

◊0◊

♣♥ Calculez $\sum_{k=1}^{20} (-1)^k$.

Le nombre $\sum_{k=1}^{20} (-1)^k$ est très laid. Pour info c'est 102917717531821052076699864.

Mais tout ce qui compte c'est « est il pair ou impair ».

Il suffit donc de regarder si les termes $(-1)^k$ sont pairs ou impairs.

Pour k pair, ils sont pairs, on les met de côté.

Pour k impair, -1 l'est aussi, et $(-1)^k$ aussi (produit d'entiers impairs).

On a donc dix entiers en $(-1)^{2p+1}$. Dix entiers impairs. La somme est paire.

Bilan : $\sum_{k=1}^{20} (-1)^k$ est pair. Et $(-1)^{\sum_{k=1}^{20} (-1)^k}$ vaut 1.

Rappel : on rédige « a et b sont pairs donc a + b est pair ». Directement, car c'est une évidence.

Et surtout, on ne passe pas pour un lourdingue en écrivant des $a + b = 2.k + 2.p$. L'évidence est là, on fait ça dans sa tête.

Mais on n'emmerde pas le lecteur avec des $2.k$ et $2.p + 1$ tout juste dignes d'un livre de seconde.

Bref : les deux tableaux qui suivent sont acquis et considérés comme du cours :

somm	pair	impair	produit	pair	impair
pair	pair	impair	pair	pair	pair
impair	impair	pair	impair	pair	impair

Et si pour vous ce ne sont pas des évidences, mais qu'est ce qu'on va faire de vous ?

◊1◊

Pour tout a de \mathbb{C} , montrez $|a| = \Re(a) \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$.

Montrez pour z et w dans \mathbb{C} : $(|z| + |w|)^2 - |z + w|^2 = 2.(|z.\bar{w}| - \Re(z.\bar{w}))$.

Déduisez l'inégalité $|z + w| \leq |z| + |w|$ et montrez qu'il y a égalité si et seulement si z et w sont sur la même demi droite issue de l'origine.

L'implication $(a \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow (|a| = \Re(a))$ est triviale.

Réciproquement, on se donne a et on suppose $|a| = \Re(a)$.

Déjà, sa partie réelle est positive car égale à un module.

Sa partie imaginaire est ensuite nulle, puisque en élevant au carré :

l'équation donne $|a|^2 = (\Re(a))^2$ alors que la définition donne $|a|^2 = (\Re(a))^2 + (\Im(a))^2$.

Inutile de poser $z = x + i.y$ et $w = x' + i.y'$. On cherche le plus joli.

La clef est $|z + w|^2 = (z + w).(\overline{z + w})$

$$|z + w|^2 = (z + w).(\bar{z} + \bar{w})$$

$$|z + w|^2 = z.\bar{z} + w.\bar{w} + z.\bar{w} + \bar{z}.w$$

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + (z.\bar{w}) + (\bar{z}.w)$$

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2.\Re(z.\bar{w}) \text{ pour } z \text{ et } w \text{ « orthogonaux », c'est le théorème de Pythagore}$$

sinon c'est la formule d'Al-Kashi

On soustrait : $(|z| + |w|)^2 - |z + w|^2 = 2.|z|.|w| - 2.\Re(z.\bar{w})$.

Or, w et \bar{w} ont le même module.

Comme nous la fait penser la première question, on affirme : pour tout complexe a , le réel $|a| - \Re(a)$ est positif.

En effet, on a $\Re(a) \leq |\Re(a)| \leq |a|$ quitte à écrire cette fois effectivement $x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

On a donc en particulier $|z.\bar{w}| - \Re(z.\bar{w}) \geq 0$.

On reporte dans la question (ou la réponse) précédente : $(|z| + |w|)^2 - |z + w|^2 \geq 0$.

Comme ce sont des réels positifs, ils sont dans le même ordre que leurs carrés : $(|z| + |w|) - |z + w| \geq 0$.

C'est l'inégalité triangulaire qui est ainsi prouvée.

Pour conclure : dans quel cas est ce une égalité ?

Il faut et il suffit que $|z \cdot \bar{w}| - \Re(z \cdot \bar{w})$ soit nul.

Ceci revient à demander « réel positif ».

On écrit $z \cdot \bar{w} = k$ avec k dans \mathbb{R}^+ .

On reconnaît que z et w ont le même argument. Ils sont colinéaires, de même sens.

Pardon, comment on passe de $z \cdot \bar{w} = k$ à « colinéaires de même sens » ? J'ai deux chemins.

$z \cdot \bar{w} = k$ puis on multiplie par w

$z \cdot \bar{w} \cdot w = k \cdot w$ puis on simplifie

$z \cdot |w| = k \cdot w$ et on divise par $k : w = \frac{|w|}{k} \cdot z$

en posant $z = \rho \cdot e^{i \cdot \alpha}$ et $w = r \cdot e^{i \cdot \beta}$ on obtient

$z \cdot r \cdot e^{i \cdot (\alpha - \beta)} = k$ et en passant aux arguments :

$\alpha - \beta$ est multiple de $2 \cdot \pi$.

◦2◦

♥ Expliquez pourquoi les non mathématiciens acceptent sans difficulté les deux premières lignes,

1/7	=	0,142857 142857142857142857142857...
6/7	=	0,857142 857142857142857142857142...
1	=	0,999999 999999999999999999999999...

mais pas la troisième.

Pour moi, c'est la preuve la plus limpide de $0,999 \dots = 1$.

Sinon, il y a sur internet l'article complet de Jean-Paul Delahaye sur $0,999 \dots = 1$.

◦3◦

* ♥ Simplifiez $\frac{\cos(a) + \cos(b)}{\sin(a) + \sin(b)}$ et $\frac{\cos(a) - \cos(b)}{\sin(a) - \sin(b)}$ puis $\frac{\cos(a) + \cos(b)}{\sin(a) - \sin(b)}$ (sans préciser les domaines).

Si l'on ne s'occupe pas (à tort) des domaines :

$$\frac{\cos(a) + \cos(b)}{\sin(a) + \sin(b)} = \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)} = \tan\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) - \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(b) &= \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) + \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \text{on somme} \quad \cos(a) + \cos(b) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \end{aligned}$$

en ayant juste la bonne idée d'écrire $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ et $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$.

$$\begin{aligned} \sin(a) &= \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) + \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(b) &= \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) - \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \text{on somme} \quad \sin(a) + \sin(b) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{De même} \quad \frac{\cos(a) - \cos(b)}{\sin(a) - \sin(b)} = \frac{-2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} = -\tan\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

$$\text{Enfin} \quad \frac{\cos(a) + \cos(b)}{\sin(a) - \sin(b)} = \frac{-2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} = -\tan\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

◦4◦

♥ Démontrez $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$ et calculez $\tan(3 \cdot \pi/8)$.

♥ Démontrez $\tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}$ et calculez $\tan(k \cdot \pi/12)$ pour k de 0 à 12 (tableau).

Première méthode : on sait pour θ convenable : $\tan(2 \cdot \theta) = \frac{2 \cdot \tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$.

On a donc en particulier : $1 = \tan(\pi/4) = \frac{2 \cdot \tan(\pi/8)}{1 - \tan^2(\pi/8)}$.

Par produit en croix, $\tan(\pi/8)$ est racine de l'équation $T^2 + 2 \cdot T - 1 = 0$ d'inconnue réelle T .

Le bourrin résout l'équation (moquons nous tous de lui).

Il trouve deux racines : $-1 + \sqrt{2}$ et $-1 - \sqrt{2}$.

Il élimine la racine négative car $\tan(\pi/8)$ est positive.

Par élimination : $\tan(\pi/8) = -1 + \sqrt{2}$.

L'élève plus fin dit « je sais déjà qu'il y a une racine positive et une racine négative (produit des racines), or $\tan(\pi/8)$ est positif, donc il coïncide avec la racine positive.

Il ne reste qu'à vérifier que $\sqrt{2} - 1$ est bien racine (et donc LA racine positive).

Deuxième méthode. On sait : $\cos(2\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)}$.

Avec $\pi/8$, on obtient cette fois l'équation $\frac{1 - T^2}{1 + T^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On résout : $\sqrt{2}(1 - T^2) = 1 + T^2$ puis $T^2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$.

On multiplie par la quantité conjuguée : $T^2 = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2 - 1}$.

Surtout, on ne développe pas (halte aux réflexes de calcul trop rapide). De $T^2 = (\sqrt{2} - 1)^2$ on déduit $T = \sqrt{2} - 1$ (au signe près).

Comme $\tan(\pi/8)$ est positif, il reste $\sqrt{2} - 1$.

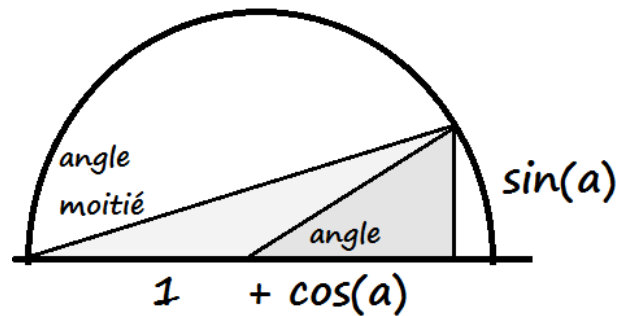
Troisième méthode. On connaît ses formules de trigonométrie :

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)} = \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Elles donnent immédiatement

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1.$$

C'est bien sûr celle ci que choisit le mathématicien.



Pour $\tan(3\pi/8)$, on reprend les mêmes idées avec $2 \cdot \frac{3\pi}{8}$.

$$\text{Ou alors : } \tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1 + \sqrt{2} - 1}{1 - \sqrt{2} + 1}.$$

Après conjugaison : $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1 + \sqrt{2}$ (plus grande que $\tan(\pi/4)$).

A terminer.

5.

On veut résoudre $216x^3 - 432x^2 + 270x = 52 + \sqrt{2}$ d'inconnue réelle x . Calculez la somme des racines, la somme de leurs carrés, la somme de leurs inverses (inutile d'utiliser les quantités conjuguées, gardez les dénominateurs laids...).

En ajustant α et β dans le changement de variable $c = \alpha x + \beta$, mettez l'équation sous la forme $4c^3 - 3c = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Démontrez : $4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) = \cos(3\theta)$ pour tout réel θ .

Calculez $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Résolvez l'équation initiale.

L'équation n'est pas sous forme unitaire. Pour pouvoir identifier avec $(X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$, il faut écrire en fait

$$x^3 - \frac{432}{216}x^2 + \frac{270}{216}x - \frac{52 + \sqrt{2}}{216} = 0.$$

Les formules du cours donnent

$\alpha + \beta + \gamma$	$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$	$\alpha\beta\gamma$
$\frac{432}{216}$	$\frac{270}{216}$	$\frac{52 + \sqrt{2}}{216}$

On applique (avec $S^2 - 2D$ pour la somme des carrés et $\frac{D}{P}$ pour la somme des inverses)

$\alpha + \beta + \gamma = \frac{432}{216}$	$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{270}{52 + \sqrt{2}}$
---	---	---

On part de $216x^3 - 432x^2 + 270x = 52 + \sqrt{2}$ et on pose $x = \frac{c - \beta}{\alpha}$.

$$\text{On obtient } 216 \cdot \frac{c^3 - 3c^2\beta + 3c\beta^2 + \beta^3}{\alpha^3} - 432 \cdot \frac{c^2 - 2c\beta + \beta^2}{\alpha^2} + 270 \cdot \frac{c - \beta}{\alpha} = 52 + \sqrt{2}.$$

On calcule le coefficient de c^2 : $-\frac{3.216.\beta}{\alpha^3} - \frac{432}{\alpha^2}$. On le veut nul :

$$\boxed{\beta = -\frac{2}{3}.a}$$

On calcule le coefficient de c^3 et celui de c :

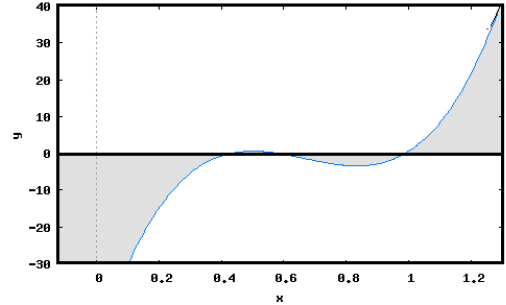
$$\frac{216}{\alpha^3} \text{ et } \frac{3.216.\beta^2}{\alpha^3} + \frac{2.432.\beta}{\alpha^2} + \frac{270}{\alpha}$$

On les veut dans un rapport 4 à 3. On en déduit la valeur de α : 2.

Le changement est finalement $\boxed{c = 3.x - 2}$

On aboutit à l'équation $8.c^3 - 6.c = \sqrt{2}$.

Il faut encore la diviser par 2. L'erreur consistait à imposer d'arriver à tout prix à $4.c^3 - 3.c = \sqrt{2}/2$.



La formule $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$ se démontre de plusieurs manières :

$$\bullet \cos(3.\theta) + \cos(\theta) = 2.\cos\left(\frac{3.\theta + \theta}{2}\right).\cos\left(\frac{3.\theta - \theta}{2}\right) = 2.(2.\cos^2(\theta) - 1).\cos(\theta)$$

$$\bullet \cos(3.\theta) = \frac{e^{3.i.\theta} + e^{-3.i.\theta}}{2} = \frac{(c + i.s)^3 + (c - i.s)^3}{2} = \frac{(c^3 + 3.i.c^2.s - 3.c.s^2 - i.c^3) + (c^3 - 3.i.c^2.s - 3.c.s^2 + i.c^3)}{2}$$

$$\cos(3.\theta) = c^3 - 3.c.s^2 = c^3 - 3.c.(1 - c^2)$$

$$\bullet 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta) = 4.\left(\frac{e^{i.\theta} + e^{-i.\theta}}{2}\right)^3 - 3.\frac{e^{i.\theta} + e^{-i.\theta}}{2} = \frac{(e^{i.\theta})^3 + (e^{-i.\theta})^3}{2} = \cos(3.\theta)$$

L'équation devient, en posant $c = \cos(\theta)$: $\cos(3.\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On en déduit les valeurs possibles pour θ : $\varepsilon.\left(\frac{\pi}{6} + 2.k.\pi\right)$ avec k dans \mathbb{Z} et ε dans $\{-1, 1\}$ (pour le signe).

On divise par 3 : $\theta \in \left\{ \varepsilon.\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2.k.\pi}{3}\right) \mid k \in \mathbb{Z}, \varepsilon \in \{-1, 1\} \right\}$

On revient à c : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2.k.\pi}{3}\right)}$ avec k décrivant \mathbb{Z}

On doit calculer $\cos(\pi/12)$. On dispose de deux méthodes :

$$\bullet \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \cos(\pi/6)}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \text{ et } \cos(\pi/12) > 0 : \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\bullet \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

On préférera la méthode encadrée. De même, $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$

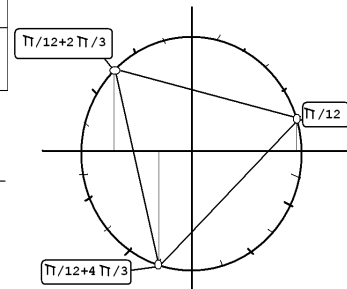
On peut donc calculer les trois valeurs utiles :

k	0	1	2
$\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2.k.\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
racine $x (= \frac{c+2}{3})$	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} + 4}{12}$	$\frac{4 - \sqrt{2}}{6}$	$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6} + 4}{12}$

On a de la chance : $\frac{\pi}{12} + \frac{2.\pi}{3} = \frac{3.\pi}{4}$ dont le cosinus est simple.

En revanche, pour $\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4.\pi}{3}\right)$, on passe par $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right).\cos\left(\frac{4.\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).\sin\left(\frac{4.\pi}{3}\right)$.

On peut vérifier la somme des racines...



Le professeur pose cette fois l'équation d'inconnue réelle x $48.x^3 - 72.x^2 + 27.x - 4 = 0$. L'élève Tonku de Tachaiz applique la méthode précédente et dit qu'il arrive à $\cos(3.\theta) = \frac{5}{3}$. Prouvez qu'il a raison (en expliquant le changement de variable).

Vous vous seriez sans doute arrêté là, perplexe. Mais Tonku de Tachaiz ne connaît pas ses formules de Moivre et Euler et cherche à résoudre $\frac{e^{3.\theta} + e^{-3.\theta}}{2} = \frac{5}{3}$ (quelle est son erreur ?). Résolvez son équation en l'inconnue $e^{3.\theta}$. Déduisez la valeur de θ .

Trouvez la racine réelle de l'équation initiale.

On trouve une translation pour effacer le terme de degré 2 :

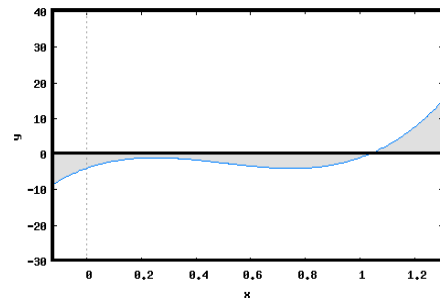
$$48.x^3 - 72.x^2 + 27.x - 4 = 0 \text{ avec } x = y + \frac{1}{2} :$$

$$48.\left(y^3 + 3.\frac{y^2}{2} + 3.\frac{y}{4} + \frac{1}{8}\right) - 72.\left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) + 27.\left(y + \frac{1}{2}\right) - 4 = 0$$

$$\text{équivalent à } 48.y^3 - 9.y - \frac{5}{2} = 0.$$

On dilate : $y = a.c$: $48.a^3.c^3 - 9.a.c = \frac{5}{2}$. On ajuste $a = \frac{1}{2}$ pour avoir $\frac{48.a^3}{9.a} = \frac{4}{3}$. L'équation devient $6.c^3 - \frac{9}{2}.c = \frac{5}{2}$.

On multiplie par $\frac{2}{3}$ on arrive à $4.c^3 - 3.c = \frac{5}{3}$ comme Tonku de Tachaiz.



Le problème est que si on pose $c = \cos(\theta)$, on aboutit à $\cos(3.\theta) = \frac{5}{3} > 1$. C'est problématique pour un cosinus. La méthode "du cours" n'est donc pas valable.

On applique la fausse formule (la vraie, c'est $\cos(t) = \frac{e^{i.t} + e^{-i.t}}{2}$ et pas $\frac{e^t + e^{-t}}{2}$). L'équation devient $\frac{e^{3.t} + \frac{1}{e^{3.t}}}{2} = \frac{5}{3}$ soit encore $3.e^{3.t} - 10 + 3.e^{-3.t} = 0$.

On pose $\varepsilon = e^{3.t}$ comme proposé. L'équation devient $3.\varepsilon - 10 + \frac{3}{\varepsilon} = 0$ ou encore $3.\varepsilon^2 - 10.\varepsilon + 3 = 0$. C'est une équation du second degré qui admet deux racines réelles : $\varepsilon_1 = 3$ et $\varepsilon_2 = \frac{1}{3}$.

Ayant posé $\varepsilon = e^{3.t}$, on trouve $t = \frac{\ln(3)}{3}$ ou $t = -\frac{\ln(3)}{3}$.

On reporte dans $c = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ puisque l'élève Tonku de Tachaiz a oublié les i . On trouve $c = \frac{e^{\ln(3)/3} + e^{-\ln(3)/3}}{2} = \frac{\sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}{2}$.

Mais au fait, c'est légitime ? Si on pose $c = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, a-t-on bien $4.c^3 - 3.c = \frac{e^{3.t} + e^{-3.t}}{2}$? La réponse est oui.

Ayant c , on remonte à $y = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}{4}$. On termine par translation : $x = y + \frac{1}{2} = \frac{2 + \sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}{4}$

On a utilisé ici non pas le cosinus, mais le cosinus hyperbolique : $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Il existe aussi le sinus hyperbolique et la tangente de la même famille.

On rappelle la notation : $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \times a_2 \times a_3 \dots \times a_n$ (par exemple : $\prod_{k=1}^n k = n!$).

Simplifiez : $\prod_{k=1}^n k^2$ et $\prod_{k=1}^n 2^k$ et $\prod_{k=1}^n 2^n$.

Simplifiez pour tout n $\prod_{k=-n}^n k$.

Montrez que $\frac{27!}{(9!)^3}$ est entier ; est il multiple de 3 ?

Le produit $\prod_{k=1}^n k^2$ est un produit de carrés. C'est le carré d'un produit. Quel produit ? $\prod_{k=1}^n k = n!$. On a donc

$$\prod_{k=1}^n k^2 = (n!)^2.$$

Le produit $\prod_{k=1}^n 2^k$ s'écrit $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \dots 2^n$. On réunit avec la règle $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ et il reste $\prod_{k=1}^n 2^k = 2^s$ avec s égal à

la somme des exposants : $s = 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. On a donc et $\prod_{k=1}^n 2^k = 2^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}$ ou même

$$\prod_{k=1}^n 2^k = \sqrt{2}^{n \cdot (n+1)}.$$

Dans le produit $\prod_{k=1}^n 2^n$, tous les termes sont égaux. C'est $2^n \cdot 2^n \cdot 2^n \dots 2^n$. Il y a n termes. On trouve donc $(2^n)^n$. On compacte en $2^{(n^2)}$.

$\prod_{k=1}^n k^2 = (n!)^2$	$\prod_{k=1}^n 2^k = \sqrt{2}^{n \cdot (n+1)}$	$\prod_{k=1}^n 2^n = 2^{(n^2)}$
------------------------------	--	---------------------------------

Le produit $\prod_{k=-n}^n k$ est simple comme pas permis. Il vaut 0. Puisque au milieu il y a 0 parmi les facteurs.

Si l'on n'avait pas mis le facteur 0, on aurait eu $(-n) \cdot (-n+1) \dots (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 \dots n$ et ceci aurait donné $(n!)^2 \cdot (-1)^n$.

Le nombre $\frac{27!}{(9!)^3}$ est-il déjà un entier ? Rien n'est évident.

On l'écrit explicitement :

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27}{(1.2.3.4.5.6.7.8.9)^3}$$

On arrange en

$$\frac{10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27}{2.3.4.5.6.7.8.9.2.3.4.5.6.7.8.9}$$

On simplifie ce qu'on peut : 10 et 2.5 ; 12 et 3.4 :

$$\frac{11.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27}{6.7.8.9.2.3.4.5.6.7.8.9}$$

On simplifie encore : 24 et 6.4 ; 21 et 7.3 :

$$\frac{11.13.14.15.16.17.18.19.20.22.23.25.26.27}{8.9.2.5.6.7.8.9}$$

On continue avec 18 et 2.9 ; 16.27 avec 8.6.9 :

$$\frac{11.13.14.15.17.19.20.22.23.25.26}{5.7.8}$$

On termine avec 20.14 contre 5.8.7 :

$$\frac{11.13.15.17.19.22.23.25.26}{1}$$

C'est un entier, et il est multiple de 3 : $2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$.

◦7◦

Quarante élèves attendent d'aller en TD d'informatique, répartis en trois groupes A , B et C .

Quelques élèves passent du groupe A au groupe B . Et le nombre d'élèves du groupe C double car quelques élèves qu'on attendait encore reviennent de la cantine.

Il y a maintenant autant d'élèves dans chacun des trois groupes ? Combien d'élèves au total ? (ne comptez pas dans la salle, il ne s'agit pas forcément de notre classe).

On part des effectifs des trois groupes : a , b et c . On sait $a + b + c = 40$.

	groupe A	groupe B	groupe C
début	a	b	c
certaines passent de A à B	$a - k$	$b + k$	c
certaines reviennent de la cantine	$a - k$	$b + k$	$2 \times c$
ils sont autant dans chaque groupe	$a - k = b + k = 2 \times c$		

On somme les effectifs

On extrait des deux premières : $k = \frac{a-b}{2}$. On reporte dans la troisième : $b + \frac{a-b}{2} = 2c$. On obtient $a + b = 4c$.

Mais $a + b$ est égal à $40 - c$ (nombre initial d'élèves).

On trouve $40 - c = 4c$. On trouve $c = 8$.

Il y a 48 élèves dans la classe, trois groupes de 16. C'est réaliste.

	groupe A	groupe B	groupe C
début	32	0	8
certaines passent de A à B	16	16	8
certaines reviennent de la cantine	16	16	16

	groupe A	groupe B	groupe C
début	21	11	8
5 passent de A à B	16	16	8
certaines reviennent de la cantine	16	16	16

	groupe A	groupe B	groupe C
début	23	9	8
7 passent de A à B	16	16	8
certaines reviennent de la cantine	16	16	16

	groupe A	groupe B	groupe C
début	43	-11	8
17 passent de A à B	16	16	8
certaines reviennent de la cantine	16	16	16

Il y a beaucoup de possibilités. Mais 48 élèves !

◦8◦

J'ai deux informations sur la suite u : voici ses premiers termes

n	0	1	2	3	4	5
u_n	9	-8	46	-2		

et elle est de la forme $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n, u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$.

Trouvez a et b . Retrouvez les termes qui manquent.

On a un système pour la formule $u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$:

n	0	1	2	3	4	5
u_n	9	-8	46	-2		
			$-8.a + 9.b = 46$	$46.a - 8.b = -2$		

Deux équations pour trois inconnues, c'est exactement ce qu'il nous faut : $\begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 46 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ -2 \end{pmatrix}$

Erreur : | Pardon, on avait juste deux inconnues, et pas trois comme j'indique ?

Oui, a et b . Mais il y a aussi cette fille que vous croisez tous les matins dans le métro et qui peut être vous sourit sous son masque, inconnue, mais troublante.

Soit qu'on inverse la matrice : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 46 & -8 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 46 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{64 - 9 \cdot 46} \begin{pmatrix} -8 & -9 \\ -46 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 46 \\ -2 \end{pmatrix}$

Soit qu'on combine : $\begin{array}{rcl} -8.a & +9.b & = & 46 & L1 \\ 46.a & -8.b & = & -2 & L2 \\ 350.a & & = & 8.46 - 2.9 & 8.L1 + 9.L2 \end{array} : \boxed{a \text{ vaut } 1 \text{ et } b \text{ vaut } 6}$

$\forall n, u_{n+2} = u_{n+1} + 6.u_n$ et on complète « à la main » :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	9	-8				
	6.9	-8	= 46			
		6.(-8)	+46	= -2		
			6.46	+(-2)	= 274	
				6.(-2)	+274	= 262

◦9◦

Donnez les racines quatrièmes de $721 + 5280.i$.

On cherche déjà ses racines carrées, puis on cherchera les racines carrées de ces racines.

On résout donc $(a + i.b)^2 = 721 + 5280.i$ avec a et b réels.

$$\text{la partie réelle} \quad a^2 - b^2 = 721$$

$$\text{On identifie la partie imaginaire} \quad 2.a.b = 5280$$

$$\text{le module} \quad \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = 5329 \quad \text{de } \sqrt{721^2 + 5280^2}$$

$$\text{La première et la dernière} \quad \begin{matrix} a^2 - b^2 = 721 \\ a^2 + b^2 = 5329 \end{matrix} \quad \text{donnent par addition et soustraction :} \quad \begin{matrix} a^2 = 3025 \\ b^2 = 2034 \end{matrix} \quad \text{puis} \quad \begin{matrix} |a| = 55 \\ |b| = 48 \end{matrix}$$

(gare aux signes).

L'équation $2.a.b = 5280$ valide ceci et donne l'information « a et b sont de même signe ».

En effet, avec $\begin{matrix} a^2 = 3025 \\ b^2 = 2034 \end{matrix}$ on ouvrirait sur quatre possibilités :

$a = 55$	et	$b = 48$
$a = 55$	et	$b = -48$
$a = -55$	et	$b = 48$
$a = -55$	et	$b = -48$

Il ne reste que

$a = 55$	et	$b = 48$	$55 + 48.i$
$a = -55$	et	$b = -48$	$-55 - 48.i$

et avec logique, on constate qu'on a deux complexes opposés.

Les deux racines carrées de $721 + 5280.i$ sont $55 + 48.i$ et $-55 - 48.i$.

$$\text{On recommence avec} \quad \begin{matrix} \text{la partie réelle} & \alpha^2 - \beta^2 = 55 \\ \text{la partie imaginaire} & 2.\alpha.\beta = 48 \\ \text{le module} & \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)^2 = 73 \end{matrix}$$

	nombre	racines carrées	racines quatrièmes
On a cette fois	$721 + 5280.i$	$55 + 48.i$	$8 + 3.i$
			$-8 - 3.i$
	$-55 - 48.i$		$3 - 8.i$
			$-3 + 8.i$

On note que ces quatre racines quatrièmes sont réparties sur le cercle trigonométrique.

◦10◦

L'opérateur \pm est il « distributif ? » : $a \pm (b + c)$ est il égal à $a \pm b \pm c$?

Non. $2 \pm (1 + 3)$ peut valoir 6 ou -2.

Tandis que $2 \pm 1 \pm 3$ peut valoir 6, 0, 4 ou -2.

◦11◦

♥ Dérivez cette différence $\theta \mapsto \ln(\sin(\theta)) - \ln(\cos(\theta))$ sur $]0, \pi/2[$.

$$\text{On trouve } \theta \mapsto \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{-\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \text{ et en réduisant au dénominateur commun } \theta \mapsto \frac{1}{\sin(\theta).\cos(\theta)}.$$

$$\text{Vous préférez } \theta \mapsto \frac{2}{\sin(2.\theta)} ?$$

◦12◦

Résolvez $\frac{(2.n)!}{2^n.n!}$ est multiple de 2022 d'inconnue entière n .

Le nombre $\frac{(2.n)!}{2^n.n!}$ est un entier. La question a un sens.

Mais si on l'écrit rapidement $\frac{1.2.3.4.5.6 \dots (2.n-1).(2.n)}{(2.2 \dots 2).(1.2.3 \dots n)}$ puis $\frac{1.2.3.4.5.6 \dots (2.n-1).(2.n)}{2.4.6 \dots (2.n)}$,
on simplifie et il reste le produit des n premiers impairs de 1 à $2.n-1$.

Et un produit d'impairs est impair.
Il ne peut pas être multiple de 2022.

L'exercice sera plus drôle l'an prochain.

Résolvez $\frac{(2.n)!}{2^n.n!}$ est multiple de 2023 d'inconnue entière n .

A faire.

◦13◦

♡ L'équation $x^2 + (1+i).x + \text{tache} = 0$ d'inconnue complexe x admet pour racine $1-i$. Trouvez la valeur sous la tache et la valeur de l'autre racine.

On note a la tache, on sait alors $(1-i)^2 + (1+i).(1-i) + a = 0$.

On trouve $a = -2 + 2i$.

Il reste l'autre racine, sachant que la somme des deux racines vaut $-1-i$. C'est donc -2 .

On pouvait aussi utiliser les relations coefficients racines directement :

somme $-1-i$, donc l'autre racine vaut -2

produit « la tache », donc elle vaut $-2 + 2i$.

◦14◦

Résolvez l'équation $\log_2(x) + \log_x(2) = 4$ d'inconnue réelle x .

On rappelle que pour a strictement positif $\log_a(x)$ est le réel y vérifiant $a^y = x$.

On résout donc l'équation $\frac{\ln(x)}{\ln(2)} + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} = 4$ sur $]0, +\infty[$ car x se doit d'être strictement positif pour que tout ceci ait un sens.

En posant $X = \ln(x)$ on aboutit à $X^2 - 4 \cdot \ln(2) \cdot \ln(x) + (\ln(2))^2 = 0$.

On trouve $X = (2 - \sqrt{3}) \cdot \ln(2)$ ou $X = (2 + \sqrt{3}) \cdot \ln(2)$.

Les solutions en X sont $2^{2+\sqrt{3}}$ et $2^{2-\sqrt{3}}$.

◦15◦

♡ Calculez les dérivées premières des applications suivantes :

$x \mapsto \frac{1}{(\ln(x))^2}$	$x \mapsto e^{\cos(x)}$	$x \mapsto x \cdot \cos(\ln(x)) + x \cdot \sin(\ln(x))$	$x \mapsto \frac{x}{e^x}$
----------------------------------	-------------------------	---	---------------------------

$x \mapsto \frac{1}{(\ln(x))^2}$	$x \mapsto e^{\cos(x)}$	$x \mapsto x \cdot \cos(\ln(x)) + x \cdot \sin(\ln(x))$	$x \mapsto \frac{x}{e^x}$
$x \mapsto \frac{-2}{x \cdot (\ln(x))^3}$	$x \mapsto -\sin(x) \cdot e^{\cos(x)}$	$x \mapsto 2 \cdot \cos(\ln(x))$	$x \mapsto e^{-x} - x \cdot e^{-x}$

◦16◦

On définit la préfactorielle (c'est plus compliqué que la factorielle) :

$$n\ddagger = \prod_{k=1}^n k^{n-k+1} = 1^n \cdot 2^{n-1} \cdot 3^{n-2} \dots (n-1)^2 \cdot n^1.$$

Décomposez $10\ddagger$ en produit de facteurs premiers.

Montrez que $n!$ divise toujours $n\ddagger$.

Résolvez $n\ddagger$ est multiple de 2000 d'inconnue entière n .

On calcule

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	2	3	4	5	6	7	8		
1	2	3	4	5	6	7			
1	2	3	4	5	6				
1	2	3	4	5					
1	2	3	4						
1	2	3							
1	2								
1									
1 ¹⁰	2 ⁹	3 ⁸	4 ⁷	5 ⁶	6 ⁵	7 ⁴	8 ³	9 ²	10
	2 ⁹		2 ¹⁴		2 ⁵		2 ⁹		2
		3 ⁸			3 ⁵			3 ⁴	
			5 ⁶						5
				7 ⁴					
									2 ³⁸
									3 ¹⁷
									5 ⁷
									7 ⁴

Dans $n!$, il y a déjà « une première ligne » égale à $n!$.

On peut aussi écrire : $n! = \left(\prod_{k=1}^n k\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^n k^{n-k}\right) = n! \cdot \left(\prod_{k=1}^n k^{n-k}\right)$.

Chaque exposant de $\left(\prod_{k=1}^n k^{n-k}\right)$ est positif ou nul, on a un entier. L'entier $n!$ est bien multiple de $n!$.

Attention de ne pas écrire en revanche $n! = (n!)^2 \cdot \left(\prod_{k=1}^n k^{n-k-1}\right)$ qui ne prouve rien, puisque $\left(\prod_{k=1}^n k^{n-k-1}\right)$ n'est pas entier.

Attention aussi à la qualité de rédaction. a est multiple de b , c'est $\exists k \in \mathbb{N}, a = k.b$, et pas $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$ même si ça ressemble dans la forme et la logique. Le second fait sortir du champ de l'arithmétique et invente des divisions inutiles.

Pour que $n!$ soit un multiple de 2020, il faut qu'on y trouve les atomes $2^2, 5$ et 101 .

Il faut donc attendre $n = 101$. Et c'est largement suffisant.

Le même exo en 2021 devra attendre $n = 47$.

◦17◦

* Résolvez $\cos^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ d'inconnue entière n . (début déjà posé).

On pose $f = x \mapsto \cos(2.x)$. Résolvez $f^{(n)}\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0$ d'inconnue entière n .

Résolvez $f^{(n)}\left(\frac{\pi}{12}\right) \in \mathbb{Z}$ d'inconnue entière n .

Résolvez $f^{(n)}\left(\frac{\pi}{12}\right) \in \mathbb{N}$ d'inconnue entière n .

Les dérivées successives du cosinus sont connues :

cos	-sin	-cos	sin
-----	------	------	-----

 et on recommence.

On a donc

$\cos^{(0)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos^{(2)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$	$\cos^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
non	non	oui	non

et plus généralement

$\cos^{(4.k)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos^{(4.k+1)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos^{(4.k+2)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$	$\cos^{(4.k+3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
non	non	oui	non

On a donc $S = \{4.k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$

Rappel : les réponses $S = \{4.k + 2\}$ ou $S = \{4.k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ sont erronées, et montrent qu'il vous reste un peu de chemin à faire pour maîtriser les notations mathématiques.

C'est normal, et ce n'est pas grave.

Ce qui est grave, c'est de croire que vous les maîtrisez, ou pire encore, de dire « bah, $S = \{4.k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ et $S = \{4.k + 2\} \mid k \in \mathbb{N}$ c'est pareil ».

Plus rigoureusement, le cours contient la formule $\cos^{(n)} = t \mapsto \cos\left(t + \frac{n.\pi}{2}\right)$ (qui se démontre par récurrence sur n).

On résout donc $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{n.\pi}{2}\right) = \frac{-1}{2} = \cos\left(\frac{2.\pi}{3}\right)$.

Les deux cas d'égalité des cosinus donnent ou $\frac{\pi}{3} + \frac{n.\pi}{2} = \frac{2.\pi}{3} + 2.k.\pi$
 $\frac{\pi}{3} + \frac{n.\pi}{2} = -\frac{2.\pi}{3} + 2.k.\pi$

L'inconnue est n et k décrit \mathbb{Z} pour avoir les solutions.

On simplifie par π et on multiplie par 2 : et $n = \frac{2}{3} + 4.k$
 $n = -2. + 4.k$

Comme n doit être entier (et même entier naturel), on élimine.

Méfiez vous de $f = x \mapsto \cos(2.x)$, on a alors $f' = x \mapsto -2.\sin(2.x)$, $f'' = x \mapsto -4.\cos(2.x)$, $f^{(3)} = x \mapsto 8.\sin(2.x)$, $f^{(4)} = x \mapsto 16.\cos(2.x)$ et ainsi de suite.

A chaque dérivation, il sort un 2 à cause de la composition $t \mapsto 2.t \mapsto \cos(2.t)$.

On va dériver et calculer en $\frac{\pi}{12}$, on va donc avoir des $2^n.truc\left(\frac{\pi}{6}\right)$ avec $truc$ égal à sin ou cos (au signe près).
 Jamais ceci ne pourra être nul.

$\cos(\pi/6)$ donne d'intempestives $\sqrt{3}$ qu'on ne pourra effacer. Impossible de revenir dans \mathbb{Z} .

$\sin(\pi/6)$ vaut $\frac{1}{2}$, et avec le 2^n devant, on peut espérer retomber dans \mathbb{Z} ou \mathbb{N} .

$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0$	$S = \emptyset$
$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{12}\right) \in \mathbb{Z}$	$S = \{1, 3, 5, 7, \dots\} = \{2.k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{12}\right) \in \mathbb{N}$	$S = \{3, 7, 11, \dots\} = \{4.k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

◦18◦

* ♡♣ Calculez ce produit factoriel $\prod_{k=0}^{30} (k!)^{((-1)^k)}$.

Dans ce produit, il y a des factorielles au numérateur, et d'autres au dénominateur. Suivant la parité de k .

$$\frac{2!}{1!} \cdot \frac{4!}{3!} \cdot \frac{6!}{5!} \cdot \frac{8!}{7!} \cdot \frac{10!}{9!} \cdot \frac{12!}{11!} \cdot \frac{14!}{13!} \cdot \frac{16!}{15!} \cdot \frac{18!}{17!} \cdot \frac{20!}{19!} \cdot \frac{22!}{21!} \cdot \frac{24!}{23!} \cdot \frac{26!}{25!} \cdot \frac{28!}{27!} \cdot \frac{30!}{29!}$$

On regroupe presque deux à deux :

$$\frac{2!}{3!} \cdot \frac{4!}{5!} \cdot \frac{6!}{7!} \cdot \frac{8!}{9!} \cdot \frac{10!}{11!} \cdot \frac{12!}{13!} \cdot \frac{14!}{15!} \cdot \frac{16!}{17!} \cdot \frac{18!}{19!} \cdot \frac{20!}{21!} \cdot \frac{22!}{23!} \cdot \frac{24!}{25!} \cdot \frac{26!}{27!} \cdot \frac{28!}{29!} \cdot 30!$$

On simplifie par $\frac{k!(k+1)!}{k+1} = \frac{1}{k+1}$:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{1}{21} \cdot \frac{1}{23} \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{29} \cdot 30!$$

Mais, $30!$ est le produit de tous les entiers de 1 à 30 (pairs comme impairs).

Les impairs sautent avec le dénominateur. Il reste

$$2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.26.28.30$$

Et en sortant les 15 facteurs 2, ceci vaut in fine $2^{15}.15!$.

Proprement, on note A le rationnel à calculer :

$$A = \prod_{k=0}^{30} (k!)^{((-1)^k)} = \left(\prod_{\substack{0 \leq k \leq 30 \\ k \text{ pair}}} (k!) \right) \cdot \left(\prod_{\substack{0 \leq k \leq 30 \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k!} \right)$$

$$A = \left(\prod_{0 \leq p \leq 15} (2.p)! \right) \cdot \left(\prod_{0 \leq p \leq 14} \frac{1}{(2.p+1)!} \right) = 30! \cdot \left(\prod_{0 \leq p \leq 14} (2.p)! \right) \cdot \left(\prod_{0 \leq p \leq 14} \frac{1}{(2.p+1)!} \right)$$

$$A = 30! \cdot \left(\prod_{0 \leq p \leq 14} \frac{(2.p)}{(2.p+1)!} \right) = \left(\prod_{k=1}^{30} k \right) \cdot \left(\prod_{0 \leq p \leq 14} \frac{1}{2.p+1} \right)$$

$$A = \left(\prod_{p=1}^{15} (2.p) \right) \cdot \left(\prod_{p=0}^{14} (2.p+1) \right) \cdot \left(\prod_{0 \leq p \leq 14} \frac{1}{2.p+1} \right) = \left(\prod_{p=1}^{15} (2.p) \right)$$

$$A = \left(\prod_{p=1}^{15} (2) \right) \cdot \left(\prod_{p=1}^{15} (p) \right) = 2^{15} \cdot 15!$$

◦19◦

Exprimez $\cos(3.x)$ à l'aide de $\cos(x)$. Donnez un polynôme non nul à coefficients entiers de degré le plus petit possible dont $\cos(\pi/9)$ soit racine.

On peut écrire $2.\cos(3.x) = e^{3.i.x} + e^{-3.i.x} = (e^{i.x})^3 + (e^{-i.x})^3 = (c + i.s)^3 + (c - i.s)^3$ avec c et s pour $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

On développe par la formule du binôme, les $i.s^3$ s'en vont (imaginaires). De même que les $3.c^2.i.s$.

Il reste $2.\cos(3.x) = 2.c^3 - 6.c.s^2$ (car $(i.s)^2 = -s^2$).

On remplace s^2 par $1 - c^2$ et on trouve $\cos(3.x) = 4.\cos^3(x) - 3.\cos(x)$.

On peut aussi partir du membre de droite, et le développer par les formules de Moivre.

$$\text{On a donc } 4.\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3.\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{1}{2}.$$

L'équation $4.X^3 - 3.X = \frac{1}{2}$ donne le polynôme $8.X^3 - 6.X - 1$. Et pourquoi pas les formules de Cardan.

Un mathématicien va faire les courses.

Sa femme lui dit : "tu prendras un litre de lait et si il y a des œufs, alors tu en prends six".

Le mathématicien revient avec six litres de lait. Sa femme en déduit qu'il y avait des œufs.

◦20◦

♥ Montrez : $\cos(2.\pi/5) + \cos(3.\pi/5) = 0$.

Montrez : $\forall \theta, \cos(3.\theta) + \cos(\theta) = 2.\cos(\theta).\cos(2.\theta)$ puis $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$.

Déduisez que $\cos(\pi/5)$ est racine de l'équation $4.X^3 + 2.X^2 - 3.X - 1 = 0$ d'inconnue réelle X .

Résolvez l'équation ci dessus. Déduisez la valeur de $\cos(\pi/5)$.

Les angles $\frac{2.\pi}{5}$ et $3.\frac{\pi}{5}$ sont complémentaires (leur somme vaut π). La somme de leurs sinus vaut 0.

On utilise la formule $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$.

$$\begin{array}{lcl} \text{On développe} & \cos(3.\theta) & = \cos(2.\theta + \theta) = \cos(2.\theta).\cos(\theta) - \sin(2.\theta).\sin(\theta) \\ & \cos(\theta) & = \cos(2.\theta - \theta) = \cos(2.\theta).\cos(\theta) + \sin(2.\theta).\sin(\theta) \end{array} \quad .$$

On somme les deux formules et on a bien $\cos(3.\theta) + \cos(\theta) = 2.\cos(\theta).\cos(2.\theta)$.

On remplace $\cos(2.\theta)$ par $2.\cos^2(\theta) - 1$ et on fait passer $\cos(\theta)$ de l'autre côté. On a cette fois $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$.

On peut la retrouver par d'autres voies.

On applique nos formules de trigonométrie à $\cos(2.\pi/5) + \cos(3.\pi/5) = 0$:

$$4.\cos^3\left(\frac{\pi}{5}\right) - 3.\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2.\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = 0.$$

C'est la définition de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est racine de $4.X^3 - 3.X + 2.X^2 - 1$.

Cette équation a pour racine évidente -1 (c'est $\cos(\pi)$ avec $\cos(3.\pi) + \cos(2.\pi) = 0$).

On factorise : $(X + 1).(4.X^2 - 2.X - 1)$.

Comme $\cos(\pi/5)$ est racine de cette équation, il vaut $-1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ou $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Mais comme il est positif, on élimine -1 et $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Il ne reste que $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

◦21◦

Comparez les propositions suivantes :

α	$\forall (a, b) \in E, a \times b = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$	$\forall (a, b) \in E, (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0) \Rightarrow a \times b = 0$	γ
β	$\forall (a, b) \in E, (a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0) \Rightarrow a \times b = 0$	$\forall (a, b) \in E, (a \neq 0 \text{ et } a \times b = 0) \Rightarrow b = 0$	δ

Sont elles vraies ?

α est l'intégrité de la multiplication.

Elle est équivalente à δ (par $p \Rightarrow (q \text{ ou } r) = \bar{p} \text{ ou } q \text{ ou } r$ et $(p \text{ et } \bar{q}) \Rightarrow r = \overline{\bar{p} \text{ et } \bar{q}} \text{ ou } r = \text{pareil}$).

β est absurde, puisque l'on peut prendre $a = b = 1$.

On préfère « $\forall (a, b) \in E, (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0) \Rightarrow a \times b \neq 0$ » à γ qui, elle, est totalement délirante.

◦22◦

♥ Quel est le coefficient de $a^2.b.c$ dans $(a.b + a.c + b.c)^2$?
 Quel est le coefficient de $a^2.b.c$ dans $(a + b + c + d)^4$?
 Quel est le coefficient de $a^2.b.c$ dans $(a + b + c)^4$?

On développe à la main : $(a.b + a.c + b.c)^2 = \dots + 2.a^2.b.c + \dots$ car il ne peut venir que de $(a.b).(a.c)$.

Plus simplement : $(a.b + a.c + b.c)^4 = \dots + 0.a^2.b.c + \dots$ le terme n'est pas « homogène »

Pour avoir $(a + b + c)^4 = \dots + 12.a^2.b.c + \dots$ il suffit de développer. Ou d'utiliser la formule du multinôme, pas encore dans notre cours.

◦23◦

Montrez que si $\tan(\theta)$ vaut 2 alors pour tout n , $\tan(n.\theta)$ existe et est un rationnel de la forme $\frac{p_n}{q_n}$ avec p_n pair et q_n impair.

Par récurrence sur n initialisée au rang 0 avec $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$, et plutôt au rang 1 avec $p_1 = 2$ et $q_1 = 1$.

On suppose à un rang n donné $\tan(n.\theta) = \frac{p_n}{q_n}$ et on calcule $\tan(n.\theta + \theta) = \frac{\frac{p_n}{q_n} + 2}{1 - 2.\frac{p_n}{q_n}} = \frac{p_n + 2.q_n}{q_n - 2.p_n}$.

On a bien un rationnel.

Son dénominateur ne s'annule pas, puisque $q_n - 2.p_n$ ne peut pas être pair.

Comme le dénominateur est impair, même après réduction éventuelle de la fraction par 3, 5 ou que sais je, le dénominateur restera impair.

◦24◦

Résolvez $\int_a^{2.a} \tan(\theta).d\theta = \frac{\ln(3)}{2}$ d'inconnue réelle a (attention aux modulo ?).

On est amené à résoudre $-\ln(\cos(2.a)) + \ln(\cos(a)) = \ln(\sqrt{3})$.

On passe en inconnue $X = \cos(a) : \ln\left(\frac{x}{2.x^2-1}\right) = \ln(\sqrt{3})$.

On efface les logarithmes par bijectivité.

On résout une équation du second degré.

On revient à a . Et on fait attention au domaine.

Il ne doit pas y avoir de nombre en $\frac{\pi}{2} + k.\pi$ entre a et $2.a$.

◦25◦

♥ Résolvez « $n - 1$ divise $n + 3$ » d'inconnue n dans \mathbb{Z} .

L'inconnue vraiment utile est $n - 1$. On pose donc $N = n - 1$.

La question devient « N divise $N + 4$ ».

Sachant que N divise déjà N , la question se résume à N divise 4.

Sur \mathbb{Z} , les solutions pour N sont $-4, -2, 0, 2$ et 4 .

On revient à $n : S_n = \{-4, -1, 1, 3, 5\}$

◦26◦

♥ Montrez : $\sum_{n=0}^N (n+2).2^n = (N+1).2^{N+1}$ pour tout N .

Une récurrence ? Allez oui. Sur N .

Initialisation : $\sum_{n=0}^0 (n+2).2^n = (0+1).2^{0+1}$ et $(0+1).2^{0+1}$ sont bien égaux.

Hérédité. On se donne n quelconque et on suppose $\sum_{n=0}^N (n+2).2^n = (N+1).2^{N+1}$.

On ajoute le terme de rang $N + 1$:

$$\sum_{n=0}^{N+1} (n+2) \cdot 2^n = \sum_{n=0}^N (n+2) \cdot 2^n + (N+1+2) \cdot 2^{N+1}$$

$$\sum_{n=0}^{N+1} (n+2) \cdot 2^n = (N+1) \cdot 2^{N+1} + (N+1+2) \cdot 2^{N+1}$$

$$\sum_{n=0}^{N+1} (n+2) \cdot 2^n = (N+1+N+3) \cdot 2^{N+1}$$

$$\sum_{n=0}^{N+1} (n+2) \cdot 2^n = (2N+4) \cdot 2^{N+1}$$

$$\sum_{n=0}^{N+1} (n+2) \cdot 2^n = (N+2) \cdot 2 \cdot 2^{N+1}$$

$$\sum_{n=0}^{N+1} (n+2) \cdot 2^n = (N+1+1) \cdot 2^{N+1+1}$$

D'autres chemins sont possibles.

◦27◦

Résolvez : les deux derniers chiffres de $n + n!$ sont 2 suivi de 5.

Les deux derniers chiffres de $n + n!$ viennent de n et de $n!$ avec d'éventuelles retenues lors du calcul.

Mais qui sont les deux derniers chiffres de $n!$:

1	1	2	6	24	120	720	40320	362880	3628800	39916800
---	---	---	---	----	-----	-----	-------	--------	---------	----------

En fait, à partir de $n = 10$, l'entier $n!$ est un multiple de 100.

Donc, dès que n a dépassé 10, les deux derniers chiffres de $n + n!$ sont les deux derniers chiffres de n .

La question se réduit alors à « les deux derniers chiffres de n sont 2 suivi de 5 ».

On traduit : $S \cap [10, +\infty[= \{25 + 100 \cdot p \mid p \in \mathbb{N}\}$

On cherche à la main les racines avant 10 : $S = \{4\} \cup \{25 + 100 \cdot p \mid p \in \mathbb{N}\}$

◦28◦

♥ On suppose : $\tan(a) = \frac{1}{5}$ et $\tan(b) = \frac{1}{239}$. Calculez $\tan(2.a)$, $\tan(4.a)$ et $\tan(4.a - b)$.

Démontrez : $(5 + i)^4 = 2 \cdot (1 + i) \cdot (239 + i)$.

♠ On suppose : $\tan(c) = \frac{1}{18}$ et $\tan(d) = \frac{1}{57}$. Calculez $\tan(12.c)$, $\tan(8.d)$ et $\tan(12.c + 8.d - 5.b)$.

Par formules de trigonométrie : $\tan(2.a) = \frac{5}{12}$ et $\tan(4.a) = \frac{120}{119}$.

On effectue : $\tan(4.a - b) = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \cdot \frac{1}{239}} = \frac{120 \cdot 239 - 119}{119 \cdot 239 + 120}$.

Il reste à montrer que ceci vaut 1.

Non pas par calcul brutal, y'a écrit « maths ».

On montre $120 \cdot 239 - 119 = 119 \cdot 239 + 120$ en regroupant d'un même côté : $120 \cdot 238 = 119 \cdot 240$. Un facteur 2 glisse et c'est bon.

On peut aussi écrire $\tan(4.a - b) = \frac{120 \cdot (120 + 119) - 119}{(120 - 1) \cdot (120 + 119) + 120}$ et conclure encore.

Sinon, on gagne du temps en comparant $\tan(4.a)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4} + b\right)$. les deux valent $\frac{120}{119}$.

On va le retrouver autrement (*plus joliment* ?).

On développe $(5 + i)^2 = 25 - 1 + 10i = 24 + 10i$

On recommence : $(5 + i)^4 = 4 \cdot (12 + 5i)^2 = 4 \cdot (144 - 25 + 120i)$.

On simplifie : $(5 + i)^4 = 476 + 420i$.

On compare : $2 \cdot (1 + i) \cdot (239 + i) = 476 + 420i$.

Il y a bien égalité !

Passons alors aux arguments dans $(5 + i)^4 = 2 \cdot (1 + i) \cdot (239 + i)$:

On obtient $\text{Arg}((5 + i)^4) = \text{Arg}(2) + \text{Arg}(1 + i) + \text{Arg}(239 + i)$.

Et même $4 \cdot \text{Arg}(5 + i) = \text{Arg}(1 + i) + \text{Arg}(239 + i)$.

On reconnaît $4 \cdot \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{4} + \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$ puisque $\text{Arg}(a + i) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right)$.

◦29◦

Montrez : $\tan(\pi/16) = (\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} - 1)$.

La méthode : calculer $\tan(\pi/8)$ puis $\tan(\pi/16)$.

On a trouvé $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 - \cos(\pi/4)}{\sin(\pi/4)} = \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$ (par conjugaison).

On sait ensuite que $\tan(\pi/16)$ vérifie $\frac{2t}{1-t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

On a alors une équation du second degré $t^2 + 2(\sqrt{2} + 1)t - 1 = 0$.

Cette équation du second degré de discriminant $4(\sqrt{2} + 1)^2 + 4$ a deux racines qu'on calcule.

On élimine la racine négative (il y en a une et une seule). Celle qui reste est $\tan(\pi/16)$.

◦30◦

On note D_t le domaine de définition de l'application tangente ($D_t = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$).

Vrai ou faux : $\forall a \in D_t, \forall k \in \mathbb{Z}, \tan(a + k\pi) = \tan(a)$.

Vrai ou faux : $\forall a \in D_t, \exists k \in \mathbb{Z}, \tan(a + k\pi) = \tan(a)$.

Vrai ou faux : $\forall (a, b) \in (D_t)^2, (\tan(a) = \tan(b)) \Rightarrow (b = a + k\pi)$.

Montrez : $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, (\tan(a) = \tan(b)) \Rightarrow (a = b)$.

$\forall a \in D_t, \forall k \in \mathbb{Z}, \tan(a + k\pi) = \tan(a)$: vrai

$\forall a \in D_t, \exists k \in \mathbb{Z}, \tan(a + k\pi) = \tan(a)$: vrai, déjà par exemple avec $k = 0$

$\forall (a, b) \in (D_t)^2, (\tan(a) = \tan(b)) \Rightarrow (b = a + k\pi)$: Faux. k n'est pas quantifié.

$\forall (a, b) \in (D_t)^2, (\tan(a) = \tan(b)) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, b = a + k\pi)$: vrai.

$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, (\tan(a) = \tan(b)) \Rightarrow (a = b)$: vrai.

On part de $\tan(a) = \tan(b)$. On arrive à $b - a$ est un multiple de π .

Mais comme π est irrationnel, le seul multiple de π qui soit entier est 0.

On a bien $b - a = 0$.

◦31◦

Montrez que si la moyenne de vos notes vaut 10, alors au moins une de vos notes dépasse 10 (au sens large).

Au lieu de prouver $\text{moyenne} = 10 \Rightarrow (\text{au moins un dépasse } 10)$,

on montre la contraposée $(\text{au moins un dépasse } 10) \Rightarrow (\mu \neq 10)$.

Et c'est « si toutes les notes sont plus petites que 10 alors la moyenne ne peut pas valoir 10 » (négation de \exists).

Et en effet, si chaque x_i est strictement plus petit que 10, alors on a $\sum_{i=1}^n x_i < \sum_{i=1}^n 10 = 10.n$ puis en divisant

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i < 10.$$

◦32◦

Retrouvez les stations de métro dont voici les anagrammes (Nord-Est) :

Léger aphte. Cul albinos. Trique. Cet urinoir à con. Un livre s'inscrira alphabétiquement. Pacte des elfes.

Léger aphte	Cul albinos	Trique
Télégraphe	Louis Blanc	Riquet
Cet urinoir à con	Un livre s'inscrira alphabétiquement	Pacte des elfes
Corentin Cariou	Aubervilliers - Pantin - Quatre Chemins	Place des fêtes.

#anagrammes des stations de metro

import os #le module pour lire un fichier sur le disque dur

#-*- coding : utf-8 -*- #pour que Python supporte les accents et caractères spéciaux, cherchez pas à comprendre

Alphabet = 'abcdefghijklmnopqrstuvwxyz' #tout ce qui est ponctuation, espace, apostrophe n'est pas dans cette liste

def Nettoyeur(C) : #prend un mot (string) et ne garde que les lettres (liste triée par ordre alphabétique)

....Mot=() #liste vide qui va accueillir les lettres

....for lettre in C : #prend les lettres une a une, et il les appelle « lettre »

```

.....if lettre in 'éèê' : #efface les accents des e
.....lettre='e'
.....if lettre in 'àâä' :
.....lettre='a'
.....if lettre in 'ô' :
.....lettre='o'
.....if lettre in 'uù' :
.....lettre='u'
.....if ord(lettre) in range(65,91) : #détecte les majuscules (code ASCII)
.....lettre = chr(ord(lettre)+32) #pour convertir en minuscule, augmenter le code de 32
.....if lettre in Alphabet : #si on a bien une lettre (efface les espaces, apostrophes...)
.....Mot.append(lettre)
.....Mot.sort() #trie la liste obtenue (on peut trier les listes, pas les strings)
....return(Mot)

#lecture du fichier RATP sur disque
Liste = open('StationsMetro.txt','r')
ListeLue=Liste.readlines()
Liste.close()
ListeNoms = ( )
for nom in ListeLue :
....if len(nom)>3 : #car le fichier contient des trucs louches
.....ListeNoms.append(nom)
.....print(nom) #juste pour reviser la liste des noms de stations

for k in range(20) :cv#on va pouvoir en tester 20
....Ana = input('Nom à tester ') #entrée au clavier
....AnaPropre=Nettoyeur(Ana) #nettoyage
....for Station in ListeNoms : #on prend un par un les noms du fichier mis en mémoire
.....if Nettoyeur(Station) == AnaPropre : #on compare les deux listes nettoyées et triées
.....print(Station) #en cas de concordance, on affiche

```

◦32◦

♥ Voici un « raisonnement » ; en quoi est il faux ?

on sait	$\forall(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (a < b \text{ et } b < c) \Rightarrow (a < c)$
et aussi	$\forall(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (a > b \text{ et } b > c) \Rightarrow (a > c)$
de plus	$a \neq b$ signifie $a < b$ ou $a > b$
on a donc	$\forall(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (a \neq b \text{ et } b \neq c) \Rightarrow (a \neq c)$

on sait	$\forall(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (a < b \text{ et } b < c) \Rightarrow (a < c)$	oui
et aussi	$\forall(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (a > b \text{ et } b > c) \Rightarrow (a > c)$	oui
de plus	$a \neq b$ signifie $a < b$ ou $a > b$	oui
on a donc	$\forall(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (a \neq b \text{ et } b \neq c) \Rightarrow (a \neq c)$	non

On a bien les trois premières lignes.

Mais regardons l'implication

$$\begin{array}{ccc}
 a \neq b & & a < b \text{ ou } a > b \\
 \text{et} & \Leftrightarrow & \text{et} \\
 b \neq c & & b < c \text{ ou } b > c
 \end{array}$$

Ceci conduit à quatre possibilités par distributivité :

$a < b$	$a < b$	$a > b$	$a > b$
et	et	et	et
$b < c$	$b > c$	$b < c$	$b > c$

La dernière ligne de notre « raisonnement » n'étudie que deux de ces quatre cases.

On rappelle $1 \neq 2$ et $2 \neq 1$ et on ne peut pas déduire $1 \neq 1$. Le \neq n'est pas transitif.

◦33◦

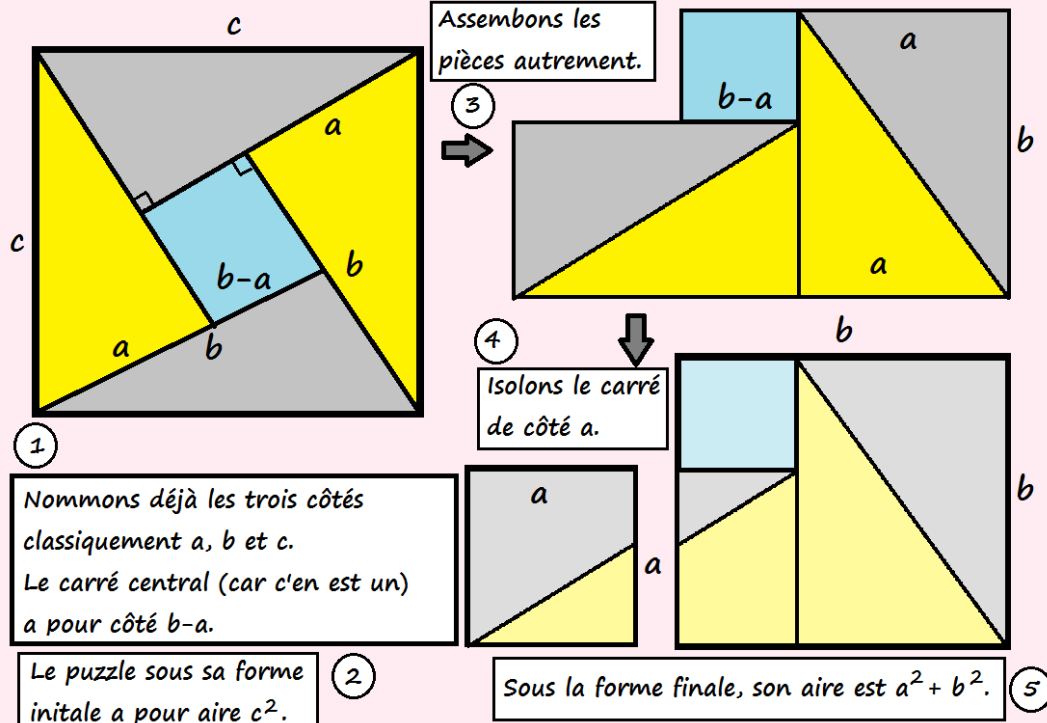
En notant Ω l'univers des humains, et $\tau(a, t)$ la proposition « tromper a à l'instant t », que signifie

$\forall a \in \Omega, \exists(t_0, \dots, t_{999}) \in \mathbb{R}^{1000}, \forall i \in \text{range}(999), t_i < t_{i+1}, \forall i \in \text{range}(1000), \tau(a, t_i)$	
$\forall A \subset \Omega, (\text{Card}(A) = 1000) \Rightarrow (\forall a \in A, \exists t_a \in \mathbb{R}, \tau(a, t_a))$	
$\forall A \subset \Omega, (\text{Card}(A) = 1000) \Rightarrow (\forall a \in A, \forall T \subset \mathbb{R}, ((\text{Card}(T) \geq 1000) \Rightarrow (\exists t_a \in T, \tau(a, t_a))))$	

Prenez un chewing-gum, Émile !

◦34◦

Démontrez le théorème de Pythagore, par la méthode de Bhaskara.



◦34◦

En supposant Arctan , Arcsin et Arccos dérivables, et en dérivant $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\text{Arctan}(x)) = x$, montrez :

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
 Calculez aussi Arcsin' , Arccos' .
 Retrouvez graphiquement ce résultat.

◦35◦

Que se passe-t-il si vous tapez ces instructions avec Python :

```
a = 5
b = a
b = b+1
a =
```

◦36◦

♥ Dérivez $x \mapsto x^{\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right)}$ (simplifiez la d'abord ?).

On simplifie : $x^{\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right)} = e^{\ln(x) \cdot \left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right)} = e^{\ln(\ln(x))} = \ln(x).$

On peut dériver : $\left(x \mapsto x^{\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right)}\right)' = \left(x \mapsto \frac{1}{x}\right).$

Mais on précise le domaine : $]1, +\infty[.$

◦37◦

Pour tout réel a , $\sin(2a)$ est positif. La preuve : on se donne a , on calcule $\cos(a)$ et $\sin(a)$. on sait alors $\cos(a) = \varepsilon \cdot \sqrt{1 - \sin^2(a)}$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $\sin(a) = \varepsilon \cdot \sqrt{1 - \cos^2(a)}$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. On a alors $\sin(2a) = 2 \cdot \sin(a) \cdot \cos(a) = 2 \cdot \sqrt{1 - \cos^2(a)} \cdot \sqrt{1 - \sin^2(a)}$ puisque $\varepsilon^2 = 1$.
Où est l'erreur ?

$$\cos(a) = \varepsilon_1 \cdot \sqrt{1 - \sin^2(a)} \text{ avec } \varepsilon_1 \in \{-1, 1\} \text{ et } \sin(a) = \varepsilon_2 \cdot \sqrt{1 - \cos^2(a)} \text{ avec } \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$$

Quand on multiplie, le facteur $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$ vaut 1 ou -1 . Mais il y a deux ε distincts.

◦38◦

♥ Dérivez $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$. Calculez $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}$.

$x + \sqrt{1 + x^2}$ existe pour tout x réel et est strictement positif.

Explication : le produit $(x + \sqrt{1 + x^2}) \cdot (x - \sqrt{1 + x^2})$ vaut -1 , c'est donc qu'un des deux est positif et l'autre négatif

le plus grand des deux c'est celui avec un signe plus devant la racine
c'est donc lui le positif ! Et toc !

On dérive en $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ valable aussi sur \mathbb{R} (en fait $x \mapsto \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}}$ mais ça se simplifie !)

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}} = \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 + 4}} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + 1}} = \int_{u=1}^{u=7/2} \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

On trouve $\ln\left(\frac{7+\sqrt{53}}{2}\right) - \ln(1 + \sqrt{2})$

◦39◦

♥ Dérivez $x \mapsto \text{Arctan}(3 \cdot \tan(x))$ (utilisez plutôt $t' = 1/c^2$).

♠ Calculez $\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta) + 4 \cdot \sin^2(\theta)}$.

♣ Calculez aussi $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta) + 4 \cdot \sin^2(\theta)}$.

Attention : on peut simplifier $\tan(3\theta)$ (l'exprimer à l'aide de $\tan(\theta)$)

on ne peut pas simplifier $\text{Arctan}(3t)$

on ne peut pas simplifier $\text{Arctan}(3 \cdot \tan(t))$

Avec domaine de définition $] -\pi/2, \pi/2[$ pour éviter tout litige, on dérive une composée :

x	\mapsto	$\tan(x)$	\mapsto	$3 \cdot \tan(x)$	\mapsto	$\text{Arctan}(3 \cdot \tan(x))$
		\tan		fois trois		Arctan
		$\frac{1}{\cos^2(x)}$		3		$\frac{1}{1 + (3 \cdot \tan(x))^2}$

On effectue le produit (dérivation de composée) : $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot 3 \cdot \frac{1}{1 + (3 \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)})^2}$.

On simplifie et trouve

$$x \mapsto \frac{3}{\cos^2(x) + 9 \cdot \sin^2(x)}$$

Et pourquoi pas $x \mapsto \frac{3}{1 + 8 \cdot \sin^2(x)}$ en remplaçant \cos^2 par $1 - \sin^2$.

Comment exploiter ce qui précède ? Avec 4 à la place de 9 ?

x	\mapsto	$\tan(x)$	\mapsto	$2 \cdot \tan(x)$	\mapsto	$\text{Arctan}(2 \cdot \tan(x))$
		\tan		fois trois		Arctan
		$\frac{1}{\cos^2(x)}$		3		$\frac{1}{1 + (2 \cdot \tan(x))^2}$

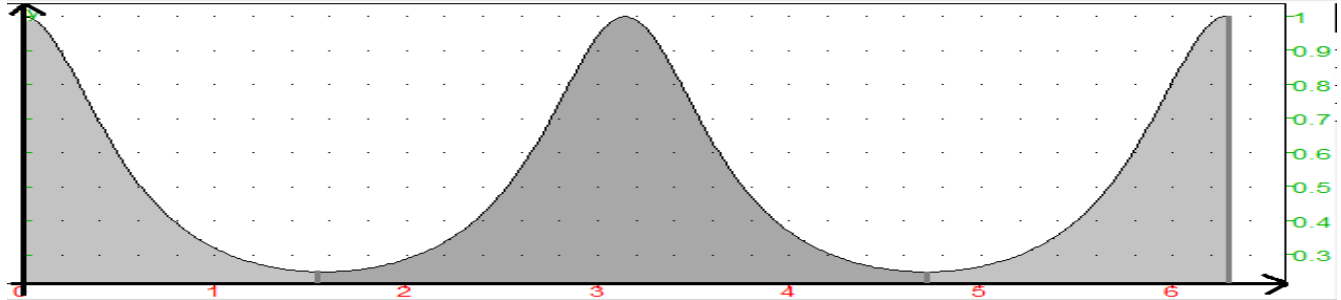
On a prouvé ainsi $\left(x \mapsto \text{Arctan}(2 \cdot \tan(x))\right)' = \left(x \mapsto \frac{2}{\cos^2(x) + 4 \cdot \sin^2(x)}\right)$.

On intègre donc $\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta) + 4 \cdot \sin^2(\theta)} = \left[\frac{1}{2} \cdot \text{Arctan}(2 \cdot \tan(x))\right]_0^{\pi/4} = \frac{\text{Arctan}(2)}{2}$

Si on veut appliquer la formule de 0 à 2π , on trouve

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta) + 4 \sin^2(\theta)} = \left[\frac{1}{2} \cdot \text{Arctan}(2 \cdot \tan(x)) \right]_0^{2\pi} = 0$$

Et ce n'est pas cohérent. On intègre une application quand même positive !
Que faire ? Découper par relation de Chasles.



$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta) + 4 \sin^2(\theta)} = \left[\frac{1}{2} \cdot \text{Arctan}(2 \cdot \tan(x)) \right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{1}{2} \cdot \text{Arctan}(2 \cdot \tan(x)) \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \left[\frac{1}{2} \cdot \text{Arctan}(2 \cdot \tan(x)) \right]_{3\pi/2}^{2\pi}$$

On trouve alors π mais ce n'est pas évident, il y a d'étranges « tangentes de $\pi/2$ ».

◦40◦ Montrez que la suite $\left(\log_{(n!)}((n+1)!) \right)$ est décroissante, minorée et donnez sa limite.

◦41◦ Calculez $\cos(\pi/12)$ et prouvez $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{16} + \sqrt{6} + \sqrt{2}}}{\sqrt{8}}$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{4}$$

Ensuite, $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$ vérifie $2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) - 1 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{4}$.

Et il est positif.

Or, cette équation a deux solutions opposées, on ne garde donc que la solution positive :

on fait passer 1 de l'autre côté et on réduit au dénominateur commun : $2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} + 4}{4}$

on divise par 2 : $\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} + 4}{8}$

on passe à la racine : $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{3} + 4}}{\sqrt{8}}$

on justifie le choix de signe.

*Un colleur de physique vous engueulera pour une faute de calcul (ou trouvera idiot de remplacer 4 par $\sqrt{16}$).
Un colleur de maths vous mettra 0 parce que vous n'aurez pas justifié le choix de signe(estimant qu'ensuite, une erreur de calcul est négligeable face à une erreur de raisonnement).*

◦42◦ x est un réel strictement positif. Calculez $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)\right)$. Simplifiez alors $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

◦43◦ ♣ On ne connaît pas de formule explicite pour une primitive de $x \mapsto \frac{\text{Arctan}(x)}{x}$, mais on décide qu'on la note F . Dérivez $x \mapsto F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculez $\int_{1/2}^2 \frac{\text{Arctan}(t)}{t} \cdot dt$.

On dérive $x \mapsto F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$ (qu'on note G) en $x \mapsto F'(x) + \frac{1}{x^2} \cdot F'\left(\frac{1}{x}\right)$, ce qui fait

$$x \mapsto \frac{\text{Arctan}(x)}{x} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

◦46◦

Un cadeau des frères Deslandes^a : tous les jours de la semaine, un garçon sort de l'école à 16 heures, et sa mère vient le chercher en voiture (elle arrive à seize heures pile et le ramène à la maison). Un jour, le garçon finit à 15 heures et n'a pas envie d'attendre. Il avance sur le chemin du retour. Sa mère qui n'était pas au courant part normalement en voiture (vitesse constante), le croise et le ramène alors immédiatement à la maison. Ils arrivent dix minutes plus tôt que d'habitude. Combien de temps le garçon a-t-il marché ?

^a. il y a eu trois frères Deslandes, venant de Blomet, passées par la MPSI2, ayant intégré ENS, Mines de Nancy et ENS encore ; l'ainé ayant collé en MPSI2, exercé dans les banques puis devenu prof, et les deux extrêmes ayant publié un livre d'exercices de mathématiques originaux chez Ellipses avec préface de Cédric Villani

Solution telle que rédigée justement par Guillaume ou Clément :

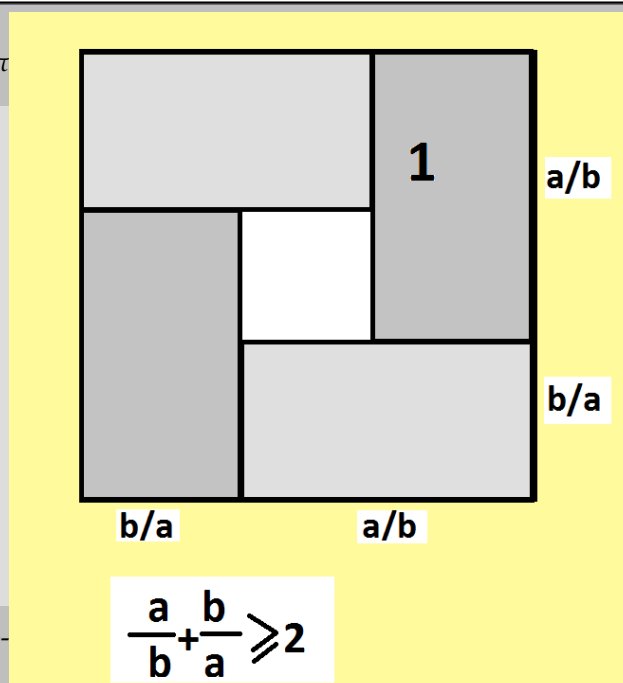
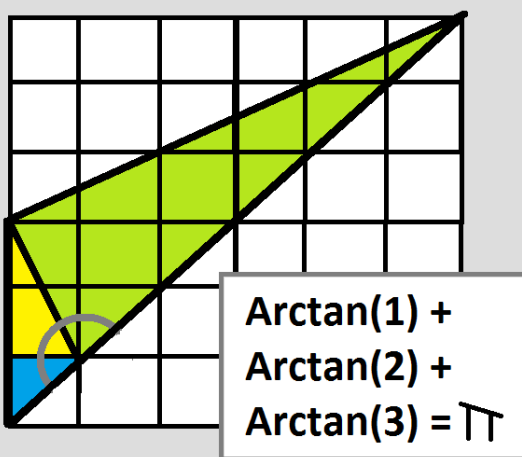
La bonne question à se poser : à quelle heure le petit garçon a-t-il rencontré sa maman sur la route ?

Sa maman a fait un trajet de dix minutes plus court que d'habitude.

Elle a donc fait demi-tour cinq minutes plus tôt que d'habitude, c'est à dire non plus à 16h00 mais à 15h55.

Le petit garçon a donc marché 55 minutes.

♡ Montrez : $\text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3) = \pi$
Le dessin ci dessous vous aide-t-il ?



◦47◦

Vous connaissez $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ pour a et b réels strictement positifs.

Il faut la démontrer : il y a une preuve qui part de $(a - b)^2 \geq 0$. Il y en a une autre qui étudie $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, et il y en a une qui utilise un dessin.

Deux exercices distincts, le seul rapport est dans la mise en page des dessins.

Pour le premier, la démarche mathématique (mais indigne d'une vraie matheuse) consiste à dire qu'on a la somme de trois angles entre 0 et $\pi/2$ (donc un angle entre 0 et $3\pi/2$), dont on connaît les tangentes.

On va calculer sa tangente pour le reconnaître.

La formule à utiliser est dans le cours (donc par cœur pour certains, retrouvée d'instinct pour d'autres en divisant haut et bas de $\frac{\cos \cdot \sin + \sin \cdot \cos}{\cos \cdot \cos - \sin \cdot \sin}$ par le produit $\cos \cdot \cos$) : $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)}$.

$$\text{Ici : } \tan(\text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(2)) = \frac{1 + 2}{1 - 1 \cdot 2} = -3,$$

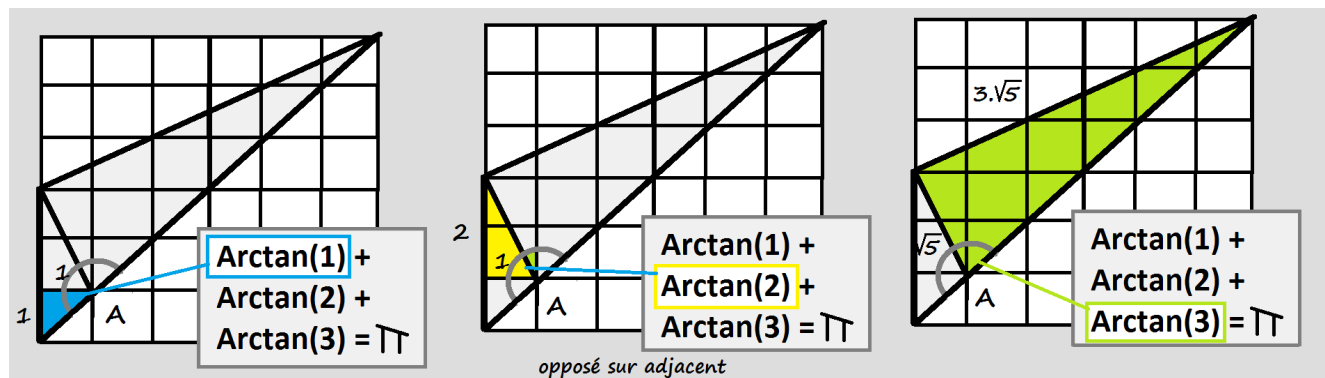
$$\text{puis } \tan(\text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3)) = \frac{-3 + 3}{1 - (-3) \cdot 3} = 0.$$

Le seul angle dans notre intervalle $]0, 3\frac{\pi}{2}[$ dont la tangente soit nulle est π (la somme des trois angles ne pouvait pas valoir 0) : $\text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3)$.

Ce qui ne serait même pas digne d'un cours de maths, c'est d'arriver à $\tan(\text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3)) = 0$ et de dire « je passe à l'arctangente, donc $\text{Arctan}(a) + \text{Arctan}(b) + \text{Arctan}(c) = \text{Arctan}(0) = 0$.

C'est comme d'arriver à $x^2 = (1 + \sqrt{5})^2$ et de conclure $x = 1 + \sqrt{5}$ sans voir qu'il y a une histoire de signe.

Mais le dessin peut nous aider.



La somme des trois angles en A fait un angle plat, de mesure π .

Et ça, c'est la preuve qui réjouit le matheux.

Passons au carré à droite.

Ses quatre côtés ont pour longueur $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

Son aire est donc $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2$.

Mais on y trouve quatre rectangles ayant tous pour aire 1 : $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}$.

Plus un carré au centre, dont je ne calculerai même pas l'aire.

En écrivant de deux façons l'aire du carré, on a $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 = 1 \times 4 + (\text{petit carré})$.

On a donc $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \geq 1 \times 4$ puis $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 2$.

48

♥ ou ♣ L'élève Ach-Sethprof a écrit $128 + 257 = 381$. Vous voulez lui dire que c'est faux. Mais vous constatez qu'il n'a pas le même nombre de doigts que vous et compte dans une autre base... Laquelle ?

En base 8 par exemple, les chiffres vont de 0 à 7, et le nombre s'écrivant 143 c'est $1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0$.

En base 8, on a donc $346 + 127 = 475$ puisque $\begin{array}{r} 3 \quad 14 \quad 6 \\ + \quad 1 \quad 2 \quad 7 \\ \hline 4 \quad 7 \quad 5 \end{array}$ avec une belle retenue : $6 + 7 = 13$ donc 5 et je retiens 1 (une huitaine).

En notant b la base, les nombres concernés sont

128	257	381
$b^2 + 2.b + 8$	$2.b^2 + 5.b + 7$	$3.b^2 + 8.b + 1$

L'équation permettant de trouver b devient $3.b^2 + 7.b + 15 = 8.b + 1$.

On trouve $b = 14$. Et c'est cohérent d'y trouver des chiffres 8.

La lise des chiffres en base 14 est

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

49

Donnez l'écriture décimale de $\frac{355}{113}$.

Donnez l'écriture binaire de $\frac{1}{5}$.

On sait : $0,9999 \dots = 1$. Mais si on remplace un 9 sur dix par un 8, qui est le nombre obtenu ?

On pose la division de 355 par 113 jusqu'à retomber sur un reste déjà croisé. On sait alors que tout se met en boucle.

Ça peut être très long... et ça l'est.

3,14159292035398230088495575221238938053097345132743362831858407079646017699115044247787610619469026548672566371

Après 121 divisions, on retrouve le même motif :

0353982300884955752212389380530973451327433628318584070796460176991150442477876106194690265486725663716814159292

car on retombe sur le même reste : 230 déjà croisé plus haut.

3.14159292 0353982300884955752212389380530973451327433628318584070796460176991150442477876106194690265486725

03539823008849557522123893805

Oui, le début de notre nombre rappelle beaucoup π .

Il faut écrire $\frac{1}{5}$ uniquement avec des $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ et autres $\frac{1}{2^n}$. En quantité infinie si nécessaire.

- ceux qui posent plusieurs fois la même question
- et ceux qui posent plusieurs fois la même question.

◦53◦



Votre calculatrice fonctionne mal. En tout cas, elle a une drôle de touche qui calcule des produits ou des sommes suivant son humeur. Pour être précise : pour a et b entiers relatifs, on a $a * b = \begin{cases} a + b & \text{si } a \text{ pair} \\ a \times b & \text{si } a \text{ impair} \end{cases}$.

Montrez que c'est une loi interne, non commutative, non associative.



A-t-on toujours $a * (a * a) = (a * a) * a$.



On sait que pour tout triplet d'entiers (a, b, c) on peut créer douze nombres comme $(a * b) * c$ ou $b * (a * c)$. Choisissez a, b et c pour que ces nombres prennent tous la même valeur. Est-il possible de choisir a, b et c pour que ces nombres prennent douze valeurs différentes. Choisissez a, b et c pour que ces seize nombres prennent le maximum de valeurs différentes.

Si a et b sont deux entiers, alors $a + b$ et $a \times b$ sont entiers. Que la parité de a nous fasse tomber sur l'un ou sur l'autre, on a un entier. la loi est interne.

On calcule $1 * 2 = 1.2 = 2$ car 1 est impair $2 * 1 = 2 + 1 = 3$ car 2 est pair.

On a notre contre-exemple : $2 * 1 \neq 1 * 2$.

On poursuit au hasard

$(1 * 2) * 3 = (1.2) * 3$	car 1 impair	$(1 * 2) * 3 = 2 + 3 = 5$	car 2 pair	raté !
$1 * (2 * 3) = 1 * (2 + 3)$	car 2 pair	$1 * (2 * 3) = 1.5 = 5$	car 2 pair	

On recommence :

$(2 * 1) * 2 = (2 + 1) * 2$	car 2 pair	$(1 * 2) * 2 = 3 * 2 = 3.2 = 6$	car 3 impair
$2 * (1 * 2) = 2 * (1.2)$	car 1 impair	$2 * (1 * 2) = 2 * 2 = 2 + 2$	car 2 pair

Cette fois, c'est bon : $(2 * 1) * 2 \neq 2 * (1 * 2)$

On prend a et on calcule $(a * a) * a$ et $a * (a * a)$ en étudiant les deux cas sur la parité de a (rappel : pour a impair, a^2 l'est aussi) :

a impair	$(a * a) * a = (a.a) * a$	car a impair	$(a * a) * a = a^3 * a = a^3$	car a^2 impair
	$a * (a * a) = a * (a.a)$	car a impair	$a * (a * a) = a * a^2 = a^3$	car a impair
a pair	$(a * a) * a = (a + a) * a$	car a pair	$(a * a) * a = (2.a) * a = 3.a$	car $2.a$ pair
	$a * (a * a) = a * (a + a)$	car a pair	$a * (a * a) = a * (2.a) = 3.a$	car a pair

On a toujours $(a * a) * a = a * (a * a)$

Quelques questions de plus.

Les douze objets en $a * b * c$.

Les douze nombres sont	$a*(b*c)$	$(a*b)*c$	$a*(c*b)$	$(a*c)*b$
	$b*(c*a)$	$(b*c)*a$	$b*(a*c)$	$(b*a)*c$
	$c*(a*b)$	$(c*a)*b$	$c*(b*a)$	$(c*b)*a$

- Si a, b et c sont tous pairs, ces douze nombres valent tous $a + b + c$.
- Si a, b et c sont tous impairs, ces douze nombres sont égaux à $a.b.c$.
- Si a et b sont pairs et c impair :

$a*(b*c)=a+b+c$	$(a*b)*c=a+b+c$	$a*(c*b)=a+c.b$	$(a*c)*b=(a+c).b$
$b*(c*a)=b+c.a$	$(b*c)*a=(b+c).a$	$b*(a*c)=b+c.a$	$(b*a)*c=b+a+c$
$c*(a*b)=c.(a+b)$	$(c*a)*b=(c.a)+b$	$c*(b*a)=c.(b+a)$	$(c*b)*a=(c.b)+a$

On trouve quand même six valeurs différentes. On donne un exemple :

$2*(6*5)=2+6+5=13$	$(2*6)*5=2+6+5=13$	$2*(5*6)=2+5.6=32$	$(2*5)*6=(2+5).6=42$
$6*(5*2)=6+5.2=16$	$(6*5)*2=(6+5).2=22$	$6*(2*5)=6+5.2=16$	$(6*2)*5=6+2+5=13$
$5*(2*6)=5.(2+6)=40$	$(5*2)*6=(5.2)+6=16$	$5*(6*2)=5.(6+2)=40$	$(5*6)*2=(5.6)+2=32$

Avec deux pairs et un impair, par symétrie des rôles, on retrouve les mêmes cas.

- Si a et b sont impairs et c pair :

$a*(b*c)=a.b.c$	$(a*b)*c=a.b.c$	$a*(c*b)=a.(c+b)$	$(a*c)*b=(a.c)+b$
$b*(c*a)=b.(c+a)$	$(b*c)*a=b.c+a$	$b*(a*c)=b.a.c$	$(b*a)*c=b.a.c$
$c*(a*b)=c+a.b$	$(c*a)*b=(c+a).b$	$c*(b*a)=c+a.b$	$(c*b)*a=(c+b).a$

Ici, six valeurs différentes encore. Un exemple.

$3*(7*2)=3*(14)=42$	$(3*7)*2=21*2=42$	$3*(2*7)=3*9=27$	$(3*2)*7=6*7=42$
$7*(2*3)=7*5=35$	$(7*2)*3=14*3=42$	$7*(3*2)=7*6=42$	$(7*3)*2=21*2=42$
$2*(3*7)=2*21=42$	$(2*3)*7=5*7=35$	$2*(7*3)=2*21=42$	$(2*7)*3=9*3=27$

Au maximum, six valeurs différentes. Trouvé et prouvé.

0 0 Combien l'équation $a * a = n$ d'inconnue a peut elle avoir de solutions (*discuter suivant n*) ?

1 1 Complétez pour que ce script Python se charge de calculer noter loi :

```
def etoile(x, y):
    ....if....
    ....|....
    ....return(...)
```

2 2 La loi $*$ est elle interne sur chacun des ensembles suivants : \mathbb{N} , P , I , $I \cup \{0\}$, $P \cup \{1\}$ où P désigne l'ensemble des nombres pairs et I l'ensemble des nombres impairs.

Pour $2 * a = a * 2$ d'inconnue entière a , on étudie sa forme suivant la parité de a :

cas étudié	équation	solutions	cohérence
a pair	$2 + a = a + 2$	valable pour tout a	a pair
a impair	$2 + a = a.2$	$a = 2$	non, 2 est pair

L'ensemble des solutions se réduit aux nombres pairs : $S = \{2.n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

On fait de même pour $3 * a = a * 3$ d'inconnue entière a .

cas étudié	équation	solutions	cohérence
a pair	$3.a = a + 3$	$a = 3/2$	non, a non entier
a impair	$3.a = a.3$	valable pour tout a	a impair

$$S = \{2.n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

On continue avec $3 * a = a * 2$ d'inconnue entière a .

cas étudié	équation	solutions	cohérence
a pair	$3.a = a + 2$	$a = 1$	non, a non pair
a impair	$3.a = a.2$	$a = 0$	non, a non impair

$$S = \emptyset$$

On continue avec $2 * a = a * 3$ d'inconnue entière a .

cas étudié	équation	solutions	cohérence
a pair	$2 + a = a + 3$	aucune	non, a non pair
a impair	$2 + a = a.3$	$a = 1$	oui

$$S = \{1\}$$

0 0 Combien l'équation $a * a = n$ d'inconnue a peut elle avoir de solutions (*discuter suivant n*) ?

On regarde l'équation $x * x = n$ d'inconnue x et de paramètre n .

cas	x pair	x impair
équation	$2.x = n$	$x^2 = n$
condition sur n	n pair	n impair

• Si n est pair, il ne peut y avoir que des solutions à x pair, égal à $n/2$. Mais alors il faut que $n/2$ soit lui même pair. Par exemple, l'équation $x * x = 2$ n'a pas de solution (*pour x impair, $x * x$ est impair, et pour x pair, on aboutit à $2.x = 2$ soit $x = 1$ qui n'est pas pair...*).

On discute donc suivant n modulo 4 :

$n \bmod 4$	0	1	2	4
	$n/2$		rien	
exemple	$x * x = 12$: solution $6 * 6 = 12$		$x * x = 14$ impossible $2.x = 14$ et x pair ?	

Si n est impair, il ne peut y avoir des solutions qu'à x impair, sous la forme de \sqrt{n} ou $-\sqrt{n}$. Encore faut il que \sqrt{n} soit entier. Et même entier impair.

Par exemple, l'équation $x * x = 7$ n'a pas de solution (*il faudrait résoudre $x^2 = 7$ dans \mathbb{Z}*), l'équation $x * x = 9$ a des solutions : 3 et -3.

n multiple de 4	$S = \{n/2\}$
n pair non multiple de 4	$S = \emptyset$
n de la forme $(2.k + 1)^2$	$S = \{-2.k - 1, 2.k + 1\}$
n impair mais pas en $(2.k + 1)^2$	$S = \emptyset$

♣ 0 ♣ Complétez pour que ce script Python se charge de calculer noter loi :

```
def etoile(x, y):
....if....
....|....
....return(...)
```

On crée une procédure qui prend deux variables x et y et retourner quelquechose à la fin (c'est $x * y$). On va devoir faire un test de parité.

Surtout, on évite le test de calculette du type `int(x/2)==x/2` qui passe par un chemin bien compliqué qui nécessite des calculs numériques alors qu'il suffit de lire le dernier chiffre du nombre x (surtout qu'il est codé en binaire par l'ordinateur).

Pour tester si x est pair, on regarde si `x%2` vaut 0 ou 1 (on rappelle que `a%b` est a modulo b).

```
def etoile(x, y):
....if x%2 == 0:
.....etoi = x+y
....else:
.....etoi = x*y
....return(etoi)
```

On pourra, si on est plus évolué dans l'art de la programmation, commencer par tester si x et y sont des entiers.

♣ 0 ♣ La loi $*$ est elle interne sur chacun des ensembles suivants : \mathbb{N} , P , I , $I \cup \{0\}$, $P \cup \{1\}$ où P désigne l'ensemble des nombres pairs et I l'ensemble des nombres impairs.

On commence par l'ensemble des nombres pairs. Si a et b sont pairs, alors $a * b$ est égal à $a + b$ car a est pair, et $a + b$ est bien pair.

On poursuit avec l'ensemble des nombres impairs. Si a et b sont impairs, alors $a * b$ est égal à $a.b$ car a est impair, et $a.b$ est bien resté pair.

On prend $P \cup \{1\}$. On prend a et b dans cet ensemble et on calcule $a * b$ en étudiant les différents cas

	a pair	$a = 1$
b pair	$a + b$	$1.b$
$b = 1$	$a + 1$	1

La case $b + 1$ pose problème. On construit un contre-exemple 2 et 1 sont dans $P \cup \{1\}$, mais $2 * 1$ n'y est plus.

	a impair	$a = 0$
b impair	$a.b$	$0 + b$
$b = 0$	$a.0$	$0 + 0$

On termine avec $I \cup \{0\}$ et on dresse encore un tableau

Dans tous les cas, on est encore dans notre ensemble.

J'ai oublié l'ensemble des entiers naturels ? Si a et b le sont, alors $a + b$ et $a.b$ le sont. La loi $*$ est interne sur \mathbb{N} .

54

Prouvez : $\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) + 2.\text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$. Pardon ? Il manque un terme ? Oui, c'est à vous de le retrouver.

On nomme α , β , γ et δ les trois arctangentes en jeu.

Les formules habituelles donnent $\tan(\alpha + \beta) = \frac{11}{23}$ et $\tan(2.\gamma) = \frac{7}{24}$ et même $\tan(\alpha + \beta + 2.\gamma) = \frac{17}{19}$.

On poursuit : $\tan\left(\frac{\pi}{4} - (\alpha + \beta + 2.\gamma)\right) = \frac{1}{18}$.

On résume : $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) + 2.\text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right)\right) = \frac{1}{18}$.

On va donc (pro)poser naturellement $\text{Arctan}\left(\frac{1}{18}\right)$.

On prouve proprement maintenant (synthèse) :

$$\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) + 2 \cdot \text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{18}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Le second membre a pour tangente 1.

Le premier membre a pour tangente $\frac{\frac{17}{19} + \frac{1}{18}}{1 - \frac{17}{19} \cdot \frac{1}{18}}$, ce qui fait 1.

Les deux mesures angulaires ont la même tangente. Elles sont égales... modulo π .

Mais chaque terme de la somme $\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) + 2 \cdot \text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{18}\right)$ se majore par $\frac{\pi}{6}$.

La somme est entre 0 et $\frac{5\pi}{6}$.

Et sur cet intervalle, un seul angle a pour tangente 1.

◦55◦

Vrai ou faux :

a	$\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2, (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$
b	$\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2, (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$
c	$\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$
d	$\exists a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}^2, (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$

a	$\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2, (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$ Vrai. On prend $a = b = 0$ par exemple. mais plein d'autres sont possibles. comme $a = 0$ et $b = \pi/2$.
b	$\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2, (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$ Faux. Contre-exemple $a = 0$ et $b = \pi$.
c	$\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$ Vrai. pour a donné, il suffit de prendre $b = a$. Ou même $b = a + \pi/2$ pour avoir « Faux implique... »
d	$\exists a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}^2, (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$ Faux.

Pour le d si un tel a existait, il suffirait de prendre $b = a + 2\pi$ pour avoir une contradiction dans l'implication.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists b (= a + 2\pi) \in \mathbb{R}^2, (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists b (= a + 2\pi) \in \mathbb{R}^2, (\sin(a) = \sin(b)) \text{ et } (a \neq b)$$

◦56◦

Vrai ou faux :

a	$\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 2) \Rightarrow (x^2 \geq 4)$
b	$(\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 2) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 4)$

Les deux sont vraies. mais pas pour les mêmes raisons.

La première est une belle implication. On se donne x quelconque, et si il est plus grand que 2, alors son carré dépasse 2.

La seconde est vraie car du type « Faux implique ce qu'on veut ».

On a donc le droit d'écrire $(\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 4)$.

C'est tout aussi logique. Au sens pur du terme.

◦57◦

Montrez $\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\text{Arcsin}(x)}{2}$ pour tout réel x de $[-1, 1[$.

On définit $x \mapsto \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ et $x \mapsto \frac{\pi}{4} + \frac{\text{Arcsin}(x)}{2}$.

On calcule leurs dérivées sur $] -1, 1[$ (domaine de définition commun).

On trouve qu'elles sont égales.

On calcule leurs valeurs en 0. On trouve $\frac{\pi}{4}$ pour les deux.

Bon, elles sont égales.

Comment dériver $x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$:

x	\rightarrow	$\frac{1+x}{1-x}$	\rightarrow	$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	\rightarrow	$\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$
	homographie		racine		arctangente	
	$\frac{2}{(1-\dots)^2}$		$\frac{1}{2\sqrt{\dots}}$		$\frac{1}{1+(\dots)^2}$	
	$\frac{2}{(1-x)^2}$		$\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$		$\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2}$	

Le produit $\frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \times \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2}$ donne $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ après des calculs simples mais propres.

Sinon, il y a un argument caché en posant $\theta = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$.

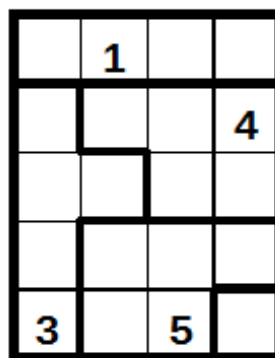
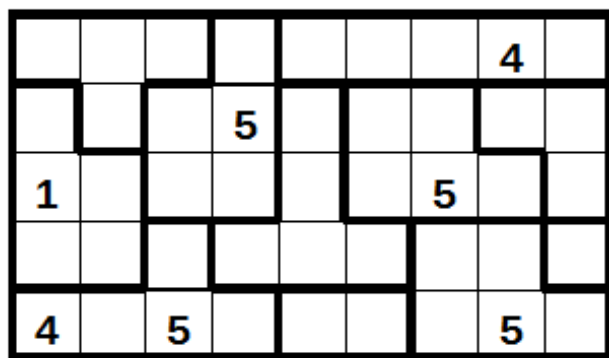
On a alors $\tan(\theta) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ et θ est entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

On calcule alors $\cos(2\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)} = \frac{1 - \frac{1+x}{1-x}}{1 + \frac{1+x}{1-x}} = -x$.

On déduit $\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = x$.

On surveille bien l'intervalle, et on peut identifier : $2\theta - \frac{\pi}{2} = \operatorname{Arcsin}(x)$. Et c'est (mine de rien) la formule attendue.

Un colleur préférera cette méthode.



On rappelle :
 $-3 \leq 1 \leq 2$. Qu'obtenez-vous en élevant cette inégalité au carré comme le font certains élèves ?

◦58◦

Tectonic est un jeu développé depuis quelques années maintenant. Il s'agit de compléter une grille. La règle : une maison de taille n contient les entiers de 1 à n . Deux cases voisines ne peuvent pas contenir la même valeur. Une première grille résolue vous permet de comprendre. Et ensuite, c'est à vous

On ne passe pas de $-3 \leq 1 \leq 2$ à $(-3)^2 \leq 1^2 \leq 2^2$.

L'application $x \mapsto x^2$ n'est pas croissante sur \mathbb{R} .

Elle l'est juste sur $[0, +\infty[$.

La bonne formule sera dans le cours (et vos copies) : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$.

1	2	4	2	1	2	5	4	3
4	3	1	5	4	3	1	2	1
1	2	4	3	1	2	5	4	3
5	3	1	2	5	3	1	2	1
4	2	5	3	1	2	4	5	3

4	1	2	3
2	3	5	4
1	4	1	2
5	2	3	4
3	1	5	1

◦59◦

Calculez $\int_0^{10} [t].dt$. La notation $[t]$ désigne la partie entière de t .

On dit « merci Chasles », et on découpe en chaque entier.

$$\int_0^{10} [t].dt = \int_0^1 [t].dt + \int_1^2 [t].dt + \dots + \int_9^{10} [t].dt = \sum_{k=0}^9 \int_k^{k+1} [t].dt$$

On calcule :

$$\int_0^{10} [t].dt = \int_0^1 0.dt + \int_1^2 1dt + \dots + \int_9^{10} 9.dt = \sum_{k=0}^9 \int_k^{k+1} k.dt$$

On calcule chaque intégrale « aire d'un rectangle de largeur 1 » :

$$\int_0^{10} [t].dt = 0 + 1 + \dots + 9 = \sum_{k=0}^9 k$$

Par une formule toute prête : $\int_0^{10} [t].dt = 45$.

Résolvez $\int_0^x [t].dt = 15$ d'inconnue réelle positive x .

Le raisonnement précédent nous dit ce qu'il advient si on arrête l'intégrale en une abscisse entière.

$$\int_0^n [t].dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} [t].dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} k.dt = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n.(n-1)}{2}$$

(oh le joli escalier !).

On a d'ores et déjà $\int_0^6 [t].dt = 15$.

On a une solution.

Mais est ce la seule ?

Aucun autre entier ne convient.

Mais un réel ?

Toutefois, si on prend x plus grand que 6, on a

$$\int_0^x [t].dt = \int_0^6 [t].dt + \int_6^x [t].dt = 15 + \int_6^x [t].dt > 15$$

Et si on prend x plus petit que 6, on a cette fois

$$\int_0^x [t].dt = \int_0^6 [t].dt + \int_6^x [t].dt = 15 - \int_x^6 [t].dt < 15$$

La subtilité est quand même : il y a une solution avec x négatif, en sachant que la fonction intégrée est négative, mais l'intervalle dans le mauvais sens !

A-t-on : $\forall t \in \mathbb{R}, [2.t] = 2.[t]$?

Il y a certes des x pour lesquels c'est vrai.

Mais ce n'est pas vrai pour tous (la négation de \forall est \exists).

Il suffit d'un contre-exemple tel que $x = \frac{1}{2}$.

A-t-on : $\exists t \in \mathbb{R}, [-t] = -[t]$?

Cette fois, c'est juste « en existe-t-il un » ? La réponse est « oui ». Par exemple 0.

Ou même tous les entiers, mais un \exists emple suffit !

En revanche, on n'a pas du tout $\forall t \in \mathbb{R}, [-t] = -[t]$.

Un non entier suffit pour avoir le contre-exemple.

A-t-on : $\forall t \in \mathbb{R}, [t + \pi] = [t + 3]$?

Non. Encore un contre-exemple qui par adjonction de 3, 14 et des poussières nous fait passer à l'entier bien supérieur.

Par exemple : $[0, 9 + \pi] = [4, 14..] = 4$ et $[0, 9 + 3] = [3, 9] = 3$.

A-t-on : $\exists t \in \mathbb{R}, [t + \pi] = [t] + [\pi]$?

Remercions encore 0 pour son rôle exemplaire. Ou même un entier.

A-t-on : $\forall t \in \mathbb{R}, [t + [t]] = 2.[t]$?

On essaye avec x entier. C'est bon.

Et avec x demi-entier, comme 2,5. C'est encore bon.

On essaye avec des trucs plus vicieux comme e . Encore bon.

Ça n'est pas une preuve, mais on se dit que ça doit marcher.

Et pour ce type de problème, le mieux est d'introduire des notations.

t donné quelconque, on pose $t = n + d$ avec n dans \mathbb{Z} et d dans $[0, 1[$ (en fait, n est la partie entière de t et d sa partie fractionnaire).

On calcule $t + [t] = (n + d) + n = 2.n + d$. C'est un réel de partie entière $2.n$ (et de partie fractionnaire d).

On a donc $[t + [t]] = 2.n = 2.[t]$.

A-t-on : $\forall t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}, [t + [-t]] = -1$?

Un teste avec un non entier : $t = 3,2$:

$$[3,2 + [-3,2]] = [3,2 + (-4)] = [-8,8] = -1$$

Traitons le cas général avec les notations $t = n + d$ avec $n = [t]$ (entier) et $d = t - [t]$ (réel de $]0, 1[$).

On a alors $-t = -n - d = -n - 1 + (1 - d)$.

On reconnaît un entier et un réel de $]0, 1[$. On a donc $[-t] = -n - 1$.

On passe cette fois à $t + [-t] = (n + d) + (-n - 1) = -1 + d$.

C'est un réel de partie entière -1 .

On répond donc « vrai ».

Et on regrette le temps où un « exemple bien choisi » tenait lieu de preuve.

◦60◦

♥ L'équation $x^2 + b.x + c = 0$ d'inconnue réelle x admet pour racines $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$. Calculez $\tan(\alpha + \beta)$ (si elle existe...).

Rappel : $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour x hors de $\left\{ \frac{2.k+1}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, et $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a).\tan(b)}$ tant que tout ceci existe.

Inutile de résoudre l'équation. On connaît la somme des racines : $\tan(\alpha) + \tan(\beta) = -b$
le produit des racines : $\tan(\alpha).\tan(\beta) = c$

On effectue : $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha).\tan(\beta)} = \frac{-b}{1 - c} = \frac{b}{c - 1}$

◦61◦

Quelques questions (légèrement adaptées) du plan (examen nord-américain de début de lycée), normalement sous forme de Q.C.M., quarante items en quarante minutes :

- Vous avez acheté trois chemises dans une boutique pour un prix moyen de 8 euros ; les deux premières étaient à 15 euros les deux. Quel était le prix de la troisième ?
- L'effectif de l'École Nationale de Technologie Urbaine et Biotechnologie Endocrinienne est cette année de 1260 élèves, ce qui représente une hausse de cinq pour cent par rapport à l'an dernier. Quel était effectif l'an dernier ?
- Le petit dessin (d'une sorte de nœud papillon) était fourni, je vous l'indique : deux segments parallèles de même sens $[A ; B]$ et $[E ; D]$ (pas forcément de même longueur) ; (AE) coupe (BD) en C . On donne : $ABC = 40$, $CED = 60$. Que vaut BCE ?
- L'entier 5.2^a a exactement huit diviseurs entiers positifs. Que vaut a ?
- Quand deux droites se coupent à 90 degrés, faut-il les désinfecter à l'alcool à angle droit ?

Pour les chemises, vous avez donc dépensé 24 euros. La dernière vaut donc 9 euros.

Notant N l'effectif de l'an dernier, on a $(1 + 0.05) \times N = 1260$.

L'effectif était de 1 200 élèves.

Les diviseurs de $2^a \cdot 5$ sont

1	2	4	...	2^a
5	2.5	4.5	...	$2^a \cdot 5$

a vaut 3.

◦62◦

♥ Que signifient :

α	β	γ
$\forall (a, b) \in A^2, a = b$	$\forall (a, b) \in A^2, a \neq b$	$\forall b \in A, \exists a \in A, a = b$
δ	ε	φ
$\exists a \in A, \forall b \in A, a = b$	$\exists a \in A, \exists b \in A, a \neq b$	$\forall b \in A, \exists a \in A, a \neq b$

A est un ensemble, la réponse concerne donc A .

Attention, l'ensemble vide vérifie toutes les propriétés en \forall .

A est vide ou n'a qu'un élément	A est vide	tous les ensembles vérifient ça
$\forall (a, b) \in A^2, a = b$	$\forall (a, b) \in A^2, a \neq b$	$\forall b \in A, \exists a \in A, a = b$
$\exists a \in A, \forall b \in A, a = b$	$\exists a \in A, \exists b \in A, a \neq b$	$\forall b \in A, \exists a \in A, a \neq b$
A est de cardinal 1, c'est $\{a\}$	A est au moins de cardinal 2	A est au moins de cardinal 2... ou vide

◦63◦

Donnez le domaine de définition de $x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ et sa dérivée.

Domaine : $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ (tableau de signes).

Dérivée en séparant $\ln(x-1) - \ln(x+1)$ (ou $\ln(1-x) - \ln(-x-1)$ suivant le domaine) :

On trouve : $x \mapsto \frac{2}{x^2 - 1}$

Exercice à savoir utiliser aussi dans l'autre sens : les primitives de $x \mapsto \frac{2}{x^2 - 1}$ sont simples.

Et celles de $x \mapsto \frac{2 \cdot x}{x^2 - 1}$ aussi, pour une raison encore plus directe.

◦64◦

♥ Quelle est la partie réelle de $\left(\frac{1 + i \cdot \tan(\pi/15)}{1 - i \cdot \tan(\pi/15)}\right)^5$? (simplifiez déjà le contenu de la parenthèse)

Rappel : $\frac{1 + i \cdot \tan(\theta)}{1 - i \cdot \tan(\theta)} = \frac{\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)}{\cos(\theta) - i \cdot \sin(\theta)} = \frac{e^{i \cdot \theta}}{e^{-i \cdot \theta}} = e^{2 \cdot i \cdot \theta}$.

On a donc $\left(\frac{1 + i \cdot \tan(\pi/15)}{1 - i \cdot \tan(\pi/15)}\right)^5 = (e^{2 \cdot i \cdot \pi/15})^5 = e^{2 \cdot i \cdot \pi/3}$.

Sa partie réelle vaut $-\frac{1}{2}$.

◦65◦

♥ Le réel θ de $[0, \pi/2[$ a pour tangente $1/3$. Calculez son sinus et son cosinus.

Son cosinus vaut $\frac{3}{\sqrt{10}}$ (en utilisant $\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$ et en surveillant le signe).

Et son sinus vaut $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (par $\sin = \tan \times \cos$).

◦66◦

Trouvez a et b sachant : $a + b = 15$ et $a^2 + b^2 = 30$.

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & 15 \\ a^2 + b^2 & = & 30 \end{array} \text{ équivaut à } \begin{array}{rcl} a + b & = & 15 \\ a^2 + b^2 & = & 30 \\ a^2 + 2ab + b^2 & = & 225 \end{array} \text{ puis à } \begin{array}{rcl} a + b & = & 15 \\ a^2 + b^2 & = & 30 \\ ab & = & 195/2 \end{array}.$$

a et b sont les deux racines de $X^2 - 15X + \frac{195}{2}$.

On trouve $\frac{15 + i\sqrt{165}}{2}$ et son conjugué. On peut conclure en

$$S = \left\{ \left(\frac{15 + i\sqrt{165}}{2}, \frac{15 - i\sqrt{165}}{2} \right), \left(\frac{15 - i\sqrt{165}}{2}, \frac{15 + i\sqrt{165}}{2} \right) \right\} \text{ une paire de couples.}$$

◦67◦

♥ Montrez qu'il existe une suite de polynômes (P_n) à coefficients entiers vérifiant $\forall n, \tan^{(n)} = P_n(\tan)$.
(juste l'existence, ne tentez pas de trouver une formule explicite !)

On initialise : $P_0 = X, P_1 = 1 + X^2$ puisque $\tan^{(0)} = \tan$ et $\tan' = 1 + \tan^2$.

Pour un entier n donné quelconque, on suppose qu'on peut écrire $\tan^{(n)}(\theta) = P_n(\tan(\theta))$ pour tout θ , et on redérive (tout est dérivable ici) :

$$\tan^{(n+1)}(\theta) = P'_n(\tan(\theta)) \cdot \tan'(\theta) = P'_n(\tan(\theta)) \cdot (1 + \tan^2(\theta)).$$

On pose donc $P_{n+1}(X) = P'_n(X) \cdot (1 + X^2)$ et on dit que c'est bien un polynôme.

L'existence est prouvée par récurrence, et la formule ci dessus permet de les calculer de proche en proche.

◦68◦

♥ Calculez $\int_2^3 \frac{\log_x(2)}{x} dx$.

Cette fois, l'application est $x \mapsto \frac{\ln(2)}{x \cdot \ln(x)}$. Et on a mine de rien une forme en $\frac{u'}{u}$ avec $u = \ln$.

On intègre en $x \mapsto \ln(\ln(x))$ et on trouve $\ln(2) \cdot (\ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2)))$

◦69◦

♥ Qui est le plus grand ? $3^{\ln(2)}$ ou $2^{\ln(3)}$?

Ils sont égaux. Calculez leur logarithme.

◦70◦

Que pensez vous de : • \cos est paire, donc pour tout $x, \cos(-x) = \cos(x)$
• $\cos(x)$ est pair, donc x est congru à $\pi/2$ modulo π .

\cos est paire. Au féminin. En tant qu'application.

En revanche, $\cos(x)$ est un réel.

Si on dit qu'il est pair, c'est que c'est un entier. Et la seule solution est $\cos(x) = 0$.

ceci implique que x est de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec k entier.

Gagné.

◦71◦

♥ Justifiez : $\int_0^\pi \frac{\sin(\theta) \cdot d\theta}{1 + \cos^2(\theta)} = \frac{\pi}{2}$.

L'existence ne pose pas de problème. Ensuite, on a une forme en $\frac{u'}{1 + u^2}$.

$$\int_0^\pi \frac{\sin(\theta) \cdot d\theta}{1 + \cos^2(\theta)} = \left[-\operatorname{Arctan}(\cos(\theta)) \right]_0^\pi = -(\operatorname{Arctan}(-1) - \operatorname{Arctan}(1))$$

Il faut évidemment connaître déjà Arctan et sa dérivée...

◦72◦

Vrai ou faux :

a	$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1$	$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$	e
b	$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 0$	$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 1$	f
c	$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ pair} \Rightarrow n! \text{ pair}$	$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ impair} \Rightarrow n! \text{ impair}$	g
d	$\forall n \in \mathbb{N}, n! \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$	$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! \text{ impair} \Rightarrow n! \text{ impair}$	h

Les preuves sont directes, ou reposent sur des contre-exemples.

non : $x = 0,5$	$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1$	$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$	non : -2
oui : $x^2 \geq 0$ toujours vrai	$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 0$	$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 1$	oui : seul 0
non : 0	$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ pair} \Rightarrow n! \text{ pair}$	$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ impair} \Rightarrow n! \text{ impair}$	non : 5
non : 3	$\forall n \in \mathbb{N}, n! \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$	$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! \text{ impair} \Rightarrow n! \text{ impair}$	oui : seul 0

◦73◦

♡ Calculez $(x \mapsto x^a)'$ (a positif fixé) et $(a \mapsto x^a)'$ (x positif fixé).

♡ Donnez le maximum de $x \mapsto x^{1/x}$ sur \mathbb{R}^{+*} .

$(x \mapsto x^a)' = (x \mapsto a \cdot x^{a-1})$ classiquement.

$(a \mapsto x^a)' = (a \mapsto e^{a \cdot \ln(x)})' = (a \mapsto \ln(x) \cdot x^a)$ ne pas oublier le logarithme.

On écrit $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$.

Comme l'exponentielle est croissante, le maximum de $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ est atteint quand $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ atteint son maximum. On dérive, on dresse un tableau de variations. le maximum est en e . Et il vaut $\sqrt[e]{e}$ dont on n'a pas grand chose à dire.

◦74◦

♡ Complétez : $e^{i \cdot a} + e^{i \cdot b} = e^{i \cdot (a+b)/2} \cdot (\dots + \dots)$. Prenez la partie réelle et la partie imaginaire. Que retrouvez vous.

On factorise $e^{i \cdot a} + e^{i \cdot b} = e^{i \cdot \frac{a+b}{2} + i \cdot \frac{a-b}{2}} + e^{i \cdot \frac{a+b}{2} - i \cdot \frac{a-b}{2}} = e^{i \cdot \frac{a+b}{2}} \cdot (e^{i \cdot \frac{a-b}{2}} + e^{-i \cdot \frac{a-b}{2}}) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot e^{i \cdot \frac{a+b}{2}}$.

	premier membre		second membre
On identifie les parties des deux membres	Re	$\cos(a) + \cos(b)$	$= \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
	Im	$\sin(a) + \sin(b)$	$= \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Ce sont les formules de transformation de sommes en produits.

On les retrouve aussi en développant $\cos(a) = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) \dots$

◦75◦

♡ On donne $\alpha = \text{Arctan}(2)$. Calculez $\tan(3\alpha)$. Exprimez $\text{Arctan}(2/11)$ à l'aide de α .

On trouve $\tan(2\alpha) = \frac{4}{1-4} = \frac{-4}{3}$ puis $\tan(3\alpha) = \frac{2 - \frac{4}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{2}{11}$.

Mais on n'a pas $3\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{2}{11}\right)$. L'égalité n'a lieu que modulo π .

3α est dans $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (encadrez déjà α) et $\text{Arctan}\left(\frac{2}{11}\right)$ est dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a donc $3\alpha - \pi = \text{Arctan}\left(\frac{2}{11}\right)$

◦76◦

Regroupez en trois familles :

p implique q	p donc q	p est condition nécessaire et suffisante de q
si p alors q	il faut avoir q pour avoir p	p est une condition suffisante pour q
p car q	il suffit d'avoir q pour avoir p	p est une condition nécessaire pour q
p donc q	les solutions de l'équation p sont des solutions de q	pour avoir p il faut avoir q
sans p , pas de q	pour avoir p il faut et il suffit d'avoir q	p seulement si q
p si q	p si et seulement si q	p a besoin de q

p implique q	p donc q	
si p alors q	il faut avoir q pour avoir p	p est une condition suffisante pour q
		pour avoir p il faut avoir q
p donc q	les solutions de l'équation p sont des solutions de q	
		p seulement si q
		p a besoin de q

ensuite

q implique p		
p car q	il suffit d'avoir q pour avoir p	p est une condition nécessaire pour q
sans p , pas de q		
p si q		

et enfin

p équivalent à q		p est condition nécessaire et suffisante de q
	pour avoir p il faut et il suffit d'avoir q	
	p si et seulement si q	

◦77◦

Démontrez par récurrence : $\prod_{k=1}^n k^k \cdot k! = (n!)^{n+1}$ pour tout n .

Et sans récurrence ?

On note P_n la propriété $\prod_{k=1}^n k^k \cdot k! = (n!)^{n+1}$.

On initialise avec P_0 : d'un côté un produit vide et de l'autre $(0!)^1$: il y a égalité.

Et même avec P_1 : d'un côté le produit vaut juste 1 et de l'autre $(1!)^2$ n'en est pas loin non plus.

Supposons, pour un entier n donné, qu'on a bien

$$\prod_{k=1}^n k^k \cdot k! = (n!)^{n+1}$$

On passe au rang $n+1$ dans le membre de gauche, puisque c'est lui le plus compliqué :

$$\prod_{k=1}^{n+1} k^k \cdot k! = \left(\prod_{k=1}^n k^k \cdot k! \right) \cdot (n+1)^{n+1} \cdot (n+1)!$$

On remplace par hypothèse de rang n :

$$\prod_{k=1}^{n+1} k^k \cdot k! = \left((n!)^{n+1} \right) \cdot (n+1)^{n+1} \cdot (n+1)!$$

On fait entrer $(n+1)^{n+1}$ dans la grande parenthèse :

$$\prod_{k=1}^{n+1} k^k \cdot k! = \left((n!) \cdot (n+1) \right)^{n+1} \cdot (n+1)! = \left((n+1)! \right)^{n+1} \cdot (n+1)!$$

et on retrouve bien $\left((n+1)! \right)^{n+1+1}$.

Sinon, je vous laisse réfléchir à l'explication ci dessous

<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>5</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td></td><td></td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>.</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>						5					4	4				3	3	2			2	2	2	2	.	1	1	1	1	1	<table><tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>.</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	5	5	5	5	5	.	4	4	4	4			3	3	3				2	2					1						<table><tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1
					5																																																																																							
				4	4																																																																																							
			3	3	2																																																																																							
		2	2	2	2																																																																																							
.	1	1	1	1	1																																																																																							
5	5	5	5	5	.																																																																																							
4	4	4	4																																																																																									
3	3	3																																																																																										
2	2																																																																																											
1																																																																																												
5	5	5	5	5	5																																																																																							
4	4	4	4	4	4																																																																																							
3	3	3	3	3	2																																																																																							
2	2	2	2	2	2																																																																																							
1	1	1	1	1	1																																																																																							
là, c'est $\prod_{k=1}^n k!$ en colonnes	et là $\prod_{k=1}^n k^k$ en lignes	et là, finalement $(n!)^{n+1}$																																																																																										