LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 25 septembre
M.P.S.I.2

2023 2024

TD03

◦0◦

♣ Un professeur un peu pervers a défini la loi suivante sur $\mathbb{N}$: $a * b = \left\{ \begin{array}{lcl} a+b & si & a \leqslant b \\ a \times b & sinon & \end{array} \right|$. Montrez que cette loi n'est ni commutative, ni associative. Donnez son neutre à gauche.
Calculez $a * (a * (a * (a \ldots * a)) \ldots)$ (n termes) et $((\ldots (a * a) * a) \ldots) * a$ (n termes aussi).
Avec dix nombres 1, neuf symboles $*$ et des parenthèses, quel est le plus grand nombre que vous puissiez obtenir (mieux que $((1 * 1) * (1 * (1 * 1))) * (1 * (1 * ((1 * 1) * 1))))$ par exemple).
Peut on avoir $a * 5 = b * 5$ avec a différent de b ?
Peut on avoir $5 * a = 5 * b$ avec a différent de b ?

Une loi de composition[a] *est dite*
commutative si $\forall (a, b),\ a * b = b * a$ *(comme l'addition, la multiplication, mais pas la soustraction, ni l'exponentiation)*
associative si $\forall (a, b, c),\ (a * b) * c = a * (b * c)$*, comme l'addition, la multiplication, mais toujours pas les autres*

a. c'est à dire « un truc qui à partir de deux nombres en calcule un nouveau, comme l'addition, la soustraction, la division, l'exponentiation ou que sais je encore)

Il peut certes y avoir des cas où l'on a $a * b = b * a$. Mais il suffit d'un cas où ça ne marche pas pour tout casser.
$2 * 3 = 2 + 3 = 5$ alors que $3 * 2 = 3 \times 2 = 6$.
Il ne faut pas hésiter à prendre des valeurs.

On y va au hasard :

$(1 \quad *2) \quad *3$		$1* \quad (2 \quad *3)$
$3 \quad *3$		$1 \quad *5$
6		6
raté, il y a égalité		
$(2 \quad *1) \quad *3$		$2* \quad (1 \quad *3)$
$2 \quad *3$		$2 \quad *4$
5		6
là c'est un contre-exemple		

◦1◦

♡ On définit : $a * b = \binom{a+b}{b}$ *(coefficient binomial)*. Cette loi est elle interne sur $\mathbb{N}$? Est elle commutative ? Est elle associative ? Y a-t-il un neutre ? Y a-t-il un élément absorbant ? Résolvez l'équation $10 * a = 43$.

Interne : oui. On obtient bien un entier.

Commutative : oui. On se donne a et b et on compare $\binom{a+b}{b}$ et $\binom{b+a}{a}$. Ils sont égaux par la formule $\forall (n, k = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Associative : $(1 * 2) * 3 = \binom{3}{2} * 3 = 3 * 3 = \binom{6}{3} = 20$

$$1 * (2 * 3) = 1 * \binom{5}{3} = 1 * 10 = \binom{11}{10} = \binom{11}{1} = 11$$

On veut ensuite n tel que $\binom{a+n}{n}$ soit égal à a pour tout a. On le cherche par condition nécessaire (analyse) et on fera la synthèse si l'élément semble bien neutre.
n doit être neutre vis à vis de 0 : $\binom{n}{n} = 0$ c'est déjà raté. Il n'y a pas de neutre.

L'élément absorbant b vérifierait $\binom{a+b}{b} = b$ pour tout a. En particulier : $\binom{b}{b} = b$. Ceci donne $b = 1$.
Mais ensuite $\binom{1+1}{1} = 2$ et pas $1 * 1 = 1$ comme attendu. Il n'y a pas d'élément absorbant.

On résout ensuite $\binom{a+10}{10} = 43$. Mais 43 est premier. Il ne pourra intervenir dans un coefficient binomial qu'à partir de la ligne d'indice 43. Mais les coefficients binomiaux de ces lignes sont « grands » (ceux des extrémités valent 1,

les suivants valent n supérieur ou égal à 43, et ensuite ils sont encore plus grands...
Il n'y a pas de solution.
L'équation $1 * a = 43$ avait pour solution 42.

◦2◦

On pose $a = Arctan(1/5)$ et $b = Arctan(1/239)$. Calculez $\tan(2.a)$, puis $\tan(4.a)$ et enfin $\tan(4.a - b)$.
Concluez $\pi = 16.a - 4.b$ (formule de Machin).
Montrez pour tout x : $Arctan(x) = \int_0^x \frac{1 - t^{4.n}}{1 + t^2}.dt + \int_0^x \frac{t^{4.n}}{1 + t^T}.dt$.
Montrez : $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\frac{1 - t^{4.n}}{1 + t^2} = \sum_{k=0}^{2.n-1} (-1)^k.t^{2.k}$.
Déduisez : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\left| Arctan(x) - \sum_{k=0}^{2.n-1} \frac{(-1)^k.x^{2.k+1}}{2.k+1} \right| \leqslant \frac{x^{4.n+1}}{4.n+1}$.
Montrez : $Arctan(a) \simeq \sum_{k=0}^{11} \frac{(-1)^k}{(2.k+1).5^{2.k+1}}$ à 10^{-8}près.
Calculez π à 10^{-7} près grâce à la formule de Machin.

On y va doucement avec la formule $\tan(2.a) = \frac{2.\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$ appliquée deux fois et $\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a).\tan(b)}$.

$$\tan(2.a) = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2.5}{25 - 1} = \frac{5}{12}$$

$$\tan(4.a) = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{10.12}{144 - 25} = \frac{120}{119}$$

Déjà, $\tan(4.a)$ vaut presque 1.

> *Le physicien s'en contentera pour affirmer* $4.a = \frac{\pi}{4}$.
> *Le mathématicien débutant corrigera* $4.a \simeq \frac{\pi}{4}$.
> *Le mathématicien corrigera* $4.a \simeq \frac{\pi}{4}\ [\pi]$.

$$\tan(4.a - b) = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120.1}{119.239}} = \frac{120.239 - 119}{119.239 + 120}$$

Il nous suffit de prouver ensuite $120.239 - 119 = 119.239 + 120$. C'est directe si on simplifie par 119.239.

Et c'est moche si on calcule explicitement $119.239 = 28441$ comme un mauvais livre de (presque) sciences.

Ayant $\tan(4.a - b) = 1$ (vraie égalité), on a $4.a - b = \frac{\pi}{4}\ [\pi]$.

Celui qui part de $\tan(4.a - b) = 1$ et prétend passer à l'arctangente des deux côtés est idiot si ensuite il simplifie $Arctan(\tan(4.a - b))$ en $4.a - b$.

Mais quand même, a est entre 0 et $\frac{\pi}{4}$ puisque c'est l'arctangente d'un élément de $[0,\ 1]$.
Donc $4.a$ est plus petit que π.
On soustrait b qui est positif mais plus petit que $\frac{\pi}{2}$.
Il s'ensuit que $4.a - b$ est entre $4.0 - \frac{\pi}{2}$ et $4.\frac{\pi}{4} - 0$. Et dans cet intervalle, il n'y a que $\frac{\pi}{4}$ qui ait pour tangente 1.

On peut donc conclure

$$4.a - b = \frac{\pi}{4}$$

et multiplier par 4 si on y tient.

C'est dans la partie « encadrement et congruences modulo π » qu'il y a des maths.
Dans la partie calcul initiale, il n'y a que du calcul, comme son nom l'indique.
C'est sur la partie maths que l'on vous jugera.

La formule $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \dfrac{1-t^{4.n}}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.t^{2.k}$ est juste la série géométrique : $1+a+a^2+\ldots+a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ avec $a=-t^2$.

Si vous y tenez, vous prenez vos réflexes de Terminale et vous la démontrez par récurrence sur n.

Je vous fais juste l'hérédité. On suppose pour un n donné quelconque :

$$\frac{1-t^{4.n}}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.t^{2.k}$$

On ajoute $(-1)^{2.n}.t^{2.(2.n)} + (-1)^{2.(n+1)-1}.t^{2.(2.(n+1)+1)}$ (oui, deux termes car on passe de $2.n-1$ à $2.(n+1)-1$, c'est là qu'on va surveiller votre rigueur)

$$(-1)^{2.n}.t^{2.(2.n)} + (-1)^{2.(n+1)-1}.t^{2.(2.(n+1)-1)} + \frac{1-t^{4.n}}{1+t^2} = (-1)^{2.n}.t^{2.(2.n)} + (-1)^{2.(n+1)-1}.t^{2.(2.(n+1)-1)} + \sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.t^{2.k}$$

$$t^{4.n} - t^{4.n+2} + \frac{1-t^{4.n}}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{2.(n+1)-1}(-1)^k.t^{2.k}$$

$$\frac{(t^{4.n}-t^{4.n+2}) + t^2.(t^{4.n}-t^{4.n+2})}{1+t^2} + \frac{1-t^{4.n}}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{2.(n+1)-1}(-1)^k.t^{2.k}$$

$$\frac{1-t^{4.n+4}}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{2.(n+1)-1}(-1)^k.t^{2.k}$$

Et c'est bien la formule demandée.

Je dirai que la preuve par récurrence est déjà ici un très bon test pour vérifier votre capacité à surveiller vos variables, telles que « $2.(2.(n+1)-1)$ ».
Et il permet de voir si vous visualisez bien une somme de 0 à $2.n-1$ et la somme suivante

0	1	2	3	...	2.n-2	2.n-1		
0	1	2	3	...	2.n-2	2.n-1	2.n	2.n+1

La preuve attendue dans un devoir sera donc $\sum_{k=0}^{2.n-1} a^k = \dfrac{1-a^{(2.n-1)+1}}{1-a}$ avec $a=-t^2$.

Mais je vous propose aussi la preuve sans faille et sans récurrence :
On ne va pas prouver $\dfrac{1-t^{4.n}}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.t^{2.k}$ mais $1-t^{4.n} = (1+t^2).\sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.t^{2.k}$.
Il suffit alors de partir du membre de droite et de télescoper [1]

$$(1+t^2).\sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.t^{2.k} = \sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.(t^{2.k}+t^{2.k+2}) = \sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.t^{2.k} - \sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^{k+1}.t^{2.(k+1)})$$

En posant $u_k = (-1)^k.t^{2.k}$ on a alors $\sum_{k=0}^{2.n-1} u_k - \sum_{k=0}^{2.n-1} u_{k+1}$ et elle télescope. Il ne reste que u_0 avec un signe plus et $u_{2.n-1+1}$ avec un signe moins.

La formule $\dfrac{1-t^{4.n}}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.t^{2.k}$ est vraie pour tout t positif. Appliquons la à tous les t entre 0 et x lui aussi positif.
Et intégrons :

$$\int_{t=0}^{x} \frac{1-t^{4.n}}{1+t^2}.dt = \sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.\int_0^x t^{2.k}.dt$$

1. d'ailleurs la formule de la série géométrique se prouve ainsi et jamais par récurrence sauf dans un mauvais livre

en profitant de la linéarité de l'intégrale (l'intégrale de la somme est la somme des intégrales).
On sépare la première intégrale en deux et on remplace $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$par $Arctan(x)$ (c'était quand même ça notre objectif).
On calcule chaque intégrale du second membre (et on ne calcule pas l'intégrale qui reste dans le premier)

$$Arctan(x) - \int_{t=0}^{x} \frac{t^{4.n}}{1+t^2}.dt = \sum_{k=0}^{2.n-1} (-1)^k.\frac{x^{2.k+1}}{2.k+1}$$

On remet dans le bon ordre

$$Arctan(x) - \sum_{k=0}^{2.n-1} (-1)^k.\frac{x^{2.k+1}}{2.k+1} = \int_{t=0}^{x} \frac{t^{4.n}}{1+t^2}.dt$$

Dans la formule attendue $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\left| Arctan(x) - \sum_{k=0}^{2.n-1} \frac{(-1)^k.x^{2.k+1}}{2.k+1} \right| \leqslant \frac{x^{4.n+1}}{4.n+1}$, la valeur absolue ne sert à rien.

Quant à l'intégrale non calculable $\int_0^x \frac{t^{4.n}}{1+t^2}.dt$ on peut quand même la majorer. Le $1+t^2$ au dénominateur est plus grand que 1. On a donc

$$\int_0^x \frac{t^{4.n}}{1+t^2}.dt \leqslant \int_0^x \frac{t^{4.n}}{1+0}.dt = \left[\frac{t^{4.n+1}}{4.n+1}\right]_{t=0}^{x} = \frac{x^{4.n+1}}{4.n+1}$$

Bilan :

$$Arctan(x) \simeq \sum_{k=0}^{2.n-1} \frac{(-1)^k.x^{2.k+1}}{2.k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots - \frac{x^{4.n-1}}{4.n-1}$$

mais on sait même de combien est l'erreur dans cette approximation : l'erreur est majorée par $\frac{x^{4.n+1}}{4.n+1}$ (le terme qu'on aurait écrit ensuite, tiens tiens).

C'est cette formule qui va nous permettre de calculer les différents termes de

$$\pi = 16.Arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4.Arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

avec autant de chiffres derrière la virgule qu'on veut.

C'est ainsi qu'avec $n = 6$, on est sûr d'avoir $Arctan(a) \simeq \sum_{k=0}^{11} \frac{(1)^k.a^{2.k+1}}{2.k+1}$ à 10^{-8} près puisque $\frac{(1/5)^{2.6+1}}{2.6+1}$ est plus petit que 10^{-8}.
On remplace donc $Arctan(1/5)$ par

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{5^3.3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9} - \frac{1}{11.5^{11}} + \frac{1}{13.5^{13}} - \frac{1}{15.5^{15}} + \frac{1}{17.5^{17}} - \frac{1}{19.5^{19}} + \frac{1}{21.5^{21}} - \frac{1}{23.5^{23}}$$

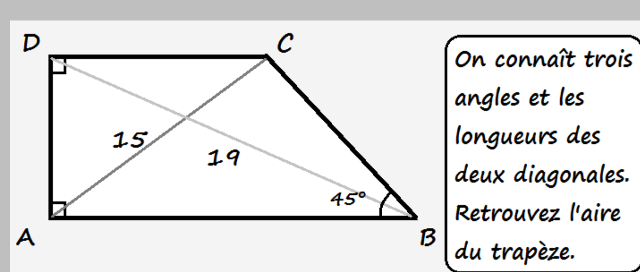
C'est plus léger pour $Arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ car on a a besoin de moins de termes

$$\frac{1}{239} - \frac{1}{239^3.3} + \frac{1}{5.239^5}$$

Bref, le reste n'est qu'application numérique.

Pour en savoir plus :
page Wikipedia John Machin
Vidéo d'Axel Arno

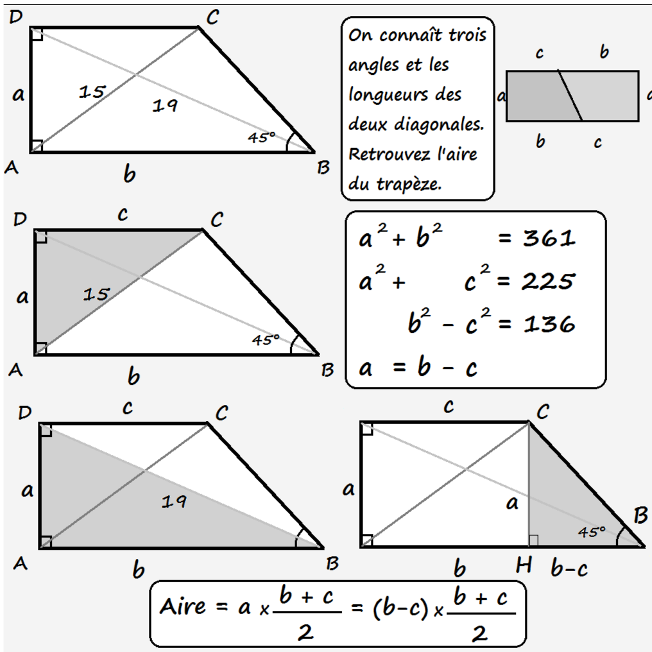
Sur la trapèze semi-rectangle suivant, on connaît les longueurs des deux « diagonales » ($AC = 15$ et $BD = 19$) ; retrouvez son aire (piste : Pythagore deux fois, soustraction, petit triangle isocèle).



Quel est l'exposant de 13 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de
$\prod_{k=0}^{16} \binom{16}{k}$ et $\sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k}$.

◦3◦

Les deux exercices sont sans rapport.
C'est juste pour la mise en page.



On commence par nommer a, b et c les longueurs des trois côtés deux à deux orthogonaux.
Dans le triangle rectangle (DAB), on a $a^2+b^2=19^2$.
Dans le triangle rectangle (CDA), on a $a^2+c^2=15^2$.
On soustrait : $(b-c).(b+c)=136$.

Mais le demi-carré (CHB) (ou triangle rectangle iso-demi-sel) nous renseigne : $a=b-c$.

Or, l'aire d'un trapèze est « hauteur fois moyenne des bases ».
C'est donc ici $a.\dfrac{b+c}{2}$. Ce qui fait $(b-c).\dfrac{b+c}{2}$.
En regroupant $\boxed{Aire = 68}$ (unité ?)

Déjà, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{16}{k}$ vaut 2^{16} (développement de $(1+1)^{16}$ par la formule du binôme). L'exposant de 13 est donc 0.

Regardons ensuite ce produit de $\dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$:

$$\frac{16!}{16!.0!}.\frac{16!}{15!.1!}.\frac{16!}{14!.2!}.\frac{16!}{13!.3!}.\frac{16!}{12!.4!}.\frac{16!}{11!.5!}.\frac{16!}{10!.6!}.\frac{16!}{9!.7!}.\frac{16!}{8!.8!}.\frac{16!}{7!.9!}.\frac{16!}{6!.10!}.\frac{16!}{5!.11!}.\frac{16!}{4!.12!}.\frac{16!}{3!.13!}.\frac{16!}{2!.14!}.\frac{16!}{1!.15!}.\frac{16!}{0!.16!}$$

Dans cette énumération, ne regardons que les termes contenant un facteur 13 (et jamais plus de toutes façons) :

$$\frac{13}{13.1}.\frac{13}{13.1}.\frac{13}{13.1}.\frac{13}{13.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.13}.\frac{13}{1.13}.\frac{13}{1.13}.\frac{13}{1.13}$$

On compte : dix sept au numérateur
huit au dénominateur.
Notre produit contient exactement 17^9 (et c'est même $2^{49}.3^6.5^9.7^8.11^5.13^9$).

◦4◦

Vrai ou faux :
Dans $\mathbb{Z}$, pour être un multiple de 12, il faut être un multiple de 4 ou de 3.
Dans le plan, un triangle qui a trois angles droits est équilatéral.
Sur la sphère, un triangle qui a trois angles droits est équilatéral.

multiple de 12	$\Leftrightarrow$	multiple de 3 et multiple de 4	$\Rightarrow$	multiple de 3 ou multiple de 4

L'assertion « Dans $\mathbb{Z}$, pour être un multiple de 12, il suffit d'être un multiple de 4 ou de 3 » aurait été fausse.

Comme un triangle ne peut pas avoir trois angles droits, on a une implication en « Faux implique quelquechose ». Elle est vraie.

En revanche, sur la sphère, on peut avoir trois angles droits. Partez du Pôle Nord, avancez vers le Sud sur un méridien jusqu'à atteindre l'équateur. Tournez de $\pi/2$ et promenez vous sur un quart d'équateur. Repartez alors par an anglee de $\pi/2$ vers le Nord. Vous suivez un nouveau méridien. Vous arrivez au Pôle Nord. Votre méridien de retour fait un angle drout avec votre méridien de départ. Au total, trois angles droits. Et un triangle équilatéral...

◦5◦

♡ Résolvez $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ d'inconnue complexe z.

On écrit $z=a+i.b$ avec a et b réels. On a alors $e^z = e^a.e^{i.b}$.
On conjugue : $\overline{e^z} = \overline{e^a.e^{i.b}} = \overline{e^a}.\overline{e^{i.b}} = e^a.e^{-i.b} = e^{a-i.n} = e^{\overline{z}}$.

Mais alors, l'équation est vérifiée pour tous les z de $\mathbb{C}$. On a donc $S = \mathbb{C}$.

A suivre.

∘6∘

♡ Montrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ \Big((\cos(x) \in \mathbb{Q}) \ \Rightarrow\ (\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n.x) \in \mathbb{Q})\Big)$.
A-t-on $\forall x \in \mathbb{R},\ \Big((\cos(x) \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n.x) \in \mathbb{Z})\Big)$.
A-t-on $\forall x \in \mathbb{R},\ \Big((\cos(x) \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n.x) \in \mathbb{Q})\Big)$.

Six personnes sur cinq ne comprennent rien aux nombres rationnels.

On se donne x quelconque dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\cos(x)$ est rationnel.
On fait alors une récurrence pour prouver que chaque $\cos(n.x)$ est rationnel.
Par récurrence à doublé hérédité.
On initialise : $\cos(0.x)$ et $\cos(x)$ sont rationnels (l'un est entier, l'autre est l'hypothèse).

Pour un n donné, on suppose $\cos(n.x)$ et $\cos((n-1).x)$ rationnels.
On écrit alors $\cos((n+1).x) = 2.\cos(x).\cos(n.x) - \cos((n-1).x)$.
Le membre de droite est une somme et produit de rationnels, c'est un rationnel.

Plus simple. Pour x donné, on suppose $\cos(x)$ entier.
C'est donc qu'il vaut 1, -1 ou 1.
Mais alors x est de la forme $k.\dfrac{\pi}{2}$ avec k entier bien choisi.
Et pour tout n, $\cos(n.x)$ vaut 1, -1 ou 0 aussi. Sans double hérédité.

Le dernier contient une équivalence. Un sens vient d'être traité.

Dans l'autre, pour x donné, si l'on suppose $(\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n.x) \in \mathbb{Q})$ alors en particulier pour n égal à 1, on a $\cos(x) \in \mathbb{Q}$.

∘7∘

♡ Résolvez le système $\left\{\begin{array}{ccccc} 2.\cos(x) & + & 2.\cos(y) & = & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 2.\cos(2.x) & + & 2.\cos(2.y) & = & 1 \end{array}\right|$ d'inconnues réelles x et y.

Quitte à poser $a = \cos(x)$ et $b = \cos(y)$ ce système devient $\left\{\begin{array}{ccccc} 2.a & + & 2.b & = & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 4.a^2-2 & + & 4.b^2-2 & = & 1 \end{array}\right|$.

On arrange en $\left\{\begin{array}{ccccc} 2.a & + & 2.b & = & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 4.a^2 & +8.a.b & +4.b^2 & = & 5+2.\sqrt{6} \\ 4.a^2 & + & 4.b^2 & = & 5 \end{array}\right|$ puis $\left\{\begin{array}{ccccc} 2.a & + & 2.b & = & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ & 4.a.b & & = & \sqrt{6} \\ 4.a^2 & + & 4.b^2 & = & 5 \end{array}\right|$.

Les deux réels $2.a$ et $2.b$ sont racines de $X^2 - (\sqrt{2}+\sqrt{3}).X + \sqrt{6}$.
Les racines sont évidentes : $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ (somme et produit).

On a donc trouvé (à l'ordre près) : $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos(y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
On trouve une solution $x = \dfrac{\pi}{4}$ et $y = \dfrac{\pi}{6}$.
On vérifie : $\left\{\begin{array}{ccccc} 2.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & + & 2.\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & = & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 2.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & + & 2.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & = & 1 \end{array}\right|$.

Pour $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: $\Big\{\varepsilon.\frac{\pi}{4} + 2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z},\ \varepsilon \in \{-1,\ 1\}\Big\}$
plus digeste que $\Big\{\frac{\pi}{4} + 2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\Big\} \cup \Big\{-\frac{\pi}{4} + 2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\Big\}$.

On termine donc $\boxed{\begin{array}{lll} S_{(x,y)} = & & \Big\{\Big(\varepsilon_1.\dfrac{\pi}{4} + 2.p.\pi,\ \varepsilon_2.\dfrac{\pi}{3} + 2.q.\pi\Big) \Big| (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1,1\}^2,\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\Big\} \\ & \cup & \Big\{\Big(\varepsilon_2.\frac{\pi}{3} + 2.q.\pi,\ \varepsilon_1.\frac{\pi}{4} + 2.p.\pi\Big) \Big| (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1,1\}^2,\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\Big\} \end{array}}$

On a alors $S=\left\{\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)\right\}$ si on n'a rien compris aux maths

$S=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right\}$ si on a encore moins compris les maths

$S=\left\{\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right),\ \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right)\right\}$ si on a un peu mieux compris

$S=\left\{\left(\frac{\pm\pi}{6},\frac{\pm\pi}{4}\right),\ \left(\frac{\pm\pi}{4},\frac{\pm\pi}{6}\right)\right\}$ si on a fait quelques progrès

$S=\left\{\left(\pm\frac{\pi}{6}\ mod\ 2.\pi,\ \pm\frac{\pi}{4}\ mod\ 2.\pi\right),\ \left(\pm\frac{\pi}{4}\ mod\ 2.\pi,\ \pm\frac{\pi}{6}\ mod\ 2.\pi\right)\right\}$ si on a compris mais s'exprime comme un porc

$$S=\begin{array}{l}\left\{\left(\varepsilon_1.\frac{\pi}{6}+2.k..\pi,\ \varepsilon_2.\frac{\pi}{4}+2.p.\pi\right)\mid(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in\{-1,\ 1\}^2,\ (k,\ p)\in\mathbb{Z}^2\right\}\\ \bigcup\left\{\left(\varepsilon_1.\frac{\pi}{4}+2.k..\pi,\ \varepsilon_2.\frac{\pi}{6}+2.p.\pi\right)\mid(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in\{-1,\ 1\}^2,\ (k,\ p)\in\mathbb{Z}^2\right\}\end{array}$$

si on est bon

∘8∘

♡ Résolvez $\left\{\begin{array}{ccccc}x&+&y&=&7\\x^2&+&y^2&=&29\end{array}\right|$ d'inconnues réelles x et y.

Résolvez $\left\{\begin{array}{ccccc}a&+&b&=&7\\a^3&+&b^3&=&973\end{array}\right|$ d'inconnues réelles a et b.

En raisonnant par équivalences et en ambitionnant à chaque fois d'avoir deux nombres dont on connait la somme et le produit :

$$\left\{\begin{array}{ccccc}x&+&y&=&7\\x^2&+&y^2&=&29\end{array}\right|\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cccccc}x&+&y&&=&7\\x^2&+&y^2&+2.x.y&=&49\\x^2&+&y^2&&=&29\end{array}\right|\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cccccc}x&+&y&&=&7\\&&&x.y&=&10\\x^2&+&y^2&&=&29\end{array}\right|$$

x et y sont les deux racines de $X^2-7.X+10$ de racines évidentes 2 et 5. $S_{(x,y)}=\{(2,5),\ (5,2)\}$.

Pour l'autre système, on exploite $a^3+b^3=(a+b).(a^2-a.b+b^2)$:

$$\left\{\begin{array}{ccccc}a&+&b&=&7\\a^3&+&b^3&=&973\end{array}\right|\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccc}a&+&b&=&7\\a^é&+2.a.b&+b^2&=&49\\a^3&+&b^3&=&973\\a^2&-a.b&+b^2&=&139\end{array}\right|\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccc}a&+&b&=&7\\a^é&+2.a.b&+b^2&=&49\\a^3&+&b^3&=&973\\a^2&-a.b&+b^2&=&139\end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccc}a&+&b&=&7\\a^é&+2.a.b&+b^2&=&49\\a^3&+&b^3&=&973\\&3.a.b&&=&-90\end{array}\right|$$

a et b sont les racines de $X^2-7.X-30$, on trouve 10 et -3.

On vérifie pour être sûr de ne pas avoir perdu d'information en route. $\boxed{S_{(a,b)}=\{(-3,10),\ (10,-3)\}}$

Lu dans une thèse de médecine : C'est avec de la peine qu'ils ont eu leur fils. La jeune femme, pendant 1'accouchement, haussait le ton. - L'obstétricien s'occupe mensuellement de quelques sottes. - Les obstétriciens de Pretoria préfèrent mettre les blanches au monde. - Les bébés de la Tartare sont splendides. - Conçu rue de la Paix. A la maternité, j 'ai vu une femme qui accouchait en riant. - Avant qu'il les berce ou qu'il les pèse, le gynécologue tient à embrasser le papa des bébés. Le gynécologue lui a tâté l'humérus. - Le gynécologue va monter pour examiner votre cas. - La gynécologue admet que les histoires d'ovules excitent sa verve car elle dit à son époux : « votre pull me chatouille jusqu'aux ovaires ! ».

Lu dans une thèse de médecine : C'est avec de la peine qu'ils ont eu leur fils. La jeune femme, pendant 1'accouchement, haussait le ton. - L'obstétricien s'occupe mensuellement de quelques sottes. - Les obstétriciens de Pretoria préfèrent mettre les blanches au monde. - Les bébés de la Tartare sont splendides. - Conçu rue de la Paix. A la maternité, j 'ai vu une femme qui accouchait en riant. - Avant qu'il les berce ou qu'il les pèse, le gynécologue tient à embrasser le papa des bébés. Le gynécologue lui a tâté l'humérus. - Le gynécologue va monter pour examiner votre cas. - La gynécologue admet que les histoires d'ovules excitent sa verve car elle dit à son époux : « votre pull me chatouille jusqu'aux ovaires ! ».

∘9∘

On écrit $a\mathbb{V}b$ pour dire que l'élève a a voté pour l'élève b aux élections de délégués de $MPSI2$. Quantifiez les propositions suivantes :
* tous les élèves ont voté / * l'élève e a été élu à l'unanimité / * l'élève e a été élu à la majorité / * certains élèves ont voté pour eux même / * personne n'a voté pour b / * aucun élève ayant voté pour e n'a voté pour ε.

tous les élèves ont voté	$\forall a \in MPSI2,\ \exists b \in MPSI2,\ a\mathbb{V}b.$
	$\forall a \in MPSI2,\ \exists b \in MPSI2 \cup \{\emptyset\},\ a\mathbb{V}b.$ si le vote blanc existe

l'élève e a été élu à l'unanimité	$\forall a \in MPSI2,\ a\mathbb{V}e$; ne pas quantifier e, c'est une donnée
certains élèves ont voté pour eux même	$\exists a \in MPSI2,\ a\mathbb{V}a$
	$\exists (a,\ b) \in MPSI2^2,\ (a\mathbb{V}a)\ et\ (b\mathbb{V}b)\ et\ (a \neq b)$ pour le pluriel
personne n'a voté pour b	$\forall a \in MPSI2,\ not(a\mathbb{V}b)$
aucun élève ayant voté pour e n'a voté pour ε	$\forall a \in MPSI2,\ (a\mathbb{V}e) \Rightarrow not(a\mathbb{V}\varepsilon)$

∘10∘ Résolvez $|a+i.b|^2 = a^2+b^2$ d'inconnues a et b dans $\mathbb{C}$ (indication : factorisez par $(a+i.b)$).

Dans $\mathbb{R}$, on a toujours $|a+i.b|^2 = a^2+b^2$ ($\mathbb{R}\times\mathbb{R} \subset S$).
Sinon, revenons à la définition : $|z|^2 = z.\overline{z}$ donc l'équation est $(a+i.b).\overline{(a+i.b)} = a^2+b^2$.
Mais c'est aussi $(a+i.b).\overline{(a+i.b)} = (a+i.b).(a-i.b)$ (identité remarquable).
On a donc deux possibilités : $a+i.b = 0$ ou $\overline{a}-i.\overline{b} = a-i.b$.
La première donne $b = i.a$ par exemple $a = 1+3.i$ et $b = -3+i$,
on vérifie $|a+i.b| = |1+3.i-3.i-1|^2 = 0$
$a^2+b^2 = (1+3.i)^2+(-3+i)^2 = (1-9+6.i)+(9-1-6.i) = 0$
La seconde donne $a-\overline{a} = i.(b-\overline{b})$. Mais le premier membre est imaginaire pur et le second réel. C'est donc qu'ils sont nuls.
a et b sont réels. Comme prévu.

Rappel : Dans une résolution d'équation, quand vous arrivez à $a.X = a.Y$, ne concluez pas $X = Y$, intéressez vous aussi à $a = 0$.

En fait, écrivez $a.(X-Y) = 0$ et concluez par intégrité : $\begin{array}{ccc} a & = & 0 \\ & ou & \\ X & = & Y \end{array}$.

C'est tellement plus simple ainsi.

∘11∘ Les élèves doivent résoudre l'équation $\tan(\theta/2) = 2$.
Le premier trouve $\theta = 2.Arctan(2)$.
Le second écrit $\tan(\theta) = \dfrac{2.2}{1-(2)^2}$ par les formules en arc moitié. Il trouve $Arctan(-4/3)$.
Qui a raison ?

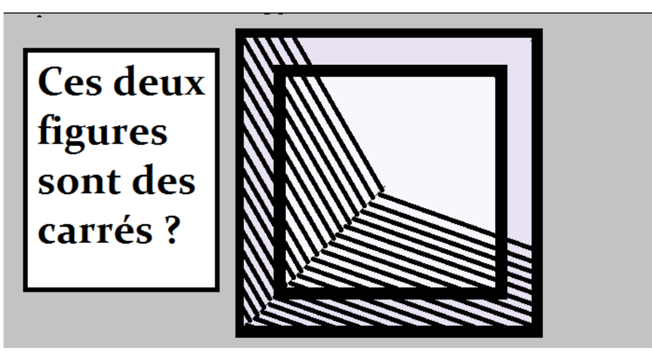
Les deux ont tort. Il manque les congruences.

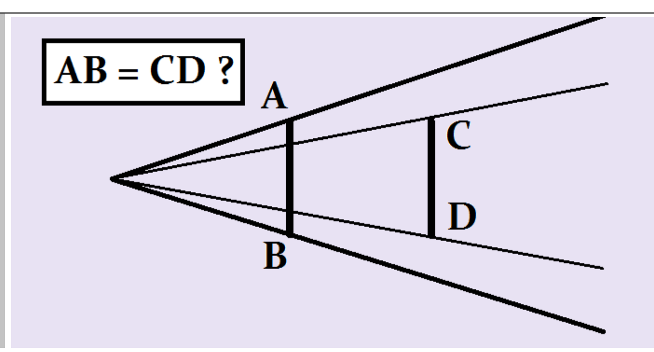
$\tan(\theta/2) = 2$ équivaut à $\dfrac{\theta}{2} = Arctan(2)\ [\pi]$ et donne $S = \{2.Arctan(2)+2.k.\pi\}$.

$\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 2$ implique $\tan(\theta) = \dfrac{4}{1-4}$. Mais c'est une implication, pas une équivalence.
En effet, $\tan(\theta) = -4/3$ peut remonter aussi sur $\tan(\theta/2) = -1/2$.

Ensuite, $\tan(\theta) = -4/3$ donne $\theta = Arctan\left(-\frac{4}{3}\right)+k.\pi$.

Cette équation a deux solutions par intervalle de longueur $2.\pi$ tandis que l'équation initiale n'en avait qu'une.
C'est la faute à la « non équivalence ».





◦12◦

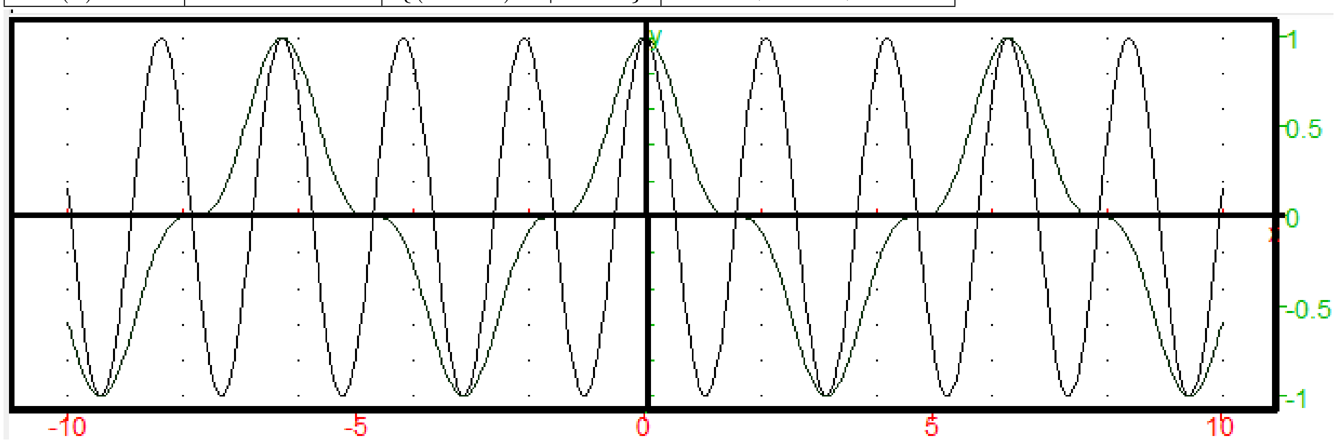
♣ Vous donnez des cours à un élève de Terminale. Il a naïvement écrit $\cos(3.x) = \cos^3(x)$. Prouvez lui qu'il a tort.
Mais tout à coup, vous vous souvenez que ses parents vous payent cher. Trouvez alors toutes les valeurs de x pour lesquelles sa formule est valable, et faites la somme de ces valeurs de x sur $[-13.\pi;\ 13.\pi]$.
La semaine suivante, il a écrit dans un grand effort $\cos(3.x) = 3 \times \cos(x)$. Cette fois encore, pour faire plaisir à sa sœur à qui vous espérez donner des cours de biologie expérimentale, trouvez le nombre de solutions entre 0 et $6.\pi$, et faites la somme de ces solutions.
Encore une semaine passe, et cette fois, il écrit $3 \times \cos(3.t) = cos^3(t)$. Décidément. Mais son grand frère a des gros muscles et vous regarde avec animosité (ou au contraire avec lubricité), alors faites encore un effort : le nombre de valeurs de t entre 0 et $6.\pi$ pour lesquelles c'est vrai, et leur somme.

Dans chacune des situations, on commencera par donner un contre-exemple.
Ensuite, on posera $c = \cos(x)$ et on utilisera la formule (vraie) $\cos(3.x) = 4.c^3 - 3.c$.

La relation $\cos(3.x) = \cos^3(x)$ est erronée en $\dfrac{\pi}{6}$.

La résolution conduit à $4.c^3 - 3.c = c^3$.
On trouve $c.(c^2 - 1) = 0$.
On a trois familles de solutions. On extrait les solutions entre $-13.\pi$ et $13.\pi$.

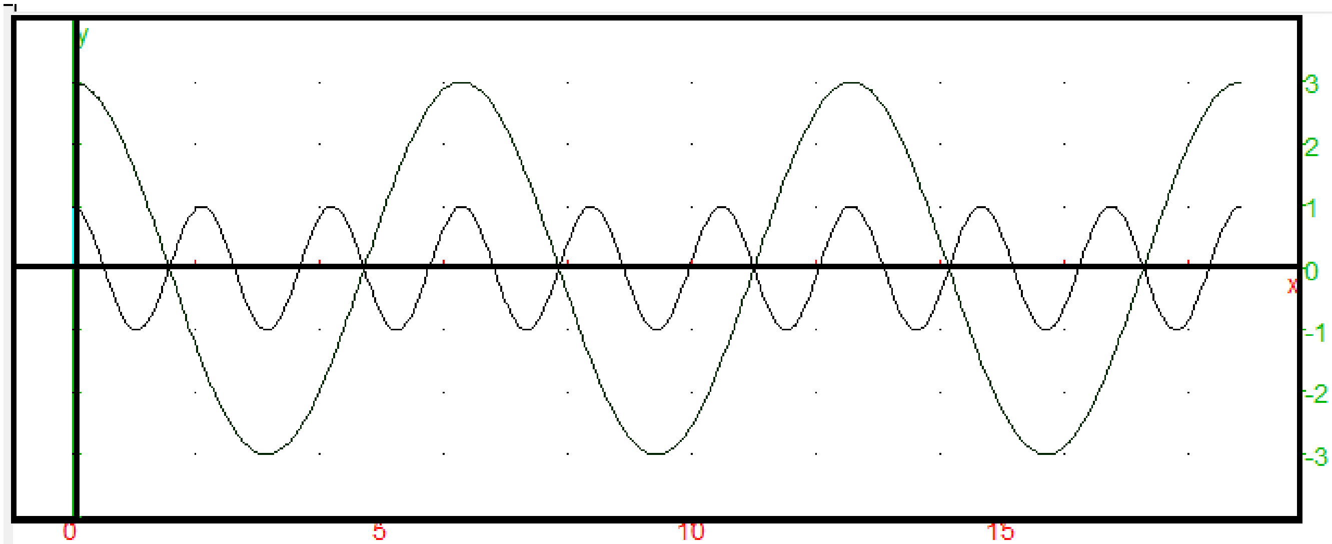
$\cos(x) = 0$	$\dfrac{\pi}{2}$ modulo π	$\left\{\dfrac{\pi}{2} + k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	$-25.\dfrac{\pi}{2}, -23.\dfrac{\pi}{2},...25.\dfrac{\pi}{2}$
$\cos(x) = 1$	0 modulo $2.\pi$	$\{2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$-12.\pi, -10.\pi,...\ 12.\pi$
$\cos(x) = -1$	π modulo $2.\pi$	$\{(2.k+1).\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$-13.\pi, -11.\pi,...\ 13.\pi$



Pour la somme, chaque solution positive a son opposé dans la liste.
La somme est nulle !

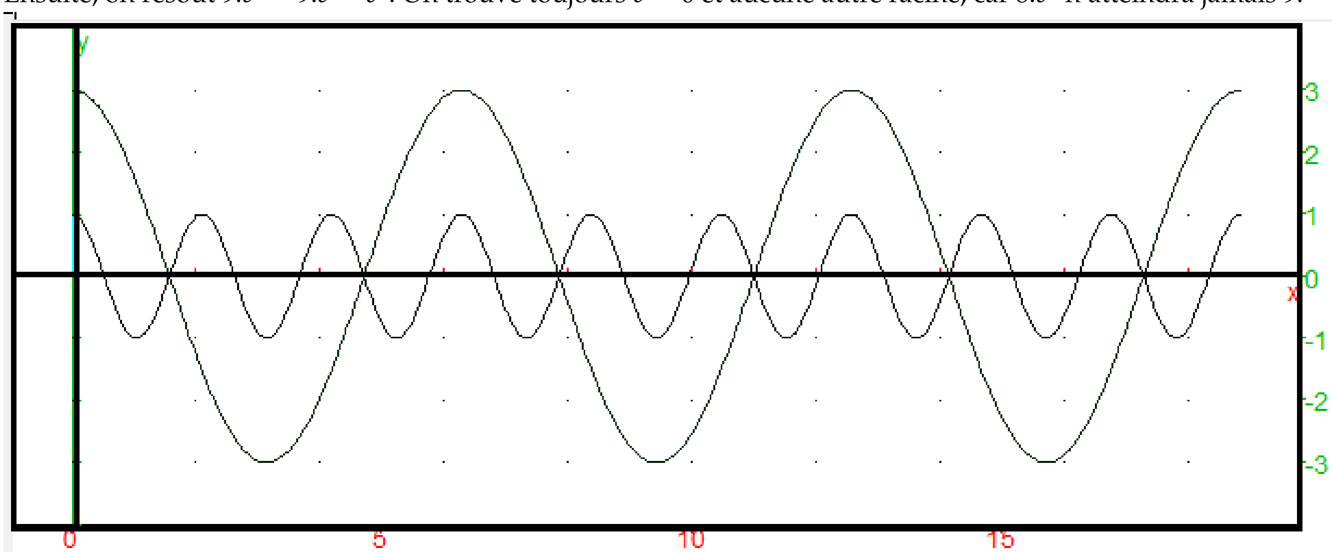
$\cos(3.x) = 3 \times \cos(x)$ est fausse en 0.
On résout $4.c^3 - 3.c = 3.c$.
On factorise en $c.(2.c^2 - 3) = 0$.
La solution $c = 0$ est cohérente.
En revanche, c^2 ne peut pas atteindre la valeur $3/2$ qui est trop grande.

$\cos(x) = 0$	$\dfrac{\pi}{2}$ modulo π	$\left\{\dfrac{\pi}{2} + k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\dfrac{\pi}{2}, 3.\dfrac{\pi}{2},...11.\dfrac{\pi}{2}$

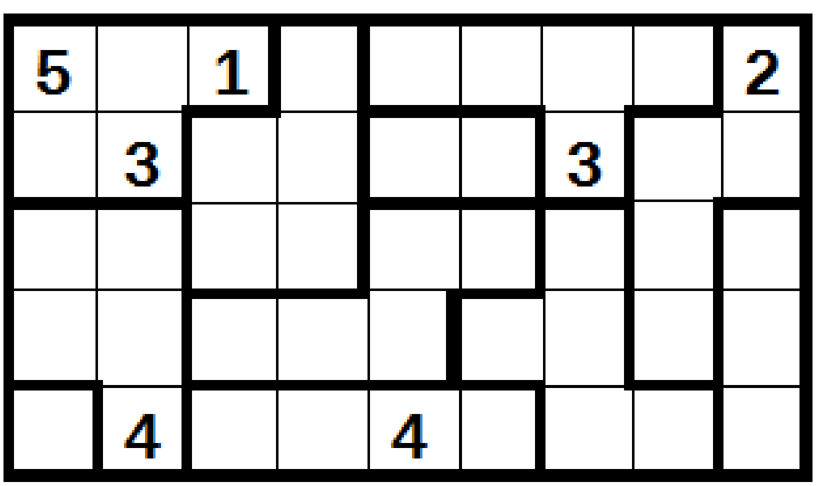


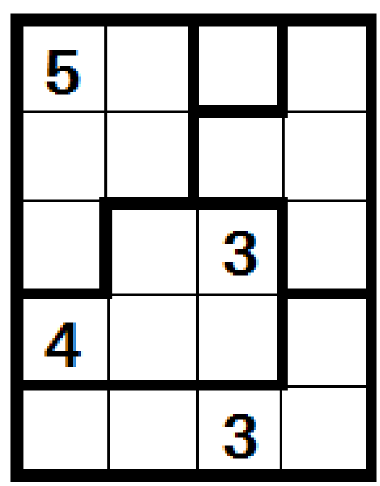
La somme des six racines est $12.\pi$ (en groupant deux à deux par exemple).

Et pour $3 \times \cos(3.t) = cos^3(t)$ c'est encore 0 qui me sert de contre-exemple.
Ensuite, on résout $9.c^3 - 9.c = c^3$. On trouve toujours $c = 0$ et aucune autre racine, car $8.c^2$ n'atteindra jamais 9.



Encore une somme égel à $12.\pi$.





◦13◦

5	4	1	3	4	5	2	1	2
2	3	2	5	2	1	3	4	3
1	5	1	4	3	4	2	1	2
2	3	2	5	1	5	3	5	3
1	4	1	3	4	2	1	4	1

5	3	1	3
1	4	2	4
2	5	3	1
4	1	2	4
2	5	3	1

∘14∘

♡ Calculez ce cardinal : $Card\big\{\{1,\ 2\}\cap\{2,\ 5\},\ \{2,\ 3\}\cup\{4,\ 5\},\ \emptyset,\ \{2,\ 3\}\cap\{4,\ 5\}\big\}$.

$\{1,\ 2\}\cap\{2,\ 5\}=\{2\}$
$\{2,\ 3\}\cup\{4,\ 5\}=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
$\{2,\ 3\}\cap\{4,\ 5\}=\emptyset$
$\big\{\{1,\ 2\}\cap\{2,\ 5\},\ \{2,\ 3\}\cup\{4,\ 5\},\ \emptyset,\ \{2,\ 3\}\cap\{4,\ 5\}\big\}=\Big\{\{2\},\ \{2,3,4,5\},\ \emptyset,\ \emptyset\}$
Cet ensemble (d'ensembles) n'a que trois éléments, car le dernier est cité deux fois.
La réponse est 3.

∘15∘

♡ Résolvez $x^3-y^3=999$ dans $\mathbb{N}^2$.
Qu'est ce qui change dans $\mathbb{Z}^2$?

La clef : $x^3-y^3=(x-y).(x^2+x.y+y^2)$.
Et $999=3^3.37=1\times 999=3\times 333=9\times 111=27\times 37$.
On disjoncte les cas

$x-y=1$	$x-y=3$	$x-y=9$	et	ainsi	de	suite
$x^2+x.y+y^2=999$	$x^2+x.y+y^2=333$	$x^2+x.y+y^2=111$				

On reporte la première équation dans la seconde, on cherche des solutions entières.

```
Sinon for x in range(1000) :
    ....for y in range(1000) :
    ........if x*x*x-y*yùy==999 :
    ............print(x, y)
    print('Fini')
```

Cette version n'est pas du tout optimisée de par de range choisi pour x et y. Et il faut être sûr d'éavoir pris un range assez grand pour ne pas en rater...

On note que si un couple $(x,\ y)$ convient dans $\mathbb{N}$, le couple $(-y,\ -x)$ conviendra dans $\mathbb{Z}$.

∘16∘

`Retrouvez les stations de métro (et R.E.R.) dont voici les anagrammes` *(Ouest)* :
Pendu atrophié. Facho en vue. Parle du poème. Humain à réinventer. Joli canard éventré.

Porte Dauphine.
Avenue Foch.
Rue de la Pompe.
Avenue Henri-Martin.
Javel - André Citroën.

∘16∘ Trouvez les deux coefficients a et b vérifiant $\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X}$.
Calculez alors $\left(x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)}$ (et si vous dérivez $x \longmapsto \frac{1}{(i-x)^2}$ en $x \longmapsto -\frac{-2.(i-x)}{(i-x)^4}$ et $x \longmapsto \frac{1}{(i-x)^3}$ en $x \longmapsto -\frac{-3.(i-x)^2}{(i-x)^6}$, je vous renie, vous méritez au mieux de réussir le bac, peut être avec mention assez bien, gagnée grâce à la biologie).
Calculez $Arctan^{(n)}(0)$ pour tout n.

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Leftrightarrow \frac{1}{1+X^2} = \frac{a.(i+X)}{(i+X).(i-X)} + \frac{b.(i-X)}{(i+X).(i-X)}$$

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Leftrightarrow \frac{1}{1+X^2} = -\frac{a.(i+X)}{1+X^2} - \frac{b.(i-X)}{1+X^2}$$

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Leftrightarrow \frac{1}{1+X^2} = \frac{(b-a).X - i.(a+b)}{1+X^2}$$

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Rightarrow (b-a=0 \; et \; i.(b+a) = -1)$$

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Rightarrow \left(a=b=\frac{i}{2}\right)$$

Cette rédaction est presque bien.

Presque car elle contient encore et toujours le réflexe de Terminale. Les implications.
On se fout de savoir $\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Rightarrow (b-a=0 \; et \; b+a=-1)$*, puisque* $\frac{1}{1+X^2}$ *est notre but.*
En prépas, votre but est d'intégrer une grande ecole.
Votre question est « comment je fais pour intégrer une grande école ? ».
Et si je vous réponds « ah, si tu intègres, alors tu passeras trois ans en école, puis tu auras un boulot », vous pensez quoi de ma réponse ?

Je vous la redonne :

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Leftrightarrow \frac{1}{1+X^2} = \frac{a.(i+X)}{(i+X).(i-X)} + \frac{b.(i-X)}{(i+X).(i-X)}$$

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Leftrightarrow \frac{1}{1+X^2} = -\frac{a.(i+X)}{1+X^2} - \frac{b.(i-X)}{1+X^2}$$

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Leftrightarrow \frac{1}{1+X^2} = \frac{(b-a).X - (a+b)}{1+X^2}$$

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Leftarrow (b-a=0 \; et \; i.(b+a) = -1)$$

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Leftarrow \left(a=b=\frac{i}{2}\right)$$

Et en fait, ce sont des équivalences. Mais seule le sens « si je prends a et b ainsi, alors... » nous intéresse.

On a donc $\frac{1}{1+X^2} = \frac{i}{2}.\left(\frac{1}{i-X} + \frac{1}{i+X}\right)$.
On va dériver n fois, en prenant la forme de droite, facile à dériver.

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f^{(3)}(x)$		$f^{(n)}(x)$
$\frac{1}{i-x} = (i-x)^{-1}$	$(i-x)^{-2}$	$2.(i-x)^{-3}$	$6.(i-x)^{-4}$		$n!.(i-x)^{-n-1}$
$\frac{1}{i+x} = (i+x)^{-1}$	$-(i+x)^{-2}$	$2.(i+x)^{-3}$	$-6.(i+x)^{-4}$		$(-1)^n.n!.(i-x)^{-n-1}$

Je vous prouve la première par récurrence sur n.
La récurrence est initialisée (et c'est l'initialisation qui nous a permis de deviner la formule).
On se donne n et on suppose $f^{(n)} = (x \longmapsto n!.(i-x)^{-n-1})$.
On redérive : $f^{(n+1)} = (x \longmapsto n!.(-n-1).(-1).(i-x)^{-n-1-1})$.
On assemble tout, et c'est fini.

On a donc, en sommant

$$\Big(x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}\Big)^{(n)} = \Big(x \longmapsto \frac{i.n!}{2}\Big((i+x)^{-n-1} + (-1)^n.(i+x)^{-n-1}\Big)\Big)$$

La valeur en 0 donne $\frac{i.n!}{2}\Big((i+0)^{-n-1} + (-1)^n.(i+0)^{-n-1}\Big)$ c'est à dire $\frac{i.n!.i^{-n-1}.(1+(-1)^n)}{2}$.
Si n est impair, le $1+(-1)^n$ donne 0.

Si n est pair, le $1+(-1)^n$ se simplifie avec le 2 et il reste $i.n!.i^{-n-1}$.
Quitte à écrire $n = 2.p$, on a $i.(2.p)!.i^{-2.p}.i^{-1}$ puis $(2.p)!.(i^{-2})^p$.
On résume avec $(2.p)!.(-1)^p$.

Pour les dérivées de $Arctan$ il suffit de décaller, puisque $Arctan' = \Big(x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}\Big)$.

Et pas $(Arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ *ni* $Arctan' = \frac{1}{1+x^2}$.
Vous pourrez écrire $Arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *(avec un joli « pour tout x »), et aussi* $\frac{d\ Arctan(x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

∘17∘ **Pour tout angle θ convenable, exprimez $\tan(2.\theta)$, $\tan(3.\theta)$, $\tan(4.\theta)$ et $\tan(3.\theta)+\tan(4.\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$.**

On utilise la formule $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}$ pour obtenir nos résultats :

$a = b = \theta$	$a = \theta$ et $b = 2.\theta$	$a = b = 2.\theta$
$\tan(2.\theta) = \frac{2.\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$	$\tan(2.\theta) = \frac{\tan^3(\theta)-3.\tan(\theta)}{3.\tan^2(\theta)-1}$	$\tan(2.\theta) = \frac{4.\tan(\theta)-4.\tan^3(\theta)}{\tan^4(\theta)-6.\tan^2(\theta)+1}$

sous conditions d'existences.

On somme et réduit au dénominateur commun :

$$\boxed{\tan(3.\theta)+\tan(4.\theta) = \frac{\tan^7(\theta)-21.\tan^5(\theta)+35.\tan^3(\theta)-7.\tan(\theta)}{(3.\tan^2(\theta)-1).(\tan^4(\theta)-6.\tan^2(\theta)+1)}}$$

Si on y tient, le dénominateur est $3.\tan^6(\theta)-19.\tan^4(\theta)+9.\tan^2(\theta)-1$.

Déduisez que les $\tan(k.\pi/7)$ pour k de 1 à 6 sont les racines du polynôme $\boxed{X^6-21.X^4+35.X^2-7}$ noté P.

On veut résoudre l'équation $x^6-21.x^4+35.x^2-7=0$ d'inconnue x. Elle est équivalente à "$x^7-21.x^5+35.x^3-7.x=0$ et $x \neq 0$".
En posant $x = \tan(\theta)$ et même $\theta = Arctan(x)$ pour rendre le changement bijectif, c'est équivalent à $\tan(3.\theta)+\tan(4.\theta)=0$.
On résout $\tan(3.\theta) = -\tan(4.\theta)$ et même $\tan(3.\theta) = \tan(-4.\theta)$.
On trouve le vas d'égalité des tangentes $\exists k \in \mathbb{Z},\ 3.\theta = -4.\theta + k.\pi$.
Les solutions en θ sont de la forme $\frac{k.\pi}{7}$ avec k décrivant $\mathbb{Z}$.
On revient à x : $\tan\Big(\frac{k.\pi}{7}\Big)$ avec k décrivant $\mathbb{Z}$.

Mais il faut exiger $x \neq 0$, ce qui élimine les k multiples de 7.
Par périodicité, k et $k+7$ donnent la même valeur de x.
On peut donc demander à k d'aller de 1 à 6 pour avoir toutes les racines.

$\tan\Big(\frac{\pi}{7}\Big)$	$\tan\Big(\frac{2.\pi}{7}\Big)$	$\tan\Big(\frac{3.\pi}{7}\Big)$
$\tan\Big(\frac{6.\pi}{7}\Big)$	$\tan\Big(\frac{5.\pi}{7}\Big)$	$\tan\Big(\frac{4.\pi}{7}\Big)$

On pouvait aussi partir de "je résous l'équation $\tan(3.\theta)+\tan(4.\theta)=0$ *et montrer que je trouvais les racines du polynômes* $X.P(X)$.

Déduisez $\tan\left(\frac{\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{2.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{3.\pi}{7}\right)=\sqrt{7}$.

Le polynôme unitaire $X^6-21.X^4+35.X^2-7$ a pour liste les six réels indiqués plus haut. Comme 6 est pair, on a exactement : le produit des racines vaut -7 ($(-1)^6=1$).
On a donc

$$\tan\left(\frac{\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{2.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{3.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{4.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{5.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{6.\pi}{7}\right).=-7$$

On regroupe deux à deux et on utilise $\tan(\pi-\theta)=-\tan(\theta)$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{6.\pi}{7}\right)=-\tan^2\left(\frac{\pi}{7}\right)$$
$$\tan\left(\frac{2.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{5.\pi}{7}\right)=-\tan^2\left(\frac{2.\pi}{7}\right)$$
$$\tan\left(\frac{3.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{4.\pi}{7}\right)=-\tan^2\left(\frac{3.\pi}{7}\right)$$

Les signes moins finissent par se compenser : $\left(\tan\left(\frac{\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{2.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{3.\pi}{7}\right)\right)^2=7$.

Or, chaque terme du produit $\tan\left(\frac{\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{2.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{3.\pi}{7}\right)$ est positif (angle entre 0 et $\pi/2$). On passe à la racine : $\tan\left(\frac{\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{2.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{3.\pi}{7}\right)=\sqrt{7}$.

Déduisez par l'absurde que $\tan(\pi/7)$ est irrationnel.

On va bâtir un raisonnement **par l'absurde**.
Supposons que $\tan(\pi/7)$ soit rationnelle *(de la forme p/q). Objectif : une contradiction.*
On écrit : $\tan\left(\frac{2.\pi}{7}\right)=\frac{2.p/q}{1-(p/q)^2}$; c'est un rationnel.
En remplaçant dans $\frac{\tan^3-3.\tan}{3.\tan^2-1}$, le réel $\tan(3.\pi/7)$ est rationnel.
Le produit des trois rationnels est aussi un rationnel *(inutile de le mettre sous une forme $\frac{p'}{q'}$ explicite ; il suffit de dire "somme/produit/quotient de rationnels").*
Or, $\sqrt{7}$ n'est pas rationnel. On tient notre contradiction.

Si nécessaire, on fait la démonstration de l'irrationnalité de $\sqrt{7}$ par l'absurde.

On suppose que $\sqrt{7}$ s'écrit a/b sous forme irréductible. Il s'ensuite : $a^2=7.b^2$. L'entiers a^2 est un multiple de 7, a l'est donc aussi (écrire $a=7.k+r$ avec r entre 0 et 6, élever au carré et voir que seul le cas $r=0$ donne que $49.k^2+14.r.k+r^2$ soit un multiple de 7). *Mais alors, en remplaçant a par $7.k$ dans $a^2=7.b^2$, on obtient $b^2=7.k^2$. Le même raisonnement que précédemment permet d'affirmer que b est aussi multiple de 7, ce qui contredit que la fraction initiale soit irréductible.*

Le réel $\tan^2(\pi/7)$ est il rationnel ?

Le fait que $\tan(\pi/7)$ *soit irrationnel ne nous dit pas que son carré le soit forcément. On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel, mais que son carré est rationnel.*
Le sens utile est (x rationnel) $\Rightarrow$ (x^2 rationnel) avec sa contraposée (a^2 irrationnel) $\Rightarrow$ (a irrationnel).
ici, il faut donc une autre preuve (par l'absurde).

Supposons que $\tan^2(\pi/7)$ soit rationnel de la forme p/q, d'écriture irréductible.
Comme $\tan(\pi/7)$ est racine de $X^6-21.X^4+35.X^2-7$, on déduit que $\tan^2(\pi/7)$ est racine de $X^3-21.X^2+35.X-7$ (déjà, pour certains, il n'est pas évident que ce soit dans ce sens, mais repensez aux équations "bicarrées" de Terminale en $a.X^4+b.X^2+c$).
On reporte :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3-21.\left(\frac{p}{q}\right)^2+35.\left(\frac{p}{q}\right)-7=0$$

On revient dans $\mathbb{N}$:
$$p^3 - 21.p^2.q + 35.p.q^2 - 7.q^3 = 0$$
On bascule et factorise :
$$p^3 = q.(21.p^2 - 35.p.q + 7.q^2)$$
Le membre de droite est multiple de q, celui de gauche l'est aussi.
C'est louche que q divise p^3, alors que p et q n'ont pas de diviseur commun !

Quitte à faire appel à Gauss : q divise p^3, et q est premier avec p, donc q divise p^2. Mais q est premier avec p. Il divise donc $p.1$. Mais étant toujours premier avec p, il divise donc 1.
Finalement, on a cette sortie de secours : p et q n'ont aucun diviseur commun "à part 1".

L'entier q vaut 1.
Mais alors le rationnel p/q est un entier.
Or, $\tan(\pi/7)^2$ est strictement entre 0 et 1.
On tient là notre contradiction.
Le nombre $\tan^2(\pi/7)$ n'est pas rationnel.

On notera qu'ayant prouvé $\tan^2(\pi/7) \notin \mathbb{Q}$, on retrouve $\tan(\pi/7) \notin \mathbb{Q}$ par la contraposée déjà évoquée.

◦18◦

♡ Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, on a $\forall(a,b,c) \in I^3,\ (a = b \text{ et } b = c) \Rightarrow (a = c)$.
Mais quels sont ceux pour lesquels on a $\forall(a,b,c) \in I^3,\ (a = b \text{ et } b = c) \Leftrightarrow (a = c)$?

Un intervalle *vide* (forme étrange $]0,\ 0[$ par exemple) vérifie cette propriété en $\forall$.

Si maintenant l'intervalle a un élément α alors tous ses éléments sont égaux à α.
En effet, on applique le sens $\forall(a,b,c) \in I^3,\ (a = c) \Rightarrow (a = b \text{ et } b = c)$ au triplet $(\alpha,\ y,\ \alpha)$ et on obtient : $\forall y \in I,\ y = \alpha$.
L'intervalle se réduit au seul point α : $I = [\alpha,\ \alpha\}$.

S'il faut une réponse avec un ensemble d'ensembles : $S_I = \{\emptyset\} \cup \{[\alpha,\ \alpha] \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

◦19◦

Calculez $\displaystyle\int_0^1 2^x.3^{-x}.4^x.5^{-x}.dx$.

On écrit
$$\int_0^1 e^{(\ln(8/15)).x}.dx$$
et on intègre en $\dfrac{e^{(\ln(8/15)).x}}{\ln(8/15)}$ et on trouve $\boxed{\dfrac{-7}{15.\ln(8/15)}}$ (positif quand même).

◦20◦

♡ L'homographie h a pour dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-3)^2}$ et vérifie $h(1) = 1$. Pouvez vous la retrouver ? Calculez $h \circ h \circ h \circ h(1)$ et $h \circ h \circ h \circ h(2)$.

On l'écrit $x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$. On la dérive : $f' = x \longmapsto \dfrac{a.d-b.c}{(c.x+d)^2}$.
On devine vite : $c.x + d = x - 3$. On tient c et d. Puis on choisit a et b pour avoir à la fois $\dfrac{a+b}{1-3} = 1$ et $a.(-3) - b.1 = 1$.
On résout : $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = \dfrac{-5}{2}$.

On écrit l'homographie $\boxed{x \longmapsto \dfrac{x-5}{2.x-6}}$ après avoir multiplié haut et bas par 2.

De toutes façons $h \circ h \circ h \circ h(1) = 1$. Et même en en mettant plein !
$$h \circ h \circ h \circ h(2) = \frac{87}{86}$$
après calculs idiots.

On rappelle qu'on compose les homographies en multipliant les matrices.

		$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$
matrice	$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9 & 25 \\ -10 & 26 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 41 & -105 \\ 42 & -106 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -169 & 425 \\ -170 & 426 \end{pmatrix}$
application	$\dfrac{x-5}{2.x-6}$	$\dfrac{-9.x+25}{-10.x+26}$	$\dfrac{41.x-105}{42.x-106}$	$\dfrac{-169.x+425}{-170.x+426}$

∘21∘

♡ Qui est le plus grand : 3^e ou e^3 ? *(calculatrice interdite, étude de $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ judicieuse).*

L'application $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ a pour dérivée $t \longmapsto \dfrac{1-\ln(t)}{t^2}$.
Elle est donc croissante puis décroissante, avec un maximum en e.
Son image en 3 est donc plus petite que son image en e : $\dfrac{\ln(3)}{3} < \dfrac{\ln(e)}{e}$.
Comme tout est positif, on multiplie en croix : $e.\ln(3) < 3$.
On passe à l'exponentielle (croissante) : $e^{\ln(3).e} < e^3$: on simplifie $\boxed{3^e < e^3}$
Pour l'ami physicien qui sommeille en vous : $3^e \simeq 19,813$ à 10^{-3} près et $3^e \simeq 20,085$ à 10^{-3} près.
Et attention, l'écriture « $3^e \simeq 19,813$ » n'a aucun sens en mathématiques (ni même en sciences) c'est « $3^e \simeq 19,813$ à 10^{-3} » près qui en a un.

∘22∘

Calculez module et argument de $(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+\ldots+(1+i)^{10}$.

On calcule ce nombre, somme d'une série géométrique

$$\sum_{k=1}^{10}(1+i)^k = \frac{(1+i)-(1+i)^{11}}{1-(1+i)} = \frac{(1+i)-(1+i)^{11}}{-i} = i.((1+i)-(1+i)^{11})$$

Mais on simplifie encore :

$$(1+i)^{11} = (\sqrt{2}.e^{i.\pi/4})^{11} = 2^5.\sqrt{2}.e^{i.11.\pi/4} = 32.\sqrt{2}.e^{3.i.\pi/4} = 32.\sqrt{2}.\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$$

Tous calculs faits : $31+33.i$.

Oui, il ne faut pas se précipiter sur la formule du binôme.

∘23∘

	Un Q.C.M. de Roger Mansuy	`Vrai`	`Faux`
`a`	Soit $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\Re e(\lambda z) = \lambda \Re e(z)$.		
`b`	Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors, $\Re e(1/z) = -\Re e(z)$.		
`c`	Soit $z \in \mathbb{C}$. La partie réelle de iz est la partie imaginaire de z.		
`d`	Soit $x \in \mathbb{R}$. Le conjugué de $\exp(ix)$ est $\exp(-ix)$.		
`e`	Soit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Le module de $\exp(z)$ est $\exp(\|z\|)$.		
`f`	Soit $z \in C$. Le conjugué de l'exponentielle de z est l'exponentielle de $\overline{z}$.		
`g`	Soit z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$. Alors, $\|z_1 - z_2\| \leq \|z_1\| - \|z_2\|$.		
`h`	Soit z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$. Alors, $\|z_1 - z_2\| \leqslant \|z_1\| + \|z_2\|$.		
`i`	Le complexe $-j$ est racine de $X^2 - X + 1$.		
`j`	Si m ne divise pas n, $U_m \bigcap U_n = \{1\}$.		

Roger Mansuy n'est pas que un auteur de chroniques mathématiques dans La Recherche, n'est pas que l'auteur d'un cahier de vacances entre Sup et Spé, n'est pas que organisateur de Mathématic Park, de « Mathématiques en mouvement », n'est pas que tweeter compulsif en curiosités mathématiques, n'est pas que prof de maths à Saint-Louis et ancien prof d'informatique à Louis-le-Grand... il a aussi été colleur certaines années en MP à Charlemagne... et U_n désigne l'ensemble des racines n^{iemes} de l'unité.*

A part ça, on pose $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{e^{2.i.k.\pi/n} \mid k \in range(n)\}/$

	Un Q.C.M. de Roger Mansuy
a	Vrai
b	Faux, avec $z = 2$ déjà !
c	Non. Signe !
d	Oui
e	Non, $\overline{e^z} = e^x.\overline{e^{i.y}}$ et son module est $e^{\Re e(z)}$!
f	$\overline{e^{x+i.y}} = \overline{e^x.e^{i.y}} = e^x.e^{-i.y}$ donc oui.
g	Avec un majorant qui pourrait être négatif ? Ça va pas !
h	Oui
i	Oui.
j	$U_6 \bigcap U_9 = \{1,\ j,\ j^2\}$ et pourtant aucun ne divise l'autre

∘24∘

♡ Montrez : $X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}.X + 1).(X^2 + \sqrt{2}.X + 1)$.

♡ Trouvez a, b, c et d pour avoir $\frac{1}{X^4 - 1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i}$.

♡ Trouvez α, β, γ et δ pour avoir $\frac{1}{X^4 + 1} = \frac{\alpha.X + \beta}{X^2 - \sqrt{2}.X + 1} + \frac{\gamma.X + \delta}{X^2 + \sqrt{2}.X + 1}$.

♠ Calculez	$\int_0^1 \frac{dt}{t^4+1}$	$\int_0^1 \frac{t.dt}{t^4+1}$	$\int_0^1 \frac{t^3.dt}{t^4+1}$

Il suffit évidemment de développer $(X^2 - \sqrt{2}.X + 1).(X^2 + \sqrt{2}.X + 1)$ pour arriver à $X^4 + 1$.

Mais astucieusement, on écrit $X^4 + 1 = X^4 + 2.X^2 + 1 - 2.X^2 = (X^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}.X)^2$ et on retrouve soi même la formule. Oh joli.

On décompose en éléments simples par la méthode des pôles.
On réduit le membre « éléments simples au dénominateur commun » :

$$\frac{1}{X^4 - 1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i} = \frac{a.(X+1).(X^2+1) + b.(X-1).(X^2+1) + c.(X^2-1).(X+i) + d.(X^2-1).(X-i)}{}$$

On demande au numérateur de valoir 1 : $a.(X+1).(X^2+1) + b.(X-1).(X^2+1) + c.(X^2-1).(X+i) + d.(X^2-1).(X-i) = 1$
On trouve a, , c et d en prenant des valeurs en 1, -1, i et $-i$.[2]

$$\frac{1}{X^4 - 1} = \frac{1}{4}.\frac{1}{X-1} - \frac{1}{4}.\frac{1}{X+1} + \frac{1}{4.i}.\frac{1}{X-i} - \frac{1}{4.i}.\frac{1}{X+i}$$

On pourra préférer $\frac{1}{X^4 - 1} = \frac{1}{4}.\frac{1}{X-1} - \frac{1}{4}.\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2}.\frac{1}{X^2+1}$ si on doit intégrer.

Pour

$$\frac{1}{X^4 + 1} = \frac{\alpha.X + \beta}{X^2 - \sqrt{2}.X + 1} + \frac{\gamma.X + \delta}{X^2 + \sqrt{2}.X + 1}$$

on ne va pas se prendre la tête. On réduit au dénominateur commun et on résout un système.

$$\frac{1}{X^4 + 1} = \frac{1}{4}.\Big(\frac{-\sqrt{2}.X + 2}{X^2 - \sqrt{2}.X + 1} + \frac{\sqrt{2}.X + 2}{X^2 + \sqrt{2}.X + 1}\Big)$$

(on vérifie)

Si l'on doit intégrer, on sépare. Et pas qu'une fois.

$$\int_0^1 \frac{-\sqrt{2}.x + 2}{x^2 - \sqrt{2}.x + 1}.dx = \frac{-1}{\sqrt{2}}.\int_0^1 \frac{2..x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}.x + 1}.dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}.x + 1}.dx = \Big[\ln(x^2 - \sqrt{2}.x + 1)\Big] + \int_0^1 \frac{2.dx}{(\sqrt{2}x - 1)^2 + 1}$$

et on intègre en logarithme et arctangente.

On fait de même avec l'autre terme. Finalement

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}.\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8}.\ln(2 + \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{8}.\ln(2 - \sqrt{2})$$

---

2. si vous refusez de prendre $x = 1$ à cause du dénominateur nul en 1, dites que vous faites tendre x vers 1, de même pour les autres pôles

Celle en t est plus simple $\int_0^1 \frac{t.dt}{t^4+1}$.

Changeons de variable : $u = t^2$. L'intégrale devient $\int_{t=0}^{t=1} \frac{t.dt}{t^4+1} = \frac{1}{2}.\int_{u=0}^{u=1} \frac{du}{1+u^2}$.

On intègre en $Arctan(u)$. On trouve $\frac{\pi}{8}$.

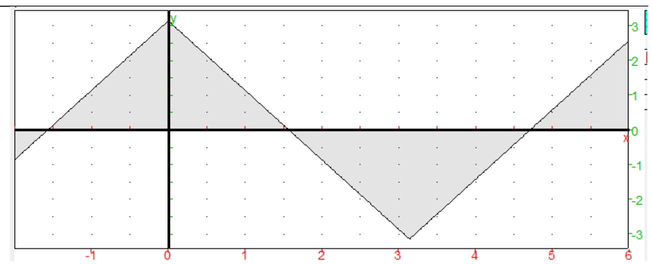
Le dernier est en $\frac{u'}{u}$ avec $u = 1+t^4$. On intègre en logarithme.

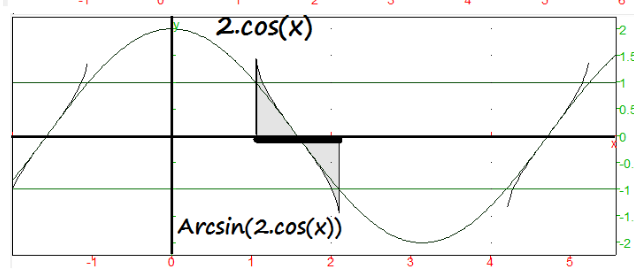
$$\int_0^1 \frac{t.dt}{t^4+1} = \left[\frac{\ln(1+t^4)}{3}\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{3}$$

∘25∘

♡ Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto 2.Arcsin(\cos(x))$.
Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto Arcsin(2.\cos(x))$.
Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto Arcsin(2.\cos(2.x))$.

$x \longmapsto 2.Arcsin(\cos(x))$ est définie sur $\boxed{\mathbb{R}}$





$x \longmapsto Arcsin(2.\cos(x))$ exige que $\cos(x)$ reste entre $-1/2$ et $1/2$.

Intervalle fondamental : $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2.\pi}{3}\right]$.

Domaine véritable : $\boxed{\bigcup_{jk\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3}+k.\pi, \frac{2.\pi}{3}+k.\pi\right]}$

$x \longmapsto Arcsin(2.\cos(2.x))$ repose sur la même exigence mais cette fois, c'est $2.x$ qui doit être dans cet ensemble.

$\boxed{\bigcup_{jk\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6}+k.\frac{\pi}{2}, \frac{2.\pi}{6}+k.\frac{\pi}{2}\right]}$

∘26∘

♡ Résolvez $Arctan(x) + \frac{\pi}{6} = Arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi}{3}$ d'inconnue réelle x *(ne passez pas tout de suite à la tangente).*

x ne peut pas être nul.

Si il est positif, on remplace $Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ par $\frac{\pi}{2} - Arctan(x)$.

L'équation devient $2.Arctan(x) = \frac{2.\pi}{3}$. On trouve $Arctan(x) = \frac{\pi}{3}$.

L'unique solution est $\sqrt{3}$, positive effectivement. On peut vérifier.

Si il est négatif, on remplace par $-\frac{\pi}{2} - Arctan(x)$.

Cette fois, on trouve $2.Arctan(x) = -\frac{\pi}{3}$.

La solution est $-1/\sqrt{3}$ *(valide après vérification).*

On a donc deux solutions : $\boxed{S = \left\{\sqrt{3}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right\}}$

Remarque : | *Il valait mieux remplacer effectivement $Arctan(1/x)$ avant de commencer.*

∘27∘

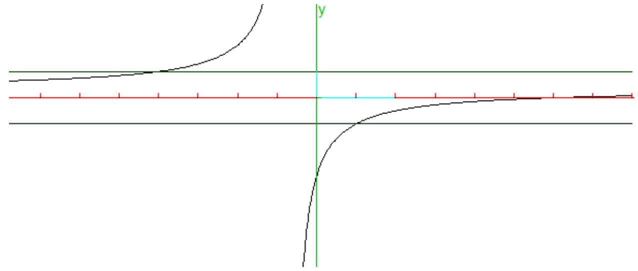
Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto Arcsin\left(\frac{x-3}{.3.x+1}\right)$.

On doit déjà éviter $-1/3$.

Ensuite, on veut $\dfrac{x-3}{3.x+1} \in [-1,\ 1]$, ce ui se lit $\left(\dfrac{x-3}{3.x+1}\right)^2 \leqslant 1$.

On resout donc $9.x^2+6.x+1 \geqslant x^2-6.x+9$ en se plaçant à l'exterieur des racines -2 et $\dfrac{1}{2}$.

On a donc $\boxed{D_f =]-\infty,\ -[\cup]0.5,\ +\infty[}$



∘28∘ Calculez $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(\ln(x))}{x}.dx$ et $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(\ln(x)).\ln(x)}{x}.dx$.

Facile *(une fois qu'on a compris)*.

On change de variable dans la première : $u = \ln(x)$

$$\int_1^2 \ln(\ln(x)).\frac{dx}{x} = \int_0^{\ln(2)} \ln(u).du$$

On a une primitive classique en $u \longmapsto u.\ln(u) - u$.

$$\int_1^2 \frac{\ln(\ln(x))}{x}.dx = \big(\ln(\ln(2)) - 1)\big).\ln(2)$$

Le même changement ramène l'autre intégrale à $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} u.\ln(u).du$.

On intègre cette fois par parties :

u	$\hookleftarrow$	$\frac{u^2}{2}$
$\ln(u)$	$\hookrightarrow$	$\frac{1}{u}$

On a une primitive en $\dfrac{u^2.\ln(u)}{2} - \dfrac{u^2}{4}$ et la valeur est $\left(\dfrac{\ln(2)}{2}\right)^2.\Big(2.\ln(\ln(2)) - 1\Big)$

L'essentiel est la méthode, pas la valeur *(ici négative)*.

∘29∘ Dérivez $x \longmapsto Arcsin\left(\dfrac{2.x}{1+x^2}\right)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Expliquez.

On dérive déjà $x \longmapsto \dfrac{2.x}{1+x^2}$ (notée f) comme un quotient : $x \longmapsto \dfrac{2.(1+x^2) - 2.x.(2.x)}{(1+x^2)^2}$.

On compose avec $Arcsin$?

x	$\longmapsto$	$\frac{2.x}{1+x^2}$	$\longmapsto$	$Arcsin\left(\frac{2.x}{1+x^2}\right)$
	f		$Arcsin$	
	$\frac{2-2.x^2}{(1+x^2)^2}$		$\frac{1}{\sqrt{1-(\ldots)^2}}$	

On obtient

$$\frac{2-2.x^2}{(1+x^2)^2}.\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2.x}{1+x^2}\right)^2}}$$

On simplifie

$$\frac{2.(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.\frac{1}{\sqrt{\dfrac{(1+x^2)^2-4.x^2}{(1+x^2)^2}}}$$

puis

$$\frac{2.(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.\frac{(1+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2-4.x^2}}$$

(sans valeur absolue pour le dé-dénominateur ; il est positif).

Il reste $\dfrac{2.(1-x^2)}{(1+x^2).\sqrt{(1-x^2)^2}}$.

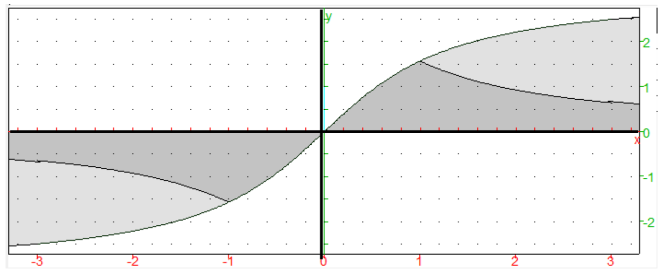
On va simplifier $1-x^2$ en haut et en bas.

Il reste $\dfrac{2}{1+x^2}$!

En fait, non. Il y a une valeur absolue en bas : $\sqrt{1-2.x^2+x^4} = |1-x^2|$.

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x$
dérivée	$-\dfrac{2}{1+x^2}$	$\dfrac{2}{1+x^2}$	$-\dfrac{2}{1+x^2}$

Notre fonction serait donc $2.Arctan(x)$ au signe près et aux constantes près !
Sur ce graphe, reconnaissez notre fonction (qui reste entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ comme tout arcsinus) et $2.Arctan$ (qui peut monter plus haut).



La clef de l'exercice : $\sin(2.\theta) = \frac{2.x}{1+x^2}$ *si on a pose* $x = \tan(\theta)$.

∘30∘ ♡ Résolvez $Arctan(x) + Arctan(x+2) = \dfrac{13.\pi}{4}$ *(mais ne tombez pas dans le piège).*

On passe à la tangente par condition nécessaire $\dfrac{2+x}{1-x^2-2.x} = 1$.
On peut résoudre.

Et passer pour un con aux yeux du matheux (le con, c'est celui qui calcule, calcule, calcule au lieu de réfléchir d'abord).

$Arctan(x) + Arctan(x+2)$ ne dépassera jamais π par construction (somme de deux arctangentes).
Il n'y a pas de solution ! C'est tout !

∘31∘ Simplifiez $5.Arctan\left(\dfrac{1}{7}\right) + 2.Arctan\left(\dfrac{3}{79}\right)$.

Cet angle est positif (somme de réels positifs), « petit » (somme de sept réels plus petits que $Arctan(1/\sqrt{3})$.
On calcule étape par étape sa tangente :

$\tan\left(2.Arctan\left(\frac{1}{7}\right)\right)$	$\tan\left(2.Arctan\left(\frac{1}{7}\right) + Arctan\left(\frac{3}{79}\right)\right)$	$\tan\left(4.Arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2.Arctan\left(\frac{3}{79}\right)\right)$	final
$\dfrac{2.\frac{1}{7}}{1-(\frac{1}{1})^2} = \dfrac{7}{24}$	$\dfrac{\frac{7}{24}+\frac{3}{79}}{1-\frac{7}{24}.\frac{3}{79}} = \dfrac{1}{3}$	$\dfrac{2.\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2} = \dfrac{3}{4}$	$\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}.\frac{1}{7}} = 1$

Cet angle a pour tangente 1 et est entre 0 et $7.\dfrac{\pi}{6}$; c'est $\dfrac{\pi}{4}$.

∘32∘ ♡ Justifiez : $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(\theta).d\theta}{4+\cos^2(\theta)} = Arctan(1/2)$ et $\displaystyle\int_0^\pi \frac{2.\sin(\theta).d\theta}{4-\cos^2(\theta)} = \ln(3)$.

On a une forme en $\dfrac{u'}{4+u^2}$. Oui, et alors ?

On arrange $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(\theta).d\theta}{4+\cos^2(\theta)}$ en $\displaystyle\frac{1}{4}.\int_0^\pi \frac{\sin(\theta).d\theta}{1+\left(\frac{\cos(\theta)}{2}\right)^2}$. Et même

$$-\frac{1}{2}.\int_0^\pi \frac{-\dfrac{\sin(\theta)}{2}.d\theta}{1+\left(\dfrac{\cos(\theta)}{2}\right)^2}$$

On a cette fois une forme en $\dfrac{u'}{1+u^2}$. On intègre en $-\dfrac{1}{2}.\left[Arctan\left(\dfrac{\cos(\theta)}{2}\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}$. On trouve :

$$-\frac{1}{2}.\left(Arctan\left(\frac{-1}{2}\right) - Arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

Par imparité de la fonction *Arctan* , on a deux fois la moitié d'*arctan*$(1/2)$.

La seconde nécessite un changement de variable.
Puis une décomposition en éléments simples.

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{2.\sin(\theta).d\theta}{4-\cos^2(\theta)} = \int_{c=1}^{c=-1} \frac{2.(-dc)}{4-c^2}$$

j'ai changé de variable

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{2.\sin(\theta).d\theta}{4-\cos^2(\theta)} = \int_{-1}^{1} \frac{2}{4-c^2}.dc$$

j'ai sorti le signe et rétabli les bornes

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{2.\sin(\theta).d\theta}{4-\cos^2(\theta)} = \int_{-1}^{1} \frac{2}{(4-c).(4+c)}.dc$$

j'ai factorisé

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{2.\sin(\theta).d\theta}{4-\cos^2(\theta)} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}.\Big(\frac{1}{4-c}+\frac{1}{4+c}\Big).dc$$

j'ai décomposé
Il ne reste plus qu'à intégrer et simplifier.

∘33∘

Complétez $Arctan(3) + Arcsin(*) = 3.\frac{\pi}{4}$ en passant par exemple à la tangente de chaque côté.

On note x l'inconnue : $Arcsin(x) = \frac{3}{4}.\pi - Arctan(3)$.

On passe au sinus[3] : $x = \sin\Big(\frac{3.\pi}{4} - Arctan(x)\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2}.\cos\Big(Arctan(3)\Big) + \frac{\sqrt{2}}{2}.\sin\Big(Actan(3)\Big)$.
On remplace :

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{\sqrt{1+3^2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{3}{\sqrt{1+3^2}}$$

On trouve $x = \frac{\sqrt{5}}{10}.(1+3.\sqrt{3})$.

La condition est nécessaire, mais aussi suffisante. L'application *Arcsin* est croissante, et passe de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.
Elle passera donc une fois (T.V.I.) et une seule (croissance) par $\frac{3}{4}.\pi - Arctan(3)$ (entre $\frac{3}{4}.\pi - \frac{\pi}{2}$ et $\frac{3.\pi}{4}$.

L'équation a une et une seule racine, et on a montré qu'elle ne pouvait avoir qu'une valeur.
C'est elle.

∘34∘

Vrai ou faux :
a - si $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont irrationnels, alors $\cos(2.\alpha)$ est irrationnel.
b - si $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont rationnels, alors $\cos(2.\alpha)$ est rationnel.
c - si $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont irrationnels, alors $\cos(2.\alpha)$ ou $\sin(2.\alpha)$ est irrationnel.
d - si $\cos(2.\alpha)$ est irrationnel, alors $\cos(\alpha)$ est irrationnel.
e - si $\cos(2.\alpha)$ ou $\sin(2.\alpha)$ est irrationnels, alors $\cos(\alpha)$ ou $\sin(\alpha)$ est irrationnel.

Si c'est vrai, on le prouve. Si c'est faux, un contre-exemple suffit.

---

a - si $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont irrationnels, alors $\cos(2.\alpha)$ est irrationnel.
Faux. $a = \frac{\pi}{4}$. Cosinus et sinus sont irrationnels (avec du $\sqrt{2}$) mais le cosinus du double est entier, et rationnel.

---

b - si $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont rationnels, alors $\cos(2.\alpha)$ est rationnel.
Vrai, puisque $\cos(2.\alpha) = 2.\cos^2(\alpha) - 1$. Si $\cos(\alpha)$ est rationnel, alors $\cos(2.\alpha)$ reste dans le corps $(\mathbb{Q}, +, .)$.

---

c - si $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont irrationnels, alors $\cos(2.\alpha)$ ou $\sin(2.\alpha)$ est irrationnel.
Faux. $a = \frac{\pi}{4}$. Cosinus et sinus sont irrationnels mais le cosinus et le sinus du double sont rationnels (négation de

3. équivalence ?

cos ou sinirrationnel).

---

d - si $\cos(2.\alpha)$ est irrationnel, alors $\cos(\alpha)$ est irrationnel.
Vrai. Contraposée de $\cos(\alpha) \in \mathbb{Q} \Rightarrow (2.\cos^2(\alpha) - 1 \in \mathbb{Q})$.

---

e - si $\cos(2.\alpha)$ ou $\sin(2.\alpha)$ est irrationnels, alors $\cos(\alpha)$ ou $\sin(\alpha)$ est irrationnel.
Vrai. Il suffit de contraposer.
Si c et s sont rationnels, alors $c^2 - s^2$ et $2.c.s$ sont rationnels.

∘35∘

Montrez : $Arctan(k+1) - Arctan(k) = Arctan\Big(\dfrac{1}{1+k+k^2}\Big)$.
Calculez alors $\sum_{k=1}^{n} Arctan\Big(\dfrac{1}{1+k+k^2}\Big)$.

On calcule

$$\tan\big(Arctan(k+1) - Arctan(k)\big) = \frac{k+1-k}{1+k.(k+1)} = \frac{1}{1+k+k^2}$$

Les deux angles $Arctan(k+1) - Arctan(k)$ et $Arctan\Big(\dfrac{1}{1+k+k^2}\Big)$ ont la même tangente.
Et ils sont entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.
Ils sont donc égaux.

Ensuite, la somme $\sum_{k=1}^{n} Arctan\Big(\dfrac{1}{1+k+k^2}\Big)$ s'écrit $\sum_{k=1}^{n} Arctan(k+1) - Arctan(k)$.
Elle télescope et il reste $Arctan(n+1) - Arctan(1)$.

Proprement

$$\sum_{k=1}^{n}(Arctan(k+1) - Arctan(k)) = \sum_{k=1}^{n} Arctan(k+1) - \sum_{k=1}^{n} Arctan(k)$$

puis

$$\sum_{k=1}^{n}(Arctan(k+1) - Arctan(k)) = \sum_{p=1}^{n+1} Arctan(p) - \sum_{k=1}^{n} Arctan(k)$$

et même

$$\sum_{k=1}^{n}(Arctan(k+1) - Arctan(k)) = Arctan(n+1) + \sum_{k=2}^{n} Arctan(k) - \sum_{k=2}^{n} Arctan(k) - Arctan(1)$$

∘36∘

♡ (a) Résolvez l'équation $\cos(x) + \sin(x) = 1$ d'inconnue réelle x (pensez à $A.\cos(x-\varphi)$ avec A et φ bien choisis).
(b) Résolvez $\cos(x) + \sin^2(x) = 1$ d'inconnue réelle x (pensez à tout ramener en $\cos(x)$).
(c) Résolvez $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ d'inconnue réelle x.
(d) Résolvez $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1$ d'inconnue réelle x (pensez à comparer $\cos^3(x)$ et $\cos^2(x)$ puis $\sin^3(x)$ et $\sin^2(x)$ puis sommez).
(e) Résolvez $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1$ d'inconnue réelle x.

(a) $\cos(x) + \sin(x = 1$. On rappelle :

$$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}.\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}.\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}.\sin(x)\Big) = \sqrt{2}.\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

On résout donc $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ c'est à dire

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

On a deux équations possibles : $x - \dfrac{\pi}{4} = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2.k.\pi$ avec k dans $\mathbb{Z}$.

On trouve deux familles de solutions m $\boxed{\begin{array}{lll} S = & \Big\{\dfrac{\pi}{2} + 2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\Big\} & \text{c'est} \quad 0+1=1 \\ & \bigcup \ \Big\{2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\Big\} & \text{c'est} \quad 1+0=1 \end{array}}$

(b) $\cos(x)+\sin^2(x) = 1$. On remplace : $\cos(x)+\sin^2(x) = \cos(x)+1-\cos^2(x)$. L'équation devient $\cos(x)-\cos^2(x)=0$
On a deux solutions venant de $\cos(x)=0$ et de $\cos(x)=1$.

$$\boxed{\begin{array}{lllr} S = & \left\{\dfrac{\pi}{2}+k.\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\} & \text{c'est} & 0+(\pm 1)^2=1 \\ & \bigcup \quad \left\{2.k.\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\} & \text{c'est} & 1+0^2=1 \end{array}}$$

(c) Résolvez $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ vaut toujours 1. L'équation a pour ensemble de solution $\mathbb{R}$.

(d) $\cos^3(x)+\sin^3(x)=1$. On a des solutions évidentes

$$\boxed{\begin{array}{lllr} S \supset & \left\{\dfrac{\pi}{2}+2.k.\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\} & \text{c'est} & 0+1^3=1 \\ & \bigcup \quad \left\{2.k.\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\} & \text{c'est} & 1^3+0^2=1 \end{array}}$$

Mais peut on en avoir d'autres ?
L'astuce (après avoir représenté la fontion), c'est de comprendre : $\cos^3(x)\leqslant\cos^2(x)$ (on a multiplié par $\cos(x)$ plus petit que 1).
De même, avec $\sin(x)\leqslant 1$ on a $\sin^3(x)\leqslant\sin^2(x)$.
En sommant, on a donc $\cos^3(x)+\sin^3(x)\leqslant\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.
Ceci noe nous dit pas que la valeur 1 ne sera jamais atteinte.
Mais pour l'atteindre, il faut avoir des égalités : $\cos^3(x)=\cos^2(x)$ et en même temps $\sin^3(x=\sin^2(x)$.

Les solutions sont bien les nombre strouvés : quand le cosninus et le sinus valent 0 ou 1.

Sinon, quitte à poser $s=\sin(x)$ et $c=\cos(x)$, l'équation devient $c^3+s^2=c^2+s^2$.
On transforme en $c^3-c^2+s^3-s^2=0$.
On factorise en $c^2.(c-1)+s^2.(s-1)=0$.
On poursuit avec l'aide de Pythagore : $(1-s^2).(c-1)+(1-c^2).(s-1)=0$.
On factorise : $(1-s).(1+s).(c-1)+(1-c).(1+c).(s-1)=0$.
On factorise encore : $(1-s).(1-c).(-1-s-1-c)=0$.
Par intégrité, on a trois pistes : $\cos(x)=1$, $\sin(x)=1$ ou $\cos(x)+\sin(x)=-2$.
La dernière équation n'a pas de solution.
Et on a bien la liste pour les deux premières.

Déjà pour que $\sqrt{\cos(x)}$ et $\sqrt{\sin(x)}$ existent, on doit rester dans le premier quadrant : $]0,\ \pi/2[$ (en tout cas modulo $2.\pi$).
Le domaine dd edéfinition de l'équation est $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[2.k.\pi,\ \frac{\pi}{2}+2.k.\pi\right]$.
Et on trouve encore des solutions avec les extrémités de ces intervalles.

Mais il faut prouvr qu'il n'y a qu'elles.

Une solution est de dire cette fois $\sqrt{\sin(x)}>\sin(x)>\sin^2(x)$ si x n'est pas un $k.\pi/2$ avec k dans $\mathbb{Z}$
$\sqrt{\cos(x)}>\cos(x)>\cos^2(x)$ si x n'est pas un $k.\pi/2$ avec k dans $\mathbb{Z}$
En sommant, on a $\sqrt{\sin(x)}+\sqrt{\cos(x)}>1$ si x n'est pas un multiple de $\dfrac{\pi}{2}$.
Les solutions sont donc nécessairemet des multiples de $\dfrac{\pi}{2}$.
Et pas tous, à cause du domaine de définition.

Autre aproche par conditions nécessaires :
$(\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}=1)\Rightarrow\left((\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)})^2=1\right)$
$(\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}=1)\Rightarrow\left(\cos(x)+\sin(x)+2.\sqrt{\cos(x).\sin(x)}=1\right)$
$(\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}=1)\Rightarrow\left(2.\sqrt{\cos(x).\sin(x)}=1-\cos(x)-\sin(x)\right)$
$(\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}=1)\Rightarrow\left(4.\cos(x).\sin(x)=(1-\cos(x)-\sin(x))^2\right)$
$(\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}=1)\Rightarrow\left(4.c.s=1+c^2+s^2-2.c-2.s+2.s.c\right)$
$(\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}=1)\Rightarrow\left(4.c.s-2.s.c=1+1+2.c+2.s\right)$
$(\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}=1)\Rightarrow\left(c.s=1+c+s\right)$
$(\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}=1)\Rightarrow\left(c.s-1=c+s\right)$
$(\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}=1)\Rightarrow\left((c.s-1)^2=(c+s^2)\right)$
$(\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}=1)\Rightarrow\left(c^2.s^2+1-2.s.c=c^2+s^2+2.s.c\right)$

$(\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1) \Rightarrow (c^2.s^2 = 4.s.c)$
On trouve : $c = 0$ ou $s = 0$ ou $c.s = 2$ ce qui n'est pas possible.
Et comme on a raisonné par implications (élévations au carré), il faut vérifier car on a trop de solutions.

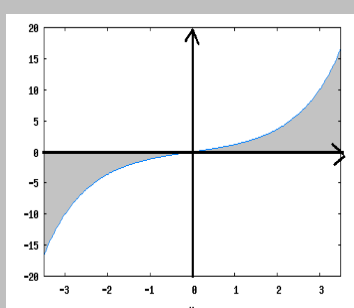
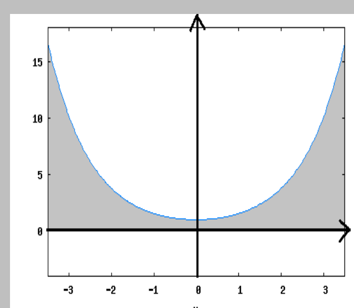
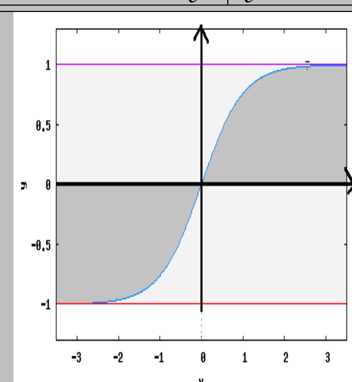
∘37∘

∘38∘ ♡ Existe-t-il une homographie *(application de la forme* $x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$*)* dont les deux points fixes soient 2 et 3 ?
Et si on ajoute valant 4 en 1 ?
Et si on ajoute plutôt « tend vers 5 en $+\infty$" ?
Et si on ajoute pltôt « tendant vers $+\infty$ en 5 ?

La condition est juste $\dfrac{2.a+b}{2.c+d} = 2$ et $\dfrac{3.a+b}{3.c+d} = 3$.
Ce système d'inconnues a, b, c et d a des solutions.
Par exemple $x \longmapsto \dfrac{5.x-6}{x+0}$.

Dans la suite de l'exercice, on anjoute des conditions.
On définit : $h = x \longmapsto \dfrac{(2+\sqrt{2}).x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}.x + 2 + \sqrt{2}}$. Déterminez $h \circ h$, $h \circ h \circ h \circ h$ et $h \circ h \circ h \circ h \circ h \circ h \circ h \circ h$ (multipliez des matrices, S.V.P.).

∘39∘ ♡ On définit : $g = \theta \longmapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ *(fonction de Guderman)*. Montrez que c'est une bijection de $]-\pi/2,\ \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$. Explicitez sa bijection réciproque (à un réel x, on associe l'angle θ vérifiant $g(\theta) = x$).
Dérivez g et g^{-1}.
On définit les fonctions hyperboliques :

$sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$th(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
		

Montrez : $sh(g(\theta)) = \tan(\theta)$ | $ch(g(\theta)) = 1/\cos(\theta)$ | $th(g(\theta)) = \sin(\theta)$

On dérive une composée :

θ	$\longmapsto$	$\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4}$	$\longmapsto$	$\tan\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$	$\longmapsto$	$\tan\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$
	affine		tan		ln	
	$\dfrac{1}{2}$	$\times$	$1 + \tan^2\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$	$\times$	$\dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)}$	

On simplifie et on trouve $\dfrac{1}{\dfrac{2.t}{1+t^2}}$ avec $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

On reconnait un sinus, mais de $\dfrac{\theta + \dfrac{\pi}{2}}{2}$. On a donc $\dfrac{1}{\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)}$.

Bref : $\boxed{g'(\theta) = \dfrac{1}{ch(\theta)}}$ pour tout θ de $]-\pi/2,\ \pi/2[$

Une dérivée strictement positive, une application continue strictement croissante.
Elle va réaliser un homéomorphisme entre deux intervalle. Il suffit d'étudier les limites aux bornes pour avoir

l'intervalle image.

en $\frac{\pi}{2}$ par valeur inférieure	$\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}$ tend vers $\frac{\pi}{2}$	$\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ tend vers $+\infty$	$g(\theta)$ tend vers $+\infty$
en $\frac{\pi}{2}$ par valeur supérieure	$\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}$ tend vers 0	$\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ tend vers 0	$g(\theta)$ tend vers $-\infty$

Ensuite, on peut expliciter g^{-1}. Ou même avant, comme ça on prouve que g est bijective.

On se donne x réel, et on résout $\ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=x \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=e^x$

$\ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=x \Leftrightarrow \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}=Arctan(e^x)$ car l'intervalle est le bon

$\ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=x \Leftrightarrow \frac{\theta}{2}=Arctan(e^x)-\frac{\pi}{4}$

$\ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=x \Leftrightarrow \theta=2.Arctan(e^x)-\frac{\pi}{2}$

On dérive cette composée :

$$x \longmapsto 2.\frac{1}{1+(e^x)^2}.e^x$$

(composée, comme tout à l'heure $x \longmapsto e^x \longmapsto Arctan(e^x) \longmapsto 2.Arctan(e^x)-C$)

On simplifie et on reconnaît un truc fou :

$g'(\theta)$	$(g^{-1})'(x)$
$\frac{1}{\cos(\theta)}$	$\frac{1}{ch(x)}$

On pouvait aussi dériver $x \longmapsto g(g^{-1}(x))=x$ et trouver $(g^{-1})'(x)=\dfrac{1}{g'(g^{-1}(x))}$...

A toutes fins utiles, on calcule $e^{g(\theta)}=\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin}{\cos}$ et $e^{-g(\theta)}=\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos}{\sin}$.

On somme et on réduit au dénominateur commun : $\dfrac{\sin^2+\cos^2}{\sin.\cos}$ pour le dire vite.

On divise par 2 :

$$\frac{e^{g(\theta)}+e^{-g(\theta)}}{2}=\frac{1}{2.\sin.\cos}=\frac{1}{\sin\left(2.\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\frac{1}{\cos(\theta)}$$

On note que dans le premier membre, $ch(g(\theta))$ est toujours plus grand que 1.
dans le second membre, l'inverse d'un cosinus (positif) est aussi plus grand que 1.

De même, $\dfrac{e^{g(\theta)}-e^{-g(\theta)}}{2}=\dfrac{\sin}{\cos}-\dfrac{\cos}{\sin}=\dfrac{\sin^2-\cos^2}{2.\sin.\cos}=\dfrac{\cos\left(2.\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sin\left(2.\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\dfrac{1}{\sin\left(2.\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\tan(\theta)$.

On note que dans le premier membre, $sh(g(\theta))$ décrit tout $\mathbb{R}$.
dans le second membre, une tangente décrit tout $\mathbb{R}$.

Pour avoir la dernière égalité, on fait le quotient des deux premières.

$$th(g(\theta))=\sin(\theta)$$

On note que dans le premier membre, $th(g(\theta))$ décrit juste $]-1,\ 1[$.
dans le second membre, un sinus décrit $]-1,\ 1[$.

Il y a d'autres preuves de ces égalités. Mais en tout cas, la réaction du matheux, ce n'est pas juste de calculer.
C'est aussi de vérifier la cohérence comme avec les trois remarques sur les domaines $[1,\ +\infty[$, $\mathbb{R}$ et $]-1,\ 1[$...

∘39∘

♡ Existe-t-il une homographie *(application de la forme $x \longmapsto \frac{a.x+b}{c.x+d}$)* dont les deux points fixes soient 2 et 3 ?
Et si on ajoute valant 4 en 1 ?
Et si on ajoute plutôt « tend vers 5 en $+\infty$" ?
Et si on ajoute pltôt « tendant vers $+\infty$ en 5 ?

La condition est juste $\dfrac{2.a+b}{2.c+d}=2$ et $\dfrac{3.a+b}{3.c+d}=3$.
Ce système d'inconnues a, b, c et d a des solutions.

Par exemple $x \longmapsto \dfrac{5.x-6}{x+0}$.

Dans la suite de l'exercice, on anjoute des conditions.

∘40∘ ♡ Décomposez en éléments simples $\dfrac{X^2+X+1}{X^3-2.X^2-11.X+12}$ (c'est à dire « crivez le sous la forme $\dfrac{\alpha}{X-a}+\dfrac{\beta}{X-b}+\dfrac{\gamma}{X-c}$.

On factorise le dénominateur.
On a une racine évidente : 1 $(1-2-11+12=0)$
On factorise $X^3-2.X^2-11.X+12=(X-1).(X^2-X-12)$ *(posez la division ou sinon, vérifiez)*.
On termine : $X^3-2.X^2-11.X+12=(X-1).(X^2-X-12)=(X-1).(X+3).(X-4)$.

On affirme qu'on va pouvoir décomposer en

$$\frac{X^2+X+1}{X^3-2.X^2-11.X+12}=\frac{X^2+X+1}{(X-1).(X+3).(X-4)}=\frac{a}{X-4}+\frac{b}{X+3}+\frac{c}{X-1}$$

Et pour ce faire, on réduit au dénominateur commun et on identifie les numérateurs :
$X^2+X+1=a.(X+3).(X-1)+b.((X-4).(X-1)+c.(X-4).(X+3)$
Et surtout, on ne développe pas.
On réfléchit avant de calculer.

On sait que le physicien sera capable de développer, identifier, résoudre le système.
Il y a donc une solution.

Alors il suffit de la trouver astucieusement.
On va donner à X trois valeurs bien choisies dans la formule
$X^2+X+1=a.(X+3).(X-1)+b.(X-4).(X-1)+c.(X-4).(X+3)$.

	X^2+X+1	$=a.(X+3).(X-1)$	$+b.(X-4).(X-1)$	$+c.(X-4).(X+3)$	
$x=1$	3	$=0$	$+0$	$+c.(-3).(4)$	$c=-1/4$
$x=-3$	7	$=0$	$+b.(-7).(-4)$	$+0$	$b=1/4$
$x=4$	21	$=a.(7).(3)$	$+0$	$+0$	$c=-1/4$

∘41∘ Résolvez $\displaystyle\int_x^{2.x}\frac{d\theta}{\sin(\theta)}=\ln(5)$ d'inconnue x (le nombre de solutions est il fini ou non ?).

En utilisant la primitive du cours, on trouve $\ln\left(\dfrac{\tan(x)}{\tan(x/2)}\right)=\ln(5)$ en tout cas sur un domaine convenable.

On passe à l'exponentielle (injective) : $\dfrac{\tan(x)}{\tan(x/2)}=5$. On pose $t=\tan(x/2)$ (sous réserve d'existence).

L'équation devient $\dfrac{2.t}{t.(1-t^2)}=5$. On simplifie par t car $t=0$ ne peut pas être solution.

On trouve $t=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ et son opposé.

On remonte : $\dfrac{\theta}{2}=Arctan\left(\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)$ modulo π (et l'opposé).

On semble trouver un ensemble infini $\left\{2.Arctan\left(\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)+2.k.\pi\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-Arctan\left(\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)+2.k.\pi\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
Mais on ne peut garder que $k=0$ car sinon l'intervalle $[x,\ 2.x]$ contient au moins un réel de la forme $p.\pi$ pour lequel la fonction $\dfrac{1}{\sin}$ explose.

$$\boxed{\left\{2.Arctan\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right),-Arctan\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\}}$$

Cet exercice est une prime aux mauvais élèves qui oublient les modulo π puisque la bonne réponse nous force (en deux étapes) à les mettre puis les effacer.

◦42◦

♡ Calculez $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2}.dt$, $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2}.t.dt$ *(par parties)*, $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2+1}{(1+t^2)^2}.dt$ et enfin $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}.dt$.

$$I = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2}.dt = \Big[\frac{1}{2}.\frac{1}{1+t^2}\Big]_0^1 = \frac{1}{4}$$

(forme en $\dfrac{u'}{u^2}$).

$$J = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2}.t.dt = \Big[-\frac{t}{2.(1+t^2)}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2.(1+t^2)}.dt = \Big[-\frac{t}{2.(1+t^2)} + \frac{Arctan(t)}{2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

t	$\hookrightarrow$	1
$\dfrac{t}{(1+t^2)^2}$	$\hookleftarrow$	$-\dfrac{1}{2.(1+t^2)}$

K se simplifie et s'intègre en arctangente : $\dfrac{\pi}{4}$.

Enfin, L est la différence $K - J$: $L = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4}$.
Et toutes ces intégrales existent...

◦43◦

Et c'est parti pour un gros sujet sur l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et de e qui permettent de définir sur $\mathbb{N}$ des relations d'ordre inhabituelles.

◦44◦

I∼0) Pour tout réel x, on note $[x]$ sa partie entière et $dec(x)$ sa partie décimale (dite aussi partie fractionnaire), caractérisées par $[x] \in \mathbb{Z}$, $[x] \leqslant x < [x]+1$, $dec(x) = x - [x]$ ou même $x = [x] + dec(x)$ avec $[x] \in \mathbb{Z}$ et $dec(x) \in [0,\ 1[$.
Un élève affirme pour tout couple de réels $(x,\ y)$: $dec(x+y) = dec(x) + dec(y)$. Montrez qu'il a tort.
I∼1) Un élève affirme pour tout réel x $dec(-x) = -dec(x)$. Montrez qu'il a tort.
I∼2) Un élève affirme pour tout couple de réels $(x,\ y)$: $dec(x+y) \leqslant dec(x) + dec(y)$. Montrez qu'il n'a pas tort.

On s'attaque à l'élève qui affirme pour tout couple de réels $(x,\ y)$: $dec(x+y) = dec(x) + dec(y)$. Pour montrer qu'il a tort, il suffit de donner un contre-exemple. On devine que c'est le cas où la somme des deux parties décimales dépasse 1.

On a par exemple $dec(1,6) + dec(2,7) = 0,6 + 0,7 = 1,3$ et $dec(1,6+2,7) = dec(4,3) = 0,3$.

Passons à celui qui affirme $dec(-x) = -dec(x)$. On ne va pas chercher trop loin : $1,1$ a pour partie décimale $0,1$ tandis que son opposé $-1,1$ a pour partie décimale $0,9$ (en effet, $-1,1 = -2 + 0,9$).

Un élève affirme pour tout couple de réels $(x,\ y)$: $dec(x+y) \leqslant dec(x) + dec(y)$. Cette fois, on doit montrer qu'il a raison (négation de "il a tort"). Cette fois, on ne trouve pas de contre-exemple, et un exemple ne suffit pas.
On doit donner une vraie preuve. On se donne x et y. On écrit $x = [x] + dec(x)$ et $y = [y] + dec(y)$, avec $[x]$ et [y] dans $\mathbb{Z}$ et $dec(x)$ et $dec(y)$ dans $[0,\ 1[$. On somme : $x + y = [x] + [y] + dec(x) + dec(y)$.
Le nombre $[x] + [y]$ est entier, mais $dec(x) + dec(y)$ est entre 0 et 2. On distingue deux cas :
$0 \leqslant dec(x) + dec(y) < 1$ alors on reconnaît $dec(x) + dec(y) = dec(x) + dec(y)$
$1 \leqslant dec(x) + dec(y) < 2$ alors on écrit $x + y = ([x] + [y] + 1) + (dec(x) + dec(y) - 1)$reconnaît $dec(x) + dec(y) = dec(x) + dec(y) - 1$.

Dans tous les cas, on a
$$dec(x) + dec(y) \leqslant dec(x) + dec(y)$$
avec "la moitié des cas" qui sont des cas d'égalité.

I∼0) α est un irrationnel fixé. Pour tout couple d'entiers naturels $(a,\ b)$, on pose $a \ltimes b$ si et seulement si on a $dec(a.\alpha) \leqslant dec(b.\alpha)$. Montrez que c'est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$.

Réflexive	Antisymétrique	Transitive
$\forall a,\ a \ltimes a$	$\forall (a,b),\ (a \ltimes b \text{ et } b \ltimes a) \Rightarrow a = b$	$\forall (a,b,c),\ (a \ltimes b \text{ et } b \ltimes c) \Rightarrow a \ltimes c$

Laquelle de ces propriétés serait perdue si α était un rationnel *(une affirmation sans preuve est de la politique, pas des mathématiques...)* ?
Montrez que α et $dec(\alpha)$ définissent le même ordre $\ltimes$.

On montre la réflexivité. On se donne un entier naturel a. On a alors $a.\alpha = a.\alpha$ et $dec(a.\alpha) = dec(a.\alpha)$. On reconnaît $a \ltimes a$. Et c'est vrai pour tout a.

On se donne maintenant a, $b$et c. On fait deux hypothèses : $a \ltimes b$ et $b \ltimes c$. On les traduit : $dec(a.\alpha) \leqslant dec(b.\alpha)$ et $dec(b.\alpha) \leqslant dec(c.\alpha)$. Par transitivité de l'ordre usuel dans $\mathbb{R}$: $dec(a.\alpha) \leqslant dec(c.\alpha)$. On reconnaît $a \ltimes c$. On a montré $(a \ltimes b \text{ et } b \ltimes c) \Rightarrow (a \ltimes c)$ pour tout triplet d'entiers (a, b, c).

On se donne enfin a et b (on ne sait pas encore si ils sont distincts ou pas). On suppose a⋉b et $b \ltimes a$. On traduit : $dec(a.\alpha) \leqslant dec(b.\alpha)$ et $dec(b.\alpha) \leqslant dec(a.\alpha)$. On déduit déjà $deca.\alpha) = dec(b.\alpha)$. C'est gentil, mais ce n'est pas encore $a = b$.

Pourquoi le fait que a.$\sqrt{2}$et b.$\sqrt{2}$ aient les mêmes parties décimales entrainerait il que a soit égal à b ?

On écrit $a.\alpha = [a.\alpha] + dec(a.\alpha)$ et $b.\alpha = [b.\alpha] + dec(b.\alpha)$.
L'égalité de $dec(a.\alpha)$ et $dec(b.\alpha)$ donne alors $a.\alpha - [a.\alpha] = b.\alpha - [b.\alpha]$. On fait passer d'un côté et de l'autre : $(a - b).\alpha = [a.\alpha] - [b.\alpha]$. On souligne ce qui est entier : $\underline{(a - b)}.\alpha = \underline{[a.\alpha]} - \underline{[b.\alpha]}$. En revanche, α est irrationnel.
Si a est différent de b, on divise : $\alpha = \dfrac{[a.\alpha] - [b.\alpha]}{a - b}$; le réel α est rationnel. C'est une contradiction.

On a prouvé en fait $(a \neq b)$ et $(a \ltimes b \text{ et } b \ltimes a) \Rightarrow$ contradiction. C'est une autre formulation de antisymétrie.

C'est cette propriété d'antisymétrie qui est perdue avec un α rationnel.

Enfin, non. On sait juste que pour α rationnel, ce raisonnement ne tient plus. Mais pourquoi n'y en aurait il pas un autre ?
Il faut donc vraiment un contre-exemple dans le cas α rationnel.

Prenons pour α un rationnel d'écriture $\dfrac{p}{q}$.
On a alors $dec(q.\alpha) = dec(2.q.\alpha) = 0$ puisque les deux nombres $q.\dfrac{p}{q}$ et $2.q.\dfrac{p}{q}$ sont entiers.
On a alors $q \ltimes 2.q$ et $2.q \ltimes q$. C'est bien un contre-exemple pour nier l'antisymétrie.
On a vraiment prouvé qu'on la perdait avec α rationnel.

On va utiliser cette propriété pour montrer plus loin que certains réels sont irrationnels.

On montre que α et $dec(\alpha)$ définissent la même relation d'ordre.
On pose donc $\beta = dec(\alpha)$.
Il faut montrer que si on a $a \ltimes b$ pour la relation issue de α, alors on a aussi $a \ltimes b$ pour la relation issue de β.

On prend a et b, on suppose $a \ltimes b$ pour l'ordre issu de α.
On traduit $dec(a.\alpha) \leqslant dec(b.\alpha)$ (objectif : $dec(a.\beta) \leqslant dec(b.\beta)$).

On calcule $dec(b.\beta) - dec(a.\beta) = (b.\beta - [b.\beta]) - (a.\beta - [a.\beta])$.
On remplace β par $\alpha - [\alpha]$ puisque telle est sa définition :

$$dec(b.\beta) - dec(a.\beta) = (b - a).\beta + [a.\beta] - [b.\beta]$$

$$dec(b.\beta) - dec(a.\beta) = (b - a).(\alpha - [\alpha]) + [a.\alpha - a.[\alpha]] - [b.\alpha - b.[\alpha]]$$

Mais comme $a.[\alpha]$ est un entier, "il sort de la partie entière" : $[a.\alpha - a.[\alpha]] = [a.\alpha] - a.[\alpha]$
et aussi $[b.\alpha - b.[\alpha]] = [b.\alpha] - b.[\alpha]$:

$$dec(b.\beta) - dec(a.\beta) = (b - a).(\alpha - [\alpha]) + ([a.\alpha] - a.[\alpha]) - ([b.\alpha] - b.[\alpha])$$

On simplifie : $dec(b.\beta) - dec(a.\beta) = (b-a).\alpha - +[a.\alpha] - [b.\alpha]$.
Par hypothèse "a est plus petit que b pour l'ordre issu de α", cette différence est positive.
On a donc, avec des notations $\forall(a,b),\ (a \ltimes_\alpha b \Rightarrow a \ltimes_{[\alpha]} b)$, et on constate même $\forall(a,b),\ (a \ltimes_\alpha b \Leftrightarrow a \ltimes_{[\alpha]} b)$.

Sur cette question, la difficulté était sans doutes déjà de comprendre la question.
Mais il faut s'attendre à ceci : une question de mathématiques n'est pas seulement "résoudre, calculer". C'est devenu raisonner. On n'est plus en train de passer le bac, on veut des ingénieurs, c'est à dire des gens qui raisonnement.
J'ai peur qu'à ce stade de l'année, il demeure même des élèves qui restent perplexes devant le corrigé, même après l'avoir lu : "que fallait il prouver, et pourquoi les lignes de formules que j'ai alignées n'ont aucun rapport avec la question".

I∼0) On prend $\alpha = \sqrt{2}$. Prouvez

x	$\sqrt{2}$	$2.\sqrt{2}$	$3.\sqrt{2}$	$4.\sqrt{2}$	$5.\sqrt{2}$	$6.\sqrt{2}$	$7.\sqrt{2}$
$[x]$	1	2	4	5	7	8	9

(et pas juste en disant $\sqrt{2} \simeq 1,41421$).
I∼1) Classez les entiers de 0 à 7 pour la relation $\ltimes$.

Cet α est bien irrationnel. On va avoir une relation d'ordre, mais sans rapport avec l'ordre usuel...

Pour prouver

x	$\sqrt{2}$	$2.\sqrt{2}$	$3.\sqrt{2}$	$4.\sqrt{2}$	$5.\sqrt{2}$	$6.\sqrt{2}$	$7.\sqrt{2}$
$[x]$	1	2	4	5	7	8	9

, on va établir des choses comme $1 \leqslant \sqrt{2} < 2$. On le prouve en montrant en fait $1 \leqslant 2 \leqslant 4$ puis en passant à la racine.

On fait de même avec les autres :

information	$1 \leqslant 2 < 4$	$4 \leqslant 4.2 < 9$	$16 \leqslant 9.2 < 25$	$25 \leqslant 16.2 < 36$	$49 \leqslant 25.2 < 84$	$64 \leqslant 36.2 < 81$	$81 \leqslant 49.2 < 100$
passage à la racine	$1 \leqslant \sqrt{2} < 2$	$2 \leqslant 2.\sqrt{2} < 3$	$4 \leqslant 3.\sqrt{2} < 5$	$5 \leqslant 4.\sqrt{2} < 6$	$7 \leqslant 5.\sqrt{2} < 8$	$8 \leqslant 6.\sqrt{2} < 9$	$9 \leqslant 7.\sqrt{2} < 10$
conclusion	$[\sqrt{2}] = 1$	$[\sqrt{2}] = 1$	$[3.\sqrt{2}] = 4$	$[4.\sqrt{2}] = 5$	$[5.\sqrt{2}] = 7$	$[6.\sqrt{2}] = 8$	$[7.\sqrt{2}] = 9$

Il existe aussi une version compacte :

$$1^2 \leqslant 2 < 2^2 \leqslant 4.2 < 3^2 < 4^2 \leqslant 9.2 < 5^2 \leqslant 16.2 < 6^2 < 7^2 \leqslant 25.2 < 8^2 \leqslant 36.2 < 9^2$$

$$1 \leqslant \sqrt{2} < 2 \leqslant 2.\sqrt{2} < 3 < 4 \leqslant 3.\sqrt{2} < 5 \leqslant 4.\sqrt{2} < 6 < 7 \leqslant 5.\sqrt{2} < 8 \leqslant 6.\sqrt{2} < 9$$

L'essentiel est de rédiger efficacement, proprement, lisiblement, sans lasser le lecteur par de longues explications répétitives, ni l'arnaquer par un "il est évident que".
Le boulot du matheux : "prouver ces inégalités par encadrement". Le boulot du physicien : "prouver par des presque égalités". Le boulot de l'ingénieur : "rendre la chose compréhensible".

Mais en quoi ceci nous avance-t-il ?

x	$dec(\sqrt{2})$	$dec(2.\sqrt{2})$	$dec(3.\sqrt{2})$	$dec(4.\sqrt{2})$	$dec(5.\sqrt{2})$	$dec(6.\sqrt{2})$	$dec(7.\sqrt{2})$
$[x]$	$\sqrt{2}-1$	$2.\sqrt{2}-2$	$3.\sqrt{2}-4$	$4.\sqrt{2}-5$	$5.\sqrt{2}-7$	$6.\sqrt{2}-8$	$7.\sqrt{2}-9$

Il reste à comparer deux à deux les nombres de la ligne du bas. Sans calculatrice. On veut des résultats exacts, et on veut aussi montrer qu'on mérite pour salaire plus que le prix d'une calculatrice ou d'un ordinateur (même une Pomme).

Par exemple, pour comparer $3.\sqrt{2}-4$ et $4.\sqrt{2}-5$, on étudie le signe de leur différence $\sqrt{2}-1$. Il est positif : $3.\sqrt{2}-4$ et $3.\sqrt{2}-4 \leqslant 4.\sqrt{2}-5$. On a donc $3 \ltimes 4$.
Comme on ne sait pas qui va gagner, on doit tous les comparer

	$\sqrt{2}-1$	$2.\sqrt{2}-2$	$3.\sqrt{2}-4$	$4.\sqrt{2}-5$	$5.\sqrt{2}-7$	$6.\sqrt{2}-8$	$7.\sqrt{2}-9$
$\sqrt{2}-1$	0	$\sqrt{2}-1$	$2.\sqrt{2}-3$	$3.\sqrt{2}-4$	$4.\sqrt{2}-6$	$5.\sqrt{2}-7$	$6.\sqrt{2}-8$
$2.\sqrt{2}-2$	$1-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}-2$	$2.\sqrt{2}-3$	$3.\sqrt{2}-5$	$4.\sqrt{2}-6$	$5.\sqrt{2}-7$
$3.\sqrt{2}-4$	$3-2.\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}-1$	$2.\sqrt{2}-3$	$3.\sqrt{2}-4$	$4.\sqrt{2}-5$
$4.\sqrt{2}-5$	$4-3.\sqrt{2}$	$3-2.\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}-2$	$2.\sqrt{2}-3$	$3.\sqrt{2}-4$
$5.\sqrt{2}-7$	$6-4.\sqrt{2}$	$5-3.\sqrt{2}$	$3-2.\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}-1$	$2.\sqrt{2}-2$
$6.\sqrt{2}-8$	$7-5.\sqrt{2}$	$6-4.\sqrt{2}$	$4-3.\sqrt{2}$	$3-2.\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}-1$
$7.\sqrt{2}-9$	$8-6.\sqrt{2}$	$7-5.\sqrt{2}$	$5-4.\sqrt{2}$	$4-3.\sqrt{2}$	$2-2.\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	0

Une fois rempli ce tableau de différences, on ne garde que celles qui sont positives :

	$dec(\sqrt{2})$	$dec(2.\sqrt{2})$	$dec(3.\sqrt{2})$	$dec(4.\sqrt{2})$	$dec(5.\sqrt{2})$	$dec(6.\sqrt{2})$	$dec(7.\sqrt{2})$
$dec(\sqrt{2})$		$\sqrt{2}-1$	$2.\sqrt{2}-3$	$3.\sqrt{2}-4$		$5.\sqrt{2}-7$	$6.\sqrt{2}-8$
$dec(2.\sqrt{2})$							$5.\sqrt{2}-7$
$dec(3.\sqrt{2})$	$3-2.\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}-1$		$3.\sqrt{2}-4$	$4.\sqrt{2}-5$
$dec(4.\sqrt{2})$		$3-2.\sqrt{2}$					$3.\sqrt{2}-4$
$dec(5.\sqrt{2})$	$6-4.\sqrt{2}$	$5-3.\sqrt{2}$	$3-2.\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}-1$	$2.\sqrt{2}-2$
$dec(6.\sqrt{2})$		$6-4.\sqrt{2}$		$3-2.\sqrt{2}$			$\sqrt{2}-1$
$dec(7.\sqrt{2})$							

Les signes obtenus nous renseignent de qui est le plus petit des deux :

	$dec(\sqrt{2})$	$dec(2.\sqrt{2})$	$dec(3.\sqrt{2})$	$dec(4.\sqrt{2})$	$dec(5.\sqrt{2})$	$dec(6.\sqrt{2})$	$dec(7.\sqrt{2})$
$dec(\sqrt{2})$		+	+	+		+	+
$dec(2.\sqrt{2})$							+
$dec(3.\sqrt{2})$	+	+		+		+	+
$dec(4.\sqrt{2})$		+					+
$dec(5.\sqrt{2})$	+	+	+	+		+	+
$dec(6.\sqrt{2})$		+		+			+
$dec(7.\sqrt{2})$							

Ce tableau antisymétrique permet de conclure

0	$\ltimes 5$	$\ltimes 3$	$\ltimes 1$	$\ltimes 6$	$\ltimes 4$	$\ltimes 2$	$\ltimes 7$

Évidemment, avec une calculatrice, on va très vite

n	1	2	3	4	5	6	7
$dec(n.\sqrt{2})$ à 10^{-2} près	$0,41$	$0,83$	$0,24$	$0,66$	$0,07$	$0,49$	$0,90$

Savoir non seulement calculer, mais aussi organiser son travail, voilà une part du métier d'ingénieur. D'ailleurs, ensuite, une fois qu'on est ingénieur, on organise son travail, et ce sont les autres qui calculent.

Pardon ? Vous avez tout fait à la calculatrice ?
Vade retro Satanas ! Allez rotir en enfer en salle de TP de physique.

Et vous avez fait confiance à votre calculatrice ?
Les deux profs d'info vous banissent.

$\sim$0) On définit les suites (p) et (q) par $p_0 = q_0 = 1$ et $p_{n+1} = p_n + 2.q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$. Montrez que ce sont deux suites d'entiers naturels strictement croissantes.
$\sim$1) Exprimez $p_{2.n+1}$ et $q_{2.n+1}$ à l'aide de $p_{2.n}$et $q_{2.n}$.
$\sim$2) Exprimez $p_{2.(n+1)}$ et $q_{2.(n+1)}$ à l'aide de $p_{2.n}$ et $q_{2.n}$.
$\sim$3) Montrez pour tout n : $(p_{2.n})^2 < 2.(q_{2.n})^2$, $(p_{2.n+1})^2 > 2.(q_{2.n+1})^2$ et $p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1} = 1$.
$\sim$4) Déduisez $p_{2.n} < q_{2.n}.\sqrt{2} < p_{2.n} + \dfrac{p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1}}{q_{2.n+1}}$.
$\sim$5) Quelle est la valeur de $dec(q_{2.n}.\sqrt{2})$?
$\sim$6) Déduisez que la suite $(q_{2.n}.\sqrt{2})$ est strictement décroissante pour $\ltimes$.
$\sim$7) Retrouvez que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

On définit $p_1 = q_1 = 1$ et $p_{n+1} = p_n + 2.q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$.
On initialise une récurrence sur n : $p_1$et q_1 sont des entiers naturels.
Si ensuite pour un n quelconque, $p_n$et $q_n$sont dans $\mathbb{N}$, alors $p_n + q_n$ et $p_n + 2.q_n$ y sont aussi (irait on jusqu'à invoquer la structure de monoïde ?).

L'hérédité est établie.

Pour la croissance, le mauvais réflexe est d'invoquer encore la récurrence.
Pourquoi ? Parce qu'il faut passer de $p_n \leqslant p_{n+1}$ à $p_{n+1} \leqslant p_{n+2}$, c'est à dire observer en même temps p_n, p_{n+1}et p_{n+2}.

Pour la croissance, il suffit de montrer que tout tout n, la différence $p_{n+1} - p_n$est positive.
Mais on a $p_{n+1} - p_n = 2.q_n$ dont on sait déjà qu'il est dans $\mathbb{N}^*$.
De même $q_{n+1} - q_n = p_n > 0$. Voilà, c'est aussi bête que ça.

Mais c'est surtout vous qui êtes bête si vous avez rempli des lignes pour ça...

On calcule : $p_{n+2} = p_{n+1} + 2.q_{n+1} = (p_n + 2.q_n) + 2.(p_n + q_n) = 3.p_n + 4.q_n$
et $q_{n+2} = p_{n+1} + q_{n+1} = (p_n + 2.q_n) + (p_n + q_n) = 2.p_n + 3.q_n$.
On a donc $\boxed{p_{2.n+1} = p_{2.n} + 2.q_{2.n} \text{ et } q_{2.n+1} = p_{2.n} + q_{2.n}}$
et aussi $\boxed{p_{2.n+2} = 3.p_{2.n} + 4.q_{2.n} \text{ et } q_{2.n+2} = 2.p_{2.n} + 3.q_{2.n}}$

Cette fois, en revanche, on n'échappe peut être pas à la récurrence pour prouver $(p_{2.n})^2 < 2.(q_{2.n})^2$.
On initialise : $(p_0)^2 = 1 < 2.(q_0)^2 = 2$.

On suppose pour un n quelconque $(p_{2.n})^2 < 2.(q_{2.n})^2$.
On calcule alors la différence au rang $n+1$: $2.(q_{2.(n+1)})^2 - (p_{2.(n+1)})^2 = 2.(2.p_{2.n} + 3.q_{2.n})^2 - (3.p_{2.n} + 4.q_{2.n})^2$ grâce à la question précédente (qui n'a pas compris que les questions s'enchaînent ?).
On développe

$$2.(q_{2.(n+1)})^2 - (p_{2.(n+1)})^2 = 2.(4.(p_{2.n})^2 + 12.p_{2.n}.q_{2.n} + 9.(q_{2.n})^2) - (9.(p_{2.n})^2 + 24.p_{2.n}.q_{2.n} + 16.(q_{2.n})^2)$$

Il reste $2.(q_{2.(n+1)})^2 - (p_{2.(n+1)})^2 = 2.(q_{2.n})^2 - (p_{2.n})^2$.
Et par hypothèse de récurrence, ceci est positif. Le principe de récurrence étend à tout n de $\mathbb{N}$.

En lisant le corrigé, certains vont peut être se dire "oh non ! ça tenait en quatre lignes". Ce sont là ceux qui auront suivi la pire des démarches : partir de $(p_{2.n})^2 < 2.(q_{2.n})^2$ et taper dessus pour arriver ou tenter d'arriver à $(p_{2.n+2})^2 < 2.(q_{2.n+2})^2$. Ceci n'a jamais été une démarche scientifique ni même intelligente.
Rappelons que pour prouver $A < B$, on ne tape sur rien. On calcule $B - A$ et on regarde si au final son signe est positif.

On s'intéresse ensuite aux différences $(p_{2.n+1})^2 - 2.(q_{2.n+1})^2$.
On initialise

$$(p_{2.n+1})^2 - 2.(q_{2.n+1})^2 = (1+2)^2 - 2.(1+1)^2 = 1$$

C'est positif.

On calcule ensuite pour un n donné $(p_{2.n+3})^2 - 2.(q_{2.n+3})^2 = (3.p_{2.n} + 4.q_{2.n})^2 - 2.(2.p_{2.n} + 3.q_{2.n})^2$.
Les mêmes double produits se simplifient, on voit encore $9 - 8$ et $18 - 16$: $(p_{2.n+3})^2 - 2.(q_{2.n+3})^2 = (p_{2.n+1})^2 - 2.(q_{2.n+1})^2$.
Bref, si à un rang n, on a $(p_{2.n+1})^2 - 2.(q_{2.n+1})^2$ strictement positif, on l'a encore au rang $n+1$.

On étudie ensuite la suite $(p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1})$ *(avec pour objectif de montrer qu'elle vaut toujours 1).*
On la note $u_n$et on calcule $u_{n+1} = p_{2.n+3}.q_{2.n+2} - p_{2.n+2}.q_{2.n+3}$.
On remplace

$$u_{n+1} = (3.p_{2.n+1} + 4.q_{2.n+1}).(2.p_{2.n} + 3.q_{2.n}) - (3.p_{2.n} + 4.q_{2.n}).(2.p_{2.n+1} + 3.q_{2.n+1})$$

Les $p_{2.n}.p_{2.n+1}$ s'en vont *(facteurs 6 et −6).*
Les $q_{2.n}.q_{2.n+1}$ s'en vont *(facteurs 12 et −12).*
Les $p_{2.n}.q_{2.n+1}$ restent, mais juste avec facteur $8 - 9$.
Les $p_{2.n+1}.q_{2.n}$ restent aussi, mais juste avec facteur $9 - 8$.
Bref, $u_{n+1} = p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1} = u_n$.
La suite u est constante. Elle reste donc égale à son premier terme : 1.
Tiens, on a réussi à prouver ce résultat finalement sans récurrence. On pouvait aussi montrer pour les deux premières que la suite $((p_{2.n+1})^2 - 2.(q_{2.n+1})^2)$ notée (w_n) était constante, donc de signe constant.

On doit déduire $p_{2.n} < q_{2.n}.\sqrt{2} < p_{2.n} + \dfrac{1}{q_{2.n+1}}$. On a déjà obtenu $(p_{2.n})^2 < 2.(q_{2.n})^2$. Comme tout y est positif, on passe au radical : $p_{2.n} < \sqrt{2}.q_{2.n}$. Bon début.

On a aussi prouvé $2.(q_{2.n+1})^2 < (p_{2.n+1})^2$. On passe à la racine $\sqrt{2}.q_{2.n+1} < p_{2.n+1}$.
On remplace : $\sqrt{2}.q_{2.n+1} < p_{2.n+1}$.
On a donc

$$\sqrt{2} < \frac{p_{2.n+1}}{q_{2.n+1}} = \frac{p_{2.n+1}}{q_{2.n+1}} - \frac{p_{2.n}}{q_{2.n}} + \frac{p_{2.n}}{q_{2.n}}$$

tout naturellement.
On réduit au dénominateur commun

$$\sqrt{2} < \frac{p_{2.n}}{q_{2.n}} + \left(\frac{p_{2.n+1}}{q_{2.n+1}} - \frac{p_{2.n}}{q_{2.n}}\right) = \frac{p_{2.n}}{q_{2.n}} + \frac{p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1}}{q_{2.n+1}.q_{2.n}}$$

On remultiplie par $q_{2.n}$ *(positif)* : $q_{2.n}.\sqrt{2} < p_{2.n} + \dfrac{p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1}}{q_{2.n+1}}$.
C'est la formule demandée *(et il n'était pas judicieux de remplacer $p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1}$ par 1 pour la trouver).*

Maintenant, on remplace par 1 : $p_{2.n} < q_{2.n}.\sqrt{2} < p_{2.n} + \dfrac{1}{q_{2.n+1}}$.
On a encadré $q_{2.n}.\sqrt{2}$ par l'entier $p_{2.n}$ et ce même entier augmenté d'un nombre plus petit que 1.
On ira même écrire $p_{2.n} < q_{2.n}.\sqrt{2} < p_{2.n} + \dfrac{1}{q_{2.n+1}} < p_{2.n} + 1$.
On extrait par définition la partie entière : $[q_{2.n}.\sqrt{2}] = p_{2.n}$.
On sort ce qu'il manque : $\boxed{dec(q_{2.n}.\sqrt{2}) = q_{2.n}.\sqrt{2} - p_{2.n}}$

On nous demande de montrer que la suite $(q_{2.n})$ est décroissante pour $\ltimes$.

On revient à la définition de $q_{2.n+2} \ltimes q_{2.n}$:

$$dec(q_{2.n+2}.\sqrt{2}) \leqslant dec(q_{2.n}.\sqrt{2})$$

C'est ce qu'on doit montrer ? On calcule une différence : $dec(q_{2.n}.\sqrt{2}) - dec(q_{2.n+2}.\sqrt{2})$.
On remplace par le résultat précédent :

$$dec(q_{2.n}.\sqrt{2}) - dec(q_{2.n+2}.\sqrt{2}) = (q_{2.n}.\sqrt{2} - p_{2.n}) - (q_{2.n+2}.\sqrt{2} - p_{2.n+2})$$

On regroupe

$$dec(q_{2.n}.\sqrt{2}) - dec(q_{2.n+2}.\sqrt{2}) = (q_{2.n} - q_{2.n+2}).\sqrt{2} - (p_{2.n} - p_{2.n+2})$$

Pour avoir le signe de cette quantité, on compare $(p_{2.n} - p_{2.n+2})^2$ et $(q_{2.n} - q_{2.n+2})^2.2$ (élévation au carré).
On effectue donc une différence $2.(q_{2.n} - q_{2.n+2})^2 - (p_{2.n} - p_{2.n+2})^2$.

Je vous laisse montrer par récurrence sur n que cette différence vaut toujours -4.
Ce signe négatif permet de conclure.

Attention, il y a un faux raisonnement :
une suite majorée par une suite décroissante est décroissante. Ceci est faux, et on a des contre-exemples.

On va déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Quand je dis déduire, je n'attends donc pas le "j'ai appris par cœur une démonstration l'an denier, je la ressors".
L'idée est ici d'exploiter ce qui précède.
On fait effectivement quand même un raisonnement par l'absurde.
Imaginons que $\sqrt{2}$ soit le rationnel $\dfrac{P}{Q}$.
Alors chaque $q_{2.n}.\sqrt{2}$ est un rationnel de la forme $\dfrac{P.q_{2.n}}{Q}$.
Quitte à poser la division euclidienne du numérateur, ceci s'écrit *entier* $+ \dfrac{r}{Q}$ avec r égal à à un entier entre 0 et $Q-1$.
La partie décimale $dec\left(\dfrac{P.q_{2.n}}{Q}\right)$ prend toujours les mêmes valeurs en nombre fini : $\dfrac{0}{Q}, \dfrac{1}{Q}, \dfrac{2}{Q}$ ou $\dfrac{Q-1}{Q}$.
Mais comment une suite ne prenant qu'un nombre fini de valeurs peut elle alors décroître strictement ?
On a notre contradiction.

D'accord, le prix à payer pour cette démonstration est plus lourd que la démonstration de Terminale.
Mais la preuve conduite ici est reproductible sur e, alors que celle de Terminale n'est pas exportable pour e.

~0) Écrivez un script Python qui pour n donné retourne deux liste : celle des p_k pour k de 0 à n et celle des q_k pour k de 0 à n. Par exemple, pour n égal à 5 elle devra répondre $[1, 3, 7, 17, 41, 99]$, $[1, 2, 5, 12, 29, 70]$.

On va initialiser deux entiers : `p = 1` et `q = 1`,
puis deux listes presque vides : `P = [1]` et `Q = [1]`.

Ensuite, on va faire une boucle où `k` sert juste de compteur : `for k in range(n)`.

On calcule chaque nouveau couple de termes `p,q = p+2*q, p+q`.

On mémorise ensuite `P.append(p)` et `Q.append(q)`.

On retourne le doublet de listes.

```
def racine(n) :
....p, q = 1, 1
....P, Q = [1], [1]
....for k in range(n) :
........p, q = p+2*q, p+q
........P.append(p)
........Q.append(q)
....return(P, Q)
```

L'affection simultanée `p, q = p+2*q, p+q` fait à la fois `p = p+2*q` et `q = p+q ;` en même temps.
Si vous écrivez `p = p+2*q` suivi de `q = p+q`, vous avez perdu l'ancienne valeur de `p`.
Si vous ne faites pas du simultané, vous pouvez taper `p = p+2*q` puis `q = p-q`.

Ou alors vous créez un tampon

```
a = p
b = q
p = a+2*b
q = a+b
```

I~0) On prend $\alpha = 5.\sqrt{2}$. J'ai trouvé les valeurs approchées suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$5.\sqrt{2}.n$	0	7.07	14.14	21.21	28.28	35.35	42.43	49.50	56.57	63.64	70.71	77.78	84.85	91.92

Un élève en déduit rapidement : la suite (n) des entiers est visiblement croissante pour l'ordre $\ltimes$. Montrez qu'il a tort.
I~1) Existe-t-il α vérifiant "(n) est croissante pour $\ltimes$" ?

On nous a donné

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$dec(5.\sqrt{2}.n)$	0	0.07	0.14	0.21	0.28	0.35	0.42	0.49	0.56	0.63	0.71	0.78	0.85	0.92

Certes, sur ces observations, on a

$$0 \ltimes 1 \ltimes 2 \ltimes 3 \ltimes 4 \ltimes 5 \ltimes 6 \ltimes 7 \ltimes 8 \ltimes 9 \ltimes 10 \ltimes 11 \ltimes 12 \ltimes 13$$

Mais ce n'est pas parce qu'une propriété est valable jusqu'au rang 13 qu'elle va se poursuivre jusqu'à l'infini.

On rappelle que la proposition $n \leqslant 100$ semble vraie pour beaucoup d'entiers si on fait l'expérience avec les premiers qu'on a sous la main. Peut on en déduire $n \leqslant 100$ pour tout entier naturel n ?

Au rang suivant, on voit croître encore le terme "derrière la virgule". Et il peut dépasser la virgule, non ?
En multipliant encore par 2 le réel $7.5.\sqrt{2}$, on obtient $98,994$ environ. La partie décimale a encore augmenté, mais elle n'a pas atteint 1.
Mais au rang suivant, on a de manière approchée $106,06$ ou $106,06$. La partie décimale s'effondre et tombe entre 0 et 1 :

$$0 \ltimes 15 \ltimes 1 \ltimes 2 \ltimes 3 \ltimes 4 \ltimes 5 \ltimes 6 \ltimes 7 \ltimes 8 \ltimes 9 \ltimes 10 \ltimes 11 \ltimes 12 \ltimes 13 \ltimes 14$$

La suite n'est vraiment plus croissante.

Proprement, $11\ 236 = 106^2 \leqslant 15^5.(25.2) = 11\ 250 < 11\ 449 = 107^2$.
On en déduit après passage à la racine : $[15.5.\sqrt{2}] = 106$.

On soustrait : $dec(15.5.\sqrt{2}) = 75.\sqrt{2} - 106$.
Ce nombre est plus petit que $dec(5.\sqrt{2})$ qui vaut $5.\sqrt{2} - 7$.
En effet, $75.\sqrt{2} - 106 < 5.\sqrt{2} - 7$ s'obtient en comparant $(70.\sqrt{2})^2$ et 99^2
(9 800 contre 9801, de peu, mais on gagne !).

De toutes façons, on doit pouvoir, dans cette suite des $dec(n.5.\sqrt{2})$ retrouver des $dec(q_{2.n}.\sqrt{2})$ qui vont en décroissant.

On cherche α tel que la suite (n) soit croissante pour $\ltimes$.
Comme α et $dec(\alpha)$ définissent le même ordre, on va supposer α entre 0 et 1.

Ceci revient à demander $n \ltimes n+1$ pour tout n (inégalité stricte, car $n+1 \neq n$).
On traduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ n.\alpha - [n.\alpha] < (n+1).\alpha - [(n+1).\alpha]$.
On fait passer d'un côté $\forall n \in \mathbb{N},\ [(n+1).\alpha] - [n.\alpha] < \alpha$.
Or, $[(n+1).\alpha] - [n.\alpha]$ est un entier naturel.

Si il est nul, on n'a pas d'information.

Mais on veut avoir cette minoration pour tout n. Or, il y a au moins un n pour lequel $[(n+1).\alpha] - [n.\alpha]$ est non nul.
En effet, si tel n'était pas le cas, on aurait $[(n+1).\alpha] = [n.\alpha]$ pour tout n. On aurait donc, quitte à remonter $[(n+1).\alpha] = [0.\alpha] = 0$ pour tout n. La suite des $n.\alpha$ resterait donc toujours entre 0 et 1, alors même qu'elle tend vers l'infini... On tient notre contradiction.
Comme $[(n+1).\alpha] = [n.\alpha]$ est non nul au moins une fois, il vaut 1 au moins une fois (c'est un entier).
Le réel αest donc au moins égal à 1.
Ceci contredit que α a été pris entre 0 et 1.

I$\sim$0) On prend $\alpha = e$ *(base des logarithmes népériens)*. Classez pour la relation $\ltimes$ les nombres 10^k pour k de 0 à 10.

On doit calculer $d(10^k.e)$ pour les premières valeurs de k, puis trier ces nombres.

On crée les listes arrondies

k	$10^k.e$	$dec(10^k.e)$
0	2.718281828459045 à 10^{-15} près	0.718 à 10^{-3} près
1	27.18281828459045 à 10^{-14} près	0.182 à 10^{-3} près
2	271.8281828459045 à 10^{-13} près	0.828 à 10^{-3} près
3	2718.281828459045 à 10^{-12} près	0.281 à 10^{-3} près
4	27 182.81828459045 à 10^{-11} près	0.818 à 10^{-3} près
5	271 828.1828459045 à 10^{-10} près	0.182 à 10^{-3} près
6	2 718 281.828459045 à 10^{-9} près	0.828 à 10^{-3} près
7	27 182 818.28459045 à 10^{-8} près	0.284 à 10^{-3} près
8	271 828 182.8459045 à 10^{-7} près	0.845 à 10^{-3} près
9	2 718 281 828.459045 à 10^{-6} près	0.459 à 10^{-3} près
10	27 182 818 284.59045 à 10^{-5} près	0.590 à 10^{-3} près

Bref, on lit les décimales de e en gardant à chaque fois un lot de trois.
On les classe ensuite

k	$dec(10^k.e)$
1	0.18281 à 10^{-5} près
5	0.18284 à 10^{-5} près
3	0.281 à 10^{-3} près
7	0.284 à 10^{-3} près
9	0.459 à 10^{-3} près
10	0.590 à 10^{-3} près
0	0.718 à 10^{-3} près
4	0.818 à 10^{-3} près
2	0.82818 à 10^{-5} près
6	0.82845 à 10^{-3} près
8	0.845 à 10^{-3} près
	$10^1 \ltimes 10^5 \ltimes 10^3 \ltimes 10^7 \ltimes 10^9 \ltimes 10^{10} \ltimes 10^0 \ltimes 10^4 \ltimes 10^2 \ltimes 10^6 \ltimes 10^8$

$\sim$0) Montrez pour tout entier naturel n : $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$ *(deux mots clefs à puiser dans le cours rien que pour cette question)*.
$\sim$1) Montrez que $\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ est une somme d'entiers *(on le notera A_n)*.
$\sim$2) Montrez $dec(n!.e) = \int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$ *(qu'on pourra noter I_n, $n \geqslant 2$)*.
$\sim$3) Montrez que la suite $(n!)$ est strictement décroissante pour la relation $\ltimes$.
$\sim$4) Déduisez que e est effectivement irrationnel.

On veut prouver

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$$

Il y a un n, on va essayer une récurrence sur n.

Pour n égal à 0, la somme ne contient qu'un terme. On doit prouver $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1}.\int_0^1 e^t.dt$. Et l'intégrale vaut $[e^t]_{t=0}^{t=1}$ ce qui fait $e-1$. On ajoute 1, on a e. C'est initialisé.

On suppose ensuite que pour un n quelconque, on a

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$$

On vise

$$e = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^{n+1}.dt$$

On part de $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$ et on intègre $\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$ par parties : $\left\{ \begin{array}{ccc} e^t & \hookrightarrow & e^t \\ (1-t)^n & \hookleftarrow & -\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \end{array} \right|$.

On gagne un terme égal à $\Big[-e^t.\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\Big]_{t=0}^{t=1}$ de valeur $\frac{1}{n+1}$, et le terme intégrale $\frac{1}{n+1}.\int_0^1 e^t.(1-t)^{n+1}.dt$ avec un signe plus.

On multiplie par $\frac{1}{n!}$:

$$\frac{1}{n!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^{n+1}.dt$$

Le terme $\frac{1}{(n+1)!}$ rejoint la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ qui devient $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}$.
Le terme $\frac{1}{(n+1)!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^{n+1}.dt$ devient le nouveau terme intégrale.
La formule est établie par récurrence sur n et intégration par parties.

La somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ semble avoir un rapport avec la question précédente. mais c'est surtout une somme d'entiers.

Quand on écrit avec des points de suspension : $\frac{n!}{k!} = \frac{1.2.3\dots k.(k+1)\dots n}{1.2\dots k}$. Il reste $(k+1).(k+2)\dots n$. C'est à chaque fois un produit d'entiers.

On peut passer par une récurrence. Mais attention, quand on passe de A_n à A_{n+1}, on ajoute un terme de plus dans la somme, mais on change aussi les numérateurs. Si vous y tenez : $A_{n+1} = (n+1).A_n + 1$. Mais est ce que ça vous semble évident à partir de $A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ et $A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!}$?

On met bout à bout quelques résultats précédents :

$$n!.e = n!.\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{n!}{n!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$$

On reconnaît $n!.e = A_n + I_n$ avec $I_n = \displaystyle\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$.
Déjà, A_n est entier. Ensuite, I_n est positive, comme intégrale d'une application positive.
Peut on montrer que I_n est plus petite que 1 ? Si tel est le cas, on aura séparé en "partie entière et partie décimale".
On majore tous les e^t par e :

$$I_n \leqslant \int_0^1 e.(1-t)^n.dt$$

On intègre e $-e.\dfrac{(1-t)^{n+1}}{n+1}$ entre 0 et 1. On a donc $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$. Dès que n a dépassé 2, ce majorant est bien plus petit que 1.
On a un entier et un réel entre 0 et 1 ; c'est ce réel qui mesure la partie fractionnaire.

Ayant, avec notre notation $dec(n!.e) = I_n = \displaystyle\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$, la question de la monotonie de $(n!.e)$ pour la relation $\ltimes$ se ramène à la comparaison de I_n et I_{n+1}.
Surtout, on ne tente pas de calculer I_n, on ne ferait que revenir en arrière avec la somme A_n et l'irrationnel e.
Pour savoir si on a $I_n \leqslant I_{n+1}$ ou $I_{n+1} \leqslant I_n$, on calcule leur différence et on en détermine le signe :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^t.\Big((1-t)^{n+1} - (1-t)^n\Big).dt$$

On a même

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^t.(1-t)^n.(1-t-1).dt$$

Sous l'intégrale, tout est positif, qu'il s'agisse de e^t, ou de $(1-t)^n$ ou de t. Ah, mais il reste un signe moins.
On a donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
Ayant $dec((n+1)!.e) = I_{n+1} < I_n = dec(n!.e)$, on identifie $(n+1)! \ltimes n!$.
Ceci étant vrai pour tout n, la suite $(2!,\ 3!,\ 4!, \dots n!, \dots)$ est strictement décroissante pour $\ltimes$.

On termine avec un petit raisonnement par l'absurde.
Si e était rationnel, de la forme $\dfrac{p}{q}$, la suite $(dec(n.e))$ ne prendrait qu'un nombre fini de valeurs.
En effet, ce seraient des $dec\Big(\dfrac{n.p}{q}\Big)$, ne prenant des valeurs que parmi 0, $\dfrac{1}{q}$, $\dfrac{2}{q}$ jusqu'à $\dfrac{q-1}{q}$.
Ne prenant des valeurs qu'en nombre fini, on ne pourrait pas avoir cette suite strictement décroissante qui prend, elle, une infinité de valeurs.
Et c'est ainsi, madame, que e est irrationnel !

I∼0) *A toutes fins utiles : $e \simeq 2.718281828459045$ à 10^{-15} près.* Si vous avez l'âme poétique, je vous rappelle que pour retenir les décimales de π, on peut faire appel à la phrase "QUE J'AIME À FAIRE CONNAÎTRE CE NOMBRE UTILES AUX SAGES, IMMORTEL ARCHIMÈDE" dans laquelle il suffit de compter le nombre de lettres de chaque mot *(convention : pour 0 un mot de dix lettres)*. Alors, trouvez moi une phrase pour e.

que	j'	aime	à	faire	connaître	ce	nombre	utile	aux	sages	immortel	Archimède
3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9

La phrase

TU AIDERAS À RAPPELER TA QUANTITÉ À BEAUCOUP DE DOCTEURS AMIS

a déjà été proposée. Qu'en pensez vous ?

Et pour le prof de SII, comme on arrondit $2 \simeq e \simeq 3 \simeq \pi$, on a juste besoin de « *oh* ».