LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 19 septembre
M.P.S.I.2

2023 2024

IS02

♡ 0 ♡ Factorisez $e^{i.a} - e^{i.b}$ par $e^{i.(a+b)/2}$ et retrouvez les formules de transformation de différences en produits. 2 pt.

◇ 0 ◇ $\dfrac{\sin(5.x) - \sin(2.x)}{\cos(5.x) + \cos(2.x)}$ est une tangente simple *(autre que* $\tan\left(Arctan\left(\dfrac{\sin(5.x) - \sin(2.x)}{\cos(5.x) + \cos(2.x)}\right)\right)$*)*. 2 pt.
Et au fait, quel est le domaine de définition de la première fraction ? 1 pt.

◇ 1 ◇ Simplifiez $i^{0!+1!+2!+3!+4!+\ldots+25!}$ où i est bien sûr le complexe de base. 2 pt.

♣ 0 ♣ Montrez $\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant \dfrac{5}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\dfrac{2.n+3}{n+4} - 2\right| \leqslant \varepsilon\right)$. 2 pt.

◇ 2 ◇ On pose $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ et $C = \{\alpha,\ \beta\}$. Y a-t-il plus d'applications non constates de A dans lui même que d'applications de C dans B ? 2 pt.

◇ 3 ◇ Calculez $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x.(1+\ln(x))^2}$, $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)}$, $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{e^x.dx}{1+2.e^x}$, $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{e^x.dx}{1+e^{2.x}}$, $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{dt}{1+e^{\cdot x}}$ 8 pt.

♣ 1 ♣ $237 \times 121 = 28347$. C'est vrai, mais en quelle base ? 2 pt.

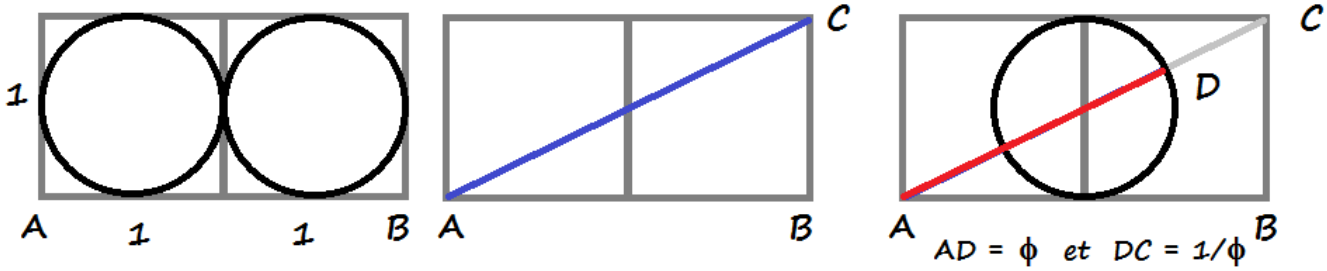
♯ 0 ♯ Vous devez calculer ce produit matriciel de trois matrices A, B et C à coefficients entiers. Quel sera le format de la matrice finale. Combine ferez vous d'additions et de multiplications d'entiers si vous calculez $(A.B).C$ Même question si vous calculez $A.(B.C)$? 4 pt.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 \\ b_2^1 & b_2^2 & b_2^3 \\ b_3^1 & b_3^2 & b_3^3 \\ b_4^1 & b_4^2 & b_4^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 & c_1^4 & c_1^5 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 & c_2^4 & c_2^5 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 & c_3^4 & c_3^5 \end{pmatrix}$$

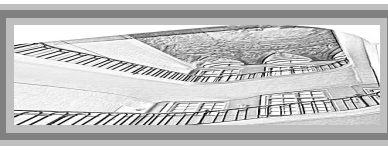
◇ 4 ◇ Pour montrer $Arctan\left(\dfrac{1}{13}\right) + Arctan\left(\dfrac{1}{21}\right) + Arctan\left(\dfrac{1}{43}\right) = Arctan\left(\dfrac{2}{11}\right) - Arctan\left(\dfrac{1}{31}\right)$, l'élève propose de calculer la tangente de chaque côté. Faites le, mais est ce suffisant ? 4 pt.

◇ 5 ◇ Donnez le domaine de $t \longmapsto Arctan\left(\frac{1+3.t}{3-t}\right)$, puis dérivez la.

♣ 2 ♣ Le nombre d'or (noté Φ) est la racine positive de l'équation $x^2 = x + 1$. Sur ce dessin, les carrés ont pour côté 1 et les cercles ont pour rayon 1/2. Montrez : $AD = \phi$ et $DC = \dfrac{1}{\phi}$. 3 pt.



LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2

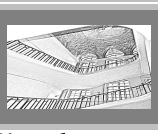


2023 2024

IS02
32- points

LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 19 septembre
M.P.S.I.2

2023 2024
IS02
CORRECTION



Trigonométrie. IS02

C'est du cours :

$$e^{i.a} - e^{i.b} = e^{i.\frac{a+b}{2}}.e^{i.\frac{a-b}{2}} - e^{i.\frac{a+b}{2}}.e^{i.\frac{b-a}{2}} = \left(e^{i.\frac{a-b}{2}} - e^{i.\frac{b-a}{2}}\right).e^{i.\frac{a+b}{2}}$$

$$e^{i.a} - e^{i.b} = 2.i.\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).\left(\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) + i.\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) = 2.\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).\left(-\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) + i.\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

On extrait de chaque côté la partie réelle et la partie imaginaire

$\Re e$	$\cos(a) - \cos(b)$	$=$	$-2.\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\Im m$	$\sin(a) - \sin(b)$	$=$	$2.\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Application :

$$\frac{\sin(5.x) - \sin(2.x)}{\cos(5.x) + \cos(2.x)} = \frac{2.\sin\left(\frac{5.x-2.x}{2}\right).\cos\left(\frac{5.x+2.x}{2}\right)}{2.\cos\left(\frac{5.x-2.x}{2}\right).\cos\left(\frac{5.x+2.x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{3.x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3.x}{2}\right)} = \tan\left(\frac{3.x}{2}\right)$$

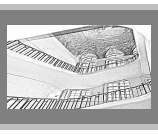
Problème de domaine : quand le dénominateur initial s'annule-t-il ?
On résout $\cos(5.x) - \cos(2.x) = 0$, ce qui revient à résoudre

$$2.\cos\left(\frac{3.x}{2}\right).\cos\left(\frac{7.x}{2}\right) = 0$$

On trouve deux familles de solutions | $\exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{3.x}{2} = \frac{\pi}{2} + k.\pi$ | $\exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{7.x}{2} = \frac{\pi}{2} + k.\pi$ |

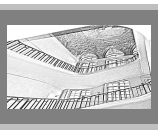
On a donc

$$D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{3} + 2.k.\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{7} + 2.k.\frac{\pi}{7} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$



Puisance de i. IS02

Les nombres de la forme i^N avec N entier ne dépendent que de la valeur de N modulo 4.
Or, dans la somme de factorielles, 4!, 5!, 6! et les suivants sont des multiples de 4.
Le nombre $i^{4!+\ldots+25!}$ vaut donc 1.
Il reste $i^{0!+1!+2!+3!}$ c'est à dire $i^{1+1+2+6}$. On trouve i^2 ce qui fait $\boxed{(-1)}$

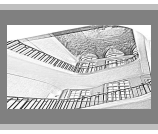


Dénombrement d'applications. IS02

A a trois éléments. Il y a donc 3^3 applications de A dans A (représentables par des triplets $(x,\ y,\ z)$ avec x, y ou z pouvant valoir chacun a, b ou c).
Mais il faut enlever les applications constantes. Combien y en a-t-il ? Exactement 3. L'application qui envoie tout le monde sur a, celle qui envoie tout le monde sur b et celle qui envoie tout le monde sur c (les trois triplets $(a,\ a,\ a)$, $(b,\ b,\ b)$ et $(c,\ c,\ c)$).
On a donc un total de $3^3 - 3$ applications non constantes de A dans A (on a raisonné ici par soustraction).

Et de C dans B, il y a 5^2 applications (des couples dont les deux éléments valent a, b, c, d ou e).

On termine avec $\boxed{5^2 = 25 > 24 = 3^3 - 3}$



Intégrales. IS02

On reconnaît suivant le modèle des formules en $u'.u$ ou $\frac{u'}{u}$ ou $\frac{u'}{1+u^2}$.

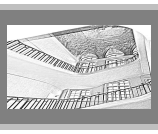
$$\int_1^2 \frac{\frac{dt}{t}}{1+(\ln(t))^2} = \Big[Arctan(\ln(t))\Big]_{t=1}^{t=2} = Arctan(\ln(2)) - Arctan(\ln(1)) = Arctan(\ln(2))$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} = \Big[\tan(\theta)\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

$$\int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{e^x.dx}{1+2.e^x} = \frac{1}{2}.\Big[\ln(1+2.e^x)\Big]_{\ln(2)}^{\ln(5)} = \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{1+2.e^{\ln(5)}}{1+2.e^{\ln(2)}}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{11}{5}}\right)$$

$$\int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{e^x.dx}{1+e^{2.x}} = \Big[Arctan(e^x)\Big]_{\ln(2)}^{\ln(5)} = Arctan(5) - Arctan(2)$$

$$\int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{dt}{1+e^{\cdot x}} = \frac{1}{1+e^x}.\int_{\ln(2)}^{\ln(5)} dt = \frac{\ln(5/2)}{1+e^x}$$

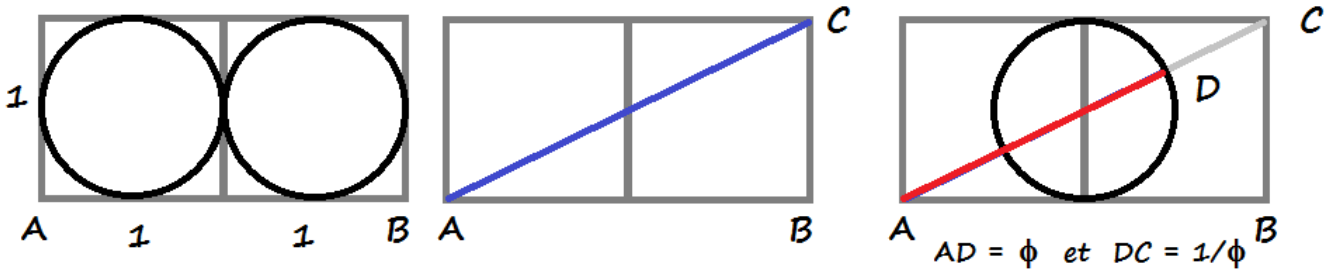


Nombre d'or. IS02

La résolution classique donne $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1}{\phi} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2.(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Le théorème de Pythagore donne $AC = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$. On commence bien. C'est cohérent avec $AD + DC = \sqrt{5}$ et $\phi + \frac{1}{\phi} = \sqrt{5}$

Ajoutons un trait de construction : le centre du cercle qu'on va noter I car la lettre C est déjà prise.

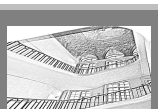


Le rayon ID est égal à $1/2$ puisque les cercles ont pour rayon $1/2$.

La longueur AI vaut $\frac{\sqrt{5}}{2}$ puisque c'est la demi diagonale (vous y voyez le théorème de Thalès ?).

On somme ou soustrait et on a bien

$$AD = AI + ID = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \; et \; DC = IC - ID = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$



Produit matriciel. IS02

On calcule déjà $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 \\ b_2^1 & b_2^2 & b_2^3 \\ b_3^1 & b_3^2 & b_3^3 \\ b_4^1 & b_4^2 & b_4^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \end{pmatrix}$

Les formats sont compatibles. On a six coefficients $\alpha_i^k = a_i^1.b_1^k + a_i^2.b_2^k + a_i^3.b_3^k + a_i^4.b_4^k$ et chacun nécessite quatre multiplications et trois additions.

Bilan provisoire

additions	multiplications
6×3	6×4

On continue avec $\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 & c_1^4 & c_1^5 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 & c_2^4 & c_2^5 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 & c_3^4 & c_3^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 & d_1^3 & d_1^4 & d_1^5 \\ d_2^1 & d_2^2 & d_2^3 & d_2^4 & d_2^5 \end{pmatrix}$ (formats compatibles).

Chacun des dix $d_i^k = \alpha_i^1.c_1^k + \alpha_i^2.c_2^k + \alpha_i^3.c_3^k$ va nécessiter trois multiplications et deux additions :

additions	multiplications
10×2	10×3

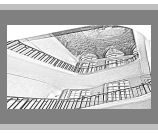
Bilan définitif :

additions	multiplications
$6 \times 3 + 10 \times 2 = 38$	$6 \times 4 + 10 \times 3 = 54$

Mais si on avait multiplié dans l'autre ordre ?

$\begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 \\ b_2^1 & b_2^2 & b_2^3 \\ b_3^1 & b_3^2 & b_3^3 \\ b_4^1 & b_4^2 & b_4^3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 & c_1^4 & c_1^5 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 & c_2^4 & c_2^5 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 & c_3^4 & c_3^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_1^2 & e_1^3 & e_1^4 & e_1^5 \\ e_1^1 & e_1^2 & e_1^3 & e_1^4 & e_1^5 \\ e_1^1 & e_1^2 & e_1^3 & e_1^4 & e_1^5 \\ e_1^1 & e_1^2 & e_1^3 & e_1^4 & e_1^5 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} e_1^1 & e_1^2 & e_1^3 & e_1^4 & e_1^5 \\ e_1^1 & e_1^2 & e_1^3 & e_1^4 & e_1^5 \\ e_1^1 & e_1^2 & e_1^3 & e_1^4 & e_1^5 \\ e_1^1 & e_1^2 & e_1^3 & e_1^4 & e_1^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 & d_1^3 & d_1^4 & d_1^5 \\ d_2^1 & d_2^2 & d_2^3 & d_2^4 & d_2^5 \end{pmatrix}$

additions	20×2	puis	10×3	soit	70 additions
multiplications	20×3	puis	10×4	soit	100 multiplications



Arctangentes. IS02

On va poser $a = Arctan\left(\frac{1}{13}\right)$, $b = Arctan\left(\frac{1}{21}\right)$, $c = Arctan\left(\frac{1}{43}\right)$, $d = Arctan\left(\frac{2}{11}\right)$ et $e = -Arctan\left(\frac{1}{31}\right)$. On a donc $\tan(a) = 1/13$ et ainsi de suite.

Avec la formule du cours $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a).\tan(b)}$ appliquée plusieurs fois, on a

$$\tan(a+b) = \frac{\frac{1}{13} + \frac{1}{21}}{1 - \frac{1}{13}.\frac{1}{21}} = \frac{\frac{13+21}{13.21}}{\frac{13.21-1}{13.21}} = \frac{13+21}{273-1} = \frac{34}{272} = \frac{1}{8}$$

$$\tan(a+b+c) = \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{43}}{1 - \frac{1}{8}.\frac{1}{43}} = \frac{43+8}{8.43-1} = \frac{51}{343}$$

$$\tan(d-e) = \frac{\frac{2}{11} - \frac{1}{31}}{1 + \frac{2}{11}.\frac{1}{31}} = \frac{2.31-11}{11.31+2} = \frac{51}{343}$$

A l'issue de ces calculs un peu moches, on a égalité.

Mais on a juste prouvé $\tan(a+b+c) = \tan(d-e)$ et pas $a+b+c = d-e$.

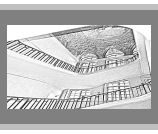
> *On dira au mieux que ce n'est pas incohérent. Mais ça ne prouve rien. C'est s'il n'y avait pas eu égalité (et certains ont peut être raté le calcul) qu'on aurait pû dire donc non, on n'a pas sinon les deux tangentes devraient être égales.*

Mais quand même, l'égalité des tangentes nous donne déjà $(a+b+c) = (d-e)\ [\pi]$ (cas d'égalité des tangentes).

Maintenant, tous nos arctangentes sont entre 0 et $\frac{\pi}{4}$ (arctangente de nombres entre 0 et 1). Le premier membre est donc entre 0 et $\frac{3.\pi}{4}$.

Et le second est entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$. Et même entre 0 et $\frac{\pi}{4}$ par croissance d'arctangente.

L'égalité modulo πdevient une égalité.



Base. IS02

On note b la base sur laquelle on travaille. Les nombres s'écrivant 237, 121 et 28347 sont donc $2.b^2+3.b.7$, $b^2+2.b+1$ et $2.b^4+8.b^3+3.b^2+4.b+7$. On a donc

$$(2.b^2+3.b+7).(b^2+2.b+1)=(2.b^4+8.b^3+3.b^2+4.b+7)$$

On développe : $2.b^4+7.b^3+15.b^2+17.b+7=2.b^4+8.b^3+3.b^2+4.b+7$.
On simplifie : $b^3-12.b^2-13.b=0$ (vous avez $b.(b^2-12.b+13)=0$).
La racine $b=0$ ne peut pas correspondre à une base. Et l'équation qui reste a une racine positive (c'est 13) et une racine négative (c'est -1) qu'on récuse.
On travaille donc ici en base 13 (et c'est cohérent pour nos chiffres).