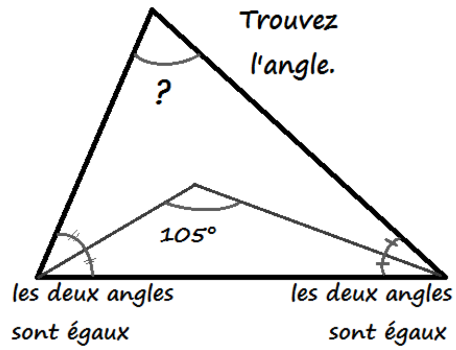
LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 5 septembre
M.P.S.I.2

2023 2024

IS00

◇ 0 ◇ L'équation $4^x + 4^x + 2^x = 1$ admet une solution assez évidente : c'est -1. Montrez que c'est la seule sur $\mathbb{R}$. 1 pt.

♣ 0 ♣ Mais quelle est la solution réelle de l'équation $4^x + 4^x + 2^x = 5$? 3 pt.

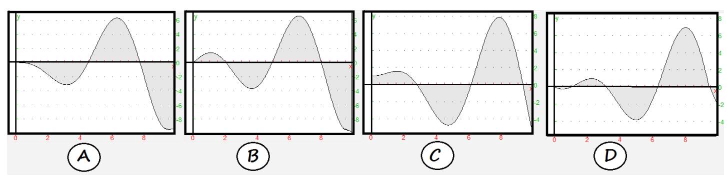


2 pt.

En admettant que le réel $a = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\ldots}}}$ (avec une infinité de termes) a un sens, justifiez qu'il vaut $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. 3 pt.

◇ 0 ◇ On constate $(1^3) + 2.(1^5) = \dfrac{1^2.2^2.3^2}{12}$, $(1^3+2^3) + 2.(1^5+2^5) = \dfrac{2^2.3^2.5^2}{12}$, $(1^3+2^3+3^3) + 2.(1^5+2^5+3^5) = \dfrac{3^2.4^2.7^2}{12}$ et $(1^3+2^3+3^3+4^3) + 2.(1^5+2^5+3^5+4^5) = \dfrac{4^2.5^2.9^2}{12}$. Ce n'est pas le hasard. Énoncez le résultat général (si possible avec des sigma) et démontrez le (par récurrence sur n). 4 pt.

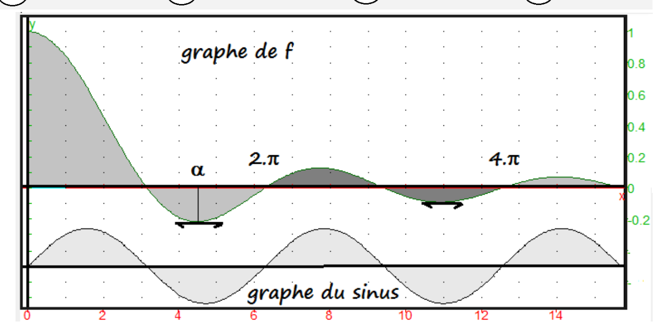
On définit $f = x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur $]0, +\infty[$. En écrivant $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ indiquez laquelle de fonctions ci-contre correspond au graphe de h sur $[0, 3.\pi]$ (justifiez). 2 pt.



Voici le graphe de f. En notant α le point où elle admet son premier minimum local, indiquez si α est avant ou après $\dfrac{3.\pi}{2}$. 2 pt.

Indiquez si son second minimum est avant ou après $\alpha + 2.\pi$ (on pourra déjà prouver $h(\alpha + 2.\pi) = 2.\pi.\cos(\alpha)$). 3 pt.

On n'a pas de primitive de f à l'aide des fonctions usuelles.



Prouvez quand même $\displaystyle\int_{2.\pi}^{4.\pi} f(t).dt > 0$ (on pourra envisager déjà $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x+2.\pi}$). 3 pt.

◇ 1 ◇ Rappelez la formule de trigonométrie pour $\cos(a-b)$. Déduisez $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. 2 pt.

◇ 2 ◇ Rappelez la formule de trigonométrie pour $\cos(2.a)$. Déduisez $\cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{16}}{8}}$. 3 pt.

◇ 3 ◇ On pose : $f = x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$. Donnez son domaine de définition. 3 pt. Montrez que f a pour dérivée $t \longmapsto \dfrac{2}{\cos(t)}$. 3 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 5 septembre
M.P.S.I.2

2023 2024
IS00
CORRECTION

Des puissances de 4 et des puissances de 2. IS00

On a effectivement
$$4^{-1}+4^{-1}+2^{-1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$$
Ensuite, l'application $x\longmapsto 4^x+4^x+2^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (somme d'exponentielles telles que $x\longmapsto e^{x.\ln(4)}$, inutile de dériver).
Elle passera donc une seule fois par la valeur 1.

Et pour l'équation $4^x+4^x+2^x=5$? On va avoir une solution pour le même type de raison qu'au dessus (avec une étude de variations plus poussée pour savoir si 3 est bien atteint).
Mais pour la valeur exacte ? Cette équation ne semble pas d'un type classique. Sauf si on l'écrit $2.4^x+2^x=3$ et même $2.(2^x)^2+2^x=3$.
On pose donc $X=2^x$ et l'équation devient un système $\left\{\begin{array}{ccc} 2.X^2 & +X & = & 5 \\ & X & = & 2^x \end{array}\right|$.

Je garde les deux informations, comme ça je vois tout de suite que X doit être positif.

On résout la première qui donne $X=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}>0$ ou $X=\dfrac{-1-\sqrt{41}}{4}<0$.
Avec la seconde équation ($X=2^x$), il ne reste que X positif et on passe au logarithme (de base 2) :
$$S_x=\left\{\log_2\left(\frac{\sqrt{41}-1}{4}\right)\right\}$$

Des fractions qui ne s'arrêtent pas. IS00

On admet l'existence de cette « fraction continuée », et on constate :
$$a=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}=\cfrac{1}{1+\left(\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}\right)}=\frac{1}{1+a}$$

Il nous reste à résoudre $a=\dfrac{1}{1+a}$ (équation du second degré par produit en croix).
Des deux racines $a_+=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $a_-=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ on ne gardera que la racine positive pour la cohérence.

Une récurrence. IS00

Le résultat général s'écrit
$$(1^3+2^3+\ldots+n^3)+2.(1^5+2^5+\ldots+n^5)=\frac{n^2.(n+1)^2.(2.n+1)^2}{12}$$

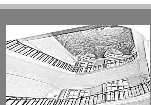
On l'écrit proprement $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k^3+2.k^5)=\frac{n^2.(n+1)^2.(2.n+1)^2}{12}$. La formule est vraie aux premiers rangs (avec valeurs 3, puis 75 puis 588 comme dans l'énoncé).
Passons à l'hérédité. On suppose la formule vraie à un rang n donné.

On calcule alors les deux membres au rang $n+1$. Et on espère pouvoir utiliser à un moment l'hypothèse de rang n pour montrer qu'ils sont égaux.

Gauche	Droite
$\sum_{k=0}^{n+1}(k^3+2.k^5) =$ $. \quad = \sum_{k=0}^{n}(k^3+2.k^5) + ((n+1)^3+2.(n+1)^5)$ $. \quad = \frac{n^2.(n+1)^2.(2.n+1)^2}{12} + ((n+1)^3+2.(n+1)^5)$ $. \quad = \frac{n^2.(n+1)^2.(2.n+1)^2}{12} + ((n+1)^3+2.(n+1)^5)$ $. \quad = (n+1)^2.\Big(\frac{n^2.(2.n+1)^2}{12} + (n+1)+2.(n+1)^3\Big)$ $. \quad = (n+1)^2.\Big(\frac{4.n^4+4.n^3+n^2}{12} + \frac{12.n+12+24.(n^3+3.n^2+3.n+1)}{12}\Big)$ $. \quad = (n+1)^2.\Big(\frac{4.n^4+28.n^3+73.n^2+84.n+36}{12}\Big)$	$\frac{(n+1)^2.(n+1+1)^2.(2.(n+1)^2+1)^2}{12} =$ $. \quad = \frac{(n+1)^2.(n+2)^2.(2.n+3)^2}{12}$ $. \quad = (n+1)^2.\frac{(n+2)^2.(2.n+3)^2}{12}$ $. \quad = (n+1)^2.\Big(\frac{4.n^4+28.n^3+73.n^2+84.n+36}{12}\Big)$

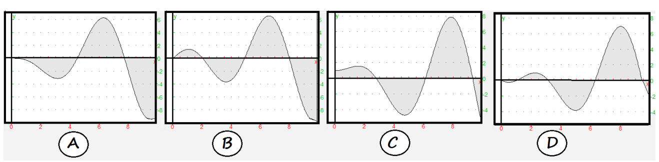
Sans la factorisation par $(n+1)^2$, les calculs sont monstrueux. D'autre part, on aurait eu interêt à passer ici de $n-1$ à n plutôt que de n à $n+1$.

Les deux colonnes fusionnent. On a prouvé la formule au rang $n+1$.
La propriété est héréditaire, et déjà initialisée. Elle est vraie pour tout n.



Une fonction. IS00

On dérive avec la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v-u.v'}{v^2}$ avec $u(t)=\sin(t)$ et $v(t)=t$.
Ou plus efficacement, on dérive un produit $t \longmapsto t^{-1}.\sin(t)$. On trouve $t \longmapsto -t^{-2}.\sin(t)+t^{-1}.\cos(t)$.
On met sous forme plus agréable : $f't) = \frac{t.\cos(t)-\sin(t)}{t^2}$ et on pose donc $\boxed{h = t \longmapsto t.\cos(t)-\sin(t)}$



C'est le graphe A.
En effet, l'application est nulle en 0.
Sa dérivée $t \longmapsto -t.\sin(t)$ doit être négative, puis positive, et ainsi de suite.
Mais la dérivée h' ne s'annule quand même pas trop de fois entre 0 et $3.\pi$. On refuse donc D.
Par élimination, c'est A qui reste.

Le minimum local est un point où la dérivée s'annule et change de signe : $\alpha.\cos(\alpha)-\sin(\alpha)=0$.
La dérivée est négative avant, puis positive après.

Or, en $3.\frac{\pi}{2}$ on a $h'\left(\frac{3.\pi}{2}\right) = \frac{3.\pi}{2}.\cos\left(\frac{3.\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3.\pi}{2}\right) = 1$: positif !
C'est donc que $\frac{3.\pi}{2}$ est après α.

On va chercher ensuite le signe de $f'(\alpha+2.\pi)$ ou même juste de $h(\alpha+2.\pi)$:

$$h(\alpha+2.\pi) = (\alpha+2.\pi).\cos(\alpha+2.\pi)-\sin(\alpha+2.\pi) = (\alpha+2.\pi).\cos(\alpha)-\sin(\alpha) = \alpha.\cos(\alpha)-\sin(\alpha)+2.\pi.\cos(\alpha)$$

Or, $h(\alpha)$ est nul. Il reste $h(\alpha+2.\pi) = 2.\pi.\cos(\alpha)$.
Comme α est plus petit que $3.\pi/2$, son cosinus est négatif.
$h(\alpha+2.\pi)$ est donc négatif.
C'est donc qu'en $\alpha+2.\pi$, la fonction f est encore en train de décroitre.
Le minimum local se situera donc après.

A chaque nouvelle oscillation amortie, le minimum local se déplace un peu plus vers la droite.

Application « numérique » à la calculatrice :

minimum en $\alpha \simeq 4,493$	à 10^{-3} près	$3.\pi/2 \simeq 4,712$	à 10^{-3} près
$\alpha + 2.\pi \simeq 10,776$	à 10^{-3} près	minimum suivant en $\beta \simeq 10,904$	à 10^{-3} près

Rappel : en mathématiques, $\pi \simeq 3,14$ n'a pas de sens. Ce qui en a c'est $\pi \simeq 3,14$ à 10^{-2} près. Si on ne cite pas la marge d'erreur, on en a commis une, d'erreur.

On n'a pas de calcul explicite de $\int_{2.\pi}^{4.\pi} \frac{\sin(t)}{t}.dt$. Alors comment connaître le signe de $\int_{2.\pi}^{4.\pi} f(t).dt$?
Graphiquement.
On a une application positive de $2.\pi$ à $3.\pi$ puis négative de $3.\pi$ à $4.\pi$ (à cause du signe du sinus).
Mais elle est un peu plus écrasée à chaque nouvel intervalle de longueur π (à cause du $\frac{1}{t}$).
On va donc couper en deux et comparer le terme positif $\int_{2.\pi}^{3.\pi} \frac{\sin(t)}{t}.dt$ et le terme négatif $\int_{3.\pi}^{4.\pi} \frac{\sin(t)}{t}.dt$.
On va les additionner. Normal, c'est la relation de Chasles.
Mais avant de les additionner, on les ramène sur le même intervalle, par une translation. Une translation de $2.\pi$ pour la première et de $3.\pi$ pour la seconde :

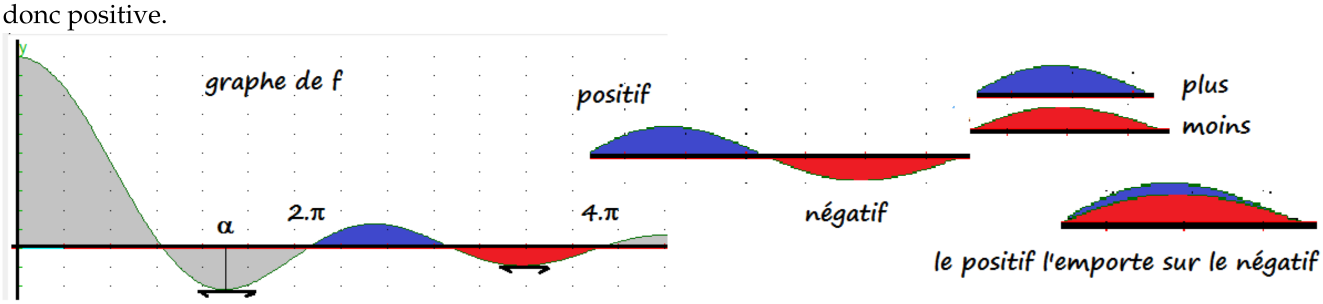
$$\int_{2.\pi}^{4.\pi} \frac{\sin(t)}{t}.dt = \int_{t=2.\pi}^{t=3.\pi} \frac{\sin(t)}{t}.dt + \int_{t=3.\pi}^{t=4.\pi} \frac{\sin(t)}{t}.dt = \int_{x=0}^{x=\pi} \frac{\sin(x+2.\pi)}{x+2.\pi}.dt + \int_{x=0}^{x=\pi} \frac{\sin(x+3.\pi)}{x+3.\pi}.dt$$

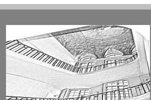
$$\int_{2.\pi}^{4.\pi} \frac{\sin(t)}{t}.dt = \int_{x=0}^{x=\pi} \frac{\sin(x)}{x+2.\pi}.dt + \int_{x=0}^{x=\pi} \frac{-\sin(x)}{x+3.\pi}.dt$$

On peut fusionner les deux intégrales en une

$$\int_{2.\pi}^{4.\pi} \frac{\sin(t)}{t}.dt = \int_{x=0}^{x=\pi} \Big(\frac{\sin(x)}{x+2.\pi} - \frac{\sin(x)}{x+3.\pi}\Big).dt = \int_{x=0}^{x=\pi} \sin(x).\Big(\frac{\pi}{(x+2.\pi).(x+3.\pi)}\Big).dt$$

Tout dans l'intégrale est positif (le sinus et la différence après réduction au dénominateur commun). l'intégrale est donc positive.





Trigonométrie. IS00

Le cours dit $\cos(a-b) = \cos(a).\cos(b) + \sin(a).\sin(b)$ avec un signe plus.

Comment en profiter pour passer à $\frac{\pi}{12}$ avec des $\sqrt{2}$ et $\sqrt{6}$? Facile si on a déjà vu : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

C'est le classique $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, mais c'est aussi sur une pendule à aiguille vingt minutes moins un quart d'heure égale cinq minutes.

On a donc classiquement

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

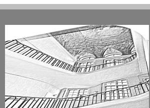
Avec $a = b$ dans $\cos(a+b)$ (puis avec $\cos^2 + \sin^2 = 1$) on a

$$\cos(2.a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2.\cos^2(a) - 1 = 1 - 2.\sin^2(a)$$

Si on l'applique à $a = \dfrac{\pi}{24}$ on a $\cos(\pi/12) = 2.\cos^2(\pi/24) - 1$ et donc

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+\frac{4}{4}}{2}$$

Il ne reste qu'à ruser avec $4 = \sqrt{16}$ et à passer à la racine. On doit quand même mentionner que $\cos(\pi/24)$ est positif.



Dérivée d'une fonction IS00

Pour que $\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$ existe il faut

- que $\sin(x)$ soit différent de 1 (éviter $\dfrac{\pi}{2}$ mais aussi tous les $\dfrac{\pi}{2}+2.k.\pi$ avec k dans $\mathbb{Z}$)
- que $\sin(x)$ soit différent de -1 (beh oui, $\ln(0)$ moi j'aime pas) (éviter $-\dfrac{\pi}{2}$ mais aussi tous les $-\dfrac{\pi}{2}+2.p.\pi$ avec p dans $\mathbb{Z}$)
- que le quotient soit positif

Mais $1+\sin(x)$ est positif (le sinus ne descend pas plus bas que -1).
$1-\sin(x)$ est positif aussi (le sinus ne dépasse jamais 1).

Plus joli encore : au lieu d'étudier le signe du quotient, on étudie le sign,e du produit, c'est le même. Or, le produit vaut $(1-\sin(x)).(1+\sin(x))$ ce qui fait $1-\sin^2(x)$ soit encore $\cos^2(x)$. Voilà, c'est fini.

Bref, $D_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2}+k.\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ puisque on doit juste enlever $-\dfrac{3.\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3.\pi}{2}, \dfrac{5.\pi}{2}$, et ainsi de suite.

Je suis quand même prêt à parier que sur cette question j'aurai des réponses sans aucune cohérence mathématique avec des k entier non quantifiés, des intervalles "modulo $2.\pi$", des strutures ensemble moins élément, ou autres montruosités tolérables en début d'année, mais qu'il faudra éviter ensuite.

Pour dériver, on rappelle $\Big(\ln(u)\Big)' = \dfrac{u'}{u}$ et aussi $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v-u.v'}{v^2}$ même si cette dernière ne sert pas ici.
En effet, on sépare le logarithme avant de dériver, et tout devient facile :

$$f' = \Big(x \longmapsto \ln(1+\sin(x)) - \ln(1-\sin(x))\Big)' = \left(x \longmapsto \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{1-\sin(x)}\right)$$

On réduit au dénominateur commun

$$\left(x \longmapsto \frac{\cos(x).(1-\sin(x))+\cos(x).(1+\sin(x))}{(1+\sin(x)).(1-\sin(x))}\right)$$

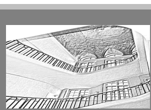
et ce dénominateur, c'est $1-\sin^2(x)$ soit justement $\cos^2(x)$. Un cosinus va se simplifier ensuite entre numérateur et dénominateur.

Au fait, pour les non matheux, la fonction $x \longmapsto \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$ est la même que $t \longmapsto \left(\frac{1}{\cos(t)}\right)$ ou que $\varpi \longmapsto \left(\frac{1}{\cos(\varpi)}\right)$. En revanche $\frac{1}{\cos(x)}$ n'est pas une fonction. Si votre prof de terminale vous a appris à parler correctement, à l'étage des fonctions, c'est bien. Sinon, il y a du GROS travail à faire pour arrêter de rédiger comme des porcs et de confondre les objets (nombres, fonctions, opérateurs...).

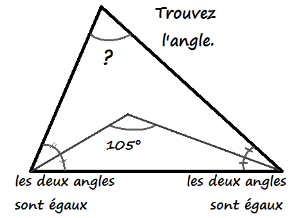
Et juste pour ceux que ça « amuse » de dériver avant de réfléchir :

$$x \longmapsto \frac{\dfrac{(\cos(x)).(1-\sin(x))-(1+\sin(x)).(-\cos(x))}{(1-\sin(x))^2}}{\dfrac{1+\sin(x)x)}{1-\sin(x)}}$$

Je vous dirai je ne sais combien de fois dans l'année « en maths on réfléchit avant de calculer » (et donc parfois on n'a même pas à calculer) ; « en physique, on réfléchit et on calcule en même temps ».



Question de géométrie. IS00



On note α et β les deux angles du triangle du bas (en plus de l'angle de 105°).

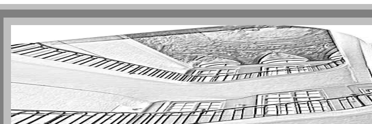
La somme des angles d'un triangle vaut π. On a donc $\alpha + \beta + 105 = 180$ (on est en degrés).

Mais dans le « grand triangle », les deux angles du bas valent $2.\alpha + 2.\beta$.

En nommant x l'angle cherché, on a $x + 2.\alpha + 2.\beta = 180$.

On reporte : $x + 2.(180 - 105) = 180$. On trouve que l'angle cherché x vaut 30 degrés. On en refait un angle mathématique : $\pi/3$.

LYCEE CHARLEMAGNE 2023 2024
M.P.S.I.2



IS00
18- points