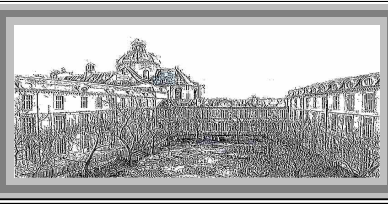
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 11 septembre
M.P.S.I.2



2023 2024

TD01

◦0◦ ♡ On a un jeu de cartes. Chaque carte a un chiffre sur une face, une lettre sur l'autre. On aligne devant vous quatre cartes dont les faces visibles sont $\boxed{A}\ \boxed{7}\ \boxed{4}\ \boxed{B}$ On vous dit "*quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre*". Quelles cartes retournez vous pour vous assurer que l'affirmation est correcte ?

Même question sur les retournements si l'affirmation est "*il y a un nombre pair sur une face si et seulement si il y a une voyelle sur l'autre*".

Cette fois, les cartes peuvent avoir deux lettres. Ou deux chiffres. Ou une lettre et un chiffre. On voit les mêmes quatre faces, et l'affirmation à vérifier est encore "*quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre*". Que retournez vous ?

Pour finir, les cartes peuvent avoir deux lettres. Ou une lettre et un chiffre. Mais pas deux chiffres. On voit les mêmes quatre faces, et l'affirmation à vérifier est encore "*quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre*". Que retournez vous ?

◦1◦ ♡ On pose $f = x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$ et $g = x \longmapsto \dfrac{\alpha.x+\beta}{\gamma.x+\delta}$, puis $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.
Comparez le calcul de $f \circ g$ et de $M.N$.
On pose $h = x \longmapsto \dfrac{2.x-1}{x+1}$. Déterminez rapidement $h \circ h \circ h \ldots \circ h$ (11 termes h, le résultat contiendra de grands nombres, dommage).

◦2◦ Résolvez l'équation $n! = 6.(k!)$ d'inconnues n et k dans $\mathbb{N}$.

◦3◦ ♡ Résolvez l'équation $(n!)^2 \geqslant (2.n)!$ d'inconnue entière n.

Résolvez l'équation $(n!)^3 \geqslant (2.n)!$ d'inconnue entière n.

◦4◦ ♡Prouvez que $1.3.5.7 \ldots (2.n-1)$ (produit de n entiers impairs) est égal à $\dfrac{(2.n)!}{2^n.n!}$.

◦5◦ ♡ Calculez $(1+i)^2$. Résolvez $z^2 + 2.i.z + 2.i = 1$ d'inconnue complexe z.

◦6◦ ♡ a, b et c sont entre 0 et $\pi/2$ et vérifient $\cos(a) = 0,4$, $\sin(b) = 0,8$ et $\tan(c) = 1,3$. Classez a, b et c par ordre croissant. *(là encore, si votre preuve repose sur les valeurs approchées de la calculatrice, vous vous êtes trompé de salle ; ce ne peut être qu'une aide, mais pas une preuve).*

◦7◦ Pour tout n, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrez : $\displaystyle\sum_{n=1}^{9} H_n = 10.H_{10} - 10$.

◦8◦ ♡ Ajustez $(a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3)$ pour avoir

$(t \longmapsto a_1.t.\ln(t) + b_1.t)' = \ln$	$(t \longmapsto a_2.t^2.\ln(t) + b_2.t^2)'' = \ln$	$(t \longmapsto a_3.t^3.\ln(t) + b_3.t^3)^{(3)} = \ln$

◦9◦ ♡ Qui a raison :
-a- $n!$ est divisible par 2019 dès que n a dépassé 2019 lui même.
-b- $n!$ est divisible par 2019 dès que n a dépassé 673.
-c- si n est premier, alors $n!$ n'est pas divisible par n^2.
-d- si n n'est pas premier, alors $n!$ est divisible par n^2.

∘10∘ Une comptine enfantine dit *(ou plutôt chante)* : "*Promenons nous dans les bois, pendant que le loup n'y est pas ; si le loup y était, il nous mangerait, mais comme il n'y est pas, il ne nous mangera pas*". Commentez d'un point de vue logique.

∘11∘ On définit $f = x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-2}$ et $g = x \longmapsto |x| - 1$.
Résolvez $\boxed{f(x) \geqslant 0 \mid f(g(x)) \geqslant 0 \mid g(f(x)) \geqslant 0 \mid f(f(x)) \geqslant 0 \mid g(g(x)) \geqslant 0}$ d'inconnue réelle x.

∘12∘ ♡ Calculez module et argument de $(2+i)^{10}.(3+i)^{10}$.

∘13∘ ♡ On définit $y = \log_a(x)$ (logarithme de base a) par $a^y = x$. Montrez : $\log_a(b) = \dfrac{1}{\log_b(a)}$.
Justifiez $\log_2(125) < 7$.

∘14∘ ♠ Le critère de divisibilité par 7 est le suivant :

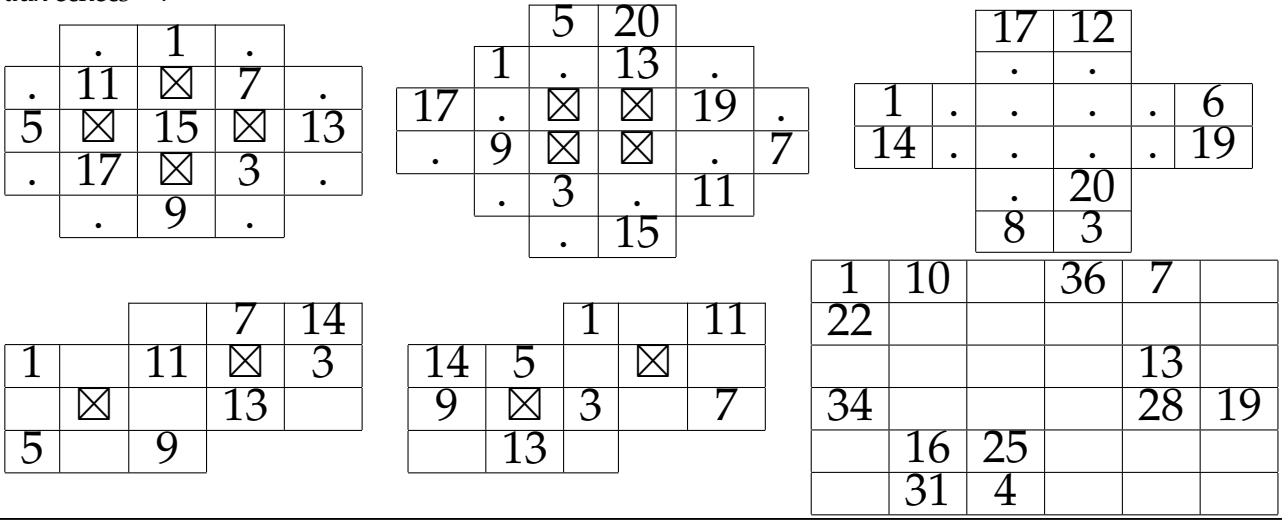
« pour savoir si un nombre donné est divisible par 7, efface le chiffre, soustrais le double du chiffre des unités ; ton nombre initial est multiple de 7 si et seulement si l'entier obtenu est multiple de 7 »

Par exemple partant de 456239, on construit $45623 - 2.9$ qui vaut 45605.
Tiens, d'ailleurs, plutôt que 45605, regardons $4560 - 2.5$ (qui vaut 4550).
Et pour 4550, on va regarder $455 - 2.0$. Et ensuite $45 - 2.5$.
Comme 35 est multiple de 7, tous les entiers concernées sont multiples de 7.
Justifiez la validité de ce test.
Appliquez le pour trouver le chiffre qui manque pour faire de 1#4321765 soit un multiple de 7, sans poser la division.

∘15∘ ♣ Sachant qu'on a posé $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i.\theta} + e^{-i.\theta}}{2}$, montrez qu'il est quand même possible d'avoir $\cos(\theta) = 2$, mais à condition d'aller chercher θ dans $\mathbb{C}$.

∘16∘ Peut on choisir b réel pour que $(1 + i.b)^5$ soit un imaginaire pur ?

∘17∘ ♣ Ce jeu s'appelle Jump. Vous pouvez en deviner par vous même la règle si je vous dis « démarche du cavalier aux échecs » :



∘18∘ Résolvez $\displaystyle\int_0^{\ln(7)} \frac{e^x}{a + e^x}.dx = \ln(3)$ d'inconnue a réelle (trouvez la forme en $\dfrac{u'}{u}$ cachée).

∘19∘ On sait : $\cos(\theta) = \dfrac{2}{5}$. Calculez $\cos(2.\theta)$ et $\cos(4.\theta)$.
On sait aussi $\cos(\varphi) = \dfrac{1}{5}$. Quelles sont les valeurs possibles de $\sin(\theta + \varphi)$?

∘20∘ a, b et c sont les trois longueurs des côtés d'un triangle. On pose alors : $x = a+b-c$, $y = a-b+c$ et $z = -a+b+c$. Montrez qu'ils sont tous positifs.
Montrez pour α et β positifs : $\alpha+\beta \geqslant 2.\sqrt{\alpha.\beta}$.
En l'appliquant à x et y puis x et z puis y et z, déduisez : $a.b.c \geqslant (a+b-c).(a-b+c).(-a+b+c)$.

∘21∘ Calculez $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$. Justifiez : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $\cos\left(\frac{17.\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et calculez $\sin\left(\frac{17.\pi}{12}\right)$.
Représentez graphiquement $\left(\theta \longmapsto \cos\left(\theta+\frac{\pi}{12}\right)\right) + \left(x \longmapsto \cos\left(x+\frac{3.\pi}{4}\right)\right) + \left(t \longmapsto \cos\left(t+\frac{17.\pi}{12}\right)\right)$.

∘22∘ On veut résoudre l'équation $z^2+(i-3).z+(32+4.i)=0$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$. Calculez le discriminant Δ de ce trinôme.
On cherche alors un complexe δ de la forme $\alpha+i.\beta$ avec αet β réels vérifiant $\delta^2 = \Delta$ (qu'on ne peut pas noter $\delta = \sqrt{\Delta}$ car on est dans $\mathbb{C}$ [1]). Calculez $\alpha^2-\beta^2$, $2.\alpha.\beta$ et aussi $\alpha^2+\beta^2$ (pensez au module...).
Déduisez les valeurs possibles pour le couple $(\alpha,\ \beta)$.
Trouvez les solutions de l'équation.

∘23∘ Classez du plus petit au plus grand : $(3!)^{2!}$, $(3^2)!$, $(2^3)!$ et $(2!)^{3!}$.
On est en mathématiques et non dans le domaine de la foi, il faut évidemment argumenter.

∘24∘ ♡ Simplifiez $\exp\left(\ln\left(\sqrt{7}-1\right)+\ln(\sqrt{7}+1)+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\ln(\sqrt{3}-\sqrt{2})\right)$.

∘25∘ Donnez module et argument de $1+e^i$ et $1-e^{i.\pi/3}$.

∘26∘ α est un réel fixé. Résolvez l'équation $x^2-(e^\alpha+e^{-\alpha}).x+1=0$ d'inconnue complexe x.

∘27∘ Un hexagone régulier a pour centre de gravité A d'affixe $2+i$ et pour sommet A d'affixe $2+3.i$. Trouvez les autres sommets.

∘28∘ ♡ Comparaison des moyennes par la méthode de Cauchy.
Montrez pour tout couple de réels positifs : $\sqrt{a.b} \leqslant \frac{a+b}{2}$.

Montrez pour tout quadruplet de réels positifs : $\sqrt[4]{a.b.c.d} \leqslant \frac{\sqrt{a.b}+\sqrt{c.d}}{4} \leqslant \frac{a+b+c+d}{4}$.

Déduisez pour tout triplet de réels positifs : $\sqrt[3]{a.b.c} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$ (pensez à prendre $d = \frac{a+b+c}{3}$).

Montrez pour tout quintuplet de réels positifs : $\sqrt[5]{a.b.c.d.e} \leqslant \frac{a+b+c+d+e}{5}$.

∘29∘ L'élève A dit $\int_{4.\pi/3}^{5.\pi/3} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.d\theta$ n'existe pas puisque la primitive $\theta \longmapsto \ln(\sin(\theta))$ n'existe ni en $4.\pi/3$ ni en $5.\pi/3$.
L'élève B dit $\int_{\pi/3}^{9.\pi/4} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.d\theta = \ln(\sin(9.\pi/4)) - \ln(\sin(\pi/3)) = \ln(\sqrt{6}/3)$.
Montrez que les deux ont tort.

∘30∘ Comparez pour l'ordre usuel : $3.\log_2(1000)$ et $10.\log_{10}(1024)$.

∘31∘ Simplifiez $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(-a+b+c)^2$.
Simplifiez $(a+b+c)^4+(a+b-c)^4+(a-b+c)^4+(-a+b+c)^4$.
Simplifiez $\sum_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in\{-1,1\}^n} (\varepsilon_1.\alpha_1+\ldots+\varepsilon_n.\alpha_n)^3$ où les α_k sont des réels donnés.

---

1. dans $\mathbb{R}$,on choisit de prendre comme racine carrée le réel positif, mais dans $\mathbb{C}$, poseriez vous $\sqrt{-2.i} = 1-i$ ou $\sqrt{-2.i} = i-1$

◦32◦ On rappelle : $\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)}$. On déduit $\sin(\pi/6) = \sqrt{3}$ et $\cos(\pi/6) = 3$.
Vrai ou faux : $(1 = 2\ et\ 4 = 3) \Rightarrow (5 = 5)$, en additionnant.
Vrai ou faux : $(1 + 4 = 2 + 3) \Rightarrow (1 = 2\ et\ 4 = 3)$, en identifiant.
Vrai ou faux : $(a\ et\ \overline{a}) \Rightarrow a$.
Vrai ou faux : $(a\ ou\ \overline{a}) \Rightarrow a$.
Vrai ou faux : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1 \Rightarrow (x^2 > -1)$.
« Il avala le poison et mourut sur le champ » = « il mourut sur le champ et avala le poison ».

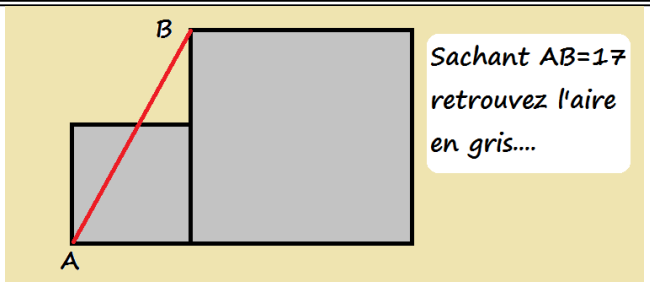
◦33◦ ♡ Voici un lexique de mots anglais du vocabulaire mathématique. Retrouvez leur signification en français :

whole number	countable set	significant figure	right hand side
slope	floor	join of sets	rhombus
cuboïd	nondecreasing function	sequence	by induction on n
one to one correspondance	x raised to the power of y	thus	w.l.o.g.
law of cosines	assume that	hence	intermediate mean value
squeeze theorem	proof by contradiction	therefore	brackets

◦34◦ Calculez $\cos(\pi/12)$ et ensuite prouvez $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{16} + \sqrt{6} + \sqrt{2}}}{\sqrt{8}}$.

Sachant $x = 45678^3 - 45676^3$,
calculez $\sqrt{\frac{x-2}{6}}$.

◦35◦ Les deux figures en gris sont des carrés.



◦36◦ Posez ces opérations, sachant qu'on travaille en base 8 :

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & 2 & 5 & \\ + & 4 & 3 & 7 & \\ + & 1 & 2 & 1 & \\ + & 6 & 5 & 0 & \\ \hline = & & ? & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rrrrr} & & 1 & 2 & 5 \\ \times & & 7 & 2 & 1 \\ \hline & & & & * \\ + & & & * & * \\ + & & * & * & \\ \hline = & & ? & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rrrrr} & 7 & 4 & 6 & 5 \\ - & 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline = & & ? & & \end{array}$$

◦37◦ A partir de quelle valeur de n l'entier $n!$ est il divisible par 2021 ?
Pour quelles valeur de n l'entier $\frac{(2.n)!}{n!}$ est il divisible par 2021 ?

◦38◦ On pose $f = x \longmapsto 8.x^4 - 8.x^2 + 1$ et $g = x \longmapsto 4.x^3 - 3.x$. Montrez : $f \circ g = g \circ f$.

Représentez graphiquement : $\frac{(x^2-1).f''(x) + x.f'(x)}{f(x)}$.

◦39◦ ♡ Sachant que 4 et -3 sont solutions, résolvez : $x^4 - 8.x^3 - 3.x^2 + 82.x - 24 = 0$ d'inconnue complexe x.

◦40◦ ♡ Résolvez $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{a + \cos(t)}.dt = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ d'inconnue a.

◦41◦ ♡ Sachant $\cos(a) = \frac{3}{5}$, $\cos(b) = \frac{20}{29}$ et $\cos(c) = \frac{7}{25}$, combien de valeurs différentes peut avoir $\cos(a+b+c)$?

◦42◦ ♡ Dérivez $x \longmapsto \ln(\sqrt[3]{x^4 - 4.x^3 + 6.x^2 - 4.x + 1})^2$

◦43◦ ♡ Retrouvez les coefficients : $\frac{X^2 + X + 1}{X^3 - \ldots X^2 - \ldots X + 6} = \frac{\ldots}{X-1} + \frac{\ldots}{X+2} + \frac{\ldots}{X-3}$.

---

2. le résultat doit être très simple ; le raisonnement aussi...

◦44◦ ♡ Calculez $(-1)^{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.(k+1)}$ en fonction de n.

◦45◦ La somme de ses chiffres est la différence entre le nombre et 94. Qui est ce nombre ?

◦46◦ `Retrouvez les stations (métro, R.E.R. et S.N.C.F.) d'anagrammes` *`(Nord-Ouest)`* :
Sucre collé. Elfe danse. Hôpital du pénis pueril. L'artisane gazera. Asile Tarzan. Petit-connard. Ah ce fluor.

◦47◦ Résolvez $log_a(7) = 7$.

◦48◦ ♡ Calculez $\int_0^1 4^x.dx$.

◦49◦ On définit : $f = x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2.x^2}{x^3-x}$. Représentez la graphiquement, après l'avoir simplifiée...
Représentez aussi le graphe de $f \circ f \circ f \circ f$.

◦50◦ ♡ Une homographie h (c'est à dire une application de la forme $x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$, je l'ai déjà dit douze fois) vérifie $h(1) = 2$, $h(2) = 3$ et $h(3) = 1$. Calculez la. Déterminez $h(4)$, puis $h \circ h \circ h \circ h$.

◦51◦ On définit sur $\mathbb{Z}$ la loi $*$ par $a * b = a.(-1)^b + b.(-1)^a$. Montrez que c'est une loi interne, commutative, associative *(on pourra montrer que $a * b$ a la même parité que $a + b$)*. Trouvez son neutre, le symétrique de chaque élément a.
n est un entier naturel donné. Calculez $1 * 1 * 1 * \ldots 1$ (n termes). Calculez $1 * 2 * 3 * \ldots * 2018$.
Résolvez $6 * a = 2018$ d'inconnue entière a.
Peut on, rien qu'en additi*nnant des 1 obtenir 2018 ? Peut on, rien qu'en additi*nnant des 2 obtenir 2018 ?
On veut alors définir la "multiplication qui va avec" au moins sur $\mathbb{N}$ par $a \otimes b = a * a * a \ldots * a$ *(b fois, comme pour $a.b = a + a + \ldots + a$ b fois)*. Cette multiplication est elle commutative sur $\mathbb{N}$?

◦52◦ Résolvez $\cos^{(n)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ d'inconnue entière n.

◦53◦ ♡ On note a le réel d'écriture $0,12340123401234...$ *(le motif* 01234 *se répète indéfiniment)*. Simplifiez $100000.a - a$. Déduisez a sous forme rationnelle p/q.

◦54◦ Dans cette classe, il y a des garçons et des filles. Voici les moyennes

	moyenne de la classe	moyenne des garçons	moyenne des filles
mathématiques	11,4	10,6	12,5
physique	12,8		13,2

Retrouvez la moyenne qui manque.

◦55◦ Montrez par récurrence sur n plus grand que 5 : $3^n \leqslant \dfrac{(2.n)!}{(n!)^2} \leqslant 4^n$.

◦56◦ Calculez $\int_0^1 \dfrac{2.t+2}{4.t^2+6.t+2}.dt$.

◦57◦ ♡ Le nombre $\log_2(3).\log_3(4).\log_4(5).\log_5(6).\log_6(7).\log_7(8)$ est il rationnel ? On rappelle : $y = \log_a(x)$ signifie $a^y = x$.

◦58◦ ♣ Tectonic est un jeu développé depuis quelques années maintenant. Il s'agit de compléter une grille. La règle : une maison de taille n contient les entiers de 1 à n. Deux cases voisines ne peuvent pas contenir la même valeur. Une première grille résolue vous permet de comprendre. Et ensuite, c'est à vous.

Facile

	1		
2			
	4		
			5

Sa solution

4	1	2	1
2	3	5	3
1	4	2	1
3	5	3	4
1	2	1	5

Facile

		3	
2			
	3		2

Facile

			1
	4		
5			
			1

Moyen

			5
5			4
2			2

Moyen

	3		1
4			

Difficile

	1		
2			
			4

Difficile

3			1
	5		

◦59◦ ♡ Trouvez les coefficients b et c (complexes) pour que l'équation $z^2 + b.z + c = 0$ admette pour racine $2 + 3.i$ et pour discriminant $2.i$.

◦60◦ ♡ Montrez : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(2.\theta) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(\theta) \notin \mathbb{Q}$.

◦61◦ Résolvez $x^2 + \sqrt{2} \leqslant (1 + \sqrt{2}).x$ d'inconnue réelle x.

◦62◦ Montrez $\left(e^{\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)} - 1\right)^2 = 2$.

◦63◦ ♡ Résolvez $x^2 + (7.i - 2).x = 11 + 7.i$ d'inconnue complexe x.