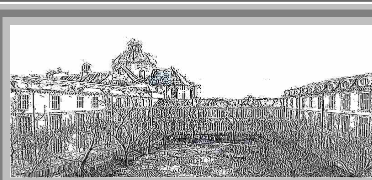
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 25 septembre
M.P.S.I.2



2023 2024

TD03

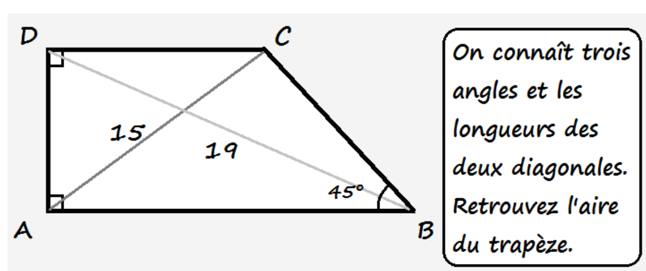
◦0◦ ♣ Un professeur un peu pervers a défini la loi suivante sur $\mathbb{N}$: $a * b = \left\{\begin{array}{lll} a+b & si & a \leqslant b \\ a \times b & sinon & \end{array}\right|$. Montrez que cette loi n'est ni commutative, ni associative. Donnez son neutre à gauche (ou « ses neutres à gauche » ?. Est-il neutre à droite ?
Calculez $a*(a*(a*(a\dots*a))\dots)$ (n termes) et $((\dots(a*a)*a)\dots)*a$ (n termes aussi).
Avec dix nombres 1, neuf symboles $*$ et des parenthèses, quel est le plus grand nombre que vous puissiez obtenir (mieux que $((1*1)*(1*(1*1)))*(1*(1*((1*1)*1))))$ par exemple).
Peut on avoir $a*5 = b*5$ avec a différent de b ?
Peut on avoir $5*a = 5*b$ avec a différent de b ? Peut on avoir $a*5 = b*5$ avec a différent de b ?

Une loi de composition[1] *est dite*
commutative si $\forall (a,b),\ a*b = b*a$ *(comme l'addition, la multiplication, mais pas la soustraction, ni l'exponentiation)*
associative si $\forall (a,b,c),\ (a*b)*c = a*(b*c)$*, comme l'addition, la multiplication, mais toujours pas les autres*

◦1◦ ♡ On définit : $a*b = \binom{a+b}{b}$ *(coefficient binomial)*. Cette loi est elle interne sur $\mathbb{N}$? Est elle commutative ? Est elle associative ? Y a-t-il un neutre ? Y a-t-il un élément absorbant ? Résolvez l'équation $10*a = 43$.

◦2◦ ♡ On pose $a = Arctan(1/5)$ et $b = Arctan(1/239)$. Calculez $\tan(2.a)$, puis $\tan(4.a)$ et enfin $Arctan(4.a-b)$.
Concluez $\pi = 16.a - 4.b$ (formule de Machin).
Montrez pour tout x : $Arctan(x) = \int_0^x \frac{1-t^{4.n}}{1+t^2}.dt + \int_0^x \frac{t^{4.n}}{1+t^T}.dt$.
Montrez : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \frac{1-t^{4.n}}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.t^{2.k}$.
Déduisez : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \left|Arctan(x) - \sum_{k=0}^{2.n-1}\frac{(-1)^k.x^{2.k+1}}{2.k+1}\right| \leqslant \frac{x^{4.n+1}}{4.n+1}$.
Montrez : $Arctan(a) \simeq \sum_{k=0}^{2.n-1}\frac{(-1)^k}{(2.k+1).5^{2.k+1}}$ à 10^{-8}près.
Calculez π à 10^{-7} près grâce à la formule de Machin.

◦3◦ Sur la trapèze semi-rectangle suivant, on connaît les longueurs des deux « diagonales » ($AC = 15$ et $BD = 19$) ; retrouvez son aire (piste : Pythagore deux fois, soustraction, petit triangle isocèle).



Quel est l'exposant de 13 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de
$\prod_{k=0}^{16}\binom{16}{k}$ et $\sum_{k=0}^{16}\binom{16}{k}$.

◦4◦ Vrai ou faux :
Dans $\mathbb{Z}$, pour être un multiple de 12, il faut être un multiple de 4 ou de 3.
Dans le plan, un triangle qui a trois angles droits est équilatéral.
Sur la sphère, un triangle qui a trois angles droits est équilatéral.

◦5◦ ♡ Résolvez $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ d'inconnue complexe z.

---

1. *c'est à dire « un truc qui à partir de deux nombres en calcule un nouveau, comme l'addition, la soustraction, la division, l'exponentiation ou que sais je encore)*

◦6◦ ♡ Montrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ \Big((\cos(x) \in \mathbb{Q})\ \Rightarrow\ (\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n.x) \in \mathbb{Q})\Big)$.

A-t-on $\forall x \in \mathbb{R},\ \Big((\cos(x) \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n.x) \in \mathbb{Z})\Big)$.

A-t-on $\forall x \in \mathbb{R},\ \Big((\cos(x) \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n.x) \in \mathbb{Q})\Big)$.

Six personnes sur cinq ne comprennent rien aux nombres rationnels.

◦7◦ ♡ Résolvez le système $\left\{\begin{array}{ccccc} 2.\cos(x) & + & 2.\cos(y) & = & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 2.\cos(2.x) & + & 2.\cos(2.y) & = & 1 \end{array}\right.$ d'inconnues réelles x et y.

◦8◦ ♡ Résolvez $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 7 \\ x^2 & + & y^2 & = & 29 \end{array}\right.$ d'inconnues réelles x et y.

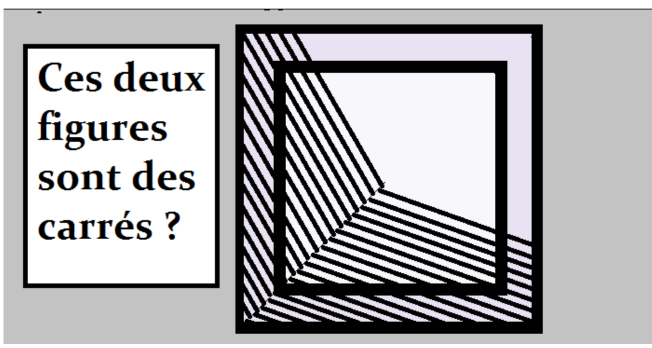
Résolvez $\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 7 \\ a^3 & + & b^3 & = & 973 \end{array}\right.$ d'inconnues réelles a et b.

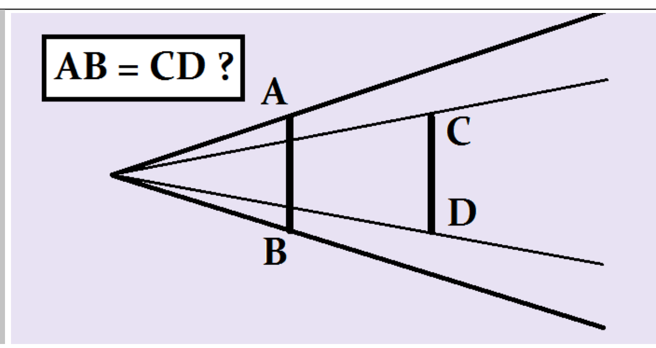
Lu dans une thèse de médecine : C'est avec de la peine qu'ils ont eu leur fils. La jeune femme, pendant l'accouchement, haussait le ton. - L'obstétricien s'occupe mensuellement de quelques sottes. - Les obstétriciens de Pretoria préfèrent mettre les blanches au monde. - Les bébés de la Tartare sont splendides. - Conçu rue de la Paix. A la maternité, j 'ai vu une femme qui accouchait en riant. - Avant qu'il les berce ou qu'il les pèse, le gynécologue tient à embrasser le papa des bébés. Le gynécologue lui a tâté l'humérus. - Le gynécologue va monter pour examiner votre cas. - La gynécologue admet que les histoires d'ovules excitent sa verve car elle dit à son époux : « votre pull me chatouille jusqu'aux ovaires ! ».

◦9◦ On écrit $a\mathbb{V}b$ pour dire que l'élève a a voté pour l'élève b aux élections de délégués de $MPSI2$. Quantifiez les propositions suivantes :
* tous les élèves ont voté / * l'élève e a été élu à l'unanimité / * l'élève e a été élu à la majorité / * certains élèves ont voté pour eux même / * personne n'a voté pour b / * aucun élève ayant voté pour e n'a voté pour ε.

◦10◦ Résolvez $|a+i.b|^2 = a^2+b^2$ d'inconnues a et b dans $\mathbb{C}$ (indication : factorisez par $(a+i.b)$).

◦11◦ Les élèves doivent résoudre l'équation $\tan(\theta/2) = 2$.
Le premier trouve $\theta = 2.Arctan(2)$.
Le second écrit $\tan(\theta) = \dfrac{2.2}{1-(2)^2}$ par les formules en arc moitié. Il trouve $Arctan(-4/3)$.
Qui a raison ?

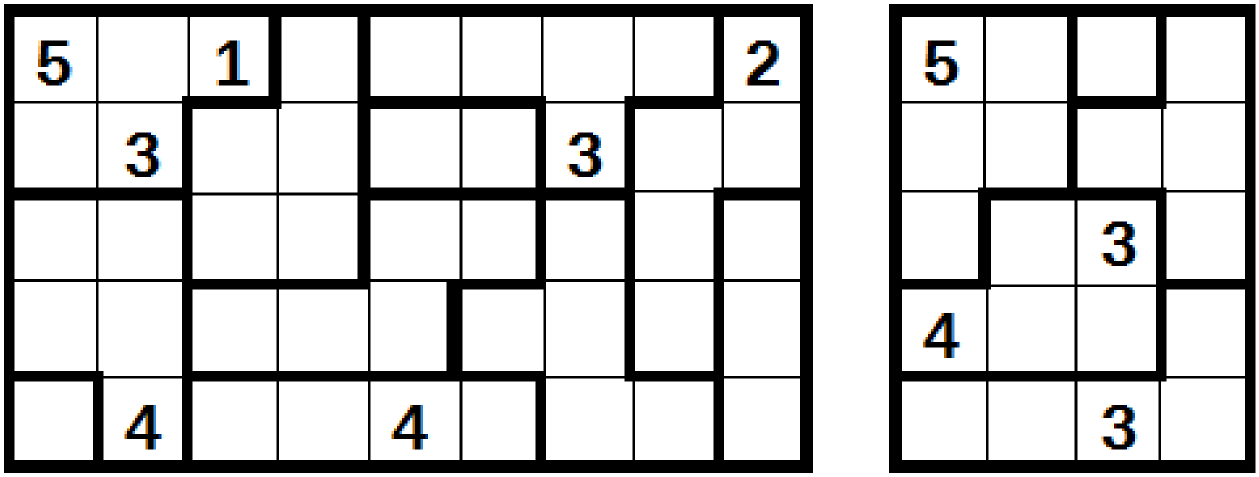




◦12◦ ♣ Vous donnez des cours à un élève de Terminale. Il a naïvement écrit $\cos(3.x) = \cos^3(x)$. Prouvez lui qu'il a tort.
Mais tout à coup, vous vous souvenez que ses parents vous payent cher. Trouvez alors toutes les valeurs de x pour lesquelles sa formule est valable, et faites la somme de ces valeurs de x sur $[-13.\pi;\ 13.\pi]$.

La semaine suivante, il a écrit dans un grand effort $\cos(3.x) = 3\times\cos(x)$. Cette fois encore, pour faire plaisir à sa sœur à qui vous espérez donner des cours de biologie expérimentale, trouvez le nombre de solutions entre 0 et $6.\pi$, et faites la somme de ces solutions.

Encore une semaine passe, et cette fois, il écrit $3\times\cos(3.t) = cos^3(t)$. Décidément. Mais son grand frère a des gros muscles et vous regarde avec animosité (ou au contraire avec lubricité), alors faites encore un effort : le nombre de valeurs de t entre 0 et $6.\pi$ pour lesquelles c'est vrai, et leur somme.



∘13∘

∘14∘ ♡ Calculez ce cardinal : $Card\{\{1,\ 2\}\cap\{2,\ 5\},\ \{2,\ 3\}\cup\{4,\ 5\},\ \emptyset,\ \{2,\ 3\}\cap\{4,\ 5\}\}$.

∘15∘ ♡ Résolvez $x^3 - y^3 = 999$ dans $\mathbb{N}^2$.
Qu'est ce qui change dans $\mathbb{Z}^2$?

∘16∘ `Retrouvez les stations de métro (et R.E.R.) dont voici les anagrammes` *`(Ouest)`* `:`
Pendu atrophié. Facho en vue. Parle du poème. Humain à réinventer. Joli canard éventré.

∘16∘ Trouvez les deux coefficients a et b vérifiant $\dfrac{1}{1+X^2} = \dfrac{a}{i-X} + \dfrac{b}{i+X}$.
Calculez alors $\left(x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}\right)^{(n)}$ (et si vous dérivez $x \longmapsto \dfrac{1}{(i-x)^2}$ en $x \longmapsto -\dfrac{-2.(i-x)}{(i-x)^4}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{(i-x)^3}$ en $x \longmapsto -\dfrac{-3.(i-x)^2}{(i-x)^6}$, je vous renie, vous méritez au mieux de réussir le bac, peut être avec mention assez bien, gagnée grâce à la biologie).
Calculez $Arctan^{(n)}(0)$ pour tout n.

∘17∘ Pour tout angle θ convenable, exprimez $\tan(2.\theta)$, $\tan(3.\theta)$, $\tan(4.\theta)$ et $\tan(3.\theta)+\tan(4.\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$.

Déduisez que les $\tan(k.\pi/7)$ pour k de 1 à 6 sont les racines du polynôme $\boxed{X^6 - 21.X^4 + 35.X^2 - 7}$ noté P.

Déduisez $\tan\left(\dfrac{\pi}{7}\right).\tan\left(\dfrac{2.\pi}{7}\right).\tan\left(\dfrac{3.\pi}{7}\right) = \sqrt{7}$.

Déduisez par l'absurde que $\tan(\pi/7)$ est irrationnel.

Le réel $\tan^2(\pi/7)$ est il rationnel ?

∘18∘ ♡ Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, on a $\forall(a,b,c)\in I^3,\ (a=b \text{ et } b=c) \Rightarrow (a=c)$.
Mais quels sont ceux pour lesquels on a $\forall(a,b,c)\in I^3,\ (a=b \text{ et } b=c) \Leftrightarrow (a=c)$?

∘19∘ Calculez $\displaystyle\int_0^1 2^x.3^{-x}.4^x.5^{-x}.dx$.

∘20∘ ♡ L'homographie h a pour dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-3)^2}$ et vérifie $h(1) = 1$. Pouvez vous la retrouver ? Calculez $h\circ h\circ h\circ h(1)$ et $h\circ h\circ h\circ h(2)$.

∘21∘ Calculez module et argument de $(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+\ldots+(1+i)^{10}$.

∘22∘ ♡ Qui est le plus grand : 3^e ou e^3 ? *(calculatrice interdite, étude de* $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ *judicieuse).*

∘23∘

	Un Q.C.M. de Roger Mansuy	`Vrai`	`Faux`
`a`	Soit $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\Re e(\lambda z) = \lambda \Re e(z)$.		
`b`	Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors, $\Re e(1/z) = -\Re e(z)$.		
`c`	Soit $z \in \mathbb{C}$. La partie réelle de iz est la partie imaginaire de z.		
`d`	Soit $x \in \mathbb{R}$. Le conjugué de $\exp(ix)$ est $\exp(-ix)$.		
`e`	Soit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Le module de $\exp(z)$ est $\exp(\lvert z \rvert)$.		
`f`	Soit $z \in C$. Le conjugué de l'exponentielle de z est l'exponentielle de $\overline{z}$.		
`g`	Soit z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$. Alors, $\lvert z_1 - z_2 \rvert \leq \lvert z_1 \rvert - \lvert z_2 \rvert$.		
`h`	Soit z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$. Alors, $\lvert z_1 - z_2 \rvert \leqslant \lvert z_1 \rvert + \lvert z_2 \rvert$.		
`i`	Le complexe $-j$ est racine de $X^2 - X + 1$.		
`j`	Si m ne divise pas n, $U_m \bigcap U_n = \{1\}$.		

Roger Mansuy n'est pas que un auteur de chroniques mathématiques dans La Recherche, n'est pas que l'auteur d'un cahier de Prépas entre Sup et Spé, n'est pas que organisateur de Mathématic Park, de « Mathématiques en mouvement », n'est pas que tweeter compulsif en curiosités mathématiques, n'est pas que prof de maths à Saint-Louis et ancien prof d'informatique à Louis-le-Grand... il a aussi été colleur certaines années en MP à Charlemagne... et* U_n*désigne l'ensemble des racines* n^{iemes} *de l'unité.*

∘24∘ ♡ Montrez : $X^4+1 = (X^2 - \sqrt{2}.X+1).(X^2+\sqrt{2}.X+1)$.

♡ Trouvez a, b, c et d pour avoir $\dfrac{1}{X^4-1} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{X-i} + \dfrac{d}{X+i}$.

♡ Trouvez α, β, γ et δ pour avoir $\dfrac{1}{X^4+1} = \dfrac{\alpha.X+\beta}{X^2-\sqrt{2}.X+1} + \dfrac{\gamma.X+\delta}{X^2+\sqrt{2}.X+1}$.

♠ Calculez

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^4+1}$	$\displaystyle\int_0^1 \frac{t.dt}{t^4+1}$	$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3.dt}{t^4+1}$

∘25∘ ♡ Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto 2.Arcsin(\cos(x))$.
Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto Arcsin(2.\cos(x))$.
Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto Arcsin(2.\cos(2.x))$.

∘26∘ ♡ Résolvez $Arctan(x) + \dfrac{\pi}{6} = Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{\pi}{3}$ d'inconnue réelle x *(ne passez pas tout de suite à la tangente).*

∘27∘ ♡ Justifiez : $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(\theta).d\theta}{4+\cos^2(\theta)} = Arctan(1/2)$ et $\displaystyle\int_0^\pi \frac{2.\sin(\theta).d\theta}{4-\cos^2(\theta)} = \ln(3)$. (oui, un signe a changé)

∘28∘ Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto Arcsin\left(\frac{x-3}{.3.x+1}\right)$.

∘29∘ Calculez $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(\ln(x))}{x}.dx$ et $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(\ln(x)).\ln(x)}{x}.dx$.

∘30∘ Dérivez $x \longmapsto Arcsin\left(\dfrac{2.x}{1+x^2}\right)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Expliquez.

∘31∘ ♡ Résolvez $Arctan(x) + Arctan(x+2) = \dfrac{13.\pi}{4}$ *(mais ne tombez pas dans le piège).*

∘32∘ Simplifiez $5.Arctan\left(\dfrac{1}{7}\right) + 2.Arctan\left(\dfrac{3}{79}\right)$.

∘33∘ ♡ Justifiez : $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(\theta).d\theta}{4+\cos^2(\theta)} = Arctan(1/2)$ et $\displaystyle\int_0^\pi \frac{2.\sin(\theta).d\theta}{4-\cos^2(\theta)} = \ln(3)$.

∘34∘ Complétez $Arctan(3) + Arcsin(*) = 3.\dfrac{\pi}{4}$ en passant par exemple à la tangente de chaque côté.

∘35∘ Vrai ou faux :
a - si $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont irrationnels, alors $\cos(2.\alpha)$ est irrationnel.
b - si $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont rationnels, alors $\cos(2.\alpha)$ est rationnel.

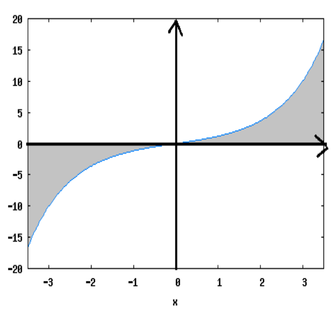
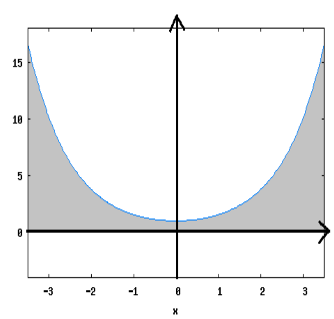
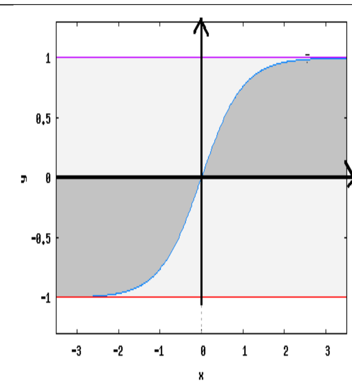
c - si $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont irrationnels, alors $\cos(2.\alpha)$ ou $\sin(2.\alpha)$ est irrationnel.
d - si $\cos(2.\alpha)$ est irrationnel, alors $\cos(\alpha)$ est irrationnel.
e - si $\cos(2.\alpha)$ ou $\sin(2.\alpha)$ est irrationnels, alors $\cos(\alpha)$ ou $\sin(\alpha)$ est irrationnel.

∘36∘ Montrez : $Arctan(k+1) - Arctan(k) = Arctan\Big(\dfrac{1}{1+k+k^2}\Big)$.
Calculez alors $\sum\limits_{k=1}^{n} Arctan\Big(\dfrac{1}{1+k+k^2}\Big)$.

∘37∘ ♡ (a) Résolvez l'équation $\cos(x) + \sin(x) = 1$ d'inconnue réelle x (pensez à $A.\cos(x-\varphi)$ avec A et φ bien choisis).
(b) Résolvez $\cos(x) + \sin^2(x) = 1$ d'inconnue réelle x (pensez à tout ramener en $\cos(x)$).
(c) Résolvez $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ d'inconnue réelle x.
(d) Résolvez $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1$ d'inconnue réelle x (pensez à comparer $\cos^3(x)$ et $\cos^2(x)$ puis $\sin^3(x)$ et $\sin^2(x)$ puis sommez).
(e) Résolvez $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1$ d'inconnue réelle x.

∘38∘ ♡ Existe-t-il une homographie *(application de la forme* $x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$*)* dont les deux points fixes soient 2 et 3 ?
Et si on ajoute valant 4 en 1 ?
Et si on ajoute plutôt « tend vers 5 en $+\infty$" ?
Et si on ajoute pltôt « tendant vers $+\infty$ en 5 ?

∘39∘ ♡ On définit : $g = \theta \longmapsto \ln\Big(\tan\Big(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4}\Big)\Big)$ *(fonction de Guderman)*. Montrez que c'est une bijection de $]-\pi/2,\ \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$. Explicitez sa bijection réciproque.
Dérivez g et g^{-1}.
On définit les fonctions hyperboliques :

$sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$th(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
		

Montrez : $\boxed{sh(g(\theta)) = \tan(\theta)}$ $\boxed{ch(g(\theta)) = 1/\cos(\theta)}$ $\boxed{th(g(\theta)) = \sin(\theta)}$

∘39∘ ♡ Décomposez en éléments simples $\dfrac{X^2+X+1}{X^3 - 2.X^2 - 11.X + 12}$ (c'est à dire « crivez le sous la forme $\dfrac{\alpha}{X-a} + \dfrac{\beta}{X-b} + \dfrac{\gamma}{X-c}$.

∘40∘ ♡ Calculez $I = \int_0^1 \dfrac{t}{(1+t^2)^2}.dt$, $J = \int_0^1 \dfrac{t}{(1+t^2)^2}.t.dt$ *(par parties)*, $K = \int_0^1 \dfrac{t^2+1}{(1+t^2)^2}.dt$ et enfin $L = \int_0^1 \dfrac{1}{(1+t^2)^2}.dt$.

∘41∘ Et c'est parti pour un gros sujet sur l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et de e qui permettent de définir sur $\mathbb{N}$ des relations d'ordre inhabituelles.

I∼0) Pour tout réel x, on note $[x]$ sa partie entière et $dec(x)$ sa partie décimale (dite aussi partie fractionnaire), caractérisées par $[x] \in \mathbb{Z}$, $[x] \leqslant x < [x]+1$, $dec(x) = x - [x]$ ou même $x = [x] + dec(x)$ avec $[x] \in \mathbb{Z}$ et $dec(x) \in [0,\ 1[$.
Un élève affirme pour tout couple de réels $(x,\ y)$: $dec(x+y) = dec(x) + dec(y)$. Montrez qu'il a tort.
I∼1) Un élève affirme pour tout réel x $dec(-x) = -dec(x)$. Montrez qu'il a tort.
I∼2) Un élève affirme pour tout couple de réels $(x,\ y)$: $dec(x+y) \leqslant dec(x) + dec(y)$. Montrez qu'il n'a pas tort.

II∼0) α est un irrationnel fixé. Pour tout couple d'entiers naturels $(a,\ b)$, on pose $a \ltimes b$ si et seulement si on a $dec(a.\alpha) \leqslant dec(b.\alpha)$. Montrez que c'est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$.

Réflexive	Antisymétrique	Transitive
$\forall a,\ a \ltimes a$	$\forall (a,b),\ (a \ltimes b \text{ et } b \ltimes a) \Rightarrow a = b$	$\forall (a,b,c),\ (a \ltimes b \text{ et } b \ltimes c) \Rightarrow a \ltimes c$

Laquelle de ces propriétés serait perdue si α était un rationnel *(une affirmation sans preuve est de la politique, pas des mathématiques...)* ?
Montrez que α et $dec(\alpha)$ définissent le même ordre $\ltimes$.

III∼0) On prend $\alpha = \sqrt{2}$. Prouvez

x	$\sqrt{2}$	$2.\sqrt{2}$	$3.\sqrt{2}$	$4.\sqrt{2}$	$5.\sqrt{2}$	$6.\sqrt{2}$	$7.\sqrt{2}$
$[x]$	1	2	4	5	7	8	9

(et pas juste en disant $\sqrt{2} \simeq 1,41421$).
III∼1) Classez les entiers de 0 à 7 pour la relation $\ltimes$.

III∼2) On définit les suites (p) et (q) par $p_0 = q_0 = 1$ et $p_{n+1} = p_n + 2.q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$. Montrez que ce sont deux suites d'entiers naturels strictement croissantes.
III∼3) Exprimez $p_{2.n+1}$ et $q_{2.n+1}$ à l'aide de $p_{2.n}$et $q_{2.n}$.
III∼4) Exprimez $p_{2.(n+1)}$ et $q_{2.(n+1)}$ à l'aide de $p_{2.n}$ et $q_{2.n}$.
III∼5) Montrez pour tout n : $(p_{2.n})^2 < 2.(q_{2.n})^2$, $(p_{2.n+1})^2 > 2.(q_{2.n+1})^2$ et $p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1} = 1$.
III∼6) Déduisez $p_{2.n} < q_{2.n}.\sqrt{2} < p_{2.n} + \dfrac{p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1}}{q_{2.n+1}}$.
III∼7) Quelle est la valeur de $dec(q_{2.n}.\sqrt{2})$?
III∼8) Déduisez que la suite $(q_{2.n}.\sqrt{2})$ est strictement décroissante pour $\ltimes$.
III∼9) Retrouvez que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

III∼10) Écrivez un script Python qui pour n donné retourne deux liste : celle des p_k pour k de 0 à n et celle des q_k pour k de 0 à n. Par exemple, pour n égal à 5 elle devra répondre $[1, 3, 7, 17, 41, 99]$, $[1, 2, 5, 12, 29, 70]$.

IV∼0) On prend $\alpha = 5.\sqrt{2}$. J'ai trouvé les valeurs approchées suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$5.\sqrt{2}.n$	0	7.07	14.14	21.21	28.28	35.35	42.43	49.50	56.57	63.64	70.71	77.78	84.85	91.92

Un élève en déduit rapidement : la suite (n) des entiers est visiblement croissante pour l'ordre $\ltimes$. Montrez qu'il a tort.
IV∼1) Existe-t-il α vérifiant "(n) est croissante pour $\ltimes$" ?

V∼0) On prend $\alpha = e$ *(base des logarithmes népériens)*. Classez pour la relation $\ltimes$ les nombres 10^k pour k de 0 à 10.

V∼1) Montrez pour tout entier naturel n : $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$ *(deux mots clefs à puiser dans le cours rien que pour cette question)*.
V∼2) Montrez que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ est une somme d'entiers *(on le notera A_n)*.
V∼3) Montrez $dec(n!.e) = \displaystyle\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$ *(qu'on pourra noter I_n, $n \geqslant 2$)*.
V∼4) Montrez que la suite $(n!)$ est strictement décroissante pour la relation $\ltimes$.
V∼5) Déduisez que e est effectivement irrationnel.

VI∼0) *A toutes fins utiles : $e \simeq 2.718281828459045$ à 10^{-15} près.* Si vous avez l'âme poétique, je vous rappelle que pour retenir les décimales de π, on peut faire appel à la phrase "QUE J'AIME À FAIRE CONNAÎTRE CE NOMBRE UTILES AUX SAGES, IMMORTEL ARCHIMÈDE" dans laquelle il suffit de compter le nombre de lettres de chaque mot *(convention : pour 0 un mot de dix lettres)*. Alors, trouvez moi une phrase pour e.

que	j'	aime	à	faire	connaître	ce	nombre	utile	aux	sages	immortel	Archimède
3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9