ici, la formule est la même à droite et à gauche.

Sinon, pour rendre les choses rigoureuses.

On se donne un rationnel $\frac{p}{q}$.

Il existe alors un intervalle $\left[\frac{p}{q} - \varepsilon, \frac{p}{q} + \varepsilon \right]$ ne contenant aucun $\frac{1}{n} + \sqrt{2}$ (chercher le plus proche, et s'en éloigner).

Sur cet intervalle, l'application $x \mapsto \left[\frac{1}{x - \sqrt{2}} \right]$ est constante, donc continue.

Elle n'est pas uniformément continue.

Pour η strictement positif, aussi petit soit il, prendre à nouveau x et y de part et d'autre de $\sqrt{2}$. Comme tout à l'heure.

◦23◦

Donnez le domaine de définition de $x \mapsto \frac{1}{\ln(x) - 1}$ puis de $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(t) - 1}$ (et ce ne devra pas du tout être les mêmes domaines...)

On va poser $f = x \mapsto \frac{1}{\ln(x) - 1}$.

Il faut que $\ln(x)$ existe : $]0, +\infty[$.

Il faut ensuite que ce logarithme ne vaille pas 1 : $]0, e[\cup]e, +\infty[$ (largement préférable à $]0, +\infty[- \{e\}$ dans lequel on ne voit plus les intervalles⁴).

La condition est même suffisante : $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$

Maintenant, la question est : pour quels x peut on calculer $\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(t) - 1}$, ce qui revient à demander que $\frac{1}{\ln(t) - 1}$ existe pour tous les t de $[x, 2x]$.

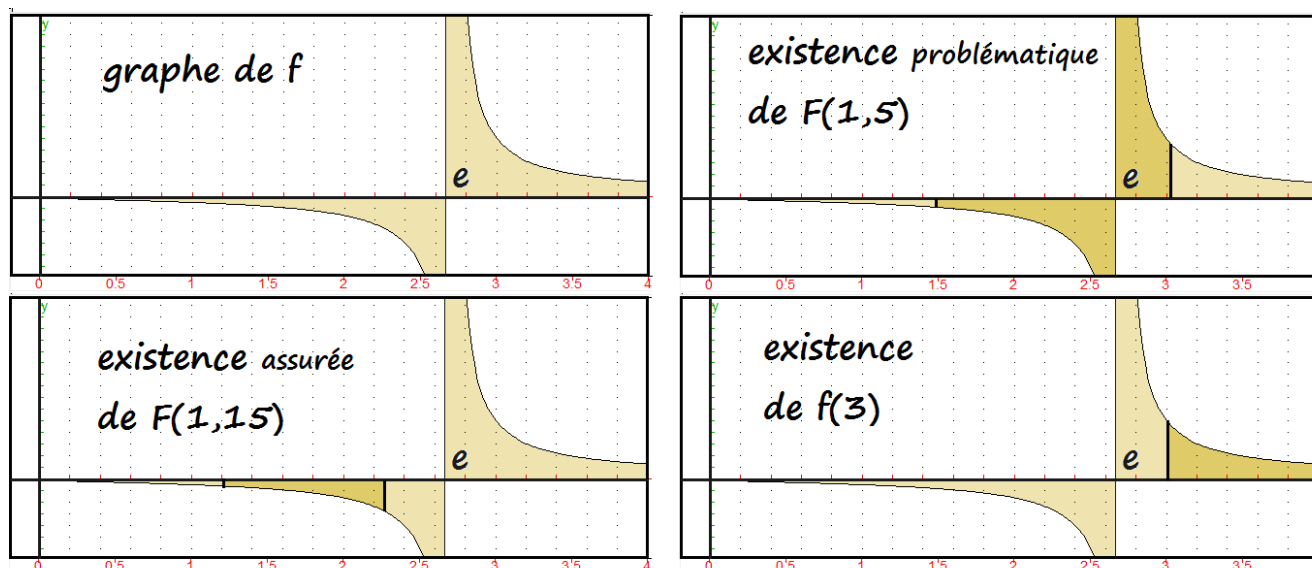
Bien évidemment, ceci nécessite que x et $2x$ soient dans D_f précédemment trouvé.

Mais aussi tous les t entre x et $2x$.

Bref, il faut que x soit strictement positif, déjà. mais ensuite, il faut que e ne soit pas entre x et $2x$.

Ceci revient à exclure tout $\left[\frac{e}{2}, e \right]$. $D_F =]0, \frac{e}{2}[\cup]e, +\infty[$

4. et bien plus encore à $]0, +\infty[- e$ qui n'a pas de sens.... enfin, si, ce serait $]0 - e, +\infty - e[$ et même $] - e, +\infty[$



Et si on s'entraînait à TeX ? $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$ c'est

$\$D_f = \text{\rbrack}0, e\text{\lbrack} \text{\cup} \text{\rbrack} e, +\infty\text{\lbrack} \$$.

Les dollars \$ c'est pour passer en mode mathématique (obtenu par **Ctrl M** sous certains environnements).

Les crochets, c'est des $\text{\lbrack}$ et $\text{\rbrack}$ (left et right). Et l'infini, c'est $\text{\infty}$. Et $\text{\cup}$ c'est union. Devinez ce que sera $\text{\cap}$. Il y a même $\text{\bigcup}$, plus esthétique.

Et l'underscore _f , c'est pour placer f en indice.

◦24◦

♥ Montrez l'équivalence entre $a_n \sim b_n$ et $b_n = a_n + o(a_n)$.

C'est du cours.

On suppose que nos suites ne s'annulent jamais (ou en tout cas sont non nulles à partir d'un certain rang), afin de pouvoir donner les définitions par quotients.

$a_n \sim b_n$ c'est $\frac{b_n}{a_n}$ tend vers 1.

$b_n = a_n + o(a_n)$ c'est $b_n - a_n = o(a_n)$ c'est à dire $\frac{b_n - a_n}{a_n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Il y a bien équivalence entre $\frac{b_n}{a_n}$ tend vers 1 et $\frac{b_n}{a_n} - 1$ tend vers 0.

◦25◦

♥ Pour tout n , on pose $a_n = n^{\ln(n)}$. Donnez sa limite en $+\infty$.

La série de terme général $1/a_n$ converge-t-elle ?

Donnez la limite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ quand n tend vers l'infini (indication : $\ln(n^2 + n) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$).

Classique : pour étudier a^b avec a et b qui bougent, il faut revenir à $a^b = e^{b \cdot \ln(a)}$ (indiqué dans la feuille de rentrée dès septembre, et en petit test de vacances d'été avec $3^{\ln(2)}$ et $2^{\ln(3)}$).

Ici : $a_n = e^{(\ln(n))^2}$. Il tend vers l'infini, et $\frac{1}{a_n}$ existe et tend vers 0.

Dès que n a dépassé 10 (en fait dès que n a dépassé e^2), on a $0 \leq \frac{1}{n^{\ln(n)}} \leq \frac{1}{n^2}$. La série de terme général $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 10}$ converge (Riemann).

Par théorème de majoration des séries termes positifs, la série de terme général $\left(\frac{1}{n^{\ln(n)}}\right)_{n \geq 10}$.

Par addition, la série de terme général $\left(\frac{1}{n^{\ln(n)}}\right)_{n \geq 1}$ converge.

Rapidité de Spé : $\frac{1}{n^{\ln(n)}} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et on passe à la suite de l'exercice.

Le quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ donne bien $\exp\left((\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2\right)$.

On factorise $a^2 - b^2$ en $a(-b) \cdot (a+b)$ et on profite de la propriété de morphisme du logarithme :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \exp \left(\ln(n^2 + n) \cdot \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \right)$$

Et qu'a-t-on gagné ? Une forme indéterminée : $\ln(n^2 + n)$ tend vers l'infini (comme $\ln(n+1) + \ln(n)$), donc équivalent à $2 \cdot \ln(n)$.

$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ converge vers 0 (à la vitesse de $\frac{1}{n}$ par l'équivalent $\ln(1+x) \sim_{x \rightarrow 0} x$).

On utilise donc des équivalents : $\ln(n^2 + n) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \ln(n)}{n}$.

Le terme de droite tend vers 0 (croissances comparées) et entraîne celui de gauche.

Par continuité de l'exponentielle, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge vers 1 quand n tend vers l'infini.

Étape 0	la suite	$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right)$	converge vers 0
Étape1	la suite	$\left(1, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right)$	converge vers 0
Étape2	la suite	$\left(1, 1, 1, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right)$	converge vers 0
Étape3	la suite	$\left(1, 1, 1, 1, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right)$	converge vers 0
Étape4	la suite	$\left(1, 1, 1, 1, 1, \frac{1}{32}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right)$	converge vers 0
Écrivez la formule pour le terme général à l'étape p .			
Étape p	la suite	$\left(1, 1, 1, 1, 1, \frac{1}{32}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right)$	converge vers 0
Faites tendre p vers $+\infty$.			
	la suite	$\left(1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots \right)$	converge vers 0

Euh, il y a une erreur, là !

Oui, évidemment. Il y a des propriétés qui sont valables « pour tout n », mais ne se propagent pas « par passage à la limite ».

Comme la propriété « n est un entier fini ».

Sinon, à la $p^{\text{ième}}$ étape, la suite a pour terme général $a_n = 1$ si $n \leq p$ et 2^{-n} sinon.

Il doit y avoir moyen de compacter en une seule formule avec un $2^{-\text{Max}(n,p)}$. Mais quelle utilité ?

◦27◦

C'est drôle, mais il y a un multiple de 13 dont la somme des chiffres vaut 13 : $13 \times 19 = 247$ et $2 + 4 + 7 = 13$. Et c'est pareil pour 19 : $19 \times 46 = 874$ et $8 + 7 + 4 = 19$. Trouvez une solution pour 10. Une solution pour 20. Trouvez une solution pour 25. Et pour 22. Soit par un programme Python. Soit avec votre cervelle.

On cherche un multiple de 10 dont la somme des chiffres vaut 10 : par exemple 190

Et un multiple de 20 dont la somme des chiffres vaut 20 ? Son dernier chiffre est 0 et son avant dernier est pair : 3980 par exemple.

On cherche un multiple de 25 dont la somme des chiffres vaut 25.

Or, les multiples de 25 suivent un schéma assez simple dans leur écriture décimale.

	$n = 4.p$	$n = 4.p + 1$	$n = 4.p + 2$	$n = 4.p + 3$
$n \times 25$	$100.p$	$100.p + 25$	$100.p + 50$	$100.p + 75$
écriture	$p00$	$p25$	$p50$	$p75$

Il suffit ensuite de trouver un entier p dont la somme des chiffres vaut 25 et c'est gagné pour la première colonne. Mais on peut aussi demander « somme des chiffres de p égale à 13 » et prendre $4.p + 3$.

Par exemple $9 + 9 + 7 = 25$ donc avec $(4.997) \times 25$ on a 99700 dont la somme des chiffres est bonne.

Mais aussi $4 + 9 = 13$ puis $4 + 9 + 7 + 5 = 25$: $(4.49 + 3) \times 25 = 4975$.

On a aussi 9925

Pour 22, on a $109 \times 22 = 2398$ et $2 + 3 + 9 + 8 = 22$.

Comment les obtenir avec Python :

```
def SommeChiffres(N) :
....s = 0
....while n>0 :
.....s += n%10
.....n = n/10
....return(s)
```

```
def Test(n) :
....for k in range(10000) :
.....if
SommeChiffres(n*k) == n :
.....return(k,n*k)
....return('Echec')
```

Et François vient de m'en proposer un : **112288**
 Pair, multiple de 11 et avec une somme des chiffres convenable.

·
·
·

Et maintenant, une proposition de Dylan :

Pour trouver un multiple d'un entier n dont la somme des chiffres en base 10 est n . On fixe un tel n . On peut l'écrire comme produit d'un entier premier avec 10, disons P et d'un entier avec que des facteurs 2 et 5, disons Q . On a : $\exists k, 10^k \equiv 1 \pmod{P}$ car P est premier avec n (on prend $k = \varphi(n)$ par le théorème de Lagrange).

On construit alors $M = \sum_{i=1}^n 10^{k \cdot \varphi(n)}$ qui est une somme de la forme $100 + 10000 + 1000000 \dots$ avec n termes, le nombre final sera de la forme $1001001001001001001001001 \dots$ avec n chiffres 1 dedans, donc la somme de ses chiffres vaut bien n . Et modulo p : $M = \sum_{i=1}^n \left(10^{\varphi(n)}\right)^k = \sum_{i=1}^n 1^k = n = PQ \equiv 0 \pmod{p}$

On veut le rendre multiple de n , il suffit de le multiplier par un multiple de Q , et on va en prendre un bien choisi : on a $Q = 2^x \cdot 5^y$ pour certains entiers naturels x et y , si l'on prend le nombre $L = 10^{\max(x,y)}$, c'est un multiple de Q de la forme $10000 \dots$. On prend alors le nombre $L.M$ comme résultat final (c'est M décalé avec plein de zéros en plus à droite), il est divisible par n et sa somme des chiffres vaut n !

◦28◦

Existe-t-il f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'image de chaque rationnel soit un rationnel ?
 Existe-t-il f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'image de chaque rationnel soit un irrationnel ?
 Existe-t-il f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'image de chaque rationnel soit un irrationnel et l'image de chaque irrationnel soit un rationnel ?

Il suffit de prendre f constante. Égale à 1 dans le premier cas, et à $\sqrt{2}$ dans le second.

En revanche, si on impose « les rationnels ont une image irrationnelle »
 et « les irrationnels ont une image rationnelle »,
 alors on aura un problème. Le voyez vous ? (T.V.I. et cardinal)

◦29◦

Montrez qu'il existe un x entre 1 et 2 vérifiant $x^5 = 5^x$.
 Montrez que pour tout a plus grand que e il existe un x entre 1 et e vérifiant $x^a = a^x$.

◦30◦

♥ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de $\sqrt[n]{\text{Arctan}(1) \cdot \text{Arctan}(2) \dots \text{Arctan}(n)}$.

Un produit, une racine ? On va rendre tout ça plus convivial en passant au logarithme.

$$\frac{\ln(\text{Arctan}(1)) + \ln(\text{Arctan}(2)) + \dots + \ln(\text{Arctan}(n))}{n}$$

On introduit la suite $(\ln(\text{Arctan}(n)))$. Elle converge vers $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Sa moyenne de Cesàro fait de même et converge vers $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

On revient à la suite initiale, elle converge vers $\boxed{\frac{\pi}{2}}$

*Avec cette forme, il fallait penser au logarithme pour rendre les choses plus basiques.
 Et il fallait se dire « soit Cesàro, soit somme de Riemann ». Ici c'était Cesàro.
 Et c'était en fait une moyenne géométrique.*

◦31◦

Montrez que $\sqrt[n]{\frac{(2.n)!}{n!.n^n}}$ converge, en retrouvant la somme de Riemann cachée.

Une somme ? C'est donc qu'on passe au logarithme. Nommons a_n cette racine, on a alors

$$\ln(a_n) = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{(2.n)!}{n!.n^n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{(n+1) \cdot (n+2) \dots (n+n)}{n \cdot n \dots n}\right)$$

Proprement : $\ln(a_n) = \frac{1}{n} \cdot \ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{n+k}{n} \right)$ (oui, pour le dénominateur, k est un compteur).

On développe le logarithme : $\ln(a_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$.

A-t-on une forme $\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f \left(a + \frac{b-a}{n} k \right)$? f serait le logarithme. a serait gal à 1. Et $b-a$ aussi.

$$\frac{2-1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{2-1}{n} k \right)$$

va tendre vers $\int_1^2 \ln(t) \cdot dt$.

Cette intégrale vaut $[t \cdot \ln(t) - t]_{t=1}^2$ ce qui fait $\ln(2) - 1$.

En revenant à l'exponentielle (continue) : $\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n! \cdot n^n}} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(2)-1} = \frac{4}{e}$

◦32◦

Donnez la limite quand n tend vers l'infini de $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{n+k}{n} \right)$. Déduisez que la suite $\left(\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n! \cdot n^n}} \right)$ converge et donnez sa limite.

Oui, c'est bien une somme de Riemann : $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{n+k}{n} \right)$ est de la forme

$$\frac{(b-a)}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right)$$

avec $a = 0, b = 1$ et $f = x \mapsto \ln(1+x)$ (ou $a = 1, b = 2$ et $f = \ln$). par continuité, cette somme de Riemann converge vers l'intégrale $\int_0^1 \ln(1+t) \cdot dt$. Celle ci vaut $[(1+t) \cdot \ln(1+t) - t]_{t=0}^1$. Application numérique : $2 \cdot \ln(2) - 1$

La quantité $\left(\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n! \cdot n^n}} \right)$ a pour logarithme

$$\frac{1}{n} \cdot \log \left(\frac{(2n)!}{n! \cdot n^n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \ln \left(\frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \dots (n+n)}{n^n} \right)$$

en simplifiant les entiers de 1 à n dans $(2n)!$.

On fait passer un n dans chacun des n termes du produit :

$$\frac{1}{n} \cdot \log \left(\frac{(2n)!}{n! \cdot n^n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \ln \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n} \right) \cdot \left(1 + \frac{3}{n} \right) \dots \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right)$$

C'est notre somme dont la limite vaut $2 \cdot \ln(2) - 1$

On en déduit que $\left(\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n! \cdot n^n}} \right)$ converge vers $\frac{4}{e}$ par continuité de l'exponentielle.

J'ai l'impression d'avoir posé deux fois le même exercice, moi.

◦33◦

Soit f une application de classe C^2 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On définit

$$I = \int_a^b f(t) \cdot dt \quad J = \int_a^b f'(t) \cdot \left(t - \frac{a+b}{2} \right) dt \quad K = \int_a^b f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \cdot \left(t - \frac{a+b}{2} \right) dt$$

♡ 0 ♡

Calculez K .

♡ 1 ♡

Montrez : $I + J = (b-a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

♡ 2 ♡

Justifiez l'existence de $\text{Sup}\{|f''(t)| \mid t \in [a, b]\}$ (notée M_2).

♡ 3 ♡

Montrez pour tout t de $[a, b]$: $\left| f'(t) - f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \leq M_2 \cdot \left| t - \frac{a+b}{2} \right|$.

♡ 4 ♡

Déduisez : $\left| I - \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b-a) \right| \leq \frac{M_2 \cdot (b-a)^3}{12}$.

♡ 5 ♡

Déduisez : $|I - T_n| \leq \frac{M_2 \cdot (b-a)^3}{12 \cdot n^2}$ où T_n est l'approximation de I par la méthode des trapèzes pour une équisubdivision de $[a, b]$ en n pas (dont vous rappellerez la formule).

Rappelons tout de suite la formule pour l'aire d'un trapèze : base fois moyenne des hauteurs.

Dans le cas d'un trapèze de largeur $(b - a)$ et de hauteurs $f(a)$ et $f(b)$, on trouve comme par hasard $(b - a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

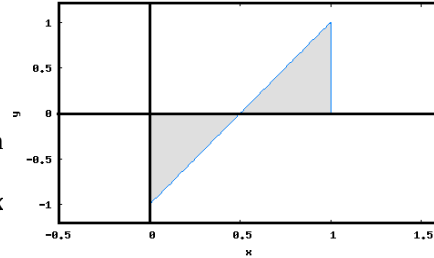
Dans le cas d'une somme de trapèzes pour la méthode du même nom, on trouve

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(a + k \cdot \frac{b-a}{n}) + f(a + (k+1) \cdot \frac{b-a}{n})}{2} \quad \text{On peut aussi regrouper en}$$

$$2.T_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) + \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

(moyenne des deux sommes de Riemann).

Pour le calcul de $K = \int_a^b f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \cdot \left(t - \frac{a+b}{2} \right) dt$, on sort $f' \left(\frac{a+b}{2} \right)$ par linéarité, et il reste $\int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2} \right) dt$. Cette intégrale est nulle. On l'a en intégrant explicitement avec $\frac{1}{2} \cdot \left(t - \frac{a+b}{2} \right)^2$ ou en voyant **deux triangles d'aires opposées**.



Quand on calcule $I + J$, on fusionne par linéarité en $\int_a^b \left(f(t) + \left(t - \frac{a+b}{2} \right) \cdot f'(t) \right) dt$.

On reconnaît une forme en $u' \cdot v + u \cdot v'$ avec f et $t \mapsto t - \frac{a+b}{2}$.

On trouve donc $\left[f(t) \cdot \left(t - \frac{a+b}{2} \right) \right]_{t=a}^{t=b}$. En a et en b , le terme $\left(t - \frac{a+b}{2} \right)$ donne $(b-a)/2$ et son opposé. Les termes vont plutôt "s'additionner". Il reste $I + J = (b-a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

On pouvait aussi intégrer **par parties**.

Pour ce qui est de l'existence de M_2 , on rappelle que f'' existe et est continue sur un segment. Il ne reste qu'à utiliser un théorème de **compacité** : existence de la **norme de la convergence uniforme**.

On se donne t dans $[a, b]$ et on écrit une **formule de Taylor** pour f' entre $\frac{a+b}{2}$ et t :

$f'(t) = f' \left(\frac{a+b}{2} \right) + \text{reste}$, avec $\text{reste} = \left(t - \frac{a+b}{2} \right) \cdot \int_{u=0}^{u=1} (1-u)^0 \cdot f'' \left(\frac{a+b}{2} + u \cdot \left(t - \frac{a+b}{2} \right) \right) du$ en sachant que notre variable d'intégration dans la formule de Taylor ne peut pas s'appeler t comme d'habitude.

On passe à la valeur absolue et on majore par inégalité triangulaire :

$$|\text{reste}| \leq \left| t - \frac{a+b}{2} \right| \cdot \int_0^1 |f'' \left(\frac{a+b}{2} + u \cdot \left(t - \frac{a+b}{2} \right) \right)| du$$

On majore ensuite :

$$|\text{reste}| \leq \left| t - \frac{a+b}{2} \right| \cdot \int_0^1 M_2 du = M_2 \cdot \left| t - \frac{a+b}{2} \right|$$

C'est l'inégalité souhaitée.

On pouvait aussi l'obtenir par l'inégalité des accroissements finis.

Ce qu'il ne fallait pas faire, c'est invoquer une histoire de développement limité. Un développement limité n'est qu'une limite, et jamais une majoration.

Partant de $I + J = (b-a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$, on trouve $I - (b-a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} = -J$.

On remplace $-J$ par $K + (J - K)$. Comme K est nul, il reste $\int_a^b \left(f'(t) - f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) \cdot \left(t - \frac{a+b}{2} \right) dt$.

On passe à la valeur absolue avec inégalité triangulaire : $|J| \leq \int_a^b \left| f'(t) - f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \cdot \left| t - \frac{a+b}{2} \right| dt$.

On exploite le résultat précédent :

$$|J| \leq \int_a^b M_2 \cdot \left| t - \frac{a+b}{2} \right|^2 dt$$

La valeur absolue ne sert plus à rien avec le carré. On peut intégrer $\int_a^b M_2 \cdot \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot dt$ en $\frac{1}{3} \cdot \left[t - \frac{a+b}{2}\right]_{t=a}^{t=b}$. On trouve précisément $\frac{(b-a)^3}{12}$.

On écrit cette inégalité pour a égal à $a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ (qu'on va noter a_k) et b égal à $a + (k+1) \cdot \frac{b-a}{n}$ (qu'on va noter a_{k+1}). La différence $b - a$ devient $\frac{b-a}{n}$.

On a donc

$$M_2 \frac{(b-a)^3}{12.n^3} \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) \cdot dt - \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2} \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12.n^3}$$

On somme ces n inégalités pour k de 0 à $n-1$. Les n termes en $M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{12.n^3}$ donnent $M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{12.n^2}$.

Le terme du milieu télescope par relation de Chasles en $I - T_n$.

On aboutit à l'inégalité exigée.

Elle nous renseigne sur la qualité de l'approximation d'intégrale par la formule des trapèzes.

◻34◻

♥ Calculez $\int_a^b 2^t \cdot dt$ en passant par la limite des sommes de Riemann.

Prenons la somme de Riemann gauche pour une équisubdivision de pas $\frac{b-a}{n}$:

$$R = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 2^{a+k \cdot \frac{b-a}{n}} = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{2^a - 2^{a+n \cdot \frac{b-a}{n}}}{1 - 2^{\frac{b-a}{n}}} = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{2^a - 2^b}{1 - 2^{\frac{b-a}{n}}}$$

Le numérateur est simple.

Le dénominateur est une forme indéterminée qu'on peut lever soit par développement limité soit par taux d'accroissement :

$$n \cdot (1 - e^{\frac{b-a}{n} \cdot \ln(2)}) = n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{b-a}{n} \cdot \ln(2) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = -(b-a) \cdot \ln(2) + o(1) \rightarrow (a-b) \cdot \ln(2)$$

$$\text{ou } n \cdot (1 - e^{\frac{b-a}{n} \cdot \ln(2)}) = -\frac{2^{\frac{b-a}{n}} - 2^0}{\frac{b-a}{n} - 0} \cdot (b-a) \rightarrow f'(0) \text{ avec } f = x \mapsto 2^x \text{ et } f' = x \mapsto \ln(2) \cdot 2^x$$

Bref, la limite des sommes de Riemann vaut $\frac{2^b - 2^a}{\ln(2)}$ comme le confirme l'intégration de $x \mapsto e^{x \cdot \ln(2)}$.

◻35◻

♥ Calculez $\int_0^x \cos(t) \cdot dt$ en passant par la limite des sommes de Riemann.

$$R_n = \frac{x}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k \cdot x}{n}\right) = \frac{x}{n} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2 \cdot n - 1}{2} \cdot \theta\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

avec $\theta = \frac{x}{n}$ sachant qu'il y a un 1 au lieu du $\frac{1}{2}$ du célèbre noyau).

Au numérateur, $\sin\left(\frac{2 \cdot n - 1}{2} \cdot x\right)$ converge vers $\sin(x)$.

Au dénominateur, la forme indéterminée $2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ converge vers x .

Le réel x se simplifie entre le haut et le bas. Il reste $\int_0^x \cos(t) \cdot dt = \sin(x)$.

◻36◻

♥ Calculez $\int_a^b t^2 \cdot dt$ en passant par la limite des sommes de Riemann.

$$R_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^2 + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 2 \cdot a \cdot k + \left(\frac{b-a}{n}\right)^3 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

$$R_n = a^2 \cdot (b-a) \cdot \frac{n}{n} + 2 \cdot a \cdot (b-a)^2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot n^2} + (b-a)^3 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (2 \cdot n - 1)}{6 \cdot n^3}$$

En utilisant des équivalents, la somme de Riemann converge vers $a^2 \cdot (b-a) + (b-a)^2 \cdot a + \frac{2 \cdot (b-a)^3}{3}$ et après simplification : $\frac{b^3 - a^3}{3}$ (variation de la primitive classique).

◻37◻

♠ n est un entier naturel ; résolvez l'équation $z^{2 \cdot n} + 1 = 0$ (en passant par $z = r \cdot e^{i \cdot \theta}$) puis factorisez $(X^{2 \cdot n} + 1)$ dans $\mathbb{C}$.

On pose $f_x = \theta \mapsto \ln(x^2 - 2 \cdot x \cdot \cos(\theta) + 1)$ (x est un réel fixé de $]1, +\infty[$). Montrez que f_x est intégrable sur $[0, \pi]$. Exprimez grâce à la première question la somme de Riemann milieu de f_x pour l'équisubdivision de $[0, \pi]$.

Déduisez : $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2 \cdot x \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta = 2 \cdot \pi \cdot \ln(x)$.

Calculez $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2 \cdot x \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta$ pour x dans $] -\infty, -1[$ (indication : $t = \pi - \theta$).

Calculez $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2 \cdot x \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta$ pour x dans $] -1, 1[$.

Vérifiez que $x \mapsto \int_0^\pi \ln(x^2 - 2 \cdot x \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta = 2 \cdot \pi \cdot \ln(x)$ admet la même limite à droite et à gauche en 1, dont on estimera que c'est la valeur de $\int_0^\pi \ln(1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta$. Calculez alors $\int_0^\pi \ln(\sin(t)) \cdot dt$.

Un des plus beaux exercices niveau Sup. Il figure dans tout bon cours parlant des sommes de Riemann.

Justement, grâce à ces sommes, on va calculer une intégrale pour laquelle n n'a pas de primitive...

On résout $z^{2 \cdot n} + 1 = 0$ en mettant z sous la forme polaire $\rho \cdot e^{i \cdot \theta}$ (sachant que $z = 0$ n'est pas solution).

On obtient $\rho^{2 \cdot n} \cdot e^{i \cdot 2 \cdot n \cdot \theta} = -1 = e^{i \cdot \pi}$.

On identifie le module : $\rho = 1$ (et pas $\rho = -1$, puisque ρ est positif) et $2 \cdot n \cdot \theta = \pi [2 \cdot \pi]$.

On obtient $z = \exp\left(\frac{(2 \cdot k + 1) \cdot i \cdot \pi}{2 \cdot n}\right)$ avec k autorisé à décrire $\mathbb{Z}$.

Mais déjà, quand k va de 0 à $2 \cdot n - 1$, on a $2 \cdot n$ racines distinctes. On a les a toutes. De toutes façons, k et $k + 2 \cdot n$ donnent la même racine.

$$S = \left\{ \exp\left(\frac{(2 \cdot k + 1) \cdot i \cdot \pi}{2 \cdot n}\right) \mid k \in \text{range}(2 \cdot n) \right\} \text{ et on factorise } X^{2 \cdot n} + 1 = \prod_{k=0}^{2 \cdot n - 1} \left(X - e^{\frac{(2 \cdot k + 1) \cdot \pi}{2 \cdot n}}\right)$$

On étudie ensuite $f_x = \theta \mapsto \ln(x^2 - 2 \cdot x \cdot \cos(\theta) + 1)$ sur $[0, \pi]$. Elle est définie et continue.

Il nous suffit de vérifier que le terme dans le logarithme est continu et ne s'annule jamais.

Forme simple : $x^2 - 2 \cdot x \cdot \cos(\theta) + 1 = (x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)$. Pour qu'elle s'annule, il faudrait avoir à la fois $\sin(\theta) = 0$ et $x - \cos(\theta) = 0$.

Mais $\sin(\theta) = 0$ conduit à $\cos(\theta) = 1$ ou $\cos(\theta) = -1$, alors même que x est strictement plus grand que 1.

Autre approche : $x^2 - 2 \cdot x \cdot \cos(\theta) + 1$ ne s'annule que pour $x = e^{i \cdot \theta}$ ou $x = e^{-i \cdot \theta}$. Or, x est un réel, et il n'est même pas sur le cercle trigonométrique...

L'intégrale $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2 \cdot x \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta$ existe pour tout x . Mais on ne sait pas la calculer à l'aide de primitives, changements de variables ou par parties.

On découpe $[0, \pi]$ en n segments à l'aide des $\frac{k \cdot \pi}{n}$ pour k de 0 à n .

Les milieux des segments sont les $\frac{2 \cdot k + 1}{2 \cdot n} \cdot \pi$.

La somme de Riemann milieu est

$$R_{m,n} = \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(x^2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot k + 1}{2 \cdot n} \cdot \pi\right) + 1\right)$$

Et si on compactait les logarithmes en un seul ?

$$R_{m,n} = \frac{\pi}{n} \cdot \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot k + 1}{2 \cdot n} \cdot \pi\right) + 1\right)\right)$$

On factorise notre célèbre noyau :

$$R_{m,n} = \frac{\pi}{n} \cdot \ln \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{\frac{2k+1}{2n} \cdot i \cdot \pi} \right) \cdot \left(x - e^{-\frac{2k+1}{2n} \cdot i \cdot \pi} \right) \right)$$

La ressemblance avec notre factorisation initiale se fait vraiment sentir.

De 0 à $n-1$, on a les n premières racines de $X^{2n} + 1$: $\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{\frac{2k+1}{2n} \cdot i \cdot \pi} \right)$.

Où sont les suivantes ? Dans la description ci dessus, c'est $\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{-\frac{2k+1}{2n} \cdot i \cdot \pi} \right)$. Demi cercle inférieur.

Dans la description « factorisation de $X^{2n} + 1$, c'est $\prod_{p=n}^{2n-1} \left(x - e^{-\frac{2p+1}{2n} \cdot i \cdot \pi} \right)$. C'est finalement le même demi cercle.

$k=0$	$k=1$	$k=2$	...	$k=n-2$	$k=n-1$	et	$p=n$	$p=n+1$	$p=n+2$	...	$p=2n-2$	$p=2n-1$
$e^{-\frac{1}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{-\frac{3}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{-\frac{5}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	...	$e^{-\frac{2n-3}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{-\frac{2n-1}{2n} \cdot i \cdot \pi}$		$e^{\frac{2n+1}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{\frac{2n+3}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{\frac{2n+5}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	...	$e^{\frac{4n-3}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{\frac{4n-1}{2n} \cdot i \cdot \pi}$

Ajoutez 2π aux arguments de la première (ça ne change rien), et renversez le sens de lecture de la deuxième :

$k=0$	$k=1$	$k=2$	...	$k=n-2$	$k=n-1$	et	$p=2n-1$	$p=2n-2$	...	$p=n+1$	$p=n$
$e^{\frac{4n-1}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{\frac{4n-3}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{\frac{4n-5}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	...	$e^{\frac{2n+3}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{\frac{2n+1}{2n} \cdot i \cdot \pi}$		$e^{\frac{4n-1}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{\frac{4n-3}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	...	$e^{\frac{2n+3}{2n} \cdot i \cdot \pi}$	$e^{\frac{2n+1}{2n} \cdot i \cdot \pi}$

Finalement : $\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{-\frac{2k+1}{2n} \cdot i \cdot \pi} \right) = \prod_{p=n}^{2n-1} \left(x - e^{-\frac{2p+1}{2n} \cdot i \cdot \pi} \right)$

On recolle :

$$R_{m,n} = \frac{\pi}{n} \cdot \ln \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{\frac{2k+1}{2n} \cdot i \cdot \pi} \right) \cdot \left(x - e^{-\frac{2k+1}{2n} \cdot i \cdot \pi} \right) \right) = \frac{\pi}{n} \cdot \ln \left(\prod_{k=0}^{2n-1} \left(x - e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}} \right) \right) = \frac{\pi}{n} \cdot \ln(x^{2n} + 1)$$

On n'a pas de primitive, mais on a une formule pour la somme de Riemann milieu... $R_{m,n} = \frac{\pi}{n} \cdot \ln(1 + x^{2n})$

Elle dépend de x (paramètre de la fonction) et aussi de n , nombre de pas de la subdivision.

Mais que font les sommes de Riemann quand n tend vers l'infini ? Elles tendent vers l'intégrale. On va donc pouvoir calculer celle ci en passant à la limite sur n (comme dans le cours on avait calculé $\int_a^b e^t \cdot dt$ en passant par

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^a \cdot \left(e^{\frac{b-a}{n}} \right)^k$$

Mais que fait $\frac{\pi}{n} \cdot \ln(1 + x^{2n})$ quand n tend vers l'infini ?

Forme indéterminée ? Si on le traite vite : $1 + x^{2n}$ est équivalent à x^{2n} , donc on va étudier $\frac{\pi}{n} \cdot \ln(x^{2n})$ qui vaut $2\pi \cdot \ln(x)$ et tend vers $2\pi \cdot \ln(x)$.

Est ce rigoureux ? Pas tant que ça.

Alors on va en faire quelque chose de rigoureux :

$$\frac{\pi}{n} \cdot \ln(1 + x^{2n}) = \frac{\pi}{n} \cdot \left(\ln(x^{2n}) + \ln(x^{-2n} + 1) \right) = 2\pi \cdot \ln(x) + \frac{\pi \cdot \ln(1 + e^{-2n})}{n}$$

Quand n tend vers l'infini, $\frac{\pi \cdot \ln(1 + e^{-2n})}{n}$ tend tranquillement vers 0 et la somme de Riemann tend vers $2\pi \cdot \ln(x)$.

Trop fort : $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(x^2 - 2x \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta = 2\pi \cdot \ln(x)$

Et pour x dans $] -\infty, -1[$? Il me semble que le calcul ne change pas. Simplement, on va garder x^2 car il est positif.

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(x^2 - 2x \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta = \pi \cdot \ln(x^2)$$

Mais on peut aussi suivre l'indication de l'énoncé. Pour x négatif, l'intégrale $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(x^2 - 2x \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta$, ça c'est sûr.

On y fait un changement de variable $\alpha = \pi - \theta$. l'intégrale devient $\int_{\alpha=\pi}^0 \ln(x^2 - 2x \cdot \cos(\alpha + \pi) + 1) \cdot (-d\alpha)$ et même

$$\int_{\alpha=0}^{\pi} \ln(x^2 + 2x \cdot \cos(\alpha) + 1) \cdot d\alpha$$

On reconnaît l'intégrale de la question précédente, mais avec $-x$ à la place de x . Et justement, $-x$ est positif ! On est exactement dans le cadre de la première série de questions, et l'intégrale vaut $2 \cdot \pi \cdot \ln(-x)$ avec $-x$ positif. Soit encore $2 \cdot \pi \cdot \ln(|x|)$.

Notre intégrale à paramètre x est paire.

Si x est entre -1 et 1 , pas de grand changement dans l'existence, ni le calcul de la somme de Riemann.

On a encore $R_{m,n} = \frac{\pi}{n} \cdot \ln(1 + x^{2,n})$.

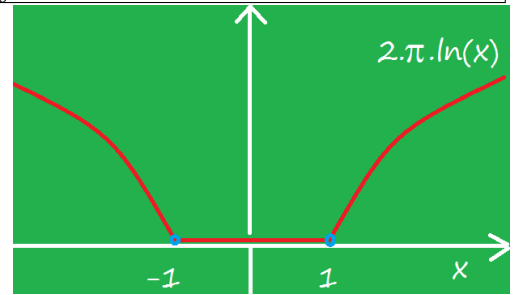
Sauf que maintenant, quand n tend vers l'infini, $\ln(1 + x^{2,n})$ tend vers 0 et le dénominateur tend vers l'infini. La somme de Riemann tend vers 0 (il y a des logarithmes de réels plus grands que 1 et des logarithmes négatifs, tout se compense).

On résume :

$x \in]-\infty, -1[$	$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(x^2 - 2x \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta = 2 \cdot \pi \cdot \ln(x)$
$x \in]-1, 1[$	$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(x^2 - 2x \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta = 0$
$x \in]1, +\infty[$	$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(x^2 - 2x \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta = 2 \cdot \pi \cdot \ln(x)$

Il nous en manque ?

$x \in]-\infty, -1[$	$x = -1$	$x \in]-1, 1[$	$x = 1$	$x \in]1, +\infty[$
$2 \cdot \pi \cdot \ln(x)$	?	0	?	$2 \cdot \pi \cdot \ln(x)$



Ayant la même limite à droite et à gauche en 1 et -1 , on a envie de compléter :

$x \in]-\infty, -1[$	$x = -1$	$x \in]-1, 1[$	$x = 1$	$x \in]1, +\infty[$
$2 \cdot \pi \cdot \ln(x)$	0	0	0	$2 \cdot \pi \cdot \ln(x)$

Et là, ça continue à être joli, avec un peu de trigonométrie.

La valeur en 1, c'est $\int_{\theta=0}^{\pi} \ln(1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \cos(\theta) + 1) \cdot d\theta$.

On l'écrit $\int_{\theta=0}^{\pi} \ln(2 - 2 \cdot \cos(\theta)) \cdot d\theta$ et même $\int_{\theta=0}^{\pi} \ln\left(4 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \cdot d\theta$.

On sait que cette intégrale est nulle. Et par propriété du logarithme, cela nous donne

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \left(\ln(4) + 2 \cdot \ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \right) \cdot d\theta = 0$$

On intègre la constante et bascule de l'autre côté : $\int_{\theta=0}^{\pi} \ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \cdot d\theta = -\pi \cdot \ln(2)$.

Attention, il y a comme un problème en 0 et en π pour ce logarithme quand même. On commence à faire des choses louches.

On change même de variable avec $\theta = 2\alpha$: $\int_{\theta=0}^{\pi/2} 2 \cdot \ln(\sin(\alpha)) \cdot d\theta = -\pi \cdot \ln(2)$

On divise : $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\alpha)) \cdot d\alpha = \frac{\pi \cdot \ln(2)}{2}$ (avec un signe moins, car ces logarithmes de sinus sont négatifs).

Mais on voulait une intégrale de 0 à π ?

Or, que fait le sinus de $\pi/2$ à π . Exactement ce qu'il a fait de 0 à π . mais en sens inverse. On repasse par les mêmes valeurs, et l'intégrale se dédouble.

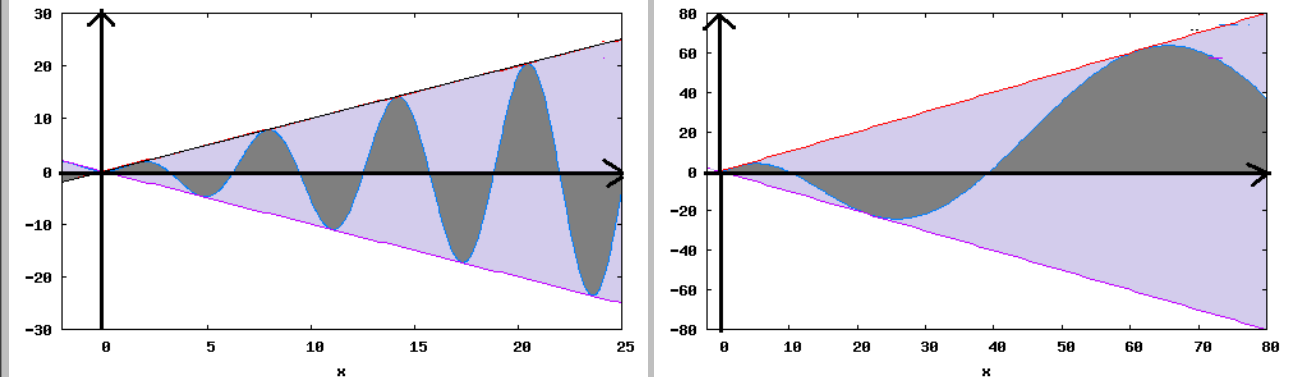
Proprement en posant $\beta = \pi - \alpha$: $\int_{\alpha=0}^{\pi/2} \ln(\sin(\alpha)).d\alpha = \int_{\beta=\pi}^{\pi/2} \ln(\sin(\beta)).(-d\beta) = \int_{\beta=\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\beta)).d\beta$.

En additionnant les deux et en recollant par relation de Chasles (variables muettes, on somme de 0 à π) c'est tout

$$: \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\alpha)).d\alpha = \pi. \ln(2)$$

◦38◦

Montrez que $x \mapsto x.\sin(x)$ est lipschitzienne sur chaque segment $[-a, a]$. Montrez qu'elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.



Et pour $x \mapsto x.\sin(\sqrt{x})$?

Pour lipschitzienne, on peut dire que c'est le produit de deux applications lipschitziennes bornées.

On peut aussi sortir les gros moyens : $f' = x \mapsto \sin(x) + x.\cos(x)$.

Sur $[-a, a]$, f' est bornée par $a + 1$.⁵

Et si f' est bornée, f est lipschitzienne.⁶

Ensuite, on a une implication « lipschitzienne implique uniformément continue » en prenant $\eta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{K}$ avec des notations que tout le monde comprend.

Passons à $\mathbb{R}$ tout entier.

Attention, il y a des propriétés qui ne passent pas de « sur tout segment » à « donc sur tout $\mathbb{R}$ ».

Si f est continue sur chaque $[-a, a]$ alors elle est continue sur $\mathbb{R}$: oui.

Si f est lipschitzienne de rapport 1 sur chaque $[-a, a]$, alors elle est lipschitzienne de rapport 1 sur $\mathbb{R}$: oui.

Si f est lipschitzienne sur chaque $[-a, a]$, alors elle est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$: non.

Si f est bornée sur chaque $[-a, a]$, alors elle est bornée sur $\mathbb{R}$: non.

Si f est positive sur chaque $[-a, a]$, alors elle est positive sur $\mathbb{R}$: oui.

Si f est uniformément continue sur chaque $[-a, a]$, alors elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$: non.

La dérivée n'est plus bornée. calculez la en $2.k.\pi$, vous voyez $f'(2.k.\pi)$ filer vers l'infini.

Elle ne peut donc plus être lipschitzienne (car « lipschitzienne et dérivable implique dérivée bornée »).

Pourrait elle être quand même uniformément continue sans être lipschitzienne.

L'implication est en effet « lipschitzienne implique uniformément continue en passant par $\frac{\varepsilon}{K}$.

Mais peut être qu'avec un η d'une autre forme, on peut s'en sortir.

La seule façon de nier uniformément continue, c'est de revenir à la définition et à sa négation.

$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \eta, \exists (x, y), |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$.

On va prendre $\varepsilon_0 = 1$ car sinon on n'a pas trop d'idée pour commencer.

Pour η petit, on va aller chercher x et y proches l'un de l'autre à η près, mais avec des images éloignées.

On va prendre $x = 2.k.\pi$ et $y = 2.k.\pi + \eta$. On se place là où le graphe coupe l'axe.

On a bien $|y - x| \leq \eta$, que k soit « grand » ou « petit ».

On a ensuite $f(y) - f(x) = (2.k.\pi + \eta).\sin(2.k.\pi + \eta) - 0 = (2.k.\pi + \eta).\sin(\eta) \geq 2.k.\pi.\sin(\eta)$.

Jouons à présent sur k en le prenant « grand ».

5. quand je dis « bornée », je me contente de majorée en valeur absolue

6. l'équivalence « lipschitzienne » et « dérivée bornée » ne s'applique que si on sait que f est déjà bel et bien dérivable

Le physicien dira même « si k est grand, $2.k.\pi.\sin(\eta)$ est grand et c'est plus grand que 1 ».

Le matheux se sent obligé de dire « je prends $k = \left\lceil \frac{1}{2.\pi.\sin(\eta)} \right\rceil + 1$ ». Et ceci n'est ni petit ni grand. Ceci est juste « bien choisi ».

Bref, elle n'est pas uniformément continue, à cause de ses taux d'accroissement trop grands.

Et $x \mapsto x.\sin(\sqrt{x})$?

Sur les segments, même argument.

Et sur $\mathbb{R} : g' = x \mapsto \sin(\sqrt{x}) + \frac{\sqrt{x}}{2}.\cos(x)$ et $g'(0) = 0$ par limite des taux d'accroissement.

On a les mêmes problèmes.

◦39◦

Montrez que l'application tangente est lipschitzienne sur $[-a, a]$ pour a strictement plus petit que $\pi/2$ (sans dériver, mais en pensant à $\frac{\sin(b-a)}{\cos(b).\cos(a)}$).

Lipschitzienne sur I c'est $\exists K \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq K.|x - y|$.

Au fait, quelles applications vérifient $\exists K \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| < K.|x - y|$?

A faire.

◦40◦

♥ Combien y a-t-il d'applications continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0, 1, 2, 3\}$?

Combien y a-t-il d'applications uniformément continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0, 1, 2, 3\}$ (attention, à $x < 0 < y$ avec $|y - x| \leq \mu_\epsilon$).

♥ Combien il y a d'applications continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0, 1, 2, 3\}$?

Comment peut-on compter ça ? facilement !

Une application continue sur un intervalle vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Elle ne peut donc pas sauter d'un entier à un autre.

Toute application continue de $] -\infty, 0[$ dans $\{0, 1, 2, 3\}$ est constante.

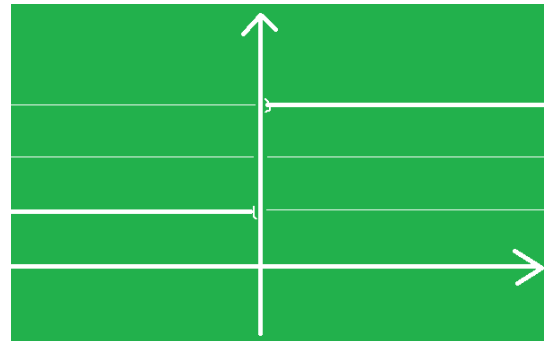
Il n'y a donc que quatre applications possibles.

Toute application continue de $]0, +\infty[$ dans $\{0, 1, 2, 3\}$ est constante.

Il n'y a donc que quatre applications possibles.

Et ensuite, on recolle. Et l'exigence de continuité sur $\mathbb{R}^*$ n'impose rien.

L'exemple ci contre est bien une application continue de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$.



Ne me dites pas « mais en 0 ». E, 0 elle n'est pas définie, on ne parlera pas de continuité. Certes, on ne peut pas la prolonger par continuité en 0, mais la question n'est pas là.

Il y a donc seize (16) applications qui conviennent.

Mais l'uniforme continuité fait retomber sur la même constante des deux côtés.

En effet, il suffit de prendre la quantification de l'uniforme continuité avec $\epsilon = 1/4$ par exemple ici :

$$\exists \eta_{1/4}, \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2, |y - x| \leq \eta_{1/4} \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq 1/4$$

On prend alors $x = -\frac{\eta_{1/4}}{2}$ et $y = \frac{\eta_{1/4}}{2}$.

$f(x)$ est la constante sur $] -\infty, 0[$ et $f(y)$ celle sur $]0, +\infty[$.

ce sont deux entiers de $\{0, 1, 2, 3\}$, distants de moins de $\frac{1}{4}$.

Ils sont égaux.

Il n'y a donc cette fois que quatre applications uniformément continues.

◦41◦

Montrez que si f est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ alors $x \mapsto \sqrt{1+f(x)}$ l'est aussi.

$t \mapsto \sqrt{1+t}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.

On vérifie :

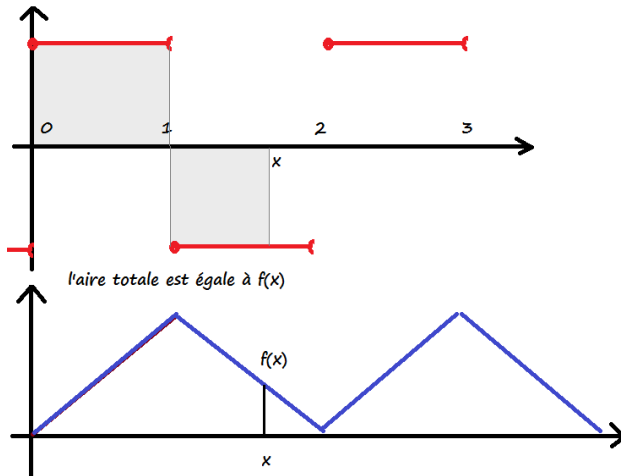
$$|\sqrt{1+a} - \sqrt{1+b}| = \frac{|b-a|}{\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b}} \leq \frac{|b-a|}{1+1}$$

On parle ensuite de composée d'applications lipschitziennes.

Des fois, c'est tout bête...

◦42◦

Montrez que $x \mapsto \int_0^x (-1)^{[t]}.dt$ est lipschitzienne mais pas dérivable. Même question avec $x \mapsto \int_0^x (-1)^{[t]}. \sin(t).dt$.



On peut tracer l'application et vérifier qu'elle n'est pas dérivable en 1 par exemple (deux demi-tangentes distinctes). Mais pour ce qui est de lipschitzienne, on va le faire sans effort.

Par la relation de Chasles, en encadrant.

Normalement, tout est dit, mais je vous le fais.

On se donne x et y et on calcule $f(y) - f(x)$ en appelant f l'application.

Par relation de Chasles : $f(y) - f(x) = \int_x^y (-1)^{[t]}.dt$ (sans partie entière, $(-1)^x$ n'aurait pas eu de sens).

On passe à la valeur absolue, et on utilise l'inégalité triangulaire sur les intégrales : $\left| \int_a^b \varphi(t).dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)|.dt$ (en supposant $a < b$ sans perte de généralité).

On a donc $|f(y) - f(x)| \leq \int_x^y |(-1)^t|.dt = \int_x^y 1.dt = y - x$ (ça c'est pour $x \leq y$ sinon, c'est $|f(y) - f(x)| \leq \int_y^x |(-1)^t|.dt = \int_y^x 1.dt = |y - x|$).

L'application est lipschitzienne de rapport 1.

Celle avec un sinus se traite de la même façon, même si on ne sait pas trop comment la représenter...

◦43◦

Montrez que $x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2}.dt$ est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On va revenir aux résultats simples. Comme cette application est dérivable, il suffit de borner sa dérivée.

On dérive proprement (voir feuille de rentrée) : on note F une primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ (définie sur $\mathbb{R}$). Notre application est alors $x \mapsto F(2x) - F(x)$.

Elle se dérive en $x \mapsto 2.F'(2x) - F'(x)$.

On obtient donc $x \mapsto 2.e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.

On encadre par 2 et -1 (ou on majore brutalement en valeur absolue par 3).

La dérivée est bornée, l'application est lipschitzienne. Et nul ne nous demande d'optimiser le rapport de Lipschitz.

◦44◦

On admet (vous le verrez en Spé) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}.dt = \frac{\pi}{2}$. Montrez : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}.dt = \frac{\pi}{2}$.

On va quand même intégrer à distance finie, y compris au voisinage de 0.

La première intégrale est la limite de $\int_a^b \frac{\sin(t)}{t}.dt$ quand a tend vers 0 et b vers l'infini. En 0, c'est juste l'application sous le signe intégrale qui se prolonge par continuité. A l'infini, c'est la primitive non explicite qui a une limite.

On intègre par parties la nouvelle

$\frac{1}{t^2}$	$\leftrightarrow$	$-\frac{1}{t}$
$\sin^2(t)$	$\hookrightarrow$	$2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)$

$$\int_a^b \frac{\sin^2(t)}{t^2} \cdot dt = \left[\frac{\sin^2(t)}{t} \right]_a^b + \int_a^b \frac{2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)}{t} \cdot dt = \frac{\sin^2(a)}{a} - \frac{\sin^2(b)}{b} + \int_a^b \frac{\sin(2t)}{t} \cdot dt.$$

Là, il y a une idée géniale : $\theta = 2t$ dans la seconde. Et le truc est d'autant plus surprenant que $\frac{dt}{t} = \frac{d\theta}{\theta}$ (invariance logarithmique).

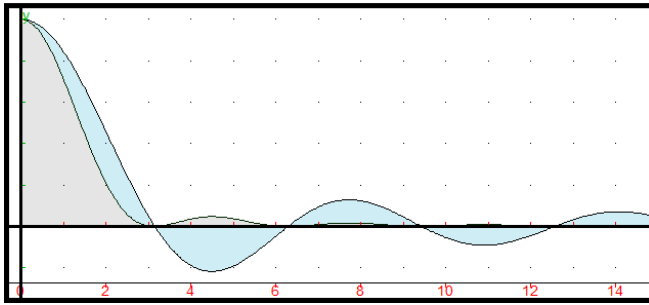
$$\int_a^b \frac{\sin^2(t)}{t^2} \cdot dt = \frac{\sin^2(a)}{a} - \frac{\sin^2(b)}{b} + \int_{2a}^{2b} \frac{\sin(\theta)}{\theta} \cdot d\theta$$

On fait tendre a vers 0 : $\frac{\sin^2(a)}{a} = \frac{\sin(a)}{a} \cdot \sin(a)$ tend vers 1×0

On fait tendre b vers l'infini, le quotient à numérateur borné $\frac{\sin^2(b)}{b}$ tend vers 0.

Et l'intégrale $\int_{2a}^{2b} \frac{\sin(\theta)}{\theta} \cdot d\theta$ tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\theta)}{\theta} \cdot d\theta$ dont on nous a dit qu'elle existait, et qu'elle valait $\frac{\pi}{2}$ (certains livres lui donnent même un nom).

$$\text{On a bien } \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} \cdot dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\theta)}{\theta^2} \cdot d\theta \right) = \frac{\pi}{2}$$



Pour $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} \cdot dt$ on a comme pour une série à termes positifs des aires positives de plus en plus petites (en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ au $n^{\text{ième}}$ intervalle de longueur π) qui s'additionnent mais donnent au total une aire finie.

Pour $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\theta)}{\theta^2} \cdot d\theta$, des aires algébriques sont positives, d'autres négatives. On pense davantage aux séries alternées...

Pour information

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \cdot dt$	$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} \cdot dt$	$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^3} \cdot dt$	$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(t)}{t^4} \cdot dt$	$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t^5} \cdot dt$	
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3 \cdot \pi}{8}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{115 \cdot \pi}{384}$	

mais n'essayez pas d'en déduire des choses.

◻45◻

♥ Montrez sans forcément la calculer (ni même la dériver) que $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2}$ est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Certes, elle se calcule : $\int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_0^x \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \int_0^x \frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$.

On trouve au final $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \text{Arctan}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$ (on a changé de variable en $u = \frac{2t+1}{\sqrt{3}}$).

On décortique : $t \mapsto \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$ et chaque terme est lipschitzien.

On peut aussi la dériver : $x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$.

On minore puis majore : $1+x+x^2 \geq \frac{3}{4}$ (minimum d'un trinôme, et même factorisation canonique plus haut) :

$$\frac{1}{1+x+x^2} \leq \frac{4}{3}.$$

La dérivée est bornée, c'est fini.

Mais un vrai matheux sait payer le prix minimum. On se donne x et y avec x plus petit que y sans restreindre la généralité.

On calcule la différence : $\int_0^y \frac{dt}{1+t+t^2} - \int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_x^y \frac{dt}{1+t+t^2}$ (relation de Chasles).

Cette différence est positive, mais on la majore aussi : la fonction sous le signe somme est positive, mais aussi plus petite que $\frac{4}{3}$ (voir « majoration de la dérivée »).

On encadre donc : $\int_x^y 0 \cdot dt \leq \int_x^y \frac{dt}{1+t+t^2} \leq \int_x^y \frac{4}{3} \cdot dt : 0 \leq f(y) - f(x) \leq 4 \cdot \frac{y-x}{3}$.

L'application est bien lipschitzienne, et le rapport est le même que dans les autres preuves.

◦46◦

♥ Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrez que f est bornée. La méthode astucieuse consistera à définir $\varphi = \theta \mapsto f(\tan(\theta))$ sur $] -\pi/2, \pi/2[$ et même si possible $] -\pi/2, \pi/2[$.

En notant α la limite de f à l'infini positif, et en quantifiant cette propriété, on a f bornée par $\alpha - 1$ et $\alpha + 1$ sur $[\Gamma_1, +\infty[$.

En notant β la limite de f à l'infini négatif, et en quantifiant cette propriété avec d'autres variables utiles, on a f bornée par $\beta - 1$ et $\beta + 1$ sur $] -\infty, \Gamma_1]$.

Par compacité et continuité, f est bornée sur le segment $[\Gamma_1, \Gamma_1]$, on va dire par M et μ .

Globalement, f est majorée sur $\mathbb{R}$ par $\max(\beta + 1, M, \alpha + 1)$ et minorée par $\max(\beta - 1, \mu, \alpha - 1)$.

La preuve stylée fait appel à $g = \theta \mapsto f(\tan(\theta))$, continue, comme composée d'applications continues.

On la prolonge par composition de limites : $g(-\pi/2) = \beta$ (limite à droite) et $g(\pi/2) = \alpha$ (limite à gauche seulement).

g est à présent continue sur le segment $[-\pi/2, \pi/2]$. Elle est bornée.

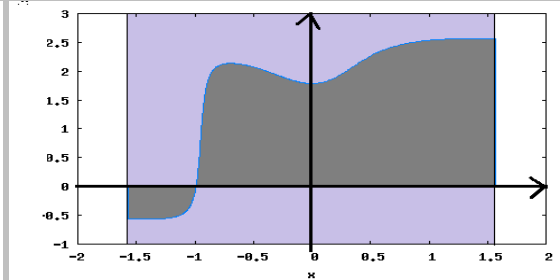
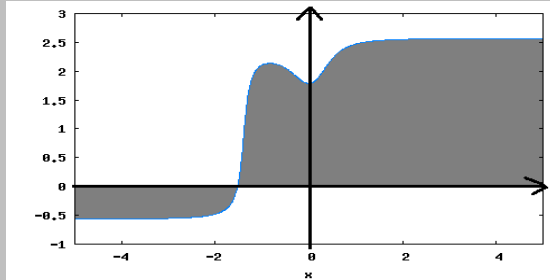
Par restriction, elle est bornée $]-\pi/2, \pi/2[$ en gardant les mêmes bornes.

On a donc $\exists(\mu, M), \forall \theta \in]-\pi/2, \pi/2[, \mu \leq f(\tan(\theta)) \leq M$.

On change de variable : $\exists(\mu, M), \forall t \in \mathbb{R}, \mu \leq f(t) \leq M$. f est bornée.

◦47◦

♥ Donnez une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas uniformément continue. Soit maintenant f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite a en $-\infty$ et une limite b en $+\infty$. Montrez que f est bornée. On veut montrer que f est uniformément continue. On pose alors : $\varphi = \theta \mapsto f(\tan(\theta))$.



Montrez que φ se prolonge par continuité en $-\pi/2$ et en $\pi/2$. Montrez que φ est alors uniformément continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$ puis sur $] -\pi/2, \pi/2[$. Déduez par composition que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Comme on peut aller de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que le $\mathbb{R}$ de départ n'est pas un segment, on peut trouver des applications continues (en tout point), qui ne sont pas uniformément continues.

Par exemple $x \mapsto x^2$. Continue en tout point.

Mais pour tout η proposé, on pourra trouver x et y vérifiant $|x - y| \leq \eta$ et pourtant $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| > 1$.

C'est bien $\exists \varepsilon_0 = 1, \forall \eta, \exists(x, y), |x - y| \leq \eta$ et (pourtant) $|f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$.

On prendra $x = a - \frac{\eta}{2}$ et $x = a + \frac{\eta}{2}$ (avec a à préciser). On a bien $|x| \leq \eta$.

Ensuite $|x^2 - y^2| = 2 \cdot a \cdot \eta$ (calcul), et on avoue alors qu'on a choisi $a = \frac{1}{\eta}$.

Si maintenant f a une limite à l'infini (en fait à chaque infini), alors :

f est bornée sur un certain $] -\infty, A]$ (par $a - 1$ et $a + 1$)	Écrire $\forall \varepsilon, \exists G_\varepsilon, \forall x, x \leq G_\varepsilon \Rightarrow f(x) - a \leq \varepsilon$ et prendre $\varepsilon = 1$.
f est bornée sur un certain $[B, +\infty[$ (par $b - 1$ et $b + 1$)	Écrire $\forall \varepsilon, \exists H_\varepsilon, \forall x, x \geq H_\varepsilon \Rightarrow f(x) - b \leq \varepsilon$ et prendre $\varepsilon = 1$.
f est bornée sur ce qu'il reste (on ne sait pas par quoi, mais elle l'est)	On applique le premier théorème de compacité : : f est continue de $[A, B]$ dans $\mathbb{R}$ donc elle est bornée. Ce théorème ayant tendance à s'appeler « théorème de bornes atteintes » au fil des ans. Je n'ai rien contre ça.

Globalement, f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Pour l'uniforme continuité, on peut ruser de la même façon.

Sur $[H_{\varepsilon/2}, +\infty[$, on a (que x et y vérifient ou non $|x - y| \leq \text{quelquechose} : |f(x) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
et $|f(y) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
d'où $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

De même, sur $] -\infty, G_{\varepsilon/2}]$ on a la même conclusion.

Et sur $[G_{\varepsilon/2}, H_{\varepsilon/2}]$, on applique le théorème de Heine. On a $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ à condition d'avoir $|x - y| \leq \eta_\varepsilon$.

Et au final, on recolle tout.

Mais on va faire mieux, en ramenant l'infini à portée de main avec tangente et arctangente...

C'est là que les maths c'est beau. De belles idées, lumineuses qui épargnent même les recours aux découpages d'épsilon en quatre.

On définit donc $\theta \mapsto f(\tan(\theta))$ de $] -\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ (oui, la tangente ne pose pas de problème, on s'approche du bord, mais on ne met pas le pied dessus).

Elle est continue, en tant que composée d'applications continues.

Mais elle se prolonge par continuité en $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$, par composition des limites : $\theta \rightarrow \frac{\pi^-}{2}$
 $\tan(\theta) \rightarrow +\infty$
 $f(\tan(\theta)) \rightarrow b$

De même, en $\left(\frac{-\pi}{2}\right)^+$ on prolonge par la valeur a .

Maintenant, quitte à l'appeler encore φ elle est définie et continue de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$.

Mais on est sur un segment⁸.

Elle est uniformément continue.

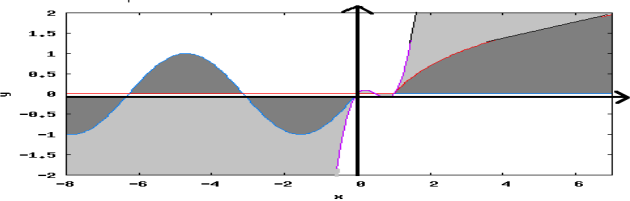
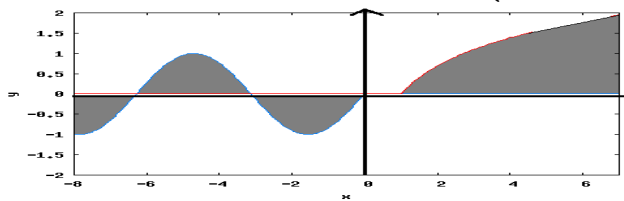
Par restriction de domaine, φ est encore uniformément continue sur l'intervalle ouvert.

Et pour retrouver f on compose : $f = \varphi \circ \text{Arctan}$ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en passant par $] -\pi/2, \pi/2[$).

Comme φ et Arctan sont uniformément continues, f l'est encore (Arctan est lipschitzienne donc uniformément continue).

◻48◻

Ajustez un polynôme P pour que $x \mapsto \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x < 0 \\ \ln(x) & \text{si } x > 1 \\ P(x) & \text{sinon} \end{cases}$ soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.



7. le petit moins pour dire « par valeur inférieure

8. ce que $] -\pi/2, \pi/2[$ n'était pas, on est d'accord

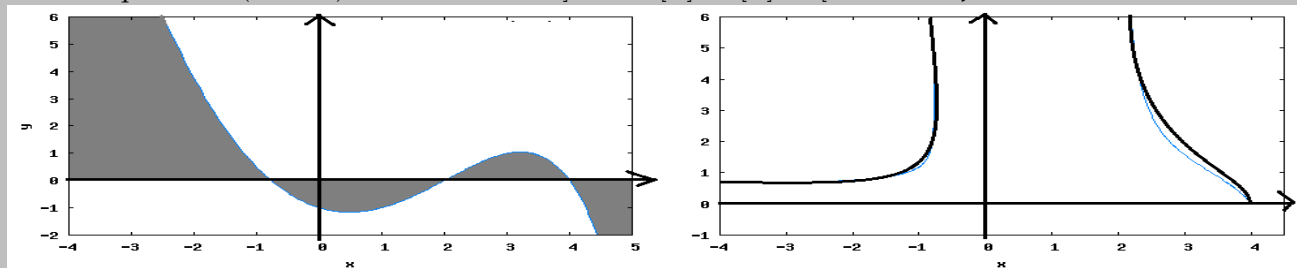
◦49◦

On définit $\varphi = x \mapsto x^2 - 2^x$. Montrez que φ' s'annule au moins une fois sur $]2, 4[$.

Quitte à étudier φ'' et même $\varphi^{(3)}$, montrez que φ admet trois racines.

Écrivez un script Python qui détermine la racine négative de φ à 10^{-3} près (on la notera α).

Montrez que $x \mapsto (x^2 - 2^x)^{\frac{1}{x-3}}$ est définie sur $] -\infty, \alpha[\cup]2, 3[\cup]3, 4[$ (on la notera f).



Déterminez la limite de f en α , en 2 et en 4.

Montrez que f se prolonge par continuité en 3 (la valeur sera un truc moche ou au contraire très esthétique selon vos goûts).

Montrez que f est dérivable en 4.

On doit arriver à quelque chose sur la dérivée ? C'est le théorème de Rolle. On en vérifie les hypothèses :

- φ est continue et dérivable sur $[2, 4]$
- $\varphi(2) = \varphi(4) = 0$.

Aux concours, on va vérifier que vous citez bien « continue, dérivable », sinon, ça veut dire que vous ne serez pas un ingénieur fiable. Vous allez vous précipiter sur des idées sans vérifier avant que tout est en place pour pouvoir le faire...

φ est nulle en 2 et en 4. Mais entre 0 et 2. Et avant 0 ?

On dérive :

$\varphi''(x)$	$2 - (\ln(2))^2 \cdot 2^x$
$\varphi'(x)$	$2x - \ln(2) \cdot 2^x$
$\varphi(x)$	$x^2 - 2^x$

oui, il faut écrire 2^x comme une exponentielle $2^x = e^{\ln(2) \cdot x}$. Toute autre

dérivation vous vaudra la relégation totale. Et pourtant, j'en connais...

φ'' s'annule une fois, en $\frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln\left(\frac{2}{(\ln(2))^2}\right)$ qui est un réel positif (qu'on va noter β). Et elle y change de signe, passant du positif au négatif (c'est 2^x qui va l'emporter vers $+\infty$).

φ' est donc croissante, puis décroissante.

x	$] -\infty, \beta[$	β	$] \beta, +\infty[$
$\varphi'(x)$	$-\infty$	$?$	$-\infty$

Niveau crétin : on dit que φ' va s'annuler deux fois, alors même qu'on n'en sait rien.

Niveau Terminale : on a compris la difficulté : quel est le signe de $\varphi'(\beta)$?

on doit calculer un truc indigeste ?

Niveau Sup : mais attends ! on a montré au début que φ' s'annulait au moins une fois. Vu sa forme, elle va donc s'annuler deux fois.

Maintenant, φ est donc décroissante, croissante, décroissante. Avec des limites en $-\infty$ et $+\infty$ facilement calculables.

Comme indiqué sur la vignette.

φ a donc une autre racine, avant 0 (ça, on le savait par théorème des valeurs intermédiaires généralisé !).

Mais alors quoi ? Tout ça pour si peu ? On le savait déjà !

Non, elle aurait pu peut être en avoir plus...

Sauf que là, les trois intervalles où φ est monotone sont des intervalles où elle ne peut s'annuler qu'une fois (je fais le coup de citer « homéomorphisme » ?⁹).

Bref, φ s'annule trois fois et c'est tout.

Remarque : on pouvait aussi dire que si φ avait eu plus de trois racines, le théorème de Rolle « en cascade » aurait donné trop de racines à $\varphi^{(3)}$ qui est une exponentielle, jamais nulle...

Tiens, ça me rappelle l'exercice qui dit qu'un polynôme et l'exponentielle ne se croisent pas trop...

Pour détecter la racine ?

9. non, parce que je n'ai pas dit de quoi dans quoi

```

a, b = -10, 0
while b-a >
....c = (a+b)/2
....y = c*c-2**c
....if y > 0 :
.....a = c
....else :
.....b = c

```

Comment définir $x \mapsto (x^2 - 2^x)^{\frac{1}{x-3}}$ uniquement en revenant à la forme exponentielle puisque tout bouge :

$$f(x) = \exp\left(\frac{\ln(x^2 - 2^x)}{x-3}\right).$$

Il faut que $x^2 - 2^x$ soit positif. C'est le tableau de variations de φ (ou son graphe, forme évoluée de tableau de variations) qui le dit : avant α ou « entre 2 et 4.

A ce stade : $] - \infty, \alpha[\cup]2, 4[$.

Mais il faut aussi éviter 3 à cause du dénominateur. Et on écrit $] - \infty, \alpha[\cup]2, 3[\cup]3, 4[$ plutôt que $(] - \infty, \alpha[\cup]2, 4[) - \{4\}$. Il faut impérativement découper en intervalle. Si vous n'avez toujours pas compris que le mot intervalle intervient dans à peu près tous nos théorèmes d'analyse, faites des maths avec votre chat, pas avec moi (valeurs intermédiaires, homéomorphisme, accroissements finis, Rolle...).

	$x^2 - 2^x$.	$\ln(x^2 - 2^x)$.	$\frac{\ln(x^2 - 2^x)}{x-3}$.	$f(x) = \exp\left(\frac{\ln(x^2 - 2^x)}{x-3}\right)$.
α par valeur inférieure	0^+	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
2 par valeur supérieure	0^+	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
4 par valeur inférieure	0^+	$-\infty$	$-\infty$	0

Oui, encore une fois, un tableau. pas de blabla, pas de formules partout. mais un truc que le lecteur comprend tout de suite.

Le graphe offert dans la capsule de l'énoncé confirme.

Quand x tend vers 3, on ajoute une ligne

	$x^2 - 2^x$.	$\ln(x^2 - 2^x)$.	$\frac{\ln(x^2 - 2^x)}{x-3}$.	$f(x) = \exp\left(\frac{\ln(x^2 - 2^x)}{x-3}\right)$.
3 par valeur inférieure	1	0	?	?
3 par valeur supérieure	1	0	?	?

Oui, on n'est guère avancé.

Mais si on définit $t \mapsto \ln(t^2 - 2^t)$ qu'on note g , la forme indéterminée $\frac{\ln(t^2 - 2^t)}{t-3}$ s'écrit en fait $\frac{g(t) - g(3)}{t-3}$.

Elle tend vers $g'(3)$.

Il nous suffit donc de calculer $g'(3)$ par les formules simples : $g'(x) = \frac{2x - \ln(2) \cdot 2^x}{x^2 - 2^x}$.

On a donc la même limite à droite et à gauche : $\frac{\ln(x^2 - 2^x)}{x-3} \xrightarrow{x \rightarrow 3} \frac{6 - 8 \cdot \ln(2)}{1}$

puis $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 3} \exp(6 - 8 \cdot \ln(2))$.

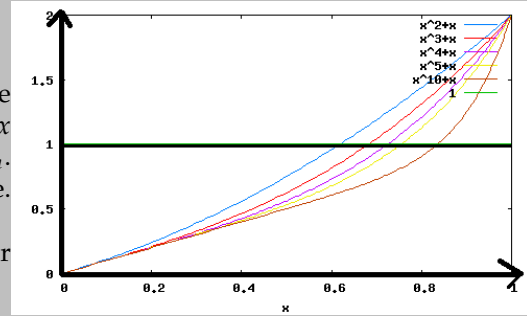
On a trouvé une limite. Et elle vaut $\frac{e^6}{256}$ Pourquoi pas.

En 4, on doit étudier $\frac{f(x) - f(4)}{x-4}$.

A l'École Nationale de Robotique / Université de Technologie, cent cinquante élèves suivent les cours d'anglais, cent suivent les cours de chinois, trente sont bilingues (anglais/chinois) et quatre vingt dix ne suivent aucune de ces deux langues. Combien y a-t-il d'élèves ?

♡ Montrez que pour tout n l'équation $x^n + x = 1$ admet une unique racine sur $[0, 1]$ (on introduira l'application $x \mapsto x^n + x$ que l'on pourra noter φ_n). La racine en question sera notée x_n . Montrez $\varphi_{n+1}(x_n) < 0$. Dédisez que la suite (x_n) est croissante. Montrez qu'elle converge.

On note α sa limite et on suppose $\alpha < 1$. Montrez alors par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n = 0$. Dédisez $\alpha = 1$. Concluez.



◦51◦

◦52◦

Rappel des règles : sur chaque ligne et sur chaque colonne, il y a chacun des cinq entiers 1, 2, 3, 4 et 5. Et il des signes « plus grand que » et « plus petit que » ; bien entendu, ils doivent être corrects.

				>		5		>			
$\wedge$					$\wedge$						
	>	3		$\wedge$		1	<	2			
$\vee$					$\vee$						
		>	2	>	1	3		et			<
									$\wedge$		>
1				$\vee$		4			$\vee$		<
			>		>				$\vee$		<
										4	5
											<
											3

◦53◦

Dérivez $a \mapsto \int_{1/a}^a \frac{\ln(x)}{1+x^2} \cdot dx$, puis calculez $\int_{1/a}^a \frac{\ln(x)}{1+x^2} \cdot dx$ et $\int_{1/a}^a \frac{\text{Arctan}(x)}{x} \cdot dx$ pour tout a .

Sur ce type de question en $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) \cdot dt$, soit on a l'habitude et on le fait sans problème, soit on trouve plus prudent de baliser le terrain en introduisant une notation.

On note F une primitive de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ (on la nomme sans la connaître).

On doit alors dériver $a \mapsto F(a) - F\left(\frac{1}{a}\right)$.

On trouve $F'(a) + \frac{1}{a^2} \cdot F'\left(\frac{1}{a}\right)$ (on n'a pas oublié le $\frac{-1}{a^2}$, c'est compris).

On revient à f :

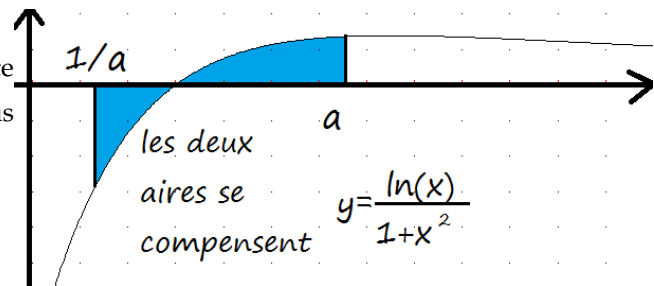
$$\left(a \mapsto \int_{1/a}^a \frac{\ln(x)}{1+x^2} \cdot dx\right)' = \left(a \mapsto \frac{\ln(a)}{1+a^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\ln(1/a)}{1+\frac{1}{a^2}}\right)$$

Trop fort ! On trouve 0 ! Si si.

L'application $a \mapsto \int_{1/a}^a \frac{\ln(x)}{1+x^2} \cdot dx$ est donc constante sur l'intervalle d'étude (oubliez le mot intervalle et vous n'êtes pas digne d'être en Sup).

Et pour a égal à 1, les deux bornes sont confondues.

On a donc $\int_{1/a}^a \frac{\ln(x)}{1+x^2} \cdot dx = 0$ pour tout a .



On note ensuite G une primitive de $x \mapsto \frac{\text{Arctan}(x)}{x}$ et le même calcul donne

$$\left(a \mapsto \int_{1/a}^a \frac{\text{Arctan}(x)}{x} \cdot dx\right)' = \left(a \mapsto \frac{\text{Arctan}(a)}{a} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{a}}\right)$$

Cette fois, l'épiphanie¹⁰ est dans $\text{Arctan}(a) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$ pour a positif.

10. au sens de « compréhension soudaine de l'essence ou de la signification de quelque chose »

On a une dérivée en $a \mapsto \frac{\pi}{2.a}$ et la valeur 0 en $a = 1$: $\int_{1/a}^a \frac{A \tan(x)}{x} . dx = \pi . \frac{\ln(a)}{2}$

Et tout ça sans avoir de primitive explicite. Vous avez le droit de trouver superbe de savoir trouver le pH ou le pKa d'une solution saturée d'hydroxyde de sodium à pression constante, mais sincèrement, s'il y a bien des résultats qu'on va trouver esthétiques et beaux, c'est quand même ceux où une intégrale entre des bornes bien choisies se calcule alors qu'on n'a pas de primitive explicite...

Bon, ensuite, je sais, l'essentiel pour vous, c'est d'intégrer une bonne école, et donc de réussir les concours. Que vous êtes matérialistes...

54

A	B	C	D
[0, 0, 4, 4, 4, 4]	[3, 3, 3, 3, 3, 3]	[2, 2, 2, 2, 6, 6]	[1, 1, 1, 5, 5, 5]

Ce sont des dés équilibrés à six faces (appelés dés de Bradley Effron).

Montrez que la probabilité que A batte B est $2/3$.

Montrez que la probabilité que B batte C est $2/3$.

Montrez que la probabilité que C batte D est $2/3$.

Quelle est la probabilité que D batte A ?

On fait se battre A contre B. A n'a que deux issues possibles, B n'en a qu'une :

$P(A = 0) = \frac{1}{3}$	$P(A = 4) = \frac{2}{3}$	$P(B = 3) = 1$
--------------------------	--------------------------	----------------

	A = 0	A = 4
B = 3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

	A = 0	A = 4
B = 3		$\frac{2}{3}$

	A	B	C	D
A		$\frac{1}{3}$		
B	$\frac{2}{3}$			
C				
D				

On commence à remplir pour dire que A bat B avec probabilité $\frac{2}{3}$ (et que B ne bat A qu'avec

probabilité $\frac{1}{3}$).

En revanche, B bat C deux fois sur 3 (B a toujours 3, et C ne fait mieux qu'une fois sur trois).

	A	B	C	D
A		$\frac{1}{3}$		
B	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$	
C		$\frac{2}{3}$		
D				

		C = 2 (p=2/3)	C = 6 (p=1/3)	
D = 1 (p=1/2)		$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	11
D = 5 (p=1/2)		$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	

Les variables aléatoires des dés sont indépendantes, donc les probabilités des cases sont des produits.

		C = 2 (p=2/3)	C = 6 (p=1/3)	
C gagne sur D :	D = 1 (p=1/2)	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	Total : $P(C > D) = \frac{2}{3}$ (et par soustraction
	D = 5 (p=1/2)		$\frac{1}{6}$	

$P(D > C) = \frac{1}{3}$).

11. j'ai laissé des sixièmes partout pour bien vérifier que la somme des probabilités vaut 1

Bilan provisoire :

	A	B	C	D
A		$\frac{1}{3}$		
B	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$	
C		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$
D			$\frac{2}{3}$	

Jusque là, $A > B$ $B > C$ $C > D$ à chaque fois avec probabilité $\frac{2}{3}$.

Mais la surprise va venir de D contre A :

	$D = 1$ ($p=1/2$)	$D = 5$ ($p=1/2$)
$A = 0$ ($p=1/3$)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$A = 4$ ($p=2/3$)	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$

A gagne sur D :

	$D = 1$ ($p=1/2$)	$D = 5$ ($p=1/2$)
$A = 0$ ($p=1/3$)		
$A = 4$ ($p=2/3$)	$\frac{2}{6}$	

dans un cas sur trois.

C'est surprenant $A > B$ $B > C$ $C > D$ $D > A$ à chaque fois avec probabilité $\frac{2}{3}$

A est meilleur que B

B est meilleur que C

C est meilleur que D

D est meilleur que A.

La relation « être meilleur que au moins une fois sur trois » n'est pas transitive.

Jouons vraiment : Les dés sont posés sur la table. Je vous laisse en choisir un, et j'en prend un à mon tour (je choisis bien évidemment^a).

On lance plusieurs fois les dés.

Je vous bats deux fois sur trois. Pas de bol pour vous.

Vous en avez marre, je vous dis « on change de dés ? ».

Vous prenez le mien, et moi évidemment, je prend le suivant dans la liste.

Et à nouveau, je vous bats deux fois sur trois.

Quel que soit le dé que vous choisissiez, je prendrai le bon pour vous battre deux fois sur trois. Le fait de vous laisser le choix est en fait un désavantage pour vous... Sympathique, non ?

a. si vous avez pris B et que je prends B aussi, ça va être assez peu intéressant comme jeu

Il existe d'autres modèles assez similaires à ces dés, avec d'autres faces et d'autres probabilités, mais toujours « non transitifs ».

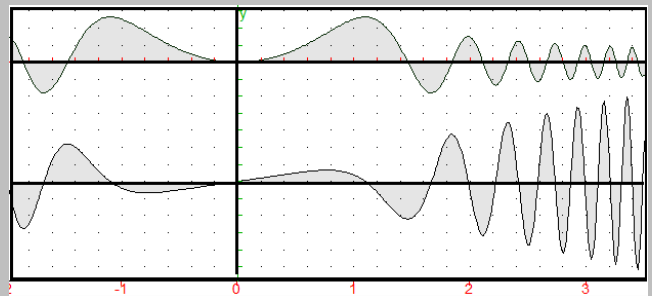
♥ On définit : $f = x \mapsto \frac{\sin(x^3)}{x}$. Prolongez la par continuité en 0.

Montrez qu'elle est dérivable, même en 0.

♠ Montrez que f est uniformément continue sur tout segment $[-a, a]$ et sur $\mathbb{R}$.

Montrez que f' n'est pas bornée.

(Rappel : on a montré $(f' \text{ bornée}) \Rightarrow (f \text{ lipschitzienne}) \Rightarrow (f \text{ uniformément continue})$ mais on voit ici qu'il n'y a pas de réciproque.



f n'est pas définie en 0. Mais $f(x)$ est équivalent à $\frac{x^3}{x}$ quand x tend vers 0.

$f(x)$ tend vers 0 en 0. On posera $f(0) = 0$.

En toute rigueur, on dit qu'on définit une nouvelle application $\bar{f}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\bar{f}(0) = 0$ et $\bar{f}(x) = f(x)$ pour x non nul.

Et c'est elle qui va être dérivable et tout et tout.

Pour ce qui est de la dériver en 0, il ne sert à rien de calculer f' ailleurs qu'en 0 et de regarder ensuite si f' a une limite en 0.

Déjà, ça conduit à des calculs moches (mais si vous préférez calculer plutôt que raisonner...).

Et ensuite, ça revient à dire « f' doit bien être continue en 0 ». Ce qui est une grosse question.

Non, simplement, pour dériver en 0, on calcule les taux d'accroissement : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Comme on a posé $f(0) = 0$, ce taux devient $\frac{\sin(x^3)}{x}$ c'est à dire $\frac{\sin(x^3)}{x^2}$.

Ce quotient (indéterminé) est équivalent à $\frac{x^3}{x^2}$. Il tend vers 0.

f est dérivable en 0 et $f'(0)$ vaut 0.

On a une tangente horizontale, ce qui était prévisible car l'application était paire.

Mais elle eut pu être paire et n'avoir pas de tangente (comme la valeur absolue).

Sur chaque segment $[-a, a]$, f est uniformément continue, puisqu'elle est continue.

C'est le théorème du mathématicien prussien de Göttingen, Berlin et Königsberg : Eduard Heine.

Pour la continuité uniforme sur $\mathbb{R}$ tout entier, on ne peut pas passer de uniformément continue sur tout segment à uniformément continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

En effet, il n'y a aucun résultat en ce sens.

Et même, $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur tout segment, mais pas sur $\mathbb{R}$ entier.¹²

Mais ici, gros avantage : $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini.

Un exercice classique (inclus dans ce TD) dit si f est continue sur $] -\infty, +\infty[$

a une limite finie a en $-\infty$

a une limite finie b en $+\infty$

alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

On peut l'appliquer ici : f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Graphiquement, on sent qu'on peut utiliser des boîtes assez fines de hauteur ε .

On a une formule pour f' : $f'(x) = 3x \cdot \cos(x^3) - \frac{\sin(x^3)}{x^2}$.

Il suffit d'avoir dérivé proprement comme un produit, et tout vient en place très visiblement.

Sauf en 0 où on prend $f'(0) = 0$.

Ce qui ne se devinait d'ailleurs guère avec cette formule moche...

Ceci pour ceux qui pensent calculer une dérivée après prolongement par la limite de f' au lieu des taux d'accroissement de f ...

Pour montrer que cette dérivée n'est pas bornée, on va exploiter le terme en $3x \cdot \cos(x^3)$ puisque l'autre tend vers 0 à l'infini (et reste borné en 0).

On calcule f' là où le cosinus vaut 1 : $f'(\sqrt[3]{2k\pi}) = 3\sqrt[3]{2k\pi} - \text{dsp} \frac{0}{(2k\pi)^{2/3}}$.

Cette quantité tend vers l'infini quand k tend vers l'infini.

f' ne peut donc pas être bornée.

On a donc bien une application uniformément continue mais non lipschitzienne.

◦56◦

Soit f continue. Montrez que $x \mapsto \int_0^\pi \sin(x.t).f(t).dt$ est lipschitzienne.

Attention aux variables.¹³

12. oui, $\mathbb{R}$ n'est pas un segment ! c'est un intervalle non borné

13. $x \mapsto \int_0^\pi \sin(x.t).f(t).dt$ n'est pas f et n'est pas non plus une primitive de f ou d'une fonction de la forme $f \times g$, c'est une integrale à paramètre contenant f sous le signe somme

On pose $F = x \mapsto \int_0^\pi \sin(x.t).f(t).dt$.

On calcule et on majore pour x et y donnés : $|F(x) - F(y)| = \left| \int_0^\pi \sin(x.t).f(t).dt - \int_0^\pi \sin(y.t).f(t).dt \right|$
 $|F(x) - F(y)| = \left| \int_0^\pi (\sin(x.t) - \sin(y.t)).f(t).dt \right|$
 $|F(x) - F(y)| \leq \int_0^\pi |\sin(x.t) - \sin(y.t)| \cdot |f(t)|.dt$
 $|F(x) - F(y)| \leq \int_0^\pi |x.t - y.t| \cdot |f(t)|.dt$
 $|F(x) - F(y)| \leq |x - y| \cdot \int_0^\pi |t.f(t)|.dt$

L'intégrale $\int_0^\pi |t.f(t)|.dt$ est un réel qui ne dépend plus de x et y . C'est bon.

◦57◦

Montrez que $x \mapsto \operatorname{Argch}\left(\frac{x+1}{x}\right) + \ln(x)$ se prolonge par continuité en 0 par la valeur $\ln(2)$.

En 0 on a une forme indéterminée : $\frac{x+1}{x}$ tend vers l'infini, son argument cosinus hyperbolique le suite, tandis que le logarithme tend vers $-\infty$.

Mais on rappelle : $\operatorname{Argch}(t) = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})$ (c'est dans le cours).

Je vous le refais. On pose $u = \operatorname{Argch}(t)$.

On traduit : $\operatorname{ch}(u) = t$.

On traduit encore : $\frac{e^u + e^{-u}}{2} = t$.

Les deux réels e^u et e^{-u} ont pour somme $2.t$ et pour produit 1.

Ils valent donc $t + \sqrt{t^2 - 1}$ et $t - \sqrt{t^2 - 1}$.

Par choix, on garde le plus grand qui donnera la solution positive.

La quantité cherchée est ici $\ln\left(\left(\frac{x+1}{x} + \sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 - 1}\right).x\right)$.

On la simplifie en $\ln\left(x + 1 + \sqrt{(x+1)^2 - x^2}\right)$ (rappelons que x est forcément positif).

On l'écrit $\ln\left(x + 1 + \sqrt{1 + 2.x}\right)$.

La limite en 0 ne pose plus de problème.

◦58◦

♥ Montrez que l'application $x \mapsto x^2$ est lipschitzienne sur tout segment (en revenant à la définition, et non pas en majorant la dérivée).

On doit contrôler les taux d'accroissement (lipschitzienne, c'est ça, et pas tout de suite une formule).

Or, $\frac{|x^2 - y^2|}{|x - y|} = |x + y|$. Si x et y sont pris tous deux dans un segment $[a, b]$, la somme $|x + y|$ ne peut pas devenir «trop grande».

On peut dans un premier temps supposer que notre segment est de la forme $[-K, K]$. Alors $|x|$ et $|y|$ se majorent par K .

On a donc $\forall (x, y) \in [-K, K]^2, |y^2 - x^2| \leq 2.K.|y - x|$.

L'application est lipschitzienne de rapport $2.K$ (je ne dis pas que c'est le meilleur rapport, mais on s'en moque).

Si ensuite, on travaille sur un segment $[a, b]$, on l'inclus dans $[-K, K]$ avec K bien choisi ($K = \max(|a|, |b|)$).

exemple de segment $[a, b]$	$[-4, -2]$	$[-4, 3]$	$[-1, 7]$	$[2, 5]$
segment centré $[-K, K]$	$[-4, 4]$	$[-4, 4]$	$[-7, 7]$	$[-5, 5]$

◦59◦

♥ Une application est dite lipschitzienne si il existe K vérifiant $\forall (x, y), |f(x) - f(y)| \leq K.|x - y|$. Montrez que les applications lipschitziennes ont une dérivée nulle. Déduisez que l'ensemble des applications lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 1.

On prend f vérifiant cette propriété, on se donne a et on montre que f est dérivable en a , de dérivée nulle.

On calcule en effet les taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et on trouve que leur valeur absolue est majorée par $k.|x - a|$.

Quand x tend vers a , $k.|x - a|$ tend vers 0.

Par encadrement, $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right|$ tend vers 0.¹⁴

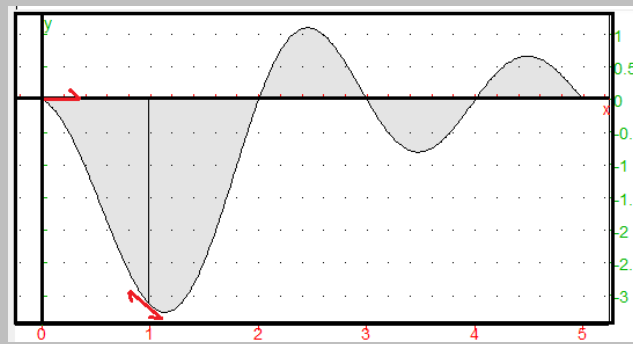
On en déduit $f'(a) = 0$ pour tout a .

Un théorème fin d'analyse permet de dire que f est constante.

Réciproquement, si f est constante, elle est lipschitzienne, de rapport... ce que vous voulez.

L'ensemble des applications lipschitziennes est donc l'espace des applications constantes. Il est de dimension 1 et une base en est $(x \mapsto 1)$.

♡ J'ai l'impression que $x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}$ se prolonge par continuité en 0 et en 1. Prouvez le. Et donne moi l'équation de la tangente en 0 puis en 1.



quand x tend vers 0, le numérateur reste borné, et le dénominateur tend vers l'infini. Le quotient tend vers 0 (on irait jusqu'à le qualifier de forme surdéterminée, du type « zéro sur l'infini »).

En 1, numérateur et dénominateur tendent vers 0. Forme indéterminée.

Mais on va poser $x = 1 + h$ et effectuer des développements limites : $\frac{\sin(\pi + \pi.h)}{\ln(1 + h)} = \frac{-\sin(\pi.h)}{\ln(1 + h)}$ par simple calcul déjà.

Ensuite, on développe vraiment ou on passe aux équivalents : $\frac{\sin(\pi + \pi.h)}{\ln(1 + h)} \sim \frac{-\pi.h}{h}$. Le quotient tend vers $-\pi$.

On veut un développement limite d'ordre 1 du quotient.

On veut la dérivée en 1 par limite des taux d'accroissement :

$$\frac{\frac{\sin(\pi.(1+h))}{\ln(1+h)} + \pi}{h} = \frac{\sin(\pi + \pi.h) + \pi.\ln(1+h)}{h.\ln(1+h)}$$

Numérateur et dénominateur tendent vers 0, mais à quelle vitesse ? Le dénominateur est équivalent à h^2 .

Pour le numérateur, on développe :

$$\sin(\pi + \pi.h) = -\sin(\pi.h) = -\pi.h + \frac{\pi^3.h^3}{6} + o(h^3)$$

$$\text{et } \pi.\ln(1+h) = \pi.\left(h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right).$$

$$\text{Le quotient est équivalent à } \frac{-\frac{\pi.h^2}{2} + o(h^2)}{h^2 + o(h^2)} \text{ et il tend vers } -\frac{\pi}{2}.$$

On pourra poser $f'(1) = -\pi/2$.

L'équation de la tangente en 1 est $y = -\pi - \frac{\pi}{2} \cdot (x - 1)$

61

Prolongez par continuité en 0 l'application $x \mapsto (x+1)^{\ln(x)}$. Montrez qu'elle est décroissante puis croissante sur $]0, +\infty[$.

On écrit $(x+1)^{\ln(x)} = e^{\ln(x) \cdot \ln(x+1)}$. Le domaine de définition est $]0, +\infty[$ pour ue $\ln(x)$ existe (et dès lors, $\ln(x+1)$ aussi, tiens !).

Quand x tend vers 0, $\ln(x)$ tend vers $-\infty$ et $\ln(1+x)$ tend vers 0. la forme est indéterminée.

On n'a pas d'équivalent du logarithme en 0 (à part $\ln(x) \sim \ln(x)$).

14. théorème d'encadrement et pas passage à la limite

Mais on a un équivalent de $\ln(1+x)$: $\ln(1+x) \sim_{x \rightarrow 0} x$.

On multiplie $\ln(1+x) \cdot \ln(x) \sim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(x)$.

Or, $x \cdot \ln(x)$ tend vers 0 en 0.

La quantité qui lui est équivalente doit aussi tendre vers 0.

Ou alors même, je le rejoue façon Terminale « je ne connais pas les équivalents, mais je me débrouille » :

$\ln(1+x) \cdot \ln(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot x \cdot \ln(x)$ le premier terme tend vers 1 et le second vers 0. Le produit tend vers 0.

Par composition, $(x+1)^{\ln(x)}$ tend vers 1.

Son sens de variations est celui de $x \mapsto \ln(x) \cdot \ln(x+1)$ (on compose ensuite par l'exponentielle, croissante)

On dérive une fois : $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{x}$.

On veut le signe de cette chose. Passons par le signe de $x \cdot \ln(x) + (x+1) \cdot \ln(x+1)$, ce sera le même.

A finir.

◦62◦

Calculez $\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x^x} \cdot dx$ (ça a l'air compliqué, mais pourtant...).

C'est quoi ce x^x ? C'est $e^{x \cdot \ln(x)}$. Avec x positif (ou nul ? oui on prolonge par continuité $x \cdot \ln(x)$ tend vers 0 en 0).

Cette intégrale existe-t-elle ? On va se ramener à des distances finies :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x^x} \cdot dx = \int_1^a (1+\ln(x)) \cdot e^{-x \cdot \ln(x)} \cdot dx.$$

Zéro effort ! C'est $u' \cdot e^u$. On peut changer de variable si nécessaire avec $u = x \cdot \ln(x)$.

On intègre explicitement en $\left[-e^{-x \cdot \ln(x)} \right]_1^a$. On trouve $1 - \frac{1}{a^a}$.

On fait tendre a vers l'infini : $\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x^x} \cdot dx = 1$

Moi je l'aime cet exercice, avec son intégrale qui a l'air si atroce et qui est si simple au final.

Soit dit en passant, le logiciel de calcul formel Xcas (ou Maple) ne trouve pas la réponse si on ne lui souffle pas le changement de variable.