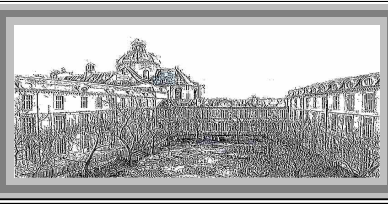
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 18 septembre
M.P.S.I.2



2023 2024

TD02

∘0∘ ♣♡ Calculez $(-1)^{\sum_{k=1}^{20}(-k)^k}$.

∘1∘ Pour tout a de $\mathbb{C}$, montrez $|a| = \Re e(a) \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$.
Montrez pour z et w dans $\mathbb{C}$: $(|z| + |w|)^2 - |z+w|^2 = 2.(|z.\overline{w}| - \Re e(z.\overline{w}))$.
Déduisez l'inégalité $|z+w| \leqslant |z| + |w|$ et montrez qu'il y a égalité si et seulement si z et w sont sur la même demi droite issue de l'origine.

∘2∘ ♡ Expliquez pourquoi les non mathématiciens acceptent sans difficulté les deux premières lignes, mais pas la troisième.

1/7	= 0,142857 142857142857142857142857...
6/7	= 0,857142 857142857142857142857142...
1	= 0,999999 999999999999999999999999...

∘3∘ *♡ Simplifiez $\dfrac{\cos(a)+\cos(b)}{\sin(a)+\sin(b)}$ et $\dfrac{\cos(a)-\cos(b)}{\sin(a)-\sin(b)}$ puis $\dfrac{\cos(a)+\cos(b)}{\sin(a)-\sin(b)}$ (sans préciser les domaines).

∘4∘ ♡ Démontrez $\tan(\pi/8) = \sqrt{2}-1$ et calculez $\tan(3.\pi/8)$.
♡ Démontrez $\tan(\pi/12) = 2-\sqrt{3}$ et calculez $\tan(k.\pi/12)$ pour k de 0 à 12 (tableau).

∘5∘ On veut résoudre $216.x^3 - 432.x^2 + 270.x = 52 + \sqrt{2}$ d'inconnue réelle x. Calculez la somme des racines, la somme de leurs carrés, la somme de leurs inverses *(inutile d'utiliser les quantités conjuguées, gardez les dénominateurs laids...)*.
En ajustant α et β dans le changement de variable $c = \alpha.x + \beta$, mettez l'équation sous la forme $4.c^3 - 3.c = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Démontrez : $4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta) = \cos(3.\theta)$ pour tout réel θ.
Calculez $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.
Résolvez l'équation initiale.

Le professeur pose cette fois l'équation d'inconnue réelle x $48.x^3 - 72.x^2 + 27.x - 4 = 0$. L'élève Tonku de Tachaiz applique la méthode précédente et dit qu'il arrive à $\cos(3.\theta) = \dfrac{5}{3}$. Prouvez qu'il a raison *(en expliquant le changement de variable)*.
Vous vous seriez sans doute arrêté là, perplexe. Mais Tonku de Tachaiz ne connaît pas ses formules de Moivre et Euler et cherche à résoudre $\dfrac{e^{3.\theta} + e^{-3.\theta}}{2} = \dfrac{5}{3}$ (quelle est son erreur ?). Résolvez son équation en l'inconnue $e^{3.\theta}$.
Déduisez la valeur de θ.
Trouvez la racine réelle de l'équation initiale.

∘6∘ On rappelle la notation : $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times a_3 \ldots \times a_n$ (par exemple : $\prod_{k=1}^{n} k = n!$).
Simplifiez : $\prod_{k=1}^{n} k^2$ et $\prod_{k=1}^{n} 2^k$ et $\prod_{k=1}^{n} 2^n$.
Simplifiez pour tout n $\prod_{k=-n}^{n} k$.
Montrez que $\dfrac{27!}{(9!)^3}$ est entier ; est il multiple de 3 ?

∘7∘ Quarante élèves attendent d'aller en TD d'informatique, répartis en trois groupes A, B et C.
Quelques élève passent du groupe A au groupe B. Et le nombre d'élèves du groupe C double car quelques élèves qu'on attendait encore reviennent de la cantine.
Il y a maintenant autant d'élèves dans chacun des trois groupes ? Combien d'élèves au total ? (ne comptez pas

dans la salle, il ne s'agit pas forcément de notre classe).

∘8∘ J'ai deux informations sur la suite u : voici ses premiers termes

n	0	1	2	3	4	5
u_n	9	-8	46	-2		

et elle est de la forme $\exists(a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n,\ u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$.
Trouvez a et b. Retrouvez les termes qui manquent.

∘9∘ Donnez les racines quatrièmes de $721 + 5280.i$.

∘10∘ L'opérateur $\pm$ est il « distributif ? » : $a \pm (b + c)$ est il égal à $a \pm b \pm c$?

∘11∘ ♡ Dérivez cette différence $\theta \longmapsto \ln(\sin(\theta)) - \ln(\cos(\theta))$ sur $]0,\ \pi/2[$.

∘12∘ Résolvez $\dfrac{(2.n)!}{2^n.n!}$ est multiple de 2022 d'inconnue entière n.

Résolvez $\dfrac{(2.n)!}{2^n.n!}$ est multiple de 2023 d'inconnue entière n.

∘13∘ ♡ L'équation $x^2 + (1+i).x + $ $= 0$ d'inconnue complexe x admet pour racine $1 - i$. Trouvez la valeur sous la tache et la valeur de l'autre racine.

∘14∘ Résolvez l'équation $\log_2(x) + \log_x(2) = 4$ d'inconnue réelle x.
On rappelle que pour a strictement positif $\log_a(x)$ est le réel y vérifiant $a^y = x$.

∘15∘ ♡ Calculez les dérivées premières des applications suivantes :

$x \longmapsto \dfrac{1}{(\ln(x))^2}$	$x \longmapsto e^{\cos(x)}$	$x \longmapsto x.\cos(\ln(x)) + x.\sin(\ln(x))$	$x \longmapsto \dfrac{x}{e^x}$

∘16∘ On définit la prépatorielle (c'est plus compliqué que la factorielle) :
$n\dagger = \prod_{k=1}^{n} k^{n-k+1} = 1^n.2^{n-1}.3^{n-2}\ldots(n-1)^2.n^1$.
Décomposez $10\dagger$ en produit de facteurs premiers.
Montrez que $n!$ divise toujours $n\dagger$.
Résolvez $n\dagger$ est multiple de 2000 d'inconnue entière n.

∘17∘ *Résolvez $\cos^{(n)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ d'inconnue entière n. (début déjà posé).
On pose $f = x \longmapsto \cos(2.x)$. Résolvez $f^{(n)}\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 0$ d'inconnue entière n.
Résolvez $f^{(n)}\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \in \mathbb{Z}$ d'inconnue entière n.
Résolvez $f^{(n)}\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \in \mathbb{N}$ d'inconnue entière n.

∘18∘ ♡♣ Calculez ce produit factoriel $\prod_{k=0}^{30}(k!)^{((-1)^k)}$.

∘19∘ Exprimez $\cos(3.x)$ à l'aide de $\cos(x)$. Donnez un polynôme non nul à coefficients entiers de degré le plus petit possible dont $\cos(\pi/9)$ soit racine.

Un mathématicien va faire les courses.
Sa femme lui dit : "tu prendras un litre de lait et si il y a des œufs, alors tu en prends six".
Le mathématicien revient avec six litres de lait. Sa femme en déduit qu'il y avait des œufs.

∘20∘ ♡ Montrez : $\cos(2.\pi/5) + \cos(3.\pi/5) = 0$.
Montrez : $\forall\theta,\ \cos(3.\theta) + \cos(\theta) = 2.\cos(\theta).\cos(2.\theta)$ puis $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$.
Déduisez que $\cos(\pi/5)$ est racine de l'équation $4.X^3 + 2.X^2 - 3.X - 1 = 0$ d'inconnue réelle X.
Résolvez l'équation ci dessus. Déduisez la valeur de $\cos(\pi/5)$.

∘21∘ Comparez les propositions suivantes :

α	$\forall(a,b)\in E,\ a\times b=0\Rightarrow(a=0\ ou\ b=0)$	γ
β	$\forall(a,b)\in E,\ (a\neq 0\ ou\ b\neq 0)\Rightarrow a\times b=0$	δ

Sont elles vraies ?

∘22∘ ♡ Quel est le coefficient de $a^2.b.c$ dans $(a.b+a.c+b.c)^2$?
Quel est le coefficient de $a^2.b.c$ dans $(a+b+c+d)^4$?
Quel est le coefficient de $a^2.b.c$ dans $(a+b+c)^4$?

∘23∘ Montrez que si $\tan(\theta)$ vaut 2 alors pour tout n, $\tan(n.\theta)$ existe et est un rationnel de la forme $\frac{p_n}{q_n}$ avec p_n pair et q_n impair.

∘24∘ Résolvez $\int_a^{2.a}\tan(\theta).d\theta=\frac{\ln(3)}{2}$ d'inconnue réelle a (attention aux modulo ?).

∘25∘ ♡ Résolvez « $n-1$ divise $n+3$ » d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$.

∘26∘ ♡ Montrez : $\sum_{n=0}^{N}(n+2).2^n=(N+1).2^{N+1}$ pour tout N.

∘27∘ Résolvez : les deux derniers chiffres de $n+n!$ sont 2 suivi de 5.

∘28∘ ♡ On suppose : $\tan(a)=\frac{1}{5}$ et $\tan(b)=\frac{1}{239}$. Calculez $\tan(2.a)$, $\tan(4.a)$ et $\tan(4.a-b)$.
Démontrez : $(5+i)^4=2.(1+i).(239+i)$.
♠ On suppose : $\tan(c)=\frac{1}{18}$ et $\tan(d)=\frac{1}{57}$. Calculez $\tan(12.c)$, $\tan(8.d)$ et $\tan(12.c+8.d-5.b)$.

∘29∘ Montrez : $\tan(\pi/16)=(\sqrt{2}+1).(\sqrt{4-2.\sqrt{2}}-1)$.

∘30∘ On note D_t le domaine de définition de l'application tangente ($D_t=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k.\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Vrai ou faux : $\forall a\in D_t,\ \forall k\in\mathbb{Z},\ \tan(a+k.\pi)=\tan(a)$.
Vrai ou faux : $\forall a\in D_t,\ \exists k\in\mathbb{Z},\ \tan(a+k.\pi)=\tan(a)$.
Vrai ou faux : $\forall(a,\ b)\in(D_t)^2,\ (\tan(a)=\tan(b))\Rightarrow(b=a+k.\pi)$.
Montrez : $\forall(a,\ b)\in\mathbb{Z}^2,\ (\tan(a)=\tan(b))\Rightarrow(a=b)$.

∘31∘ Montrez que si la moyenne de vos notes vaut 10, alors au moins une de vos notes dépasse 10 (au sens large).

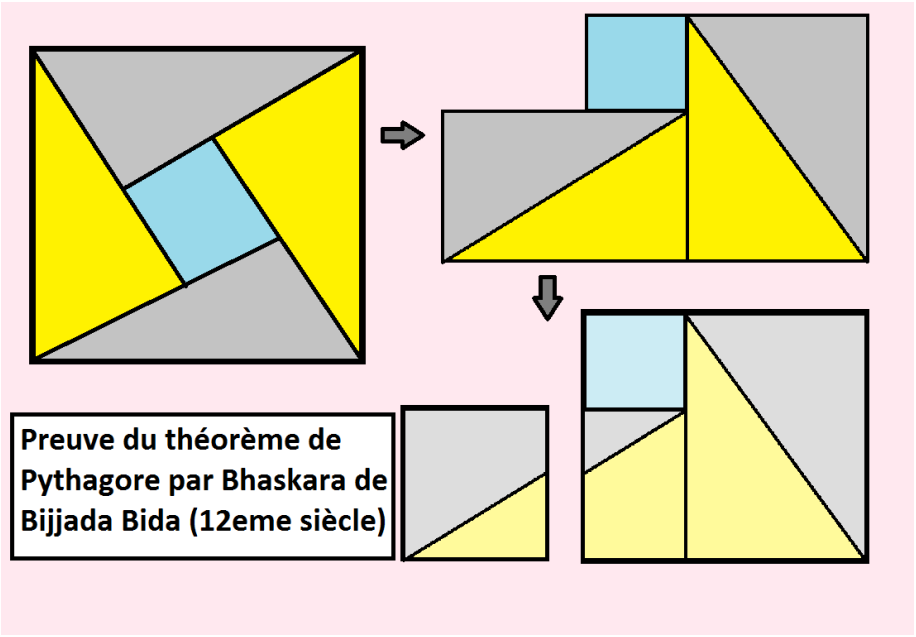
∘32∘ `Retrouvez les stations de métro dont voici les anagrammes (Nord-Est) :`
Léger aphte. Cul albinos. Trique. Cet urinoir à con. Un livre s'inscrira alphabétiquement. Pacte des elfes.

∘32∘ ♡ Voici un « raisonnement » ; en quoi est il faux ?

on sait	$\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ (a<b\ et\ b<c)\Rightarrow(a<c)$
et aussi	$\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ (a>b\ et\ b>c)\Rightarrow(a>c)$
de plus	$a\neq b$ signifie $a<b\ ou\ a>b$
on a donc	$\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ (a\neq b\ et\ b\neq c)\Rightarrow(a\neq c)$

∘33∘ En notant Ω l'univers des humains, et $\tau(a,\ t)$ la proposition « tromper a à l'instant t », que signifie

$\forall a\in\Omega,\ \exists(t_0,\dots t_{999})\in\mathbb{R}^{1000},\ \forall i\in range(999),\ t_i<t_{i+1},\ \forall i\in range(1000),\ \tau(a,\ t_i)$	
$\forall A\subset\Omega,\ \big(Card(A)=1000\big)\Rightarrow\Big(\forall a\in A,\ \exists t_a\in\mathbb{R},\ \tau(a,\ t_a)\Big)$	
$\forall A\subset\Omega,\ \big(Card(A)=1000\big)\Rightarrow\Big(\forall a\in A,\ \forall T\subset\mathbb{R},\ \big((Card(T)\geqslant 1000)\Rightarrow(\exists t_a\in T,\ \overline{\tau(a,\ t_a)})\big)\Big)$	



◦34◦ Démontrez le théorème de Pythagore, par la méthode de Bhaskara.

◦35◦ ♡ Dérivez $x \longmapsto x^{\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right)}$ (simplifiez la d'abord ?).

◦36◦ Pour tout réel a, $\sin(2.a)$ est positif. La preuve : on se donne a, on calcule $\cos(a)$ et $\sin(a)$. on sait alors $\cos(a) = \varepsilon.\sqrt{1-\sin^2(a)}$ avec $\varepsilon \in \{-1,\ 1\}$ et $\sin(a) = \varepsilon.\sqrt{1-\cos^2(a)}$ avec $\varepsilon \in \{-1,\ 1\}$. On a alors $\sin(2.a) = 2.\sin(a).\cos(a) = 2.\sqrt{1-\cos^2(a)}.\sqrt{1-\sin^2(a)}$ puisque $\varepsilon^2 = 1$.
Où est l'erreur ?

◦37◦ ♡ Dérivez $x \longmapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.Calculez $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4.x+8}}$.

◦38◦ ♡ Dérivez $x \longmapsto Arctan(3.\tan(x))$ *(utilisez plutôt $t' = 1/c^2$).*
♠ Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)+4.\sin^2(\theta)}$.
♣ Calculez aussi $\displaystyle\int_0^{2.\pi} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)+4.\sin^2(\theta)}$.

◦39◦ Montrez que la suite $\left(\log_{(n!)}((n+1)!)\right)$ est décroissante, minorée et donnez sa limite.

◦40◦ Calculez $\cos(\pi/12)$ et prouvez $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{16}+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\sqrt{8}}$.

◦41◦ x est un réel strictement positif. Calculez $\tan\left(\frac{\pi}{2} - Arctan(x)\right)$. Simplifiez alors $Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

◦42◦ ♣ On ne connaît pas de formule explicite pour une primitive de $x \longmapsto \frac{Arctan(x)}{x}$, mais on décide qu'on la note F . Dérivez $x \longmapsto F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculez $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{Arctan(t)}{t}.dt$.

◦43◦ ♡ Comparez $Arcsin(1/3)$ et $Arccos(1/6)$ pour l'ordre usuel *(pensez à comparer les sinus de ces deux angles ou insérez une mesure classique entre les deux).*

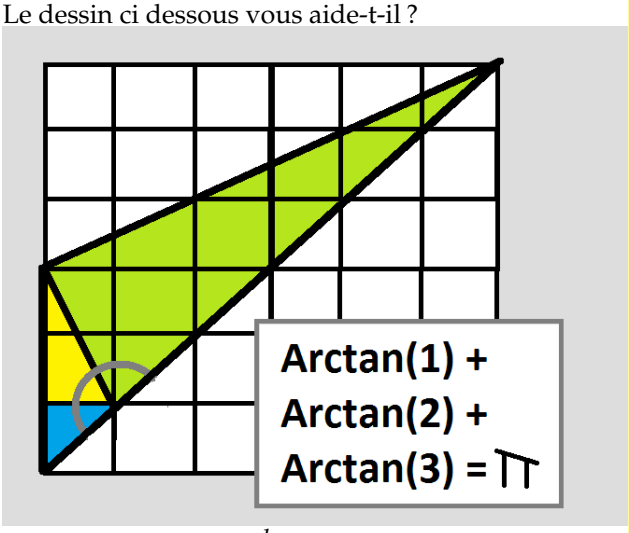
◦44◦ ♣ Ce jeu s'appelle Jump. Vous pouvez en deviner par vous même la règle si je vous dis « démarche du cavalier aux échecs » :

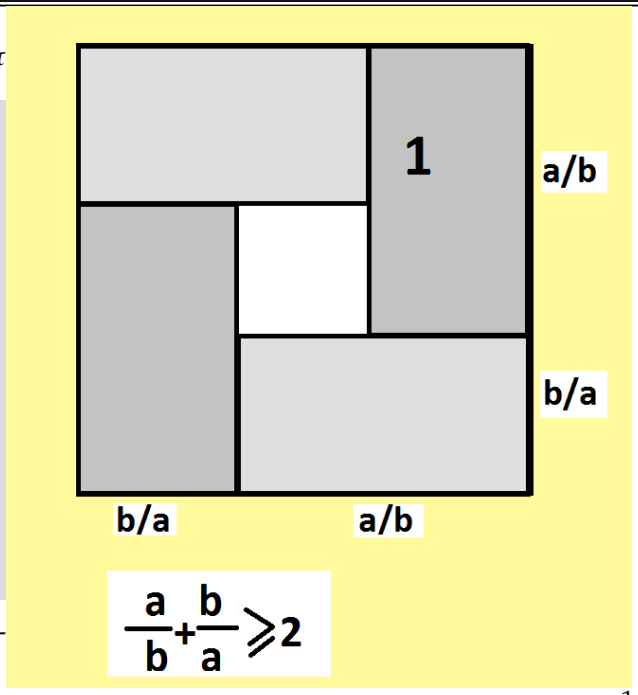
			11		17			
1		31		3				
	25		21		33		9	
5		29		27		19	36	
			13		35		15	
		23		7				

		15	20		
		.	.		
1	..	.	.	..	6
12	..	.	.	..	17
		.	.		
		4	9		

◦45◦ Un cadeau des frères Deslandes [1] : tous les jours de la semaine, un garçon sort de l'école à 16 heures, et sa mère vient le chercher en voiture (elle arrive à seize heures pile et le ramène à la maison). Un jour, le garçon finit à 15 heures et n'a pas envie d'attendre. Il avance sur le chemin du retour. Sa mère qui n'était pas au courant part normalement en voiture (vitesse constante), le croise et le ramène alors immédiatement à la maison. Ils arrivent dix minutes plus tôt que d'habitude. Combien de temps le garçon a-t-il marché ?

♡ Montrez : $Arctan(1) + Arctan(2) + Arctan(3) = \pi$
Le dessin ci dessous vous aide-t-il ?





◦46◦ Vous connaissez $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ pour a et b réels strictement positifs.

Il faut la démontrer : il y a une preuve qui par de $(a-b)^2 \geqslant 0$. Il y en a une autre qui étudie $x \longmapsto x + \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, et il y en a une qui utilise un dessin.

◦47◦ ♡ *ou* ♣ L'élève Ach-Sethprof a écrit $128 + 257 = 381$. Vous voulez lui dire que c'est faux. Mais vous constatez qu'il n'a pas le même nombre de doigts que vous et compte dans une autre base... Laquelle ?

En base 8 *par exemple, les chiffres vont de* 0 *à* 7 *, et le nombre s'écrivant* 143 *c'est* $1.8^2 + 4.8^1 + 3.8^0$.

En base 8, *on a donc* $346 + 127 = 475$ *puisque*

$$\begin{array}{cccc} & 3 & {}^{1}4 & 6 \\ + & 1 & 2 & 7 \\ \hline & 4 & 7 & 5 \end{array}$$

avec une belle retenue : $6 + 7 = 13$ *donc* 5 *et je retiens* 1 *(une huitaine).*

◦48◦ Donnez l'écriture décimale de $\frac{355}{113}$.

Donnez l'écriture binaire de $\frac{1}{5}$.

On sait : $0,9999\ldots = 1$. Mais si on remplace un 9 sur dix par un 8, qui est le nombre obtenu ?

1. il y a eu trois frères Deslandes, venant de Blomet, passées par la MPSI2, ayant intégré ENS, Mines de Nancy et ENS encore ; l'ainé ayant collé en MPSI2, exercé dans les banques puis devenu prof, et les deux extrêmes ayant publié un livre d'exercices de mathématiques originaux chez Ellipses avec préface de Cédric Villani

◦49◦ Posez les opérations suivantes (on est en base 8) :

			2	4	7				2	4	7			1	2	4	7		5	2	4	7				2	4	7
+	1	3	5	7		×	4	2	2	1		×	3	6	0	1		-	1	7	5	7		-	1	7	5	7
+	6	1	5	3		=			?			=			?			=			?			=			?	
+	1	2	1	1																								
=			?																									

◦50◦ ♯ 1- Que donne ce script en Python :

```
a, b = '15', '5'
print(a+b)
```

2- Que donne ce script en Python :

```
a, b = '15', '5'
print(a-b)
```

3- Que donne ce script en Python :

```
a, b = '15', 5
print(a*b)
```

La prof de maths veut qu'on s'intéresse aux cubes de son cours. Son collègue lui présente "Leçons" de Darboux, après avoir montré Bézout (Thalès reste à faire), mais il préférerait changer les maths (il aime les maths bien choisies). Les étudiantes réclament des chambres pour leurs maths ; elles trottent dans les facs et ne trouvent pas les maths débiles. Des étudiants s'entrainent à calculer en cent leçons.
Un dernier calcul et on s'en va, même si personne n'est jamais assez fort pour ce calcul.

◦51◦ ♡ Démontrez $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$ et calculez $\tan(3.\pi/8)$.
♡ Démontrez $\tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}$ et calculez $\tan(k.\pi/12)$ pour k de 0 à 12 (tableau).

◦52◦ ♣ 0 ♣ Votre calculatrice fonctionne mal. En tout cas, elle a une drôle de touche qui calcule des produits ou des sommes suivant son humeur. Pour être précise : pour a et b entiers relatifs, on a $a * b = \left\{ \begin{array}{ll} a+b & si \quad a\ pair \\ a \times b & si \quad a\ impair \end{array} \right|$.
Montrez que c'est une loi interne, non commutative, non associative.

♣ 1 ♣ A-t-on toujours $a * (a * a) = (a * a) * a$.

♣ 2 ♣ On sait que pour tout triplet d'entiers $(a,\ b,\ c)$ on peut créer douze nombres comme $(a * b) * c$ ou $b * (a * c)$. Choisissez a, b et c pour que ces nombres prennent tous la même valeur. Est il possible de choisir a, b et c pour que ces nombres prennent douze valeurs différentes. Choisissez a, b et c pour que ces seize nombres prennent le maximum de valeurs différentes.

♣ 3 ♣ Combien l'équation $a * a = n$ d'inconnue a peut elle avoir de solutions *(discuter suivant n)* ?

♣ 4 ♣ Complétez pour que ce script Python se charge de calculer noter loi :

```
def etoile(x, y) :
....if....
....|....
....return(...)
```

♣ 5 ♣ La loi $*$ est elle interne sur chacun des ensembles suivants : $\mathbb{N}$, P, I, $I \cup \{0\}$, $P \cup \{1\}$ où P désigne l'ensemble des nombres pairs et I l'ensemble des nombres impairs.

♣ 6 ♣ Combien l'équation $a * a = n$ d'inconnue a peut elle avoir de solutions *(discuter suivant n)* ?

♣ 7 ♣ La loi $*$ est elle interne sur chacun des ensembles suivants : $\mathbb{N}$, P, I, $I \cup \{0\}$, $P \cup \{1\}$ où P désigne l'ensemble des nombres pairs et I l'ensemble des nombres impairs.

◦53◦ Prouvez : $Arctan\left(\frac{1}{3}\right) + Arctan\left(\frac{1}{8}\right) + 2.Arctan\left(\frac{1}{7}\right) + Arctan\left(\frac{1}{-}\right) = \frac{\pi}{4}$. Pardon ? Il manque un terme ? Oui, c'est à vous de le retrouver.
(passez à la tangente, mais ça ne suffit pas).

◦54◦ Vrai ou faux :

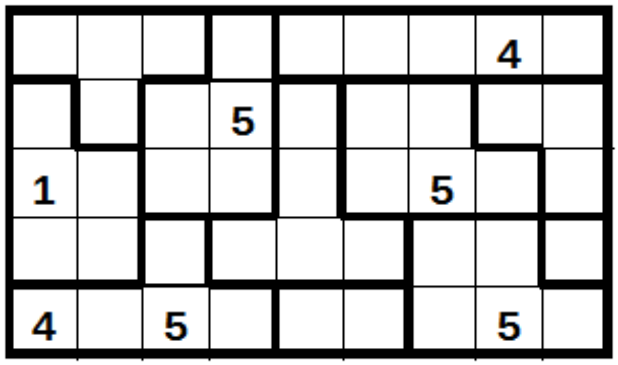
a	$\exists(a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$
b	$\forall(a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$
c	$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$
d	$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}^2,\ (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$

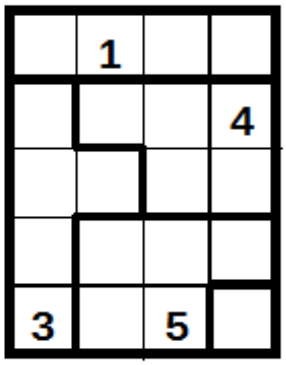
◦55◦ Vrai ou faux :

a	$\forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant 2) \Rightarrow (x^2 \geqslant 4)$
b	$(\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 2) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 4)$

◦56◦ Montrez $Arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{Arcsin(x)}{2}$ pour tout réel x de $[-1,\ 1[$.
Il y a plusieurs méthodes, comme calculer la tangente de chaque côté, ou dériver, ou autres.

◦57◦





On rappelle : $-3 \leqslant 1 \leqslant 2$. Qu'obtenez vous en élevant cette inégalité au carré comme le font certains élèves ? . .

Tectonic est un jeu développé depuis quelques années maintenant. Il s'agit de compléter une grille. La règle : une maison de taille n contient les entiers de 1 à n. Deux cases voisines ne peuvent pas contenir la même valeur. Une première grille résolue vous permet de comprendre. Et ensuite, c'est à vous

---

◦58◦ Calculez $\int_0^{10} [t].dt$. La notation $[t]$ désigne la partie entière de t.

Résolvez $\int_0^{x} [t].dt = 15$ d'inconnue réelle positive x.

A-t-on : $\forall t \in \mathbb{R},\ [2.t] = 2.[t]$?

A-t-on : $\exists t \in \mathbb{R},\ [-t] = -[t]$?

A-t-on : $\forall t \in \mathbb{R},\ [t+\pi] = [t+3]$?

A-t-on : $\exists t \in \mathbb{R},\ [t+\pi] = [t] + [\pi]$?

A-t-on : $\forall t \in \mathbb{R},\ [t+[t]] = 2.[t]$?

A-t-on : $\forall t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z},\ [t+[-t]] = -1$?

◦59◦ ♡ L'équation $x^2 + b.x + c = 0$ d'inconnue réelle x admet pour racines $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$. Calculez $\tan(\alpha+\beta)$ *(si elle existe...)*.

Rappel : $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *pour* x *hors de* $\left\{\frac{2.k+1}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, *et* $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}$ *tant que tout ceci existe.*

◦60◦ Quelques questions (légèrement adaptées) du plan (examen nord-américain de début de lycée), normalement sous forme de Q.C.M., quarante items en quarante minutes :
• Vous avez acheté trois chemises dans une boutique pour un prix moyen de 8 euros ; les deux premières étaient à 15 euros les deux. Quel était le prix de la troisième ?
• L'effectif de l'École Nationale de Technologie Urbaine et Biotechnologie Endocrinienne est cette année de 1260 élèves, ce qui représente une hausse de cinq pour cent par rapport à l'an dernier. Quel était effectif l'an dernier ?
• Le petit dessin (d'une sorte de nœud papillon) était fourni, je vous l'indique : deux segments parallèles de même sens [A ; B] et [E ; D] (pas forcément de même longueur) ; (AE) coupe (BD) en C. On donne : ABC = 40, CED = 60. Que vaut BCE ?
• L'entier 5.2^a a exactement huit diviseurs entiers positifs. Que vaut a ?
• Quand deux droites se coupent à 90 degrés, faut il les désinfecter à l'alcool à angle droit ?

◦61◦ ♡ Que signifient :

α	β	γ
$\forall(a,\ b) \in A^2,\ a = b$	$\forall(a,b) \in A^2,\ a \neq b$	$\forall b \in A,\ \exists a \in A,\ a = b$
δ	ε	φ
$\exists a \in A,\ \forall b \in A,\ a = b$	$\exists a \in A,\ \exists b \in A,\ a \neq b$	$\forall b \in A,\ \exists a \in A,\ a \neq b$

A est un ensemble, la réponse concerne donc A.

◦62◦ Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ et sa dérivée.

◦63◦ ♡ Quelle est la partie réelle de $\left(\dfrac{1+i.\tan(\pi/15)}{1-i.\tan(\pi/15)}\right)^5$? (simplifiez déjà le contenu de la parenthèse)

◦64◦ ♡ Le réel θ de $[0, \pi/2[$ a pour tangente $1/3$. Calculez son sinus et son cosinus.

◦65◦ Trouvez a et b sachant : $a+b=15$ et $a^2+b^2=30$.

◦66◦ ♡ Montrez qu'il existe une suite de polynômes (P_n) à coefficients entiers vérifiant $\forall n,\ \tan^{(n)} = P_n(\tan)$.
(juste l'existence, ne tentez pas de trouver une formule explicite !)

◦67◦ ♡ Calculez $\displaystyle\int_2^3 \frac{\log_x(2)}{x}.dx$.

◦68◦ ♡ Qui est le plus grand ? $3^{\ln(2)}$ ou $2^{\ln(3)}$?

◦69◦ Que pensez vous de : • cos est paire, donc pour tout x, $\cos(-x)=\cos(x)$
• $\cos(x)$ est pair, donc x est congru à $\pi/2$ modulo π.

◦70◦ ♡ Justifiez : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(\theta).d\theta}{1+\cos^2(\theta)} = \frac{\pi}{2}$.

◦71◦ Vrai ou faux :

a	$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \geqslant 1$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant 0$	e
b	$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1 \Rightarrow x^2 \geqslant 0$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leqslant 0 \Rightarrow x^2+1=1$	f
c	$\forall n \in \mathbb{N},\ n\ pair \Rightarrow n!\ pair$	$\forall n \in \mathbb{N},\ n\ impair \Rightarrow n!\ impair$	g
d	$\forall n \in \mathbb{N},\ n!\ pair \Rightarrow n\ pair$	$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)!\ impair \Rightarrow n!\ impair$	h

◦72◦ ♡ Calculez $(x \longmapsto x^a)'$ *(a positif fixé)* et $(a \longmapsto x^a)'$ *(x positif fixé)*.
♡ Donnez le maximum de $x \longmapsto x^{1/x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On écrit $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$.
Comme l'exponentielle est croissante, le maximum de $x \longmapsto x^{\frac{1}{x}}$ est atteint quand $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ atteint son maximum. On dérive, on dresse un tableau de variations. le maximum est en e. Et il vaut $\sqrt[e]{e}$ dont on n'a pas grand chose à dire.

◦73◦ ♡ Complétez : $e^{i.a} + e^{i.b} = e^{i.(a+b)/2}.(\ldots + \ldots)$. Prenez la partie réelle et la partie imaginaire. Que retrouvez vous.

◦74◦ ♡ On donne $\alpha = Arctan(2)$. Calculez $\tan(3.\alpha)$. Exprimez $Arctan(2/11)$ à l'aide de α.

◦75◦ Regroupez en trois familles :

p implique q	p donc q	p est condition nécessaire et suffisante de q
si p alors q	il faut avoir q pour avoir p	p est une condition suffisante pour q
p car q	il suffit d'avoir q pour avoir p	p est une condition nécessaire pour q
p donc q	les solutions de l'équation p sont des solutions de q	pour avoir p il faut avoir q
sans p, pas de q	pour avoir p il fait et il suffit d'avoir q	p seulement si q
p si q	p si et seulement si q	p a besoin de q

◦76◦ Démontrez par récurrence : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$ pour tout n.
Et sans récurrence ?