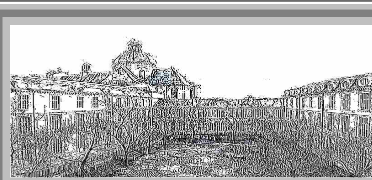
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 11 septembre
M.P.S.I.2



2023 2024

TD01

∘0∘ ♡ On a un jeu de cartes. Chaque carte a un chiffre sur une face, une lettre sur l'autre. On aligne devant vous quatre cartes dont les faces visibles sont $\boxed{A}$ $\boxed{7}$ $\boxed{4}$ $\boxed{B}$ On vous dit "*quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre*". Quelles cartes retournez vous pour vous assurer que l'affirmation est correcte ?

On a quatre cartes avec une face visible chacune : $\boxed{A}$ $\boxed{7}$ $\boxed{4}$ $\boxed{B}$
On a une affirmation à valider ou invalider : "*quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre*".

Bien évidemment, on doit retourner $\boxed{4}$ pour voir si il y a bien une voyelle sur l'autre face.

Il est inutile de retourner $\boxed{7}$ puisque rien ne parle des cartes ayant une face impaire.

Il est inutile de retourner $\boxed{A}$ en effet, si on trouve un nombre pair, on sera content, mais si on trouve un nombre impair, ça ne prouvera rien puisque personne n'a parlé de ce qu'il devait y avoir derrière une nombre impair.

En revanche, il faut retourner $\boxed{B}$ et si l'on trouve un nombre pair de l'autre côté, on aura un contre-exemple à l'affirmation "*quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre*".

En termes de logique pure, la phrase est $\boxed{\text{“pair} \Rightarrow \text{voyelle”}}$ Il faut donc vérifier le dos des faces paires.

Mais c'est aussi sa contraposée $\boxed{\text{“consonne} \Rightarrow \text{impair”}}$ Il faut donc vérifier au dos des consonnes.

Que penser de l'élève qui me dira "je retourne toutes les cartes", et tant pis si j'en ai retourné trop ; l'énoncé ne me demandait pas de minimiser".

Même question sur les retournements si l'affirmation est "*il y a un nombre pair sur une face si et seulement si il y a une voyelle sur l'autre*".

Cette fois, c'est une équivalence. Il faut retourner toutes les cartes.

Cette fois, les cartes peuvent avoir deux lettres. Ou deux chiffres. Ou une lettre et un chiffre. On voit les mêmes quatre faces, et l'affirmation à vérifier est encore "*quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre*". Que retournez vous ?

Pour finir, les cartes peuvent avoir deux lettres. Ou une lettre et un chiffre. Mais pas deux chiffres. On voit les mêmes quatre faces, et l'affirmation à vérifier est encore "*quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre*". Que retournez vous ?

∘1∘ ♡ On pose $f = x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$ et $g = x \longmapsto \dfrac{\alpha.x+\beta}{\gamma.x+\delta}$, puis $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.
Comparez le calcul de $f \circ g$ et de $M.N$.
On pose $h = x \longmapsto \dfrac{2.x-1}{x+1}$. Déterminez rapidement $h \circ h \circ h \ldots \circ h$ (11 termes h, le résultat contiendra de grands nombres, dommage).

$f \circ g$ est l'application $x \longmapsto f(g(x))$.

On calcule $f(g(x)) = \dfrac{a.g(x)+b}{c.g(x)+d} = \dfrac{a.\dfrac{\alpha.x+\beta}{\gamma.x+\delta}+b}{c.\dfrac{\alpha.x+\beta}{\gamma.x+\delta}+d}$.

On simplifie :

$$f(g(x)) = \frac{a.g(x)+b}{c.g(x)+d} = \frac{\dfrac{a.(\alpha.x+\beta)+b.(\gamma.x+\delta)}{\gamma.x+\delta}}{\dfrac{c.(\alpha.x+\beta)+d.(\gamma.x+\delta)}{\gamma.x+\delta}} = \frac{a.(\alpha.x+\beta)+b.(\gamma.x+\delta)}{c.(\alpha.x+\beta)+d.(\gamma.x+\delta)}$$

Trop fort : encore une application en $x \longmapsto \dfrac{A.x+B}{c.x+D}$.
Précisément : $\dfrac{(a.\alpha+b.\gamma).x+(a.\beta+b.\delta)}{(c.\alpha+d.\gamma).x+(c.\beta+d.\delta)}$.

Si on regarde juste les quatre coefficient :

f			g			$f\circ g$	
a	b		α	β		$a.\alpha+b.\gamma$	$a.\beta+b.\delta$
c	d		γ	δ		$c.\alpha+d.\gamma$	$c.\beta+d.\delta$
$\frac{a.x+b}{c.x+d}$			$\frac{\alpha.x+\beta}{\gamma.x+\delta}$			voir plus haut	

Et ceci rappelle le produit matriciel : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.\alpha+b.\gamma & a.\beta+b.\delta \\ c.\alpha+d.\gamma & c.\beta+d.\delta \end{pmatrix}$.

Bref, non seulement la composée de deux homographies [1] est une homographie.
Mais en plus, composer des homographies, c'est muliplier des matrices.

Pour calculer $f\circ f$, il suffit d'élver la matrice au carré.
Et de recommncer.
La question$h\circ h\circ h\ldots\circ h$ se ramène à $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ multipliée par elle même.
C'est quand même moche (surtout à cause d'un 1 qui est resté intempestivement).
Disons qu'on va calculer M^{11} le plus vite possible.

$$M^2 = M.M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 & -2-1 \\ 2+1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^2.M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$$

$$M^5 = M^4.M = \begin{pmatrix} -9 & -9 \\ 9 & -18 \end{pmatrix}$$

On continue avec M^6 puis on multiplie M^5 par M^6.

$$M^{11} = M^5.M^6 = \begin{pmatrix} 243 & 243 \\ -243 & 486 \end{pmatrix}$$

On extrait : $h^{11} = x \longmapsto \dfrac{243.x+243}{-243.x+486}$. On simplifie en

$$h^{11} = x \longmapsto \frac{x+1}{-x+2}$$

qu'on pouvait aussi trouver rapidement en conjecturant des choses sur la forme de h^n pour tout n.

∘2∘ Résolvez l'équation $n! = 6.(k!)$ d'inconnues n et k dans $\mathbb{N}$.

L'application factorielle étant croissante, il faut que n soit plus grand que k (strictement).
En simplifiant alors par $k!$ il reste $(k+1).(k+2)\ldots n = 6$.
Mais 6 n'a que peu de facteurs. Et de surcroit consécutifs : 1.2.3 ou juste 2.3 ou même 6 en une seule fois.
La première solution donne $3! = 6.(0!)$.
La deuxième solution donne $3! = 6.(1!)$.
La troisième possibilité : $k+1 = n = 6$ donne $6! = 6.(5!)$.

Pour conclure proprement : $\boxed{S_{(k,n)} = \{(0,3),\ (1,3),\ (5,6)\}}$

---

1. les homographies ce sont les $x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$, avec entre autre $x \longmapsto x$ pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

∘3∘ ♡ Résolvez l'équation $(n!)^2 \geqslant (2.n)!$ d'inconnue entière n.

Au fait, n pourrait être autre chose qu'un entier ?
Quitte à simplifier par $n!$ non nul (et même positif), ceci revient à demander : $1.2.3\dots n \geqslant (n+1)\dots(n+1)$.
Ou plus proprement $\prod_{k=1}^{n} k \geqslant \prod_{k=1}^{n}(n+k)$.

Or, comme n est entier, chaque $n+k$ dépasse chaque k. Terme à terme, on a donc pour tout n : $\prod_{k=1}^{n} k \leqslant \prod_{k=1}^{n}(n+k)$.

La seule façon de s'en sortir est d'avoir égalité, avec $n = 0$.
Et en effet : $S_n = \{0\}$, avec $(0!)^2 \geqslant (2.0)!$. Et sinon, $(1!)^2 < (2.1)!$ et ainsi de suite.

On pouvait aussi passer au quotient (tout est positif). L'équation $(n!)^2 \geqslant (2.n)!$ devient $\frac{(2.n)!}{n!.n!} \leqslant 1$. Et avec de l'habitude, on reconnaît un coefficient binomial : $\binom{2.n}{n} \leqslant 1$. Or, un coefficient binomial est un entier naturel. La seule solution est qu'il vaille 1 et ce n'est le cas que pour $n = 0$.

Résolvez l'équation $(n!)^3 \geqslant (2.n)!$ d'inconnue entière n.

Cette fois, on veut $\prod_{k=1}^{n} k^2 \geqslant \prod_{k=1}^{n}(n+k)$. Le carré nous laisse un peu de marge ?
Ça marche pour 0.
Mais pour 1 c'est déjà raté. Encore pire pour 2 et ainsi de suite.
En fait la seule solution est 0.
Prouvons le. On a initialisé. Mais l'hérédité ne semble pas bien passer.
Et même, elle ne passe pas.

Et si on regarde plus en détails :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$(n!)^3$	1	1	8	216	13824	1728000	373248000	128024064000	65548320768000
$(2.n)!$	1	2	24	720	40320	3628800	479001600	87178291200	20922789888000
équation	True	False	False	False	False	False	False	True	True

Et en fait, à partir de 7, le basculement se fait.
Et il se conserve.
Le tableau laborieux ci dessus indique que l'inéquation $(n!)^3 \geqslant (2.n)!$ pour n égal à 7.
Prenons un entier n quelconque et supposons $(n!)^3 \geqslant (2.n)!$.
On veut établir $((n+1)!)^3 \geqslant (2.(n+1))!$.
Comment a évolué le premier membre : $((n+1)!)^3 = (n!)^3.(n+1)^3$
le second membre : $(2.(n+1))! = (2.n)!.(2.n+1).(2.n+2)$

Il suffit donc d'écrire deux inégalités entre réels positifs :

$(n!)^3$	$\geqslant$	$(2.n)!$	hypothèse de rang n
$(n+1)^3$	$\geqslant$	$(2.n+1).(2.n+2)$	vrai pour $n \geqslant 3$

On multiplie membre à membre et c'est fini.

∘4∘ ♡Prouvez que $1.3.5.7\dots(2.n-1)$ (produit de n entiers impairs) est égal à $\frac{(2.n)!}{2^n.n!}$.

On peut faire une récurrence sur n.
Initialisation : $1 = \frac{(2.0)!}{2^0.0!}$ et même $1 = \frac{(2.0)!}{2^0.0!}$
Hérédité : on se donne un entier n quelconque. On suppose $1.3.5.7\dots(2.n-1) = \frac{(2.n)!}{2^n.n!}$.
On veut passer au rang suivant. Regardons ce qu'il advient du premier membre. Il a un entier de plus :
on étudie $1.3.5.7\dots(2.n-1).(2.n+1)$
on remplace :

$$1.3.5.7\dots(2.n-1).(2.n+1) = \frac{(2.n)!}{2^n.n!}.(2.n+1)$$

par hypothèse de récurrence

On étudie ensuite le second membre au rang $n+1$:

$$\frac{(2.(n+1))!}{2^{n+1}.(n+1)!}=\frac{(2.n)!.(2.n+1).(2.n+2)}{2^n.2.n!.(n+1)}=\frac{(2.n)!.(2.n+1)}{2^n.n!}$$

en simplifiant par $2.n+2$.

On a donc bien $1.3.5.7\dots(2.n-1).(2.n+1)=\dfrac{(2.n)!}{2^n.n!}.(2.n+1)=\dfrac{(2.(n+1))!}{2^{n+1}.(n+1)!}$.
Et la récurrence s'achève.

On peut aussi se lancer dans une preuve directe.
On part du produit des entiers impairs et on glisse le produit des entiers pairs :

numérateur	1	$\times 2$	$\times 3$	$\times 4$	$\times 5$	$\times 6$	$\times 7$	$\dots$	$\times(2.n+1)$	$\times(2.n)$
denominateur		2		$\times 4$		$\times 6$		$\dots$		$\times(2.n)$

Le numérateur est devenu $(2.n)!$.
Et chaque terme du dénominateur donne un 2 :

numérateur	1	$\times 2$	$\times 3$	$\times 4$	$\times 5$	$\times 6$	$\times 7$	$\dots$	$\times(2.n+1)$	$\times(2.n)$
denominateur		2×1		$\times 2\times 2$		$\times 2\times 3$		$\dots$		$\times 2\times n$

Le dénominateur est fait de n facteurs 2 et du produit $1\times 2\times 3\times n$. C'est donc bien $2^n.n!$.

Et pour le faire avec rigueur ?
Partons de $(2.n)!$, produit de tous les entiers. Séparons en fonction de leur parité :

$$(2.n)!=\prod_{i=1}^{2.n} i=\Big(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2.n\\ i\ pair}} i\Big).\Big(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2.n\\ i\ impair}} i\Big)$$

Écrivons les $2.k$ ou $2.k+1$ avec k n'allant pas trop loin.

$$(2.n)!=\Big(\prod_{k=1}^{n}(2.k)\Big).\Big(\prod_{k=1}^{n}(2.k-1)\Big)$$

Factorisons un peu les 2 comme tout à l'heure :

$$(2.n)!=\Big(\prod_{k=1}^{n}2\Big).\Big(\prod_{k=1}^{n}k\Big).\Big(\prod_{k=1}^{n}(2.k-1)\Big)$$

Reconnaissons des choses :

$$(2.n)!=\Big(2^n\Big).\Big(n!\Big).\Big(\prod_{k=1}^{n}(2.k-1)\Big)$$

Il ne reste qu'à diviser.

Quelle est pour vous la meilleure des trois démonstration ?

∘5∘ ♡ Calculez $(1+i)^2$. Résolvez $z^2+2.i.z+2.i=1$ d'inconnue complexe z.

Facile : $(1+i)^2=2.i$.
Ce calcul est juste là pour penser ensuite à $(2.(1+i))^2=4.2.i=8.i$ puis $(2.i.(1+i))^2=4.(-1).2.i=-8.i$.

Pour $z^2+2.i.z+2.i-1=0$, on a une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.

On la résout classiquement :

$a=1$	$b=2.i$	$c=-1+2.i$
$\Delta=b^2-4.a.c=-8.i$		
$\delta=2.i.(1+i)$		
$z_1=\dfrac{-2.i+2.(i-1)}{2}$	$S=\{-1,\ 1-2.i\}$	$z_2=\dfrac{-2.i-2.(i-1)}{2}$

Et même encore plus classiquement : $z^2+2.i-1+2.i=0\Leftrightarrow(z+i)^2+2.i=0$
$z^2+2.i-1+2.i=0\Leftrightarrow(z+i)^2=-2.i$
$z^2+2.i-1+2.i=0\Leftrightarrow(z+i)^2=(i.(1+i))^2$
$z^2+2.i-1+2.i=0\Leftrightarrow(z+i)^2=(i-1)^2$
$z^2+2.i-1+2.i=0\Leftrightarrow(z+i)^2-(i-1)^2=0$
$z^2+2.i-1+2.i=0\Leftrightarrow\big((z+i)-(i-1)\big).\big((z+i)+(i-1)\big)=0$
$z^2+2.i-1+2.i=0\Leftrightarrow(z+1).(z-1+2.i)=0$
par intégrité, on a les deux solutions : -1 et $1-2.i$.

Plus rapide : on devine une solution évidente : -1 puisque $(-1)^2+2.i.-1)+2.i-1=0$.
On trouve l'autre en factorisant ou par la somme ou le produit des racines.

Encore plus rapide : on propose les deux solutions, et on vérifie, puisqu'on sait qu'il y en a deux, et seulement deux.

∘6∘

♡ a, b et c sont entre 0 et $\pi/2$ et vérifient $\cos(a)=0,4$, $\sin(b)=0,8$ et $\tan(c)=1,3$. Classez a, b et c par ordre croissant. *(là encore, si votre preuve repose sur les valeurs approchées de la calculatrice, vous vous êtes trompé de salle ; ce ne peut être qu'une aide, mais pas une preuve).*

Pour trier ces nombres, il suffit de trier leurs tangentes. En effet, par croissance de l'application tangente sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, si on arrive à $\tan(a)>\tan(b)>\tan(c)$ on déduira $a>b>c$.
Vu l'intervalle sur lequel on est, on va calculer les sinus et cosinus par la formule de Pythagore : $\sin(a)=\sqrt{1-\cos^2(a)}$ (pas de signe moins, sinus et cosinus sont positifs).
Reste ensuite à calculer les tangentes. On résume tout dans un tableau :

données			
	a	b	c
sin		$0,8$	
cos	$0,4$		
tan			$1,3$

Et on calcule donc, en gardant si possible des dénominateurs lisibles :

Pythagore			
	a	b	c
sin	$\dfrac{\sqrt{84}}{10}$	$\dfrac{8}{10}$	
cos	$\dfrac{4}{10}$	$\dfrac{6}{10}$	
tan	$\dfrac{\sqrt{84}}{4}$	$\dfrac{8}{6}$	$\dfrac{13}{10}$

Pour simplifier et bien trier, on regarde même les carrés de tangentes :

Pythagore			
	a	b	c
$\tan^2$	$\dfrac{21}{4}=\dfrac{4725}{900}$	$\dfrac{16}{9}=\dfrac{1600}{900}$	$\dfrac{169}{100}=\dfrac{1521}{900}$

On a donc $a>b>c$.

∘7∘

Pour tout n, on pose $H_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. Montrez : $\sum_{n=1}^{9}H_n=10.H_{10}-10$.

$H_1=$	1									
$H_2=$	1	$+1/2$								
$H_3=$	1	$+1/2$	$+1/3$							
$H_4=$	1	$+1/2$	$+1/3$	$+1/4$						
$H_5=$	1	$+1/2$	$+1/3$	$+1/4$	$+1/5$					
$H_6=$	1	$+1/2$	$+1/3$	$+1/4$	$+1/5$	$+1/6$				
$H_7=$	1	$+1/2$	$+1/3$	$+1/4$	$+1/5$	$+1/6$	$+1/7$			
$H_8=$	1	$+1/2$	$+1/3$	$+1/4$	$+1/5$	$+1/6$	$+1/7$	$+1/8$		
$H_9=$	1	$+1/2$	$+1/3$	$+1/4$	$+1/5$	$+1/6$	$+1/7$	$+1/8$	$+1/9$	
on va sommer en colonnes										
$\sum_{n=1}^{9}H_n=$	9	$+8/2$	$+7/3$	$+6/4$	$+5/5$	$+4/6$	$+3/7$	$+2/8$	$+1/9$	

Surtout, on garde sous cette forme, on ne somme pas tout de suite. On compte juste combien de fois on a chaque $\dfrac{1}{k}$.

On a $10-k$ fois chaque $\dfrac{1}{k}$. La somme est donc $\sum_{k=1}^{9}\dfrac{10-k}{k}$.

On la sépare en $\sum_{k=1}^{9} \frac{10}{k} - \sum_{k=1}^{9} 1$.
Mais on pouvait même l'écrire $\sum_{k=1}^{10} \frac{10-k}{k}$ (le seul terme ajouté en 0)
et la séparer en $\sum_{k=1}^{10} \frac{10}{k} - \sum_{k=1}^{10} 1$.
Et ceci donne exactement (factorisation et compteur) : $10.H_{10} - 10$.

Méthode du physicien : je calcule tout, pourquoi se prendre la tête avec ce tableau et cette sommation en lignes ou en colonnes !
J'utilise même un logiciel de calcul forme :
`sum(sum(1/k,k=1..n), n=1..10)`
et `sum(1/k, k=1..10)*10-10`

Et si on généralisait ? On pose $A_N = \sum_{n=1}^{N} H_n$. On veut montrer

$$A_N = (N+1).H_{N+1} - (N+1)$$

On écrit la définition :

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} H_n = \sum_{n=1}^{N} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Big)$$

On fusionne en un seul sigma :

$$A_N = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n \leqslant N}^{N} \frac{1}{k}$$

(triangle visible plus haut).
On somme d'abord sur k :

$$A_N = \sum_{k=1}^{N} \Big(\sum_{n=k}^{N} \frac{1}{k} \Big)$$

(on va sommer en colonnes).
On factorise :

$$A_N = \sum_{k=1}^{N} \Big(\sum_{n=k}^{N} 1 \Big).\frac{1}{k}$$

(sur chaque colonne c'est le même k).
On simplifie :

$$A_N = \sum_{k=1}^{N} (N+1-k).\frac{1}{k}$$

(n est un compteur, gare au nombre de termes).
On ajoute un terme nul :

$$A_N = \sum_{k=1}^{N+1} (N+1-k).\frac{1}{k}$$

(là, c'est joli/rusé).
On sépare :

$$A_N = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{N+1}{k} - \sum_{k=1}^{N+1} 1$$

(k/k vaut 1).
On sort le $N+1$ et k est un compteur dans la seconde.
On a enfin :

$$A_N = (N+1).H_{N+1} - (N+1)$$

Pour qui n'a pas vu le coup de « je somme jusqu'à $N+1$ car le terme ajouté vaut 0 », on peut quand même voir un 1 sortir de $(N+1).H_{N+1}$ dans le dernier terme de

$$(N+1).\Big(\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}\Big)$$

Petit conseil : n'essayez pas de simplifier H_n qui sera un de nos objets classiques, il est trop moche.

∘8∘ ♡ Ajustez $(a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3)$ pour avoir

$(t \longmapsto a_1.t.\ln(t)+b_1.t)' = \ln$	$(t \longmapsto a_2.t^2.\ln(t)+b_2.t^2)'' = \ln$	$(t \longmapsto a_3.t^3.\ln(t)+b_3.t^3)^{(3)} = \ln$

$\Big(t \longmapsto t.\ln(t)-t\Big)' = \ln$	$\Big(t \longmapsto \dfrac{t^2.\ln(t)}{2}-\dfrac{3.t^2}{4}\Big)'' = \ln$	$\Big(t \longmapsto \dfrac{t^3.\ln(t)}{6}-\dfrac{11.t^3}{36}\Big)^{(3)} = \ln$

Tout ce qu'on a besoin de faire, c'est de dériver justement par exemple deux fois $t \longmapsto a.t^2.\ln(t)+b.t^2$
en $t \longmapsto 2.a.t.\ln(t)+a.t^2.\frac{1}{t}+2.b.t$
puis $t \longmapsto 2.a.\ln(t)+3.a+2.b$.
Et surtout, ensuite, il fat réagir en matheuse...
Le sens pertinent pour l'exercice est $\Big((t \longmapsto a_2.t^2.\ln(t)+b_2.t^2)'' = \ln\Big) \Leftarrow \Big(2.a=1 \text{ et } 3.a+2.b=0\Big)$.
Certes, l'implication $\Big((t \longmapsto a.t^2.\ln(t)+b.t^2+c.e^t)'' = \ln\Big) \Rightarrow \Big(2.a=1 \text{ et } 3.a+2.b=0\Big)$ est ici correcte aussi (de fait, on a une équivalence), mais elle n'apporte rien à notre exercice.

Tenez : $\Big((t \longmapsto a.t^2.\ln(t)+b.t^2+c.e^t)'' = \ln\Big) \Rightarrow \Big(2.a=1 \text{ et } 3.a+2.b=0\Big)$ est vrai. En effet, il est nécessaire d'avoir $2.a=1$ et $3.a+2.b=0$ mais ça ne suffit pas. Il faut aussi avoir $c=0$, non ?

∘9∘ ♡ Qui a raison :
-a- $n!$ est divisible par 2019 dès que n a dépassé 2019 lui même.
-b- $n!$ est divisible par 2019 dès que n a dépassé 673.
-c- si n est premier, alors $n!$ n'est pas divisible par n^2.
-d- si n n'est pas premier, alors $n!$ est divisible par n^2.

-a- $n!$ est divisible par 2019 dès que n a dépassé 2019 lui même.
$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant 2019) \Rightarrow (2019 \mid n!)$: oui car dans le produit, il y a un 2019.

-b- $n!$ est divisible par 2019 dès que n a dépassé 673.
$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant 673) \Rightarrow (2019 \mid n!)$: oui car dans le produit, il y a un 673 et un 3..

-c- si n est premier, alors $n!$ n'est pas divisible par n^2.
On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers (2, 3, 5 et ainsi de suite).
$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \in \mathbb{P}) \Rightarrow (\forall k,\ n! \neq n^2.k)$: oui.
En effet, $n!$ est divisible par n, mais ensuite $\dfrac{n!}{n}$ ne contient plus de facteur n. Plus de brique pour reformer n puisque n est premier.

-d- si n n'est pas premier, alors $n!$ est divisible par n^2.
$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \notin \mathbb{P}) \Rightarrow (\exists k,\ n! = n^2.k)$: non.
L'entier 4 est un contre-exemple (et il suffit d'un pour tout gâcher).
24 n'est pas divisible par 16.
En revanche, avec 6, c'est bon : $6! = 1.2.3.4.5.6 = (1.4.5).(2.3).(6)$. On a un facteur 6^2.
Et ensuite, on peut reconstruire n dans $(n-1)!$ car n est composé (c'est à dire non premier).

∘10∘ Une comptine enfantine dit *(ou plutôt chante)* : "*Promenons nous dans les bois, pendant que le loup n'y est pas ; si le loup y était, il nous mangerait, mais comme il n'y est pas, il ne nous mangera pas*". Commentez d'un point de vue logique.

L'implication énoncée est « il y est implique il nous mange » (forme $p \Rightarrow q$)
Au mieux, par contraposée, on peut déduire : : « il ne nous mange pas implique il n'y est pas » (forme $non(q) \Rightarrow non(p)$)

Mais ceci ne nous renseigne pas sur « il n'y est pas implique il ne nous mange pas » (forme $non(p) \Rightarrow non(q)$).
La seule obligation pour le loup est en cas de présence, il doit nous manger.
Le loup absent a le droit de quand même nous manger. Même si la chose semble physiquement peu cohérente.

En fait, la comptine énonce deux résultats sans rapports entre eux : « il y est implique il nous mange »
« il n'y est pas implique il ne nous mange pas »

∘11∘

On définit $f = x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-2}$ et $g = x \longmapsto |x| - 1$.
Résolvez $f(x) \geqslant 0$ | $f(g(x)) \geqslant 0$ | $g(f(x)) \geqslant 0$ | $f(f(x)) \geqslant 0$ | $g(g(x)) \geqslant 0$ d'inconnue réelle x.

$f(x) \geqslant 0$	$\dfrac{x+1}{x-2} \geqslant 0$	exclure 2	tableau de signes	$]-\infty,\ -1] \cup]2,\ +\infty[$

Le tableau de signes, c'est bien pour les produits, mais aussi pour les quotients !

$f(g(x)) \geqslant 0$	$\dfrac{|x|-1+1}{|x|-1-2} \geqslant 0$	$|x| - 3 > 0$	$]-\infty,\ -3[\cup]3,\ +\infty[$

Une valeur absolue est toujours positive. On regarde donc juste le signe du dénominateur (jamais nul !).

$g(f(x)) \geqslant 0$	$\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right| \geqslant 1$	$|x+1| \geqslant |x-2|$

On peut faire le produit en croix sans changer le sens, mais ensuite, il faut distinguer les cas.
On trouve $[1/2,\ +\infty[$

$f(f(x)) \geqslant 0$	$\dfrac{2.x-1}{-x+5} \geqslant 0$	tableau de signes	$[1/2,\ 5[$

On a composé f avec elle même en calculant $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

$g(g(x)) \geqslant 0$	$||x|-1| \geqslant 1$	sur $\mathbb{R}^+$: $|x-1| \geqslant 1$	$\mathbb{R}^+ -]0,\ 2[$	$]-\infty,\ -2] \cup \{0\} \cup [2,\ +\infty[$
		sur $\mathbb{R}^-$: $|x+1| \geqslant 1$	$\mathbb{R}^- -]-2,\ 0[$	

∘12∘

♡ Calculez module et argument de $(2+i)^{10}.(3+i)^{10}$.

Déjà $(2+i)^{10}.(3+i)^{10} = ((2+i).(3+i))^{10} = (5+5.i)^{10}$

On écrit alors $5 + 5.i = 5.(1+i) = 5.\sqrt{2}.\Big(\dfrac{\sqrt{2}+i.\sqrt{2}}{2}\Big) = 5.\sqrt{2}.e^{i.\pi/4}$.

On élève à la puissance 10 : le module est élevé à la puissance 10
l'argument est multiplié par 10
(généralisation de $|a \times b| = |a| \times |b|$)
$Arg(a \times b) = Arg(a) + Arg(b)\ [2.\pi]$

$(2+i)^{10}.(3+i)^{10}$ a pour module $5^{10}.2^5$ et pour argument $10.\dfrac{\pi}{4}$ (on réduit à $\dfrac{\pi}{2}$).
C'est $312500000.i$.

∘13∘

♡ On définit $y = \log_a(x)$ (logarithme de base a) par $a^y = x$. Montrez : $\log_a(b) = \dfrac{1}{\log_b(a)}$.
Justifiez $\log_2(125) < 7$.

Le physicien dit « j'ai appris par cœur : $\log_a(b) = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$ (quotient de deux logarithmes néperiens [2])..

On a alors $\log_a(b).\log_b(a) = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}.\dfrac{\ln(a)}{\ln((b)} = 1$.

L'élève de Prépas retrouve $\log_a(b) = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$ en repartant de $a^y = b$.
Il passe au logarithme usuel : $\ln(a^y) = \ln(b)$.
Il utilise une propriété du logarithme : $y.\ln(a) = \ln(b)$.
Il divise par $\ln(a)$ non nul : $y = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$.

En ayant toujours ce petit raisonnement en tête, il retrouve toujours la formule sans perte de temps et sans ambiguïté, et aussi sans encombrer son cerveau de formules pas forcément comprises ou mal assimilées. Retenir le chemin en plus de la destination permet de mieux voir où on est et où on va.

L'élève de pur esprit matheux qui abuse [3] pose : $y = \log_a(b)$ et $x = \log_b(a)$.
Il traduit : $a^y = b$ et $b^x = a$.
Il reporte : $a^y = b$ et $(a^y)^x = a$.
Il simplifie : $a^y = b$ et $a^{x.y} = a$.

2. ce qui explique que a ne peut valoir 1, et logiquement, il n'y a pas de logarithme de base 1, ni de logarithme de base négative
3. celui qui dit « pourquoi je retiendrais ça, je peux le retrouver sans effort »

Dans la seconde, il identifie que $x.y$ vaut nécessairement 1.
Il a donc $x.y = 1$ c'est à dire $\log_a(b).\log_b(a) = 1$.

On ne connaît pas $\log_2(3)$ ni $\log_3(2)$ mais on sait qu'ils sont inverse l'un de l'autre.
On sait aussi que $\log_2(3)$ est entre $\log_2(2)$ et $\log_2(4)$ c'est à dire entre 1 et 2.

On veut montrer $\log_2(125) < 7$ autrement que par « c'est 6,9657 et des poussières ».
Posons $y = \log_2(125)$. On a donc $2^y = 125$.
Et on sait aussi $2^7 = 128$ (qui n'a jamais compté 2,4, 8, 16, 32, 64, 128 et ainsi de suite, en jouant sur son smartphone à 2048 ?).
On a donc $2^y < 2^7$, d'où par croissance de l'exponentielle de base 2 : $y < 7$.

∘14∘

♠ Le critère de divisibilité par 7 est le suivant :
« pour savoir si un nombre donné est divisible par 7, efface le chiffre, soustrais le double du chiffre des unités ; ton nombre initial est multiple de 7 si et seulement si l'entier obtenu est multiple de 7 »
Par exemple partant de 456239, on construit $45623 - 2.9$ qui vaut 45605.
Tiens, d'ailleurs, plutôt que 45605, regardons $4560 - 2.5$ (qui vaut 4550).
Et pour 4550, on va regarder $455 - 2.0$. Et ensuite $45 - 2.5$.
Comme 35 est multiple de 7, tous les entiers concernées sont multiples de 7.
Justifiez la validité de ce test.
Appliquez le pour trouver le chiffre qui manque pour faire de 1#4321765 soit un multiple de 7, sans poser la division.

On part donc d'un nombre N qui s'écrit « un entier a suivi d'un chiffre b ».
C'est quoi « un entier a suivi du chiffre b » ? C'est $10.a + b$.
On a donc $n = 10.a + b$.

Et on construit « l'entier moins de double du chiffre », c'est à dire $n' = a - 2.b$.

L'histoire est « n est multiple de 7 si et seulement si n' est multiple de 7 ».

Premier sens.
On suppose que n est multiple de 7. On veut montrer que n' l'est aussi.
On traduit : $10.a + b$ est multiple de 7.
On multiplie par 5 : $50.a + 5.b$ est multiple de 7.
On enlève $49.a$ qui est assurément multiple de 7 : $a + 5.b$ est multiple de 7.
On soustrait $7.b$ qui est multiple de 7 : $a - 2.b$ est multiple de 7. C'est lui n'. Gagné.

Second sens.
On suppose que n' est un multiple de 7.
On traduit : $a - 2.b$ est multiple de 7.
On multiplie par 10 : $10.a - 20.b$ est multiple de 7.
On ajoute $21.b$ qui est multiple de 7 par construction : $10.a + b$ est multiple de 7.

On a passé notre temps à utiliser que l'ensemble des multiples de 7 est stable par addition. Et que certains nombres sont multiples évidents de 7. Et on n'a pas écrit partout des $7.k$ qui ne sont pas des maths...

∘15∘

♣ Sachant qu'on a posé $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i.\theta} + e^{-i.\theta}}{2}$, montrez qu'il est quand même possible d'avoir $\cos(\theta) = 2$, mais à condition d'aller chercher θ dans $\mathbb{C}$.

On résout donc $e^{i.\theta} + e^{-i.\theta} = 4$ d'inconnue θ.
Quitte à changer de variable, résolvons $X + \dfrac{1}{X} = 4$ avec $X = e^{i.\theta}$.
On résout même $X^2 + 1 = 4.X$ de discriminant 12 : X peut valoir $2 + \sqrt{3}$ ou $2 - \sqrt{3}$.

On commence par $e^{i.\theta} = 2 + \sqrt{3}$.
On écrit $\theta = a + i.b$ avec a et b réels. On obtient $e^{i.a}.e^{-b} = 2 + \sqrt{3}$.
En identifiant module et argument : $e^b = (2 + \sqrt{3})^{-1}$ et $a = 0[2.\pi]$.

Allez, au final : $\boxed{S_\theta = \{2.k.\pi - i.\ln(2+\sqrt{3}) + \mid k \in \mathbb{Z}\} \bigcup \{2.k.\pi - i.\ln(2-\sqrt{3}) + \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

∘16∘ Peut on choisir b réel pour que $(1+i.b)^5$ soit un imaginaire pur ?

Oui.
Il suffit par exemple que l'argument de $1+i.b$ soit $\dfrac{\pi}{10}$.
C'est jouable avec justement $\tan(\pi/10)$.
On a en effet : $1+i.\tan(\pi/10) = 1+i.\dfrac{\sin(\pi/10)}{\cos(\pi/10)} = \dfrac{\cos(\pi/10)+i.\sin(\pi/10)}{\cos(\pi/10)} = \dfrac{e^{i.\pi/10}}{\cos(\pi/10)}$
On élève à la puissance 5 : $(1+i.b)^5 = \left(\dfrac{e^{i.\pi/10}}{\cos(\pi/10)}\right)^5 = \dfrac{e^{5.i.\frac{\pi}{10}}}{(\cos(\pi/10))^5} = \dfrac{e^{i.\pi/2}}{(\cos(\pi/10))^5} = \dfrac{i}{(\cos(\pi/10))^5}$.
Que demande le peuple ? Imaginaire pur au pouvoir.

∘17∘ ♣ Ce jeu s'appelle Jump. Vous pouvez en deviner par vous même la règle si je vous dis « démarche du cavalier aux échecs » :

	.	1	.	
.	11	$\boxtimes$	7	.
5	$\boxtimes$	15	$\boxtimes$	13
.	17	$\boxtimes$	3	.
	.	9	.	

		5	20		
	1	.	13	.	
17	.	$\boxtimes$	$\boxtimes$	19	.
.	9	$\boxtimes$	$\boxtimes$	.	7
	.	3	.	11	
		.	15		

		17	12		
		.	.		
1	.	.	.	.	6
14	.	.	.	.	19
		.	20		
		8	3		

			7	14
1		11	$\boxtimes$	3
	$\boxtimes$		13	
5		9		

		1		11
14	5		$\boxtimes$	
9	$\boxtimes$	3		7
	13			

1	10		36	7	
22					
				13	
34				28	19
	16	25			
	31	4			

	6	1	12	
18	11	$\boxtimes$	7	2
5	$\boxtimes$	15	$\boxtimes$	13
10	17	$\boxtimes$	3	8
	4	9	14	

		5	20		
	1	18	13	6	
17	4	$\boxtimes$	$\boxtimes$	19	12
2	9	$\boxtimes$	$\boxtimes$	14	7
	16	3	8	11	
		10	15		

		17	12		
		10	5		
1	16	13	18	11	6
14	9	2	7	4	19
		15	20		
		8	3		

		2	7	14
1	6	11	$\boxtimes$	3
10	$\boxtimes$	4	13	8
5	12	9		

		1	6	11
14	5	10	$\boxtimes$	2
9	$\boxtimes$	3	12	7
4	13	8		

1	10	21	36	7	12
22	33	8	11	20	27
9	2	35	26	13	6
34	23	32	17	28	19
3	16	25	30	5	14
24	31	4	15	18	29

Le premier est facile, on n'a pas le choix pour aller de 1 à 3 et ainsi de suite.
De même pour les suivants directs.
Mais pour le dernier, je vous recommande de commncer par les coins.

∘18∘ Résolvez $\displaystyle\int_0^{\ln(7)} \frac{e^x}{a+e^x}.dx = \ln(3)$ d'inconnue a réelle (trouvez la forme en $\dfrac{u'}{u}$ cachée).

Souhaitons de tout cœur que a soit positive pour ne pas avoir de dénominateur nul.
L'équation devient vite $\ln\left(\dfrac{a+e^{\ln(7)}}{a+e^0}\right) = \ln(3)$.
Par injectivité du logarithme [4] : $\dfrac{a+7}{a+1} = 3$.

4. ou en passant à l'exponentielle

On résout par produit en croix : $a+7=3.a+3$. La solution unique est $\boxed{a=2}$

◦19◦ On sait : $\cos(\theta)=\dfrac{2}{5}$. Calculez $\cos(2.\theta)$ et $\cos(4.\theta)$.
On sait aussi $\cos(\varphi)=\dfrac{1}{5}$. Quelles sont les valeurs possibles de $\sin(\theta+\varphi)$?

On a sans effort : $\cos(2.\theta)=2.\Big(\dfrac{2}{5}\Big)^2-1=-\dfrac{17}{25}$ (on est passé dans un autre quadrant).
De même : $\cos(4.\theta)=2.\Big(-\dfrac{17}{25}\Big)^2-1=\dfrac{-47}{625}$.

Ensuite, $\sin(\theta+\varphi)=\sin(\theta).\cos(\varphi)+\cos(\theta).\sin(\varphi)$.
On connaît (presque) : $|\sin(\theta)|=\sqrt{1-\dfrac{4}{25}}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$
$|\sin(\varphi)|=\sqrt{1-\dfrac{1}{25}}=\dfrac{\sqrt{24}}{5}$

Le sinus peut prendre quatre valeurs

$\dfrac{\sqrt{21}.1}{25}+\dfrac{2.\sqrt{24}}{25}$
$\dfrac{\sqrt{21}.1}{25}-\dfrac{2.\sqrt{24}}{25}$
$-\dfrac{\sqrt{21}.1}{25}+\dfrac{2.\sqrt{24}}{25}$
$-\dfrac{\sqrt{21}.1}{25}-\dfrac{2.\sqrt{24}}{25}$

◦20◦ a, b et c sont les trois longueurs des côtés d'un triangle. On pose alors : $x=a+b-c$, $y=a-b+c$ et $z=-a+b+c$. Montrez qu'ils sont tous positifs.
Montrez pour α et β positifs : $\alpha+\beta\geqslant 2.\sqrt{\alpha.\beta}$.
En l'appliquant à x et y puis x et z puis y et z, déduisez : $a.b.c\geqslant(a+b-c).(a-b+c).(-a+b+c)$.

Quitte à noter A, B et C les sommets du triangle et à poser

$AB=c$	$BC=a$	$CA=b$

, on doit prouver $a+b\geqslant c$ par exemple.
Ceci se ramène à $AB\leqslant AC+CB$. C'est ce qu'on appelle inégalité triangulaire *(on va plus vite de A à B en ligne droite qu'en passant par C)*.

On note ici l'intérêt qu'il y a eu à introduire des notations en plus.

Pour prouver $\sqrt{\alpha.\beta}\leqslant\alpha+\beta$ *(qui reviendra souvent cette année)*, on lit une indication plus loin dans le devoir : $(\sqrt{a}-\sqrt{\beta})^2$.
Ce nombre est un carré de réel ; il est positif.
Ce nombre se développe en $\alpha-2.\sqrt{\alpha}.\sqrt{\beta}+\beta$.
On a donc $\alpha-2.\sqrt{\alpha}.\sqrt{\beta}+\beta\geqslant 0$.
On fait passer de l'autre côté : $\alpha-2.\sqrt{\alpha}.\sqrt{\beta}+\beta\geqslant 2.\sqrt{\alpha.\beta}$.

Cette formule est un classique, on l'appelle comparaison des moyennes, et on se souvient de sa démonstration...

Puisque l'on nous dit de l'écrire pour quelques couples, on le fait :

$$2.\sqrt{x.y}\leqslant x+y=a+b-c+a-b+c=2.a$$

$$2.\sqrt{y.z}\leqslant y+z=a-b+c-a+b+c=2.c$$

$$2.\sqrt{z.x}\leqslant z+x=-a+b+c+a+b-c=2.b$$

On multiplie terme à terme ces inégalités entre réels positifs :

$$8.\sqrt{x.y.y.z.z.x}\leqslant 2.a.2.c.2.b$$

On simplifie par 8 sans changer le sens des inégalités : $\sqrt{x^2.y^2.z^2} \leqslant a.b.c.$
C'est ce qui était attendu.

Extrait d'un sujet d'Olympiade ou de truc de ce genre. Simple question : qui d'entre vous y serait parvenu sans les questions intermédiaires.Et même avec...

∘21∘ Calculez $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$. Justifiez : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $\cos\left(\frac{17.\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et calculez $\sin\left(\frac{17.\pi}{12}\right)$.
Représentez graphiquement $\left(\theta \longmapsto \cos\left(\theta+\frac{\pi}{12}\right)\right) + \left(x \longmapsto \cos\left(x+\frac{3.\pi}{4}\right)\right) + \left(t \longmapsto \cos\left(t+\frac{17.\pi}{12}\right)\right)$.

Pour $\cos(\pi/12)$, toute l'astuce est d'écrire $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$	$=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$	$=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\left(\frac{17.\pi}{12}\right)$	$=\cos\left(\frac{2.\pi}{3}+\frac{3.\pi}{4}\right)$	$=\cos\left(\frac{2.\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{3.\pi}{4}\right)$	$-\sin\left(\frac{2.\pi}{3}\right).\sin\left(\frac{3.\pi}{4}\right)$	$=\frac{-1}{2}.\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\left(\frac{17.\pi}{12}\right)$	$=\sin\left(\frac{2.\pi}{3}+\frac{3.\pi}{4}\right)$	$=\sin\left(\frac{2.\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{3.\pi}{4}\right)$	$+\cos\left(\frac{2.\pi}{3}\right).\sin\left(\frac{3.\pi}{4}\right)$	$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$+\frac{-1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ensuite, on peut en profiter pour développer chaque application, en prenant la peine de mettre le même nom sur les variables muettes
. Rappelons en effet : $f = (t \longmapsto f(t)) = (x \longmapsto f(x)) = (u \longmapsto f(u))$ et ainsi de suite.

$\left(\theta \longmapsto \cos\left(\theta+\frac{\pi}{12}\right)\right)$	$=\left(\theta \longmapsto \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\cos(\theta)\right)$	$-\left(\theta \longmapsto \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\sin(\theta)\right)$
$\left(\theta \longmapsto \cos\left(\theta+\frac{3.\pi}{4}\right)\right)$	$=\left(\theta \longmapsto \frac{-\sqrt{2}}{2}.\cos(\theta)\right)$	$-\left(\theta \longmapsto \frac{\sqrt{2}}{2}.\sin(\theta)\right)$
$\left(\theta \longmapsto \cos\left(\theta+\frac{17.\pi}{12}\right)\right)$.	$=\left(\theta \longmapsto \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\cos(\theta)\right)$	$-\left(\theta \longmapsto \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\sin(\theta)\right)$
la somme	$=\left(\theta \longmapsto 0.\cos(\theta)\right)$	$-\left(\theta \longmapsto 0.\sin(\theta)\right)$

Il ne reste plus rien. La somme est la fonction nulle.
Son graphe est un trait horizontal qui coïncide avec l'axe des abscisses.

Comme quoi il valait mieux simplifier avant de se lancer dans des calculs de dérivée... On est en maths.

Et si on est en physique, on reconnaît le principe du courant triphasé. je vous en reparlerai avec $j = \exp 2.i.\pi/3$, la célèbre racine cubique de l'unité.

∘22∘ * On veut résoudre l'équation $z^2+(i-3).z+(32+4.i)=0$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$. Calculez le discriminant Δ de ce trinôme.
On cherche alors un complexe δ de la forme $\alpha+i.\beta$ avec αet β réels vérifiant $\delta^2=\Delta$ (qu'on ne peut pas noter $\delta=\sqrt{\Delta}$ car on est dans $\mathbb{C}$ [a]). Calculez $\alpha^2-\beta^2$, $2.\alpha.\beta$ et aussi $\alpha^2+\beta^2$ (pensez au module...).
Déduisez les valeurs possibles pour le couple $(\alpha,\ \beta)$.
Trouvez les solutions de l'équation.

a. dans $\mathbb{R}$,on choisit de prendre comme racine carrée le réel positif, mais dans $\mathbb{C}$, poseriez vous $\sqrt{-2.i}=1-i$ ou $\sqrt{-2.i}=i-1$

On pose donc $a=1$, $b=(i-3)$ et $c=32+4.i$.
On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4.a.c=(i-3)^2-4.(32+4.i)=i^2+3^2-6.i-128-16.i$.
Le discriminant vaut $\boxed{-120-22.i}$

Une question de simple calcul sur les complexes. Tout le monde pouvait la traiter, même ceux qui auront jugé que c'était se dévaloriser d'aller chercher un point si facilement acquis.
Rappelons qu'à vaincre sans péril, on triomphe sans gloire... mais ce qui est important c'est qu'on triomphe...

Ensuite, il ne faut pas parler du signe de $-120-22.i$, ça n'a aucun sens.

On cherche un couple de réels vérifiant $(a+i.b)^2 = -120 - 22.i$.
On développe et identifie : $\boxed{a^2 - b^2 = -120 \quad 2.a.b = -22}$
On passe aussi au module : $|(a+i.b)^2| = |-120-22.i|$.*
Or, le module du carré est le carré du module. On se ramène à $|a+i.b|^2 = \sqrt{120^2+22^2}$.
On a comme suggéré alors : $a^2+b^2 = \sqrt{14400+484}$. C'est cadeau, c'est $a^2+b^2 = 122$.

On résume $\boxed{a^2 - b^2 = -120 \quad a^2+b^2 = 122}$.
On somme : $2.a^2 = 2$, donc $|a| = 1$.
On soustrait : $b^2 = 121$ donc $|b| = 11$.
On choisit alors le signe de chacun en sachant que $2.a.b$ vaut -22.
On fixe par exemple $a = 1$ et $b = -11$.

On peut vérifier : $\boxed{(1-11.i)^2 = 1^2 + 11^2.i^2 - 2.11.i = -120 - 22.i}$

On utilise alors la formule pour l'équation du second degré, issue de calculs algébriques valables tout autant dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{-b+\delta}{2.a}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2.a}$.
On trouve $\boxed{2-6.i \text{ et } 1+5.i}$

Même si ça ne sert ici à rien, on place les deux points dans le plan complexe et on interprète géométriquement le vecteur δ qui les sépare...

◦23◦ Classez du plus petit au plus grand : $(3!)^{2!}$, $(3^2)!$, $(2^3)!$ et $(2!)^{3!}$.
On est en mathématiques et non dans le domaine de la foi, il faut évidemment argumenter.

On calcule les quatre nombres :

$(3!)^{2!}$	$(3^2)!$	$(2^3)!$	$(2!)^{3!}$
6^2	$9!$	$8!$	2^6
36	beaucoup	un peu moins	64

On trie : $\boxed{36 = (3!)^{2!} < 64 = (2!)^{3!} < 8! = (2^3)! < 9! = (3^2)! = 362\,880}$

Et pour avoir de la rigueur, on intercale 100 *entre* 2^6 *et* $8!$.

◦24◦ ♡ Simplifiez $\exp\Big(\ln\big(\sqrt{7}-1) + \ln(\sqrt{7}+1) + \ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + \ln(\sqrt{3}-\sqrt{2})\big)\Big)$.

On aboutit sans effort à 6.

◦25◦ Donnez module et argument de $1+e^i$ et $1-e^{i.\pi/3}$.

On prend la formule $1+e^{i.\theta} = 2.\cos(\theta/2).e^{i.\theta/2}$ et on exprime $1-e^{i.\pi/3}$ sous forme cartésienne $1 - \dfrac{1+i.\sqrt{3}}{2}$:

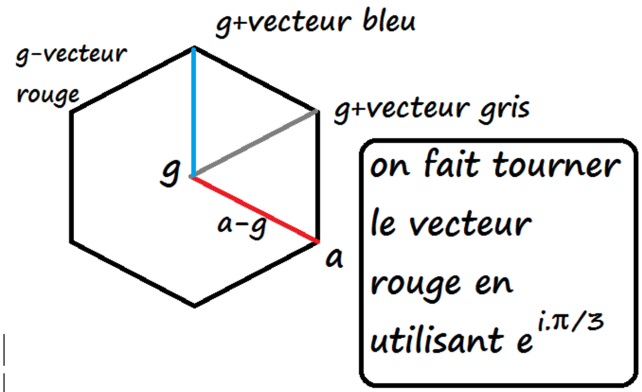
	module	argument
$1+e^i$	$2.\cos(1/2)$	$1/2$
$1-e^{i.\pi/3}$	1	$-\pi/3$

◦26◦ α est un réel fixé. Résolvez l'équation $x^2 - (e^\alpha + e^{-\alpha}).x + 1 = 0$ d'inconnue complexe x.

La somme vaut $e^\alpha + e^{-\alpha}$ et le produit vaut 1 ? les deux racines sont e^α et $e^{-\alpha}$.
Comme pour $e^{i.\theta}$ et $e^{-i.\theta}$quand l'équation est $x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1 = 0$.

◦27◦ Un hexagone régulier a pour centre de gravité A d'affixe $2+i$ et pour sommet A d'affixe $2+3.i$. Trouvez les autres sommets.

On fait des rotations d'angle $\pi/3$ autour du centre dont l'affixe sera notée plus généralement g, tandis que celle de A sera notée a :



point	A	B	C
affixe	a	$g+e^{\frac{i.\pi}{3}}.(a-g)$	$g+j.(a-g)$
point	D	E	F
affixe	$g-(a-g)$	$g+j^2.(a-g)$	$g+e^{-\frac{i.\pi}{3}}.(a-g)$

Pour ce type d'exercices, la clef est bien de faire de la géométrie dynamique (« je passe d'un sommet à l'autre par une rotation donc par multiplication par un complexe de module 1 bien choisi »),
et surtout pas de la géométrie à la française de collège mal foutu (« je mets tout en équation pour dire que des longueurs sont égeles »).

◦28◦ ♡ Comparaison des moyennes par la méthode de Cauchy.
Montrez pour tout couple de réels positifs : $\sqrt{a.b} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.

C'est du cours.
On part de $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$ et on arrive au résultat.

Montrez pour tout quadruplet de réels positifs : $\sqrt[4]{a.b.c.d} \leqslant \dfrac{\sqrt{a.b}+\sqrt{c.d}}{4} \leqslant \dfrac{a+b+c+d}{4}$.

On a déjà : $\sqrt{a.b} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ mais aussi $\sqrt{c.d} \leqslant \dfrac{c+d}{2}$.
Mais on a aussi

$$\sqrt{\sqrt{a.b}.\sqrt{c.d}} \leqslant \frac{\sqrt{a.b}+\sqrt{c.d}}{2}$$

en donnant à $\sqrt{a.b}$ et $\sqrt{c.d}$ les rôles de a et b.
On a donc

$$\sqrt[4]{a.b.c.d} \leqslant \frac{\sqrt{a.b}+\sqrt{c.d}}{2}$$

car $\sqrt{\sqrt{x}} = (x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$.
Il ne reste qu'à enchainer :

$$\sqrt[4]{a.b.c.d} \leqslant \frac{\sqrt{a.b}+\sqrt{c.d}}{2} \leqslant \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}$$

On accèdera de la même façon à $\sqrt[8]{a_1.a_2.a_3.a_4.a_5.a_6.a_7.a_8} \leqslant \dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}$.

Déduisez pour tout triplet de réels positifs : $\sqrt[3]{a.b.c} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$ (pensez à prendre $d = \dfrac{a+b+c}{3}$).

La ruse de fou diront certains.
En effet, on obtient alors $\sqrt[4]{a.b.c.\dfrac{a+b+c}{3}} \leqslant \dfrac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}$.
Le second membre est juste $\dfrac{a+b+c}{3}$ tous calculs faits.

Non ! Pas « tous calculs faits ». Aucun calcul bordel.
Vous avez eu trois notes a, b et c.
Vous avez pour moyenne $\dfrac{a+b+c}{3}$.
Et voilà que vous avez une nouvelle note égale justement à $\dfrac{a+b+c}{3}$.
Comment voulez vous que votre moyenne change !

C'est du bon sens, pas du calcul.

Ecrivons avec des puissances :
$$(a.b.c)^{\frac{1}{4}}.\Big(\frac{a+b+c}{3}\Big)^{\frac{1}{4}} \leqslant \Big(\frac{a+b+c}{3}\Big)$$
Elevons à la puissance 4 :
$$(a.b.c).\Big(\frac{a+b+c}{3}\Big) \leqslant \Big(\frac{a+b+c}{3}\Big)^4$$
Simplifions par le réel positif $\dfrac{a+b+c}{3}$:
$$(a.b.c) \leqslant \Big(\frac{a+b+c}{3}\Big)^3$$
Revenons en aux racines cubiques :
$$\sqrt[3]{a.b.c} = (a.b.c)^{\frac{1}{3}} \leqslant \Big(\frac{a+b+c}{3}\Big)$$
C'est le résultat demandé.

On pouvait aussi jouer directement avec les exposants et des $1-\dfrac{1}{4}$ *puis des* $\dfrac{1}{3}$.

Finalement, le coup de $d = \dfrac{a+b+c}{3}$ est génial mais il se comprend avec « la nouvelle note ne change pas la moyenne arithmétique ».

Montrez pour tout quintuplet de réels positifs : $\sqrt[5]{a.b.c.d.e} \leqslant \dfrac{a+b+c+d+e}{5}$.

Reprendre la même idée.
Partir de $\sqrt[3]{a.b.c} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$ et $\sqrt[3]{d.e.f} \leqslant \dfrac{d+e+f}{3}$ et $\sqrt{\sqrt[3]{a.b.c}.\sqrt[3]{d.e.f}} \leqslant \dfrac{\sqrt[3]{a.b.c}+\sqrt[3]{d.e.f}}{2}$.
Aboutir à $\sqrt[6]{a.b.c.d.e.f} \leqslant \dfrac{a+b+c+d+e+f}{6}$ par transitivité.

Prendre le cas particulier $f = \dfrac{a+b+c+d+e}{5}$ et simplifier les exposants.

◦29◦

L'élève A dit $\displaystyle\int_{4.\pi/3}^{5.\pi/3} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.d\theta$ n'existe pas puisque la primitive $\theta \longmapsto \ln(\sin(\theta))$ n'existe ni en $4.\pi/3$ ni en $5.\pi/3$.
L'élève B dit $\displaystyle\int_{\pi/3}^{9.\pi/4} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.d\theta = \ln(\sin(9.\pi/4)) - \ln(\sin(\pi/3)) = \ln(\sqrt{6}/3)$.
Montrez que les deux ont tort.

Le premier parle de LA primitive. L'erreur à se faire tuer.

Ensuite, ce n'est une primitive que par intervalle.
Et sur l'intervalle de $[4.\pi/3,\ 5.\pi/3]$, celle qui sert est $\theta \longmapsto \ln(-\sin(\theta))$.

Sinon, avec le cours, on écrit
$$\int_{4.\pi/3}^{5.\pi/3} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.d\theta = \ln\Big(\frac{\sin(5.\pi/3)}{\sin(4.\pi/3)}\Big)$$
et les deux signes moins s'en vont.

Le second élève n'est pas totalement en tort.
C'est celui qui lui a posé la question qui mérite d'être radié.
L'intégrale n'existe pas, car en π et en $2.\pi$, la fonction n'existe pas, et explose même.

◦30◦

Comparez pour l'ordre usuel : $3.\log_2(1000)$ et $10.\log_{10}(1024)$.

On a $\log_2(1024) = 10$ car $2^{10} = 1024$ *(principe bien connu en informatique)*.
On a $\log_{10}(1000) = 3$ car $10^3 = 1000$ *(principe bien connu en physique et appris par coeur en chimie)*.

On met but à bou par croissance du logarithme de base plus grand que 1 :
$\boxed{3.\log_2(1000) < 3.\log_2(1024) = 3.10 = 10.3 = 10.\log_{10}(1000) < 10.\log_{10}(1024)}$

∘31∘

Simplifiez $(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (-a+b+c)^2$.
Simplifiez $(a+b+c)^4 + (a+b-c)^4 + (a-b+c)^4 + (-a+b+c)^4$.
Simplifiez $\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)\in\{-1,1\}^n} (\varepsilon_1.\alpha_1 + \dots + \varepsilon_n.\alpha_n)^3$ où les α_k sont des réels donnés.

$(a+b+c)^2 =$	$a^2+b^2+c^2$	$+2.a.b+2.a.c+2.b.c$
$(a+b-c)^2 =$	$a^2+b^2+c^2$	$+2.a.b-2.a.c-2.b.c$
$(a-b+c)^2 =$	$a^2+b^2+c^2$	$-2.a.b+2.a.c-2.b.c$
$(-a+b+c)^2 =$	$a^2+b^2+c^2$	$-2.a.b-2.a.c+2.b.c$

La somme vaut $4.(a^2+b^2+c^2)$. Tous les double-produits se sont effacés.

En partant de $(a+b+c)^4 = a^4+b^4+c^4+4.(a.b^3+a^3.b+a.c^3+a^3.c+b.c^3+b^3.c)+6.(a^2.b^2+a^2.c^2+b^2.c^2)$ $+12.(a.b.c^2+a.c.b^2+b.c.a^2)$ et en changeant des signes, on aboutit à :
$(a+b+c)^4+(a+b-c)^4+(a-b+c)^4+(-a+b+c)^4 = 4.(a^4+b^4+c^4)+24.(a^2.b^2+a^2.c^2+b^2.c^2)$

Il n'y a pas de belle généralisation.
En revanche, en attaquant par récurrence, on peut montrer :

$$(a)^2 + (-a)^2 = 2.a^2$$

$$(a+b)^2+(a-b)^2+(-a-b)^2+(-a+b)^2 = 4.(a^2+b^2)$$

$$(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(-a+b+c)^2+(-a+b-c)^2+(-a-b+c)^2+(-a-b-c)^2+(a-b-c)^2 = 8.(a^2+b^2+c^2)$$

$$\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)\in\{-1,1\}^n} (\varepsilon_1.\alpha_1+\dots+\varepsilon_n.\alpha_n)^3 = 2^n.((a_1)^2+(a_2)^2+\dots+(a_n)^2)$$

avec 2^n termes dans la première somme.

∘32∘

On rappelle : $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)}$. On déduit $\sin(\pi/6) = \sqrt{3}$ et $\cos(\pi/6) = 3$.
Vrai ou faux : $(1 = 2\ et\ 4 = 3) \Rightarrow (5 = 5)$, en additionnant.
Vrai ou faux : $(1+4 = 2+3) \Rightarrow (1 = 2\ et\ 4 = 3)$, en identifiant.
Vrai ou faux :$(a\ et\ \overline{a}) \Rightarrow a$.
Vrai ou faux :$(a\ ou\ \overline{a}) \Rightarrow a$.
Vrai ou faux : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1 \Rightarrow (x^2 > -1)$.
« Il avala le poison et mourut sur le champ » = « il mourut sur le champ et avala le poison ».

L'identification de la première ligne est une ânerie, comme toute identification. On a en fait $\sin(\pi/6) = \dfrac{\sqrt{3}}{2.\sqrt{3}}$ et $\cos(\pi/6) = \dfrac{3}{2.\sqrt{3}}$.

$(1 = 2\ et\ 4 = 3) \Rightarrow (5 = 5)$ est du type « Faux implique vrai ». C'est Vrai.

L'identification $(1+4 = 2+3) \Rightarrow (1 = 2\ et\ 4 = 3)$ est une ânerie.

$(a\ et\ \overline{a}) \Rightarrow a$ est du type Faux implique quelquechose. C'est Vrai.

$(a\ ou\ \overline{a}) \Rightarrow a$ est du type « Vrai implique a ». Tout dépend de la valeur de a.

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1 \Rightarrow (x^2 > -1)$ est en « Faux implique Vrai ». On accepte encore.

Enfin, le « et » de la langue française n'est pas si commutatif que ça.

◦33◦

♡ Voici un lexique de mots anglais du vocabulaire mathématique. Retrouvez leur signification en français :

whole number	countable set	significant figure	right hand side
slope	floor	join of sets	rhombus
cuboïd	nondecreasing function	sequence	by induction on n
one to one correspondance	x raised to the power of y	thus	w.l.o.g.
law of cosines	assume that	hence	intermediate mean value
squeeze theorem	proof by contradiction	therefore	brackets

nombre entier	ensemble dénombrable	chiffre significatif	membre de droite
taux	partie entière	réunion d'ensembles	losange
parallélépipède rectangle	fonction croissante	suite	par récurrence sur n
bijection	x puissance y	donc	sans perte de généralité
formule d'Al kashi	supposons que	donc	T.V.I.
théorème d'encadrement	preuve par l'absurde	donc	crochets

◦34◦

Calculez $\cos(\pi/12)$ et ensuite prouvez $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{16}+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\sqrt{8}}$.

On écrit $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

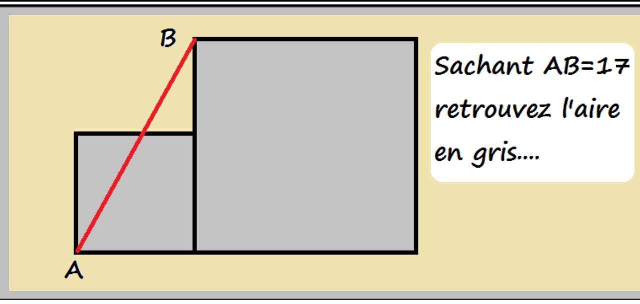
La formule de duplication $\cos(2.\theta) = \cos^2(\theta) - 1$ donne $\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{2} = \frac{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$.

Comme $\cos(\pi/24)$ est positif, on a juste à passer à la racine, sans signe moins. Et on rappelle $\sqrt{16} = 4$, si si !

◦35◦

Sachant $x = 45678^3 - 45676^3$, calculez $\sqrt{\frac{x-2}{6}}$.

Les deux figures en gris sont des carrés.



Posons $a = 45677$ pour centrer les choses.
On a alors $x = 45678^3 - 45676^3 = (a+1)^3 - (a-1)^3 = (a^3 + 3.a^2 + 3.a + 1) - (a^3 - 3.a^2 + 3.a - 1)$.
On simplifie : $x = 6.a^2 + 2$.

On soustrait, on divise par 6 : $\frac{x-2}{6} = a^2$.

La racine cherchée vaut donc $\boxed{45\,677}$

Le problème de géométrie utilise simplement le théorème de Pythagore.
On note a et b les côtés des deux carrés. Dans le triangle rectangle d'hypoténuse AB, on a $B^2 = a^2 + b^2$.

Mais les aires des deux carrés sont justement a^2 et b^2. La somme des aires est donc $\boxed{17^2}$

◦36◦

Posez ces opérations, sachant qu'on travaille en base 8 :

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 5 \\ + & 4 & 3 & 7 \\ + & 1 & 2 & 1 \\ + & 6 & 5 & 0 \\ \hline = & & ? & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} & & 1 & 2 & 5 \\ \times & & 7 & 2 & 1 \\ \hline + & & & & * \\ + & & & * & * \\ \hline = & & ? & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} & 7 & 4 & 6 & 5 \\ - & 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline = & & ? & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ & & 1 & 2 & 5 \\ + & & 4 & 3 & 7 \\ + & & 1 & 2 & 1 \\ + & & 6 & 5 & 0 \\ \hline & 1 & 5 & 5 & 5 \end{array} \quad \text{et aussi} \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & 2 & 5 \\ \times & & & & 7 & 2 & 1 \\ \hline & & & & 1 & 2 & 5 \\ + & & & 2 & 5 & 2 & * \\ + & 1 & 1 & 2 & 3 & * & * \\ \hline = & 1 & 1 & 5 & 1 & 4 & 5 \end{array} \quad \text{car} \quad \begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 4} & \\ & 1 & 2 & 5 \\ \times & & & 7 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Passons à la soustraction.

Tout commence bien au début : $\begin{array}{ccccc} & 7 & 4 & 6 & 5 \\ - & 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline = & & & 5 & 1 \end{array}$

Mais tout à coup : $4-6$ n'est pas possible. Mais ce qui est possible, c'est $8+4-6$. On va piquer une huitaine au dessus.

$\begin{array}{ccccc} & 6 & 8+4 & 6 & 5 \\ - & 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline = & & & 5 & 1 \end{array}$ c'est bon, on peut continuer : $\begin{array}{ccccc} & 6 & 8+4 & 6 & 5 \\ - & 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline = & 4 & 6 & 5 & 1 \end{array}$

Et on peut vérifier : $\begin{array}{ccccc} & 1 & & & \\ & 4 & 6 & 5 & 1 \\ + & 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline = & 7 & 4 & 6 & 5 \end{array}$

∘37∘ A partir de quelle valeur de n l'entier $n!$ est il divisible par 2021 ?

Pour quelles valeur de n l'entier $\dfrac{(2.n)!}{n!}$ est il divisible par 2021 ?

On peut écrire $n \geqslant 2021 \Rightarrow 2021$ *divise* $n!$.
Mais la chose a lieu avant. En effet, $2021 = 43 \times 47$.
Il faut et il suffit qu'il y ait un facteur 43 et un facteur 47 dans le produit.
C'est vrai si et seulement si (équivalence) n dépasse 47.
$(n \geqslant 47) \Leftrightarrow (2021 \mid n!)$.

La notation pour « a divise b » est « $a \mid b$.
La quantification est $\exists k \in \mathbb{Z},\ b = k.a$.
Et si vous écrivez juste $b = k.a$ sans avoir quantifié k, c'est que vous n'avez jamais fait de maths... Ce n'est pas grave, on est là pour ça...

On veut ensuite que le produit $(n+1).(n+2)\dots(2.n)$ contienne 43 et 47 ou même un de leurs multiples.
A compléter.

∘38∘ On pose $f = x \longmapsto 8.x^4 - 8.x^2 + 1$ et $g = x \longmapsto 4.x^3 - 3.x$. Montrez : $f \circ g = g \circ f$.

Sachant $f = x \longmapsto 8.x^4 - 8.x^2 + 1$ et $g = x \longmapsto 4.x^3 - 3.x$, on doit se donner x et calculer $f(g(x))$ puis $g(f(x))$ et les comparer.
Pour $f(g(x))$ on a besoin de $(g(x))^2 = (4.x^3 - 3.x)^2 = 16.x^6 - 24.x^4 + 9.x^2$ et de son carré.
On n'invente pas de formule toute prête, mais on calcule efficacement :

	$16.x^6$	$-24.x^4$	$9.x^2$
$16.x^6$	$256.x^{12}$	$-384.x^{10}$	$+144.x^8$
$-24.x^4$	$-384.x^{10}$	$+576.x^8$	$-216.x^6$
$9.x^2$	$+144.x^8$	$-216.x^6$	$+81.x^4$

On regroupe tout : $2048.x^{12} - 6144.x^{10} + 6912.x^8 - 3584.x^6 + 840.x^4 - 72.x^2 + 1$.

On doit faire un calcul similaire avec $4.(8.x^4 - 8.x^2 + 1)^3 - 3.(8.x^4 - 8.x^2 + 1)$.
On l'écrit même $\Big(4.(8.x^4 - 8.x^2 + 1)^2 - 3\Big).(8.x^4 - 8.x^2 + 1)$ pour s'épargner des calculs lourds.

On a

	$8.x^4$	$-8.x^2$	$+1$
$8.x^4$	$64.x^8$	$-64.x^6$	$+8.x^4$
$-8.x^2$	$-64.x^6$	$+64.x^4$	$-8.x^2$
$+1$	$+8.x^4$	$-8.x^2$	$+1$

d'où $(8.x^4 - 8.x^2 + 1)^2 = 64.x^8 - 128.x^6 + 80.x^4 - 16.x^2 + 1$

Ensuite, que préférez vous entre

	$256.x^8$	$-512.x^6$	$+320.x^4$	$-64.x^2$	$+1$
$8.x^4$	$1024.x^{12}$	$-2048.x^{10}$	$+1280.x^8$	$-256.x^6$	$+4$
$-8.x^2$	$-1024.x^{10}$	$+2048.x^8$	$-1280.x^6$	$+256.x^4$	-4
$+1$	$256.x^8$	$-512.x^6$	$+320.x^4$	$-64.x^2$	$+1$

et $(256.x^8 - 512.x^6 + 320.x^4 - 64.x^2 + 1).(8.x^4 - 8.x^2 + 1) = 1024.x^{12} - 2048.x^{10} + 1280.x^8 - 256.x^6 + 4 - 1024.x^{10} + 2048.x^8 - 1280.x^6 + 256.x^4 - 4256.x^8 - 512.x^6 + 320.x^4 - 64.x^2 + 1$
On a bien $f(g(x)) = g(f(x))$ à l'issue de tous ces calculs rébarbatifs.

Représentez graphiquement : $\dfrac{(x^2-1).f''(x) + x.f'(x)}{f(x)}$.

On calcule ensuite $(x^2-1).f''(x)+x.f'(x)=(x^2-1).(96.x^2-16)+x.(32.x^3-16.x)$.
On trouve $128.x^4-128.x^2+16$.
Le hasard (ou le professeur) fait bien les choses :

$$\boxed{\frac{(x^2-1).f''(x)+x.f'(x)}{f(x)}=\frac{128.x^4-128.x^2+16}{8.x^4-8.x^2+1}=16}$$

C'est un cadeau ! L'application à tracer est constante ! Le graphe est une droite horizontale !

Mais il y a un piège : le domaine de définition.
En effet, pour simplifier $\dfrac{128.x^4-128.x^2+16}{8.x^4-8.x^2+1}$ en 16 il faut quand même qu'il ne s'agisse pas de $\dfrac{0}{0}$.
Il faut donc évincer les racines du polynôme f pour le graphe :
$-\dfrac{\sqrt{4+2.\sqrt{2}}}{8}$, $-\dfrac{\sqrt{4-2.\sqrt{2}}}{8}$, $\dfrac{\sqrt{4-2.\sqrt{2}}}{8}$ et $\dfrac{\sqrt{4+2.\sqrt{2}}}{8}$

Le graphe est une droite, privée des quatre points correspondant à ces abscisses.

∘39∘ ♡ Sachant que 4 et -3 sont solutions, résolvez : $x^4-8.x^3-3.x^2+82.x-24=0$ d'inconnue complexe x.

On factorise par $(x-4)$ puisque 4 est racine $x^4-8.x^3-3.x^2+82.x-24=(x-4).(x^3-4.x^2-19.x+6$.
On recommence avec $(x+3)$: $x^4-8.x^3-3.x^2+82.x-24=(x-4).(x+3).(x^2-7.x+2)$

Par intégrité[5], on a quatre solutions :

$$\boxed{S_x=\left\{4,\ -3,\ \frac{7-\sqrt{41}}{2},\ \frac{7+\sqrt{41}}{2}\right\}}$$

∘40∘ ♡ Résolvez $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(t)}{a+\cos(t)}.dt=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ d'inconnue a.

On calcule l'intégrale. On reconnaît une forme en $\dfrac{u'}{u}$.
L'équation devient $\Big[-\ln(a+\cos(t))\Big]_{t=0}^{t=\pi/2}=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.
On simplifie en $\ln(1+a)-\ln(a)=\ln(3/2)$.
On arrange en $\ln\left(\dfrac{1+a}{a}\right)=\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.
Quitte à passer aux exponentielles (bijectivité) : $\dfrac{1+a}{a}=\dfrac{3}{2}$.
Par produit en croix, l'unique solution est $a=2$.

Mais ne peut on avoir aussi $\Big[-\ln(-a-\cos(t))\Big]_{t=0}^{t=\pi/2}=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ *? Bonne question.*

∘41∘ ♡ Sachant $\cos(a)=\dfrac{3}{5}$, $\cos(b)=\dfrac{20}{29}$ et $\cos(c)=\dfrac{7}{25}$, combien de valeurs différentes peut avoir $\cos(a+b+c)$?

On peut développer en deux étapes :
$\cos(a+b+c)=\cos(a).\cos(b).\cos(c)-\sin(a).\sin(b).\cos(c)-\sin(a).\cos(b).\sin(c)-\cos(a).\sin(b).\sin(c)$.
Les cosinus sont connus.
Les sinus aussi. Aux signes près. $|\sin|=\sqrt{1-\cos^2}$.
On a huit choix de signes pour les sinus.

$\sin(a)=4/5$	$\sin(b)=21/29$	$\sin(c)=24/25$
$\sin(a)=4/5$	$\sin(b)=21/29$	$\sin(c)=-24/25$
$\sin(a)=4/5$	$\sin(b)=-21/29$	$\sin(c)=24/25$
$\sin(a)=4/5$	$\sin(b)=-21/29$	$\sin(c)=-24/25$
$\sin(a)=-4/5$	$\sin(b)=21/29$	$\sin(c)=24/25$
$\sin(a)=-4/5$	$\sin(b)=21/29$	$\sin(c)=-24/25$
$\sin(a)=-4/5$	$\sin(b)=-21/29$	$\sin(c)=24/25$
$\sin(a)=-4/5$	$\sin(b)=-21/29$	$\sin(c)=-24/25$

Mais en regroupant les produits, on a quatre valeurs possibles pour $\cos(a+b+c)$.

---

5. « un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul »

∘42∘

♡ Dérivez $x \longmapsto \ln(\sqrt[3]{x^4-4.x^3+6.x^2-4.x+1})$ [a]

[a]. le résultat doit être très simple ; le raisonnement aussi...

Facile : $x^4-4.x^3+6.x^2-4.x+1=(x-1)^4$ (formule du binôme de Newton).

L'application est donc $x \longmapsto \ln(\sqrt[3]{(x-1)^4})$ et même $x \longmapsto \ln((x-1)^{4/3})$ puis $x \longmapsto \frac{4}{3}.\ln(x-1)$.

On dérive et on trouve $x \longmapsto \frac{4}{3.(x-1)}$.

Avec un domaine égal à $]-\infty,\ 1[$ ou $]1,\ +\infty[$.

En effet, la vraie formule était même $x \longmapsto \ln(\sqrt[3]{|x-1|^4})$ et même $x \longmapsto \ln(|x-1|^{4/3})$ puis $x \longmapsto \frac{4}{3}.\ln(|x-1|)$.

Avec la même dérivée.

∘43∘

♡ Retrouvez les coefficients : $\dfrac{X^2+X+1}{X^3-\dots X^2-\dots X+6}=\dfrac{\dots}{X-1}+\dfrac{\dots}{X+2}+\dfrac{\dots}{X-3}$.

$X^3-\dots X^2-\dots X+6=(X-1).(X+2).(X-3)$.

Ensuite, on nomme les trois coefficients cherchés et on réduit au dénominateur commun :

$$\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+2}+\frac{c}{X-3}=\frac{a.(X+2).(X-3)+b.(X-1).(X-3)+c.(X-1).(X+2)}{(X-1).(X+2).(X-3)}$$

Raisonnons par condition nécessaire et suffisante :

$X^2+X+1=a.(X+2).(X-3)+b.(X-1).(X-3)+c.(X-1).(X+2)$.

Puis par condition nécessaire : en 1 : $1^2+1+1=a.(1+2).(1-3)+b.0.(1-3)+c.0.(1+2)$

en -2 : $(-2)^2-2+1=a.0.(-2-3)+b.(-2-1).(-2-3)+c.(-2-1).0$

en 3 : $3^2+3+1=a.(3+2).0+b.(3-1).0+c.(3-1).(3+2)$

On trouve a, b et c par conditions nécessaires. On vérifie en développant.

Finalement : $\boxed{\dfrac{X^2+X+1}{X^3-2.X^2-5.X+6}=\dfrac{-1/2}{X-1}+\dfrac{1/5}{X+2}+\dfrac{13/10}{X-3}}$

∘44∘

♡ Calculez $(-1)^{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.(k+1)}$ en fonction de n.

L'entier $(-1)^{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.(k+1)}$ vaut 1 ou -1 suivant la parité de l'exposant.

On ne connaît pas la valeur de $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.(k+1)$? Qu'importe. C'est une somme d'entiers qui sont tous pairs.

En effet, si k est pair, $k.(k+1)$ est de la forme $pair \times impair$

si k est impair, $k.(k+1)$ est de la forme $impair \times pair$

La somme d'entiers pairs est paire. L'exposant étant pair, $\boxed{(-1)^{\sum_{k=0}^{n}k.(k+1)} \text{ vaut toujours } 1}$

∘45∘

La somme de ses chiffres est la différence entre le nombre et 94. Qui est ce nombre ?

Ecrivons ce nombre $n=\overline{ab}$. C'est $n=10.a+b$ avec a et b deux chiffres.
Un chiffre c'est entre 0 et 9.
La somme de ses chiffres, c'est $a+b$.
La différence entre le nombre et 94, c'est $94-n$ ou $n-94$.
On nous dit donc $a+b=94-(10.a+b)$ ou $(10.a+b)-94=a+b$.

Résolvons déjà $a+b=94-(10.a+b)$. On trouve $9.a+2.b=94$.
Moi j'extrais $11.a=94-2.b$ qui prouve que $11.a$ est pair.
C'est donc que a est pair.
Mais j'ai aussi : $a=\frac{94-2.b}{11}$.
Comme b est entre 0 et 9, a est entre $\frac{94}{11}$ et $\frac{76}{11}$ (environ 6,9 et 8,5).
On n'a plus le choix : l'entier pair a vaut 8.
On reporte pour trouver : $b=\frac{94-11.a}{2}=3$. On confirme : $n=83$. Et $\boxed{94-83=8+3}$

Résolvons donc cette fois $10.a-94=a+b$.
On trouve $9.a-b=94$.
Ceci impose à a de dépasser 10. Impossible.

Il n'y a qu'une solution.

◦46◦

`Retrouvez les stations (métro, R.E.R. et S.N.C.F.) d'anagrammes` *(Nord-Ouest)* :
Sucre collé. Elfe danse. Hôpital du pénis pueril. L'artisane gazera. Asile Tarzan. Petit-connard. Ah ce fluor.

En vrac Saint-Lazare, Gare Saint-Lazare, Courcelles, Pont-Cardinet, Saint-Philippe du Roule, La Defense. La Fourche.
Bonus : Diversite de son internet, Mon odelette retarde, La farce etonna, Un face dessina ta layette.

◦47◦

Résolvez $log_a(7) = 7$.

On revient à la définition : $\frac{\ln(7)}{\ln(a)} = 7$, on fait un produit en croix : $\ln(a) = \frac{\ln(7)}{7}$ et on efface le logarithme par exponentielle : $\boxed{\sqrt[7]{7}}$

◦48◦

♡ Calculez $\int_0^1 4^x.dx$.

$$\int_0^1 4^x.dx = \int_0^1 e^{\ln(4).x}.dx = \Big[\frac{e^{\ln(4).x}}{\ln(4)}\Big]_0^1 = \frac{4}{\ln(4)} - \frac{1}{\ln(4)} = \frac{3}{\ln(4)}$$

gz

◦49◦

On définit : $f = x \longmapsto \frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2.x^2}{x^3-x}$. Représentez la graphiquement, après l'avoir simplifiée...
Représentez aussi le graphe de $f \circ f \circ f \circ f$.

On définit $f = x \longmapsto \frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2.x^2}{x^3-x}$ sur un domaine convenable :
éviter 0, 1 et -1 puisque $x^2 - x = x.(x-1)$
$x^3 + x^2 = x^2.(x+1)$
$x^3 - x = x.(x-1).(x+1)$

Cette recherche permet de trouver un dénominateur commun autre que le gros produit [6], et aussi de simplifier par x

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{2.x}{(x-1).(x+1)} = \frac{(x^2+x)+(x^2-x)-2.x}{(x-1).(x+1)} = \frac{2.x^2-2.x}{(x-1).(x+1)} = \frac{2.x}{x+1}$$

Bref, une simple homographie $\boxed{x \longmapsto \frac{2.x}{x+1} \text{ à représenter sur }]-\infty,\ -1[\cup]-1,\ 0[\cup]0,\ 1[\cup]1,\ +\infty[}$ car il reste des contraintes de la forme initiale.

Mais alors f se représente par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (vous comprenez le 0 ?).

Composer les homographies, c'est multiplier les matrices : $f \circ f$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2$ qui fait $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$(f \circ f) \circ (f \circ f)$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2$: $\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$

On peut même émettre une conjecture pour la forme générale. Mais ensuite, on n'oublie qu'il faut éviter toutes les valeurs hors du domaine initial de f comme -1, 0 et 0, puis du domaine de $f \circ f$ et ainsi de suite.

◦50◦

♡ Une homographie h (c'est à dire une application de la forme $x \longmapsto \frac{a.x+b}{c.x+d}$, je l'ai déjà dit douze fois) vérifie $h(1) = 2$, $h(2) = 3$ et $h(3) = 1$. Calculez la. Déterminez $h(4)$, puis $h \circ h \circ h \circ h$.

On a un système : $\frac{a+b}{c+d} = 2$, $\frac{2.a+b}{2.c+d} = 3$ et $\frac{3.a+b}{3.c+d} = 1$.

On fait des produits en croix : $\left\{ \begin{array}{rrrrr} a & +b & -2.c & -2.d & = 0 \\ 2.a & +b & -6.c & -3.d & = 0 \\ 3.a & +b & -3.c & -d & = 0 \end{array} \right|$.

6. une fois de plus, on est en maths, on réfléchit avant de calculer

On n'a que trois équations pour quatre inconnues. C'est incomplet ?

Sauf que nos quatre inconnues sont « à une constante multiplicative près ».
L'homographie $x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$ est la même que $x \longmapsto \dfrac{(3.a).x+(3.b)}{(3.c).x+(3.d)}$ et que $x \longmapsto \dfrac{\lambda.a.x+\lambda.b}{\lambda.c.x+\lambda.d}$.
On peut donc imposer une valeur par exemple à b (non nulle) et trouver les autres.

On trouve : $x \longmapsto \dfrac{\frac{5}{13}.x-1}{\frac{3}{13}.x-\frac{7}{13}}$ et on préfèrera $\boxed{x \longmapsto \dfrac{5.x-13}{3.x-7}}$ (on peut vérifier).

Rien de gentil : $h(4)=\dfrac{7}{5}$.

Pour déterminer h^4, on écrit la matrice de h : $\begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$

puis celle de $h\circ h$: $\begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 & 26 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$

puis celle de h^4 : $\begin{pmatrix} -14 & 26 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -14 & 26 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 40 & -104 \\ 24 & -56 \end{pmatrix}$.

On résume :

$$h\circ h\circ h\circ h = x \longmapsto \frac{40.x-104}{24.x-56}$$

On allège :

$$h\circ h\circ h\circ h = x \longmapsto \frac{5.x-13}{3.x-7}$$

On a $h^3 = Id$...

Remarque | Et c'est normal : $h^3(1)=1$, $h^3(2)=1$ et $h^3(3)=3$. Réfléchissez un peu...

∘51∘ On définit sur $\mathbb{Z}$ la loi $*$ par $a*b = a.(-1)^b + b.(-1)^a$. Montrez que c'est une loi interne, commutative, associative *(on pourra montrer que $a*b$ a la même parité que $a+b$)*. Trouvez son neutre, le symétrique de chaque élément a.
n est un entier naturel donné. Calculez $1*1*1*\ldots 1$ (n termes). Calculez $1*2*3*\ldots*2018$.
Résolvez $6*a=2018$ d'inconnue entière a.
Peut on, rien qu'en additi*nnant des 1 obtenir 2018 ? Peut on, rien qu'en additi*nnant des 2 obtenir 2018 ?
On veut alors définir la "multiplication qui va avec" au moins sur $\mathbb{N}$ par $a\otimes b = a*a*a\ldots*a$ *(b fois, comme pour $a.b=a+a+\ldots+a$ b fois)*. Cette multiplication est elle commutative sur $\mathbb{N}$?

Interne. On prend deux entiers quelconques a et b. Que le résultat soit $-a+b$, $a-b$, $a+b$ ou $-a-b$, on a un entier.

Commutative. pas besoin d'aller chercher loin : $a*b=b*a$.

On se donne trois entiers a, b et c. On a huit cas pour les parités respectives, qu'il faudra tous étudier avant de pouvoir conclure ?
Déjà $(a*b)*c=(a*b).(-1)^c+c.(-1)^{a*b}$
$(a*b)*c=(a.(-1)^b+b.(-1)^a).(-1)^c+c.(-1)^{a*b}$
$(a*b)*c=a.(-1)^{b+c}+b.(-1)^{a+c}+c.(-1)^{a*b}$ pas laid...
Ensuite : $a*(b*c)=a.(-1)^{b*c}+(b*c).(-1)^a$
$a*(b*c)=a.(-1)^{b*c}+(b.(-1)^c+c.(-1)^b).(-1)^a$
$a*(b*c)=a.(-1)^{b*c}+b.(-1)^{a+c}+c.(-1)^{a+b}$
Le terme $b.(-1)^{a+c}$est déjà commun aux deux sommes.
On aimerait se convaincre de $a.(-1)^{b*c}=a.(-1)^{b+c}$ ce qui serait parfait (et aussi $c.(-1)^{a+b}=c.(-1)^{a*b}$).

Or, $b*c$ est égal à	$b+c$	ou $b-c$	ou $-b+c$	ou $-b-c$	
mais dans tous les cas	$(-1)^{b+c}$	$(-1)^{b-c}$	$(-1)^{-b+c}$	$(-1)^{-b-c}$	vaut toujours $(-1)^{b+c}$

En effet, par exemple

$$(-1)^{b-c}=(-1)^{b+c-2.c}=(-1)^{b+c}.(-1)^{-2.c}=(-1)^{b+c}.1$$

C'est gagné : $(a*b)*c=a*(b*c)$ pour tout triplet d'entiers.

Comme neutre, on propose 0 car c'est ce qui semble le plus naturel. Pour tout a, on a $a*0 = a.(-1)^0 + (-1)^a.0 = a.1 + 0 = a$.

On veut le symétrique de a. Pourquoi ne pas penser à $-a$?
Et surtout, autant vérifier :

$$a*(-a) = (-1)^a.(-a) + (-1)^{-a}.a = (-1)^a.(-a) + (-1)^a.a = (-1)^a.(-a+a) = (-1)^a.0 = 0..$$

On a trouvé le neutre, c'est ce qu'on voulait.
On pouvait distinguer suivant la parité de a, mais la clef est dans $(-1)^{-a} = (-1)^a$.

$1*1$	$= (-1)^1.1 + (-1)^1.1$	$= -2$
$(1*1)*1$	$= (-1)^{-2}.1 + (-1)^1.(-2)$	$= 3$
$((1*1)*1)*1$	$= (-1)^{-3}.1 + (-1)^1.3$	$= -4$
$(((1*1)*1)*1)*1$	$= (-1)^{-4}.1 + (-1)^1.(-4)$	$= 5$

On émet très vite une belle conjecture : $1*1*\ldots 1 = (-1)^{n+1}.n$ (ou on sépare suivant la parité de n, mais ça va...).
La récurrence est initialisée par l'étape de recherche (ce sera souvent le cas dans nos travaux, quand le résultat ne sera pas balancé/offert).

On se donne n et on suppose $1*1*\ldots*1 = (-1)^{n+1}.n$ et on met un 1 de plus :

$$(1*1*\ldots*1)*1 = (-1)^1.(-1)^{n+1}.n + (-1)^{(-1)^{n+1}.n}.1 = (-1)^{n+2}.n + (-1)^n$$

On rappelle en effet que $(-1)^p = (-1)^{-p}$ pour tout entier p.
On remplace aussi $(-1)^n$ par $(-1)^{n+2}$.
On réunit :

$$(1*1*\ldots*1)*1 = (-1)^{n+2}.n + (-1)^{n+2} = (-1)^{n+2}.(n+1)$$

Et c'est la formule attendue.

Plus rapide : $1*1 = 2$, donc dans $1*1*\ldots*1$, il suffit de regrouper les termes deux à deux par associaitivité.
On a alors $(1*1)*(1*1)*\ldots*(1*1)$ si n est pair.
On calcule $2*2*\ldots*2$ ($n/2$ termes si n est pair) facilement. A chaque fois, on a des nombres pairs, donc on ne fait que des additions. Total $\frac{n}{2}.2$.
Pour n impair, il reste un terme de plus au bout, c'est tout.

On fait un travail similaire pour $1*2*3*\ldots*n$ en toute généralité.

$1*2$	$= (-1)^1.2 + (-1)^2.1$	$= -1$
$1*2*3$	$= (-1)^{-1}.3 + (-1)^3.(-1)$	$= -2$
$1*2*3*4$	$= (-1)^{-2}.4 + (-1)^4.(-2)$	$= 2$
$1*2*3*4*5$	$= (-1)^{-2}.5 + (-1)^5.2$	$= 3$
$1*2*3*4*5*6$		$= -3$
$1*2*3*4*5*6*7$		$= -4$

La formule de la conjecture va dépendre de la parité de n et de $n//2$.
On ne fera pas la récurrence ici, et on trouvera -1009.

L'équation $6*a = 2018$ s'écrit $a + (-1)^a.6 = 2018$.
On trouve $a = 2018 - (-1)^a.6$.
a est forcément pair ($2018+6$ ou $2018-6$ c'est pair !).
L'équation devient $a = 2018 - 6$. On a une unique solution : 2012.

Peut on proposer et vérifier ?
On trouvera alors une solution.
Les a-t-on toutes ?

Mais, il y a tellement mieux. On régait comme dans un groupe : $a*6 = 2018$ équivaut à $(a*6)*(-6) = 2018*(-6)$ puis $a*0 = 2018*(-6)$ et on a la solution indiquée.

loi interne sur A	$\forall(a,\ b) \in A^2,\ a * b \in A$ (A est stable par $*$)
	toutes, sauf par exemple le produit scalaire de vecteurs (il donne un réel, pas un vecteur)
associaitive	$\forall(a,\ b,\ c) \in A^3,\ (a * b) * c = a * (b * c)$
	addition, multiplication dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $M_n(\mathbb{R})$ mais pas soustraction ni division
commutative	$\forall(a,\ b) \in A^2,\ a * b = b * a$
	multiplication dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ mais pas dans $M_n(\mathbb{R})$
avec un neutre	$\exists e \in A,\ \forall a \in A,\ a * a = e * a = a$ (à vous de le deviner)
	1 pour la multiplication, 0 pour l'addition, I_2 pour le produit matriciel
et des symétriques	$\forall a \in A,\ \exists \alpha \in A,\ a * \alpha = \alpha * a = e$ (le neutre)

∘52∘ * Résolvez $\cos^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ d'inconnue entière n.

Les dérivées successives du cosinus sont connues : $\boxed{\cos}\ \boxed{-\sin}\ \boxed{-\cos}\ \boxed{\sin}$ et on recommence.
On a donc

$\cos^{(0)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos^{(2)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$	$\cos^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
non	non	oui	non

et plus généralement

$\cos^{(4.k)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos^{(4.k+1)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos^{(4.k+2)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$	$\cos^{(4.k+2)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
non	non	oui	non

On a donc $\boxed{S = \{4.k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}}$

Rappel : les réponses $\boxed{S = \{4.k+2\}}$ *ou* $\boxed{S = \{4.k+2\}\ k \in \mathbb{N}}$ *sont erronées, et montrent qu'il vous reste un peu de chemin à faire pour maîtriser les notations mathématiques.*
C'est normal, et ce n'est pas grave.
Ce qui est grave, c'est de croire que vous les maitrisez, ou pire encore, de dire « bah, $S = \{4.k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ et $S = \{4.k + 2\} \mid k \in \mathbb{N}$ c'est pareil ».

∘53∘ ♡ On note a le réel d'écriture 0,12340123401234... *(le motif* 01234 *se répète indéfiniment)*. Simplifiez $100000.a - a$. Déduisez a sous forme rationnelle p/q.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 100000.a & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & , & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ & & & & & & 0 & , & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & \dots \end{array}$$
la différence vaut 12340.

On a donc $99999.a = 12340$ et par division : $\boxed{a = \frac{12\,340}{99\,999}}$

∘54∘ Dans cette classe, il y a des garçons et des filles. Voici les moyennes

	moyenne de la classe	moyenne des garçons	moyenne des filles
mathématiques	11,4	10,6	12,5
physique	12,8		13,2

Retrouvez la moyenne qui manque.

On note G le nombre de garçons, F le nombre de filles.
On note GM la somme des notes des garçons en maths et GP la somme des notes des garçons en physique.
On note FM la somme des notes des filles en maths et FP la somme des notes des filles en physique.

On traduit :

	moyenne de la classe	moyenne des garçons	moyenne des filles
mathématiques	$(GM + FM) = 11,4 \times (G + F)$	$GM = 10,6 \times G$	$FM = 12,5 \times F$

On résout même si il y a moins d'équations que d'inconnues. Tout est défini à proportionnalité près.
En sommant : $GM + GF = 11,4 \times (G + F) = 10,6 \times G + 12,5 \times F$.
On trouve : $G = \frac{1,1}{0,8}.F$. Il y a plus de garçons que de filles. Et ils ont tiré la moyenne de classe en maths vers le bas *(avec autant de garçons que de filles, on aurait trouvé* 11,55 *de moyenne de classe)*.
On peut imaginer huit filles et onze garçons. Ou « F filles et $\frac{1,1}{0,8}.F$ garçons ».
On calcule alors la moyenne de physique de la classe : $\frac{1,1 \times \mu + 0,8 \times 13,2}{1,1 + 0,8} = 12,8$ *(μ est la moyenne des garçons).*
On trouve 12,5 *(aux arrondis près)*.

∘55∘ Montrez par récurrence sur n plus grand que 5 : $3^n \leqslant \frac{(2.n)!}{(n!)^2} \leqslant 4^n$.

Initialisation pour $n = 5$ puisqu'il y a un début à tout :

$$3^5 \leqslant \frac{10!}{(5!)^2} = \frac{6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5} = 2^2.3^2.7 \leqslant 4^5$$

C'est vrai car $3^3 = 27 \leqslant 2^2.7 = 28$ et $3^2.7 = 63 \leqslant 256 = 4^4$. De justesse d'un côté.

Si vous avez calculé $3^5 = 243$, $\frac{10!}{(5)^2} = 252$ *et* $4^5 = 1024$, *vous avez raison, mais vous me décevez de ne pas avoir un peu simplié.*

On se donne un entier naturel n et on suppose $3^n \leqslant \frac{(2.n)!}{(n!)^2} \leqslant 4^n$.

L'objectif étant $3^{n+1} \leqslant \frac{(2.n+2)!}{((n+1)!)^2} \leqslant 4^{n+1}$, intéressons nous au terme du milieu :

$$\frac{(2.n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2.n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(2.n+1).(2.n+2)}{(n+1)^2} = \frac{(2.n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{4.n+2}{n+1}$$

On raisonne en deux temps :

• droite : $\frac{4.n+2}{n+1} \leqslant 4$ (produit en croix) donc $\frac{(2.n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{4.n+2}{n+1} \leqslant 4^n.4 = 4^{n+1}$

• gauche : $\frac{4.n+2}{n+1} \geqslant 4$ (produit en croix et $n \geqslant 5$) donc $\frac{(2.n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{4.n+2}{n+1} \geqslant 3^n.3 = 3^{n+1}$.

Le principe de récurrence permet de conclure.

∘56∘ Calculez $\int_0^1 \frac{2.t+2}{4.t^2+6.t+2}.dt$.

L'intégrale existe, par continuité (et existence) de la fonction sous le signe somme.

On factorise : $\int_0^1 \frac{2.t+2}{4.t^2+6.t+2} = \int_0^1 \frac{2.t+2}{2.(t+1).(2.t+1)}.dt$.

On simplifie un peu : $\int_0^1 \frac{dt}{2.t+1}$.

On intègre en mettant le 2 qui manque $\boxed{\int_0^1 \frac{2.t+2}{4.t^2+6.t+2} = \frac{1}{2}\Big[\ln(2.t+1)\Big]_3^7 = \frac{\ln(3)}{2}}$

∘57∘ ♡ Le nombre $\log_2(3).\log_3(4).\log_4(5).\log_5(6).\log_6(7).\log_7(8)$ est il rationnel ? On rappelle : $y = \log_a(x)$ signifie $a^y = x$.

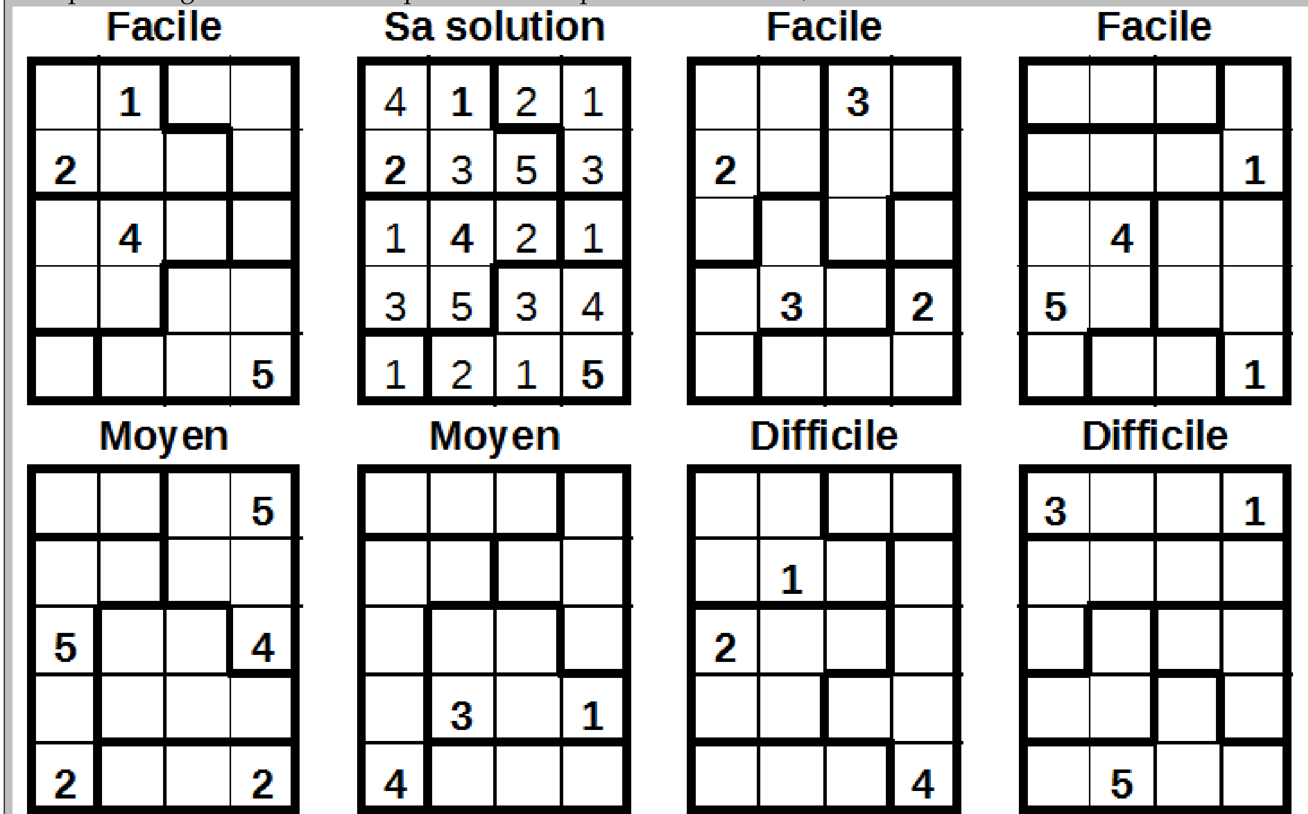
On rappelle : $y = \log_a(x)$ signifie $a^y = x$, ce qui donne $y.\ln(a) = \ln(x)$.

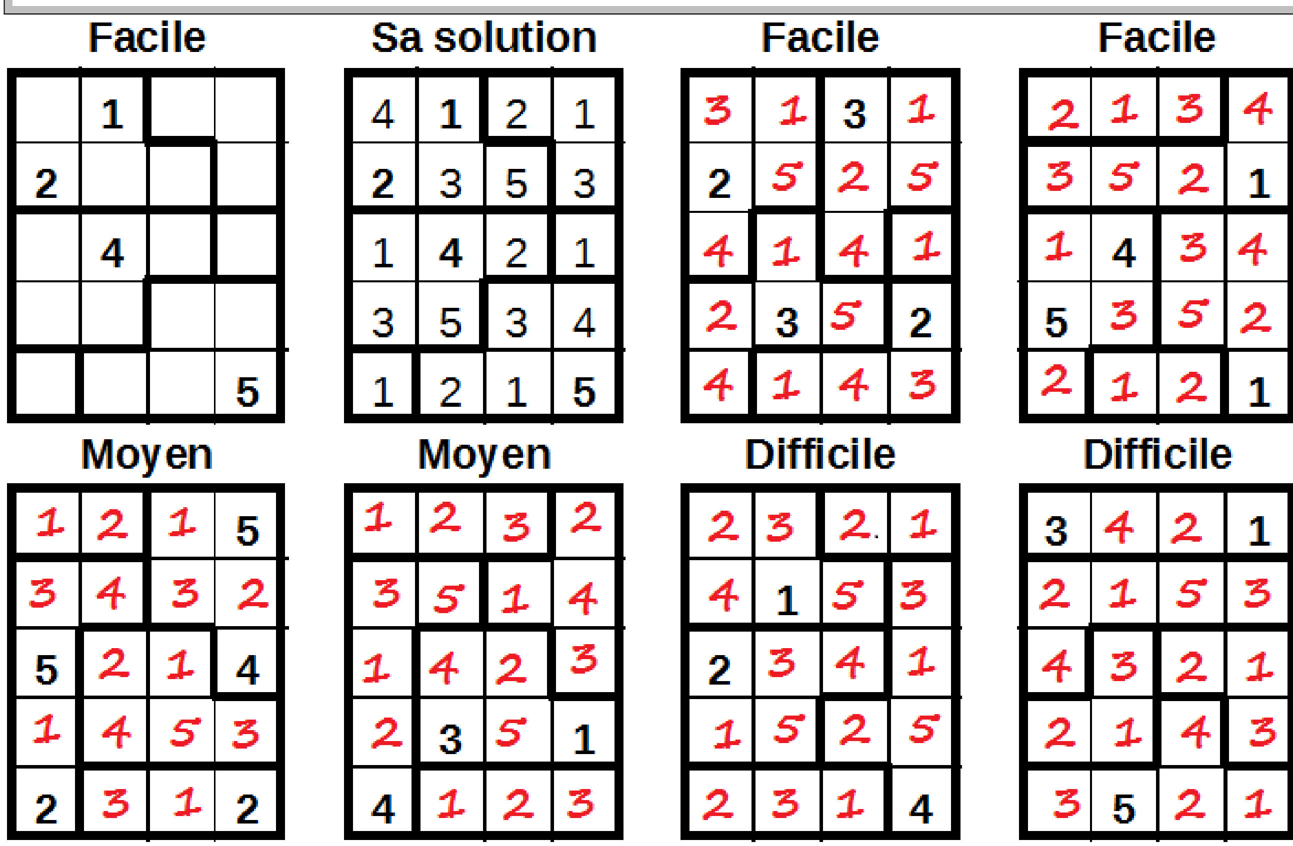
On résume $\boxed{\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$ Pour a égal à 1, c'est impossible. Normal.
Pour a égal à e, c'est bien le logarithme naturel.
Pour a égal à 100 : $Log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

Finalement, après télescopage $\log_2(3).\log_3(4).\log_4(5).\log_5(6).\log_6(7).\log_7(8) = \frac{\ln(8)}{\ln(2)} = 3$. C'est un rationnel.

58

♣ Tectonic est un jeu développé depuis quelques années maintenant. Il s'agit de compléter une grille. La règle : une maison de taille n contient les entiers de 1 à n. Deux cases voisines ne peuvent pas contenir la même valeur. Une première grille résolue vous permet de comprendre. Et ensuite, c'est à vous.





59

♡ Trouvez les coefficients b et c (complexes) pour que l'équation $z^2 + b.z + c = 0$ admette pour racine $2 + 3.i$ et pour discriminant $2.i$.

Déjà $b^2 - 4.c$ vaut $2.i$.
Ensuite, $(2+3.i)^2 + b.(2+3.i) + c$ est nul.
Ceci donne $c = 5 - 12.i - (2+3.i).b$.

Attention, on n'identifie pas bêtement « partie réelle et partie imaginaire ». b et c ne sont pas forcément réels...

On a juste, en reportant : $b^2 + (8+12.i).b - 20 + 46.i = 0$.

On résout en passant par le discriminant : $\Delta = (8+12.i)^2 - 4.(-20+46.i) = 8.i = (2.e^{i.\pi/4})^2$.
b peut valoir $-5-7.i$ ou $-3-5.i$.

On reporte et on trouve c. Et on a deux équations.

D'autres approches sont possibles.

∘60∘ ♡ Montrez : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(2.\theta) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(\theta) \notin \mathbb{Q}$.

Au lieu de $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(2.\theta) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(\theta) \notin \mathbb{Q}$, on prouve sa contraposée :
$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(2.\theta) \in \mathbb{Q}$

Il suffit d'écrire $\cos(\theta) = \dfrac{p}{q}$ et d'utiliser la formule « $2.c^2 - 1$ » : $\cos(2.\theta) = \dfrac{2.p^2 - q^2}{q^2}$.

∘61∘ Résolvez $x^2 + \sqrt{2} \leqslant (1+\sqrt{2}).x$ d'inconnue réelle x.

On résout $x^2 + \sqrt{2} \leqslant (1+\sqrt{2}).x$ en étudiant le signe du trinôme $x^2 - (1+\sqrt{2}).x + \sqrt{2}$.
Pas besoin de calculer Δ ! On voit la somme et le produit, comme dans tout exercice de maths qui se respecte.[7]

$$x^2 - (1+\sqrt{2}).x + \sqrt{2} = (x-1).(x-\sqrt{2})$$

Le signe ne se retient pas par des formules par cœur « du signe de $-a$ entre les racines », mais par un tableau de signes et surtout par la vision de la parabole...

Ici, $\boxed{S = [1,\ \sqrt{2}]}$

∘62∘ Montrez $\left(e^{\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)} - 1\right)^2 = 2$.

Remarque : *Si la calculatrice était autorisée, vous calculeriez $\left(e^{\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)} - 1\right)^2$ mais ça ne prouverait rien. Enfin, si, ça prouverait que vous placez une confiance aveugle en votre calculatrice et que donc les cours de maths, d'informatique, de physique et de S.I.I. n'ont servi à rien...*

Attaquons à partir du plus profond : $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}$ par conjugaison

$$\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = 2.\ln(\sqrt{2}+1)$$
$$\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \ln(\sqrt{2}+1)$$
$$e^{\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)} = \sqrt{2}+1$$

On soustrait 1 et on élève au carré et c'est fini.

Remarque : *Votre tort aura peut être été de développer $(\sqrt{2}+1)^2$ et de rester ensuite gêné devant $\frac{1}{2}.\ln(3+2.\sqrt{2})$ ....*

7. dans un exercice de maths, les racines sont issues d'un choix de l'esprit d'un humain, donc les racines sont « simples » ; dans les exercices de physique, c'est la prétendue réalité qui dicte les valeurs, et les racines sont... des trucs à calculer

◦63◦ ♡ Résolvez $x^2 + (7.i - 2).x = 11 + 7.i$ d'inconnue complexe x.

Le discriminant vaut -1. Ses racines sont i et $-i$ (qui va m'écrire des $i.\sqrt{|-1|}$, aussi lourd qu'un livre de physique de six cent trente neuf pages ?).
On trouve $1 - 4.i$ et $1 - 3.i$. Et on vérifie somme et produit.