LYCEE CHARLEMAGNE

Mardi 12 septembre

M.P.S.I.2

2023 2024

# IS01

♡ 0 ♡ Donnez les deux formes « classiques » de la dérivée de l'application tangente (avec preuve). 2 pt.
On veut retrouver la croissance par intervalles sans utiliser la dérivée. Trouvez le signe de $\tan(b)-\tan(a)$ pour $\dfrac{-\pi}{2}<a\leqslant b<\dfrac{\pi}{2}$. 2 pt.

---

♡ 1 ♡ Développez et simplifie $\cos(a+b+c)+\cos(a+b-c)+\cos(a-b+c)+\cos(a-b-c)$. 3 pt.

---

♡ 2 ♡ L'un des deux nombres $\sqrt{14+\sqrt{180}}+\sqrt{14-\sqrt{180}}$ et $\sqrt{14+\sqrt{180}}-\sqrt{14-\sqrt{180}}$ est un entier. Retrouve lequel, en calculant leurs carrés. 2 pt.

---

♡ 3 ♡ Résolvez $\sin^2(x)+\sin(x)+1=0$ d'inconnue réelle $x$. 3 pt.

---

♢ 0 ♢ Montrez par récurrence sur $n$ que pour tout $n$, $11^{n+2}+12^{2.n+1}$ est un multiple de 133 (on pourra poser $u_n=11^{n+2}+12^{2.n+1}$ et exprimer $u_{n+1}=11.u_n+\ldots$). 3 pt.

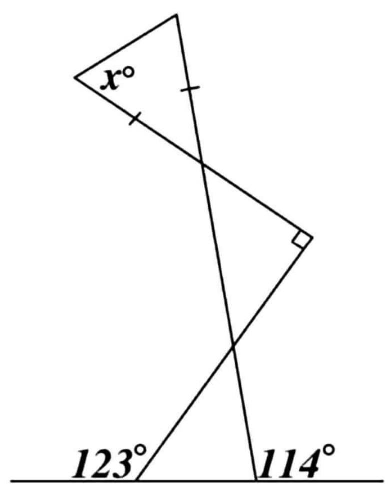
---

♢ 1 ♢ La suie de Fibonacci est définie par $F_0=0$, $F_1=1$ et $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ pour tout $n$.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | ... |

On constate : $0^2+1^2+1^2=1\times 2$, $0^2+1^2+1^2+2^2=2\times 3$, $0^2+1^2+1^2+2^2+3^2=3\times 5$, $0^2+1^2+1^2+2^2+3^2+5^2=5\times 8$, $0^2+1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2=8\times 13$. Écrivez le résultat général et démontrez le. 3 pt.

---




♢ 2 ♢ Montrez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k.(k+1)}.(1-k)}{k!}=\frac{1}{n!}$
pour tout entier naturel $n$. 2 pt.

---

♢ 3 ♢ Complétez
$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&\\1&1&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&&\\2&&\\&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6&\\&4&\\3&&\end{pmatrix}.$$ 2 pt.

---

♢ 4 ♢ Trouvez la valeur de l'angle $x$. 2 pt.

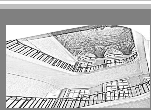
---

♢ 2 ♢ Donnez l'ensemble de solutions de chacune des équations suivantes d'inconnue réelle $x$ :

| $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|
| $\log_3(x).\log_x(2)=\log_3(2)$ | $\log_3(x)+\log_3(x)=\log_5(x)$ | $\log_3(x)+\log_x(2)=\log_3(2)$ |
| | | |
| $D$ | $E$ | $F$ |
| $\log_3(2).\log_2(3)=\log_x(x)$ | $\log_x(2)+\log_x(3)=\log_x(5)$ | $\log_3(x)+\log_x(2)=\log_2(3)$ |

LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 12 septembre
M.P.S.I.2

2023 2024
IS01
CORRECTION



Croissance de la tangente. IS01

On peut dériver le quotient avec la formule du cours :

$$\left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin'.\cos - \sin.\cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2}$$

Et en séparant en deux termes ou au contraire en utilisant le théorème de Pythagore

$$1 + \tan^2 = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

Ensuite, on se donne $a$ et $b$ vérifiant $\frac{-\pi}{2} < a \leqslant b < \frac{\pi}{2}$, puis on calcule :

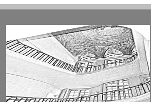
$$\tan(b) - \tan(a) = \frac{\sin(b)}{\cos(b)} - \frac{\sin(a)}{\cos(a)} = \frac{\sin(b).\cos(a) - \cos(b).\sin(a)}{\cos(a).\cos(b)}$$

Le dénominateur est positif (strictement) car les deux angles sont entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.
Le numérateur est $\sin(b-a)$. Et il est positif car l'encadrement $\frac{-\pi}{2} < a \leqslant b < \frac{\pi}{2}$ devient

$$\ldots < 0 \leqslant b - a < \frac{\pi}{2} - a \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi$$

$\tan(b) - \tan(a)$ est positif pour $a < b$, on reconnait que l'application est croissante.

*Elle n'est croissante que par intervalle. Mais sinon, on a quand même* $\frac{\pi}{4} < \pi$ *mais* $\tan(\pi/4) > \tan(\pi)$.



Somme de cosinus. IS01

En appliquant deux fois la formule en $\cos.\cos - \sin.\sin$ et $\cos.\sin + \sin.\cos$ on trouve

$$\cos(a+b+c) = (\cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)).\cos(c) - (\cos(a).\sin(b) + \sin(a).\cos(b)).\sin(c)$$

On a quatre termes. On remplace ensuite $c$ par $-c$ (seuls les $\sin(c)$ changent de signe) puis $b$ par $-b$ et ainsi de suite :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\cos(a+b+c) =$ | $\cos(a).\cos(b).\cos(c)$ | $-\sin(a).\sin(b).\cos(c)$ | $-\cos(a).\sin(b).\sin(c)$ | $-\sin(a).\cos(b).\sin(c)$ |
| $\cos(a+b-c) =$ | $\cos(a).\cos(b).\cos(c)$ | $-\sin(a).\sin(b).\cos(c)$ | $+\cos(a).\sin(b).\sin(c)$ | $+\sin(a).\cos(b).\sin(c)$ |
| $\cos(a-b+c) =$ | $\cos(a).\cos(b).\cos(c)$ | $+\sin(a).\sin(b).\cos(c)$ | $+\cos(a).\sin(b).\sin(c)$ | $-\sin(a).\cos(b).\sin(c)$ |
| $\cos(a-b-c) =$ | $\cos(a).\cos(b).\cos(c)$ | $+\sin(a).\sin(b).\cos(c)$ | $-\cos(a).\sin(b).\sin(c)$ | $+\sin(a).\cos(b).\sin(c)$ |

On surveille bien, certains termes ont deux signes moins.
En tout cas, en sommant, il reste juste une colonne :

$$\boxed{\cos(a+b+c) + \cos(a+b-c) + \cos(a-b+c) + \cos(a-b-c) = 4.\cos(a).\cos(b).\cos(c)}$$

*Sur ce type d'exercice, on va tester votre capacité à organiser votre travail, avec des tableaux, sans répéter quatre fois la même démarche, mais en se ramenant à ce qu'on a déjà fait.*

## Des racines imbriquées. IS01

Posons $A = \sqrt{14+\sqrt{180}} + \sqrt{14-\sqrt{180}}$ et $B = \sqrt{14+\sqrt{180}} - \sqrt{14-\sqrt{180}}$ (leur existence est assurée par $14^2 > 180$).
On calcule alors
$$A^2 = (14+\sqrt{180}) + (14-\sqrt{180}) + 2.\sqrt{(14+\sqrt{180}).(14-\sqrt{180})}$$
Sous la racine, on a $(14+\sqrt{180}).(14-\sqrt{180}) = 14^2 - 180 = 16 = 4^2$ et donc
$$A^2 = 2.14 + 2.\sqrt{(14+\sqrt{180}).(14-\sqrt{180})} = 28 + 2.4 = 36$$
On peut remonter à $\boxed{A = \sqrt{36} = 6}$ car $A$ est positif.

Quant à $B$, il donne
$$B^2 = (14+\sqrt{180}) + (14-\sqrt{180}) - 2.\sqrt{(14+\sqrt{180}).(14-\sqrt{180})} = 28 - 2.4 = 20$$
On trouve alors $B = 2.\sqrt{5}$ car là encore, $B$ est positif.

## Produit matriciel. IS01

Déjà, les formats sont compatibles, on nomme ensuite les coefficients qui manquent, puis on écrira les relations une par une :
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & c \\ 2 & d \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ e & 4 \\ 3 & f \end{pmatrix}$$
$1.1 + 2.2 + b = 5$ donc $b = 0$
$1.1 + 0.2 + a.b = e$ on y reviendra
$1.1 + 1.2 + -1.b = 3$ donc $b = 0$ et on reporte au dessus : $e = 1$

$1.c + 2.d + 1.0 = 6$ et $1.c + 0.d + a = 4$
On a un système à résoudre et on trouve $c$ puis $d$.

Le dernier produit calcule $f$ : $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}$

## Multiples de 133. IS01

Pour tout entier naturel $n$, on va noter $P_n$ la proposition « $11^{n+2} + 12^{2.n+1}$ est un multiple de 133 ».

> *Si on veut être rigoureux :* $\forall n \in \mathbb{N},\ \big((P_n) = (\exists \in \mathbb{N},\ 11^{n+2} + 12^{2.n+1} = k.133)\big)$
> *C'est un peu mieux que* $\forall n \in \mathbb{N},\ \big((P_n) = (\frac{11^{n+2} + 12^{2.n+1}}{133} \in \mathbb{Z})\big)$.
> *C'est mieux aussi que de dire* $(P_n) = (11^{n+2} + 12^{2.n+1} = 133.k\ k \in \mathbb{Z})$ *car dans celle ci, k est utilisé avant d'être quantifié.*
> *Et c'est bien entendu mieux que* $(P_n) = (11^{n+2} + 12^{2.n+1} = 133.k)$ *dans laquelle k n'a aucune quantification et aucune sens.*

On initialise avec $P_0$ en vérifiant que $11^2 + 12$ est un multiple de 133 (c'est 133).

On se donne un entier $n$ quelconque, et on suppose $P_n$varie. On écrit donc $11^{n+2} + 12^{2.n+1} = 133.k$ et même $11^{n+2} + 12^{2.n+1} = 133.k_n$ pour marquer que l'entier $k$ dépend de $n$.
On calcule alors $11^{(n+1)+2} + 12^{2.(n+1)+1}$ avec l'objectif de l'écrire $133.k_{n+1}$ (oui, un autre $k$ , donc on l'appelle $k_{n+1}$).

Et comme on veut faire intervenir l'hypothèse de récurrence,
on tente de faire venir $k_n$ et la formule $11^{n+2} + 12^{2.n+1} = 133.k_n$.

$$11^{(n+1)+2} + 12^{2.(n+1)+1} = 11.11^{n+2} + 12^2.12^{2.n+1} = 11.(133.k_n - 12^{2.n+1}) + 12^2.12^{2.n+1}$$

On a un premier multiple de 133 qui traine, on peut simplifier et développer

$$11^{(n+1)+2} + 12^{2.(n+1)+1} = 11.133.k_n - 11.12^{2.n+1} + 12^2.12^{2.n+1} = 11.133.k_n + (12^2 - 11).12^{2.n+1}$$

$$11^{(n+1)+2} + 12^{2.(n+1)+1} = 11.133.k_n + 133.12^{2.n+1}$$

C'est bon, le multiple de 133 est là. Si on en a besoin, on pose $k_{n+1} = 11.k_n + 12^{2.n+1}$.

Par initialisation et hérédité, la propriété est établie pour tout $n$.

*Cette année, on raisonnera aussi plus rapidement, avec des congruences.*
*Être multiple de 133 c'est d'être à la fois multiple de 7 et de 19. On va donc raisonner modulo 7 puis modulo 19.*
$11^{n+2} + 12^{2.n+1} = 4^{n+2} + 5^{2.n+1} = 4^n.16 + 25^n.5 = 2.4^n + 5.4^n = 7.4^n = 0$ *le tout modulo* 7
$11^{n+2} + 12^{2.n+1} = 11^2.11^n + 12.(12^2)^n = 7.11^n + 12.11^n = 19.11^n = 0$ *le tout modulo* 19.

## La suite de Fibonacci. IS01

On calcule les premiers termes :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 |

Le résultat qu'on semble avoir, c'est $\boxed{\sum_{k=0}^{n} (F_k)^2 = F_n.F_{n+1}}$

En notant $P_n$cette propriété, elle est initialisée par l'énoncé.
Pour l'hérédité, on se donne $n$ quelconque, on suppose $(F_0)^2 + (F_1)^2 + \ldots + (F_n)^2 = F_n.F_{n+1}$.
On ajoute un terme de plus à gauche :

$$\sum_{k=0}^{n+1} (F_k)^2 = \sum_{k=0}^{n} (F_k)^2 + (F_{n+1})^2$$

On reporte l'hypothèse de récurrence et on factorise :

$$\sum_{k=0}^{n+1} (F_k)^2 = F_n.F_{n+1} + (F_{n+1})^2 = (F_n + F_{n+1}).F_{n+1}$$

On remplace par la définition de la suite de Fibonacci :

$$\sum_{k=0}^{n+1} (F_k)^2 = F_n.F_{n+1} + (F_{n+1})^2 = (F_n + F_{n+1}).F_{n+1} = F_{n+2}.F_{n+1}$$

et c'est exactement la formule au rang $n + 1$.

## Somme. IS01

Pour tout entier naturel $n$, on note $P_n$ la propriété $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k.(k+1)}.(1-k)}{k!} = \frac{1}{n!}$. On l'initialise pour $n$ égal à 0 :

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^{k.(k+1)}.(1-k)}{k!} = \frac{(-1)^0.(1-0)}{0!} = 1 \text{ } et \text{ } \frac{1}{0!} = 1$$

On se donne un entier $n$ quelconque et on suppose $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k.(k+1)}.(1-k)}{k!} = \frac{1}{n!}$. On ajoute un terme de chaque côté

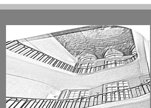
$$\frac{(-1)^{(n+1).(n+2)}.(1-(n+1))}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k.(k+1)}.(1-k)}{k!} = \frac{(-1)^{(n+1).(n+2)}.(1-(n+1))}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}$$

De $n+1$ et $n+2$ , l'un est pair (disjonction de cas : si $n$ est pair, c'est $n+2$ et si $n$ est impair, c'est $n+1$), le produit est pair, et $(-1)^{(n+1).(n+2)}$ vaut 1, c'est tout.
On a donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^{k.(k+1)}.(1-k)}{k!} = \frac{(1-(n+1))}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{(n+1)}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}$$

et on obtient $\dfrac{1}{(n+1)!}$ ce qui valide la propriété $P_{n+1}$. On termine avec le bout de phrase « initialisé et héréditaire donc vrai pour tout $n$ ».

*En éliminant les* $(-1)^{k.(k+1)} = 1$*, il reste* $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k-1)!}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}\right)$. *On décalle le* $k$ *de la seconde somme, et il ne reste que les termes extrèmes. On a en fait une somme télescopique.*



## Des logarithmes. IS01

Pour chaque équation, on donne déjà le domaine de définition (positivité de $x$ pour le logarithme de $x$, et condition $x \neq 1$ pour le logarithme de base x ) :

| $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|
| $\log_3(x).\log_x(2) = \log_3(2)$ | $\log_3(x) + \log_3(x) = \log_5(x)$ | $\log_3(x) + \log_x(2) = \log_3(2)$ |
| $D_f = ]0,\ 1[\cup]1,\ +\infty[$ | $D_f = ]0,\ +\infty[$ | $D_f = ]0,\ 1[\cup]1,\ +\infty[$ |
| $\frac{\ln(x)}{\ln(3)}.\frac{\ln(2)}{\ln(x)} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ | $\frac{\ln(x)}{\ln(3)} + \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = \frac{\ln(x)}{\ln(5)}$ | $\frac{\ln(x)}{\ln(3)} + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ |
| toujours vrai | impossible sauf si | second degré |
| $S = D_f = ]0,\ 1[\cup]1,\ +\infty[$ | $S = \{1\}$ | $S = \emptyset$ |
| | | |
| $D$ | $E$ | $F$ |
| $\log_3(2).\log_2(3) = \log_x(x)$ | $\log_x(2) + \log_x(3) = \log_x(5)$ | $\log_3(x) + \log_x(2) = \log_2(3)$ |
| $D_f = ]0,\ 1[\cup]1,\ +\infty[$ | $D_f = ]0,\ 1[\cup]1,\ +\infty[$ | $D_f = ]0,\ 1[\cup]1,\ +\infty[$ |
| $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}.\frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{\ln(x)}{\ln(x)}$ | $\frac{\ln(2)+\ln(3)}{\ln(x)} = \frac{\ln(5)}{\ln(x)}$ | $\frac{\ln(x)}{\ln(3)} + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$ |
| toujours vrai | impossible | $\Delta < 0$ |
| $S = D_f = ]0,\ 1[\cup]1,\ +\infty[$ | $S = \emptyset$ | $S = \emptyset$ |

Pour certaines, tous les réels $x$ sont solutions après simplification. Encore faut il que $x$ soit dans le domaine.

Pour le second degré $\dfrac{\ln(x)}{\ln(3)} + \dfrac{\ln(2)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$, on pose $X = \ln(x)$ (de signe quelconque), on multiplie par $X$ (et même par $X.\ln(3)$) l'équation $\dfrac{X}{\ln(3)} + \dfrac{\ln(2)}{X} - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)} = 0$, on trouve l'équation

$$X^2 - \ln(2).X + \ln(3) = 0$$

Son discriminant est négatif, elle n'a pas de solution.

Pour l'autre second degré $\dfrac{\ln(x)}{\ln(3)} + \dfrac{\ln(2)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$, on pose $X = \ln(x)$ (de signe quelconque), on multiplie par $X$ (et même par $X.\ln(2).\ln(3)$) l'équation $\dfrac{X}{\ln(3)} + \dfrac{\ln(2)}{X} - \dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$, on trouve l'équation $X^2.\ln(2) - \ln(2).\ln(3).X + (\ln(3))^2 = 0$. Son discriminant est une horreur, elle a peut être des solution.
Il faut quand même étudier le signe de $(\ln(2).\ln(3))^2 - 4.\ln(2).(\ln(3))^2$. C'est $(\ln(3))^2.\ln(2).(\ln(2)-4)$. Négatif, votre honneur !