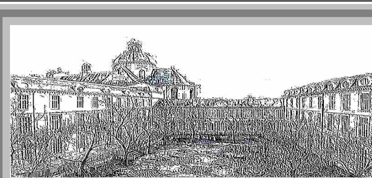
LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 26 septembre
M.P.S.I.2



2023 2024

IS03

♡ 0 ♡ Il parait qu'on a $Arctan(12) + Arctan\left(\frac{1}{7}\right) - Arctan\left(\frac{9}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$. Pouvez vous le prouver ? 3 pt.

♡ 1 ♡ Indiquez suivant la valeur du réel a combien le système $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & a \\ x & \times & y & = & a \end{array}\right|$ a de racines dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. 3 pt.

♡ 2 ♡ Calculez module et argument de ce complexe $\dfrac{(11+10.i).(1+i).(1+5.i)}{(9+19.i).(2+3.i).(1-i)}$ (réponse simple). 3 pt.

♢ 0 ♢ Donnez le domaine de définition de $\theta \longmapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}\right)$, simplifiez au maximum sa dérivée. 4 pt.

♢ 1 ♢ Complétez ce tableau. 4 pt.

	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\cos(2.x)$	$\sin(2.x)$	$\tan(2.x)$
$x = a$	$(3\times 5)/17$	positif				
$x = b$	positif		$-4/3$			
$x = a+b$				non demandé		

Ce qu'il faut comprendre : $\cos(a) = \dfrac{15}{17}$ et $\sin(a)$ est positif. Il faut calculer $\cos(2.a)$, $\sin(2.a)$, $\cos(a+b)$ et autres. Pensez à $a^2 - b^2 = (a-b).(a+b)$ pour que vos calculs soient simples, car les réponses sont des rationnels, que je vous demande sous forme factorisée comme dans l'énoncé (facteurs premiers).

♢ 2 ♢ θ est un angle de $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k.\pi,\ \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k.\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. On pose $t = \tan(\theta)$.

Montrez : $(1+i.t)^5.(1-i.\tan(5.\theta)) = (1-i.t)^5.(1+i.\tan(5.\theta))$ (formule notée $(*)$). 2 pt.

Montrez : $(a+i.b)^5 = (a^5 - 10.a^3.b^2 + 5.a.b^4) + i.(5.a^4.b - 10.a^2.b^3 + b^5)$
et $(a-i.b)^5 = (a^5 - 10.a^3.b^2 + 5.a.b^4) - i.(5.a^4.b - 10.a^2.b^3 + b^5)$. 2 pt.

En extrayant la partie imaginaire de la formule $(*)$, exprimez $\tan(5.\theta)$ à l'aide de $\tan(\theta)$. 2 pt.

Montrez : $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5 - 2.\sqrt{5}}$. 2 pt.

♢ 3 ♢ Résolvez dans $\mathbb{R}$ $4^{4^4} = \sqrt[128]{2^{2^{2x}}}$ d'inconnue x *(sachant qu'on écrit a^{b^c} pour désigner $a^{(b^c)}$ et pas $(a^b)^c$).* 2 pt.

♯ 0 ♯ On sait que la somme des premiers entiers $\sum_{k=1}^{n} k$ vaut $\dfrac{n.(n+1)}{2}$. On veut écrire une fonction Python qui retourne ce résultat. Lesquelles sont convenables ? Donnez les erreurs des autres. 3 pt.

```
def somme0(n) :
....return (1//2*n*(n+1)
```

```
def somme1(n) :
....return (n*(n+1))/2
```

```
def somme2(n) :
....return n*((n+1)//2)
```

```
def somme3(n) :
....return (n*(n+1))//2
```

♢ 4 ♢ On pose $f = x \longmapsto \dfrac{16.x - 13}{5.x - 4}$ et $g = x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$.

Déterminez $f \circ g \circ f \circ g \circ f \circ g$ (sans vous préoccuper du domaine de définition). 3 pt.

♢ 5 ♢ Un élève a trouvé $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{Arctan\left(\dfrac{a}{a^2+2}\right)}{a}$. Montrez qu'il a raison pour a strictement positif. 2 pt.

Que donne sa formule quand a tend vers 0 ? 2 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 26 septembre
M.P.S.I.2

2023 2024
IS03
CORRECTION

Arctangentes. IS03

On va prouver $Arctan(12)+Arctan\left(\frac{1}{7}\right)-Arctan\left(\frac{9}{8}\right)=\frac{\pi}{4}$ en calculant la tangente de chaque côté par la formule $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}$

$$\tan\left(Arctan(12)+Arctan\left(\frac{1}{7}\right)\right)=\frac{12+\frac{1}{7}}{1-12.\frac{1}{7}}=\frac{7.12+1}{7-12}=-\frac{85}{5}=-17$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+Arctan\left(\frac{9}{8}\right)\right)=\frac{1+\frac{9}{8}}{1-1.\frac{9}{8}}=\frac{8+9}{8-9}=-17$$

Les deux angles ont la même tangente. Les deux sont entre 0 et π (car somme de deux réels de $[0,\ \pi/2[$).
Et sur ce domaine, la tangente ne prend pas deux fois la même valeur (longueur du domaine inférieure ou égale à π). On passe donc de

$$\left(Arctan(12)+Arctan\left(\frac{1}{7}\right)\right)\equiv\left(Arctan\left(\frac{9}{8}\right)+\frac{\pi}{4}\right)[\pi]$$

à $Arctan(12)+Arctan\left(\dfrac{1}{7}\right)=Arctan\left(\dfrac{9}{8}\right)+\dfrac{\pi}{4}$.

Somme et produit des racines. IS03

Les couples solutions de $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & a \\ x & \times & y & = & a \end{array}\right|$ sont les racines du polynôme $X^2-a.X+a$.
On calcule le discriminant : $\Delta=a^2-4.a$. Son signe dépend de a.

	$a<0$	$a=0$	$0<a<4$	$a=4$	$4<a$
Δ	$\Delta>0$	0	$\Delta<0$	0	$\Delta>0$
x et y	$\frac{a-\sqrt{a.(a-4)}}{2}$ et $\frac{a+\sqrt{a.(a-4)}}{2}$	0 et 0	aucun	2 et 2	$\frac{a-\sqrt{a.(a-4)}}{2}$ et $\frac{a+\sqrt{a.(a-4)}}{2}$
couples	$(r_1,\ r_2)$ et $(r_2,\ r_1)$	$(0,\ 0)$	aucun	$(2,\ 2)$	$(r_1,\ r_2)$ et $(r_2,\ r_1)$
nombre de couples	2	1	0	1	2

On calcule son discriminant :

Un complexe. IS03

On calcule le module du complexe $\dfrac{(11+10.i).(1+i).(1+5.i)}{(9+19.i).(2+3.i).(1-i)}$:

$$\frac{|11+10.i|.|1+i|.|1+5.i|}{|9+19.i|.|2+3.i)||1-i|}=\frac{\sqrt{11^2+10^2}.\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{1^2+5^2}}{\sqrt{9^2+19^2}.\sqrt{2^2+3^2}.\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{221.2.26}}{\sqrt{442.13.2}}$$

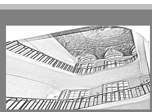
Tout se simplifie ! Le module vaut 1. Pour l'argument, on peut écrire

$$Arctan\left(\frac{10}{11}\right)+\frac{\pi}{4}+Arctan\left(\frac{5}{1}\right)\Big)-\left(Arctan\left(\frac{19}{9}\right)+Arctan\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)$$

Mais on peut aussi calculer notre complexe :

$$\frac{(11+10.i).(1+i).(1+5.i)}{(9+19.i).(2+3.i).(1-i)}=\frac{(11+10.i).(1+5.i)}{(9+19.i).(2+3.i)}.\frac{(1+i)}{(1-i)}=\frac{(11-50+10.i+55.i)}{(18-57+38.i+27.i)}.i=\frac{65.i-39}{65.i-39}.i$$

Évidemment que c'est un complexe de module 1 ! C'est i lui même. $\boxed{\text{Module 1, argument } \frac{\pi}{2}}$



Logarithme, racine et cosinus. IS03

On détaille notre fonction :

$$\theta \longmapsto \cos(\theta) \longmapsto \frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)} \longmapsto \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}} \longmapsto \ln\Big(\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}\Big)$$

(trigonométrie, homographie, racine, logarithme)

Le cosinus existe toujours. Et dans la dérivée, on a un $-\sin(\theta)$.
Pour l'homographie $c \longmapsto \dfrac{-c+1}{c+1}$ de matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, le cosinus ne doit pas valoir -1. On refuse les multiples impairs de π(bref $\mathbb{R} - \{(2.k+1).\Pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$). Et dans la dérivée on a $\dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(1+\cos(\theta))^2}$.
Pour la racine, il faut que le quotient soit positif. Mais $1-\cos(\theta)$ varie entre 0 et 2 et $1+\cos(\theta)$ varie aussi entre 0 et 2. Pas de nouvelle contrainte sur le domaine. On a ensuite le facteur $\dfrac{1}{2}$ et l'exposant $-\dfrac{1}{2}$ de la dérivation de $x \longmapsto x^{1/2}$. On a cette fois $\dfrac{1}{2.\sqrt{\dfrac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}}$.

Enfin, le logarithme impose la positivité de la racine. Pas de problème à première vue. Mais c'est stricte positivité. On doit donc éviter cette fois $\cos(\theta) = 1$. Même les multiples pairs de π sautent.

Au final, on élimine tous les multiples de π

$$D_f = (\mathbb{R} - \pi.\mathbb{Z}) = (\mathbb{R} - \{p.\pi \mid p \in \mathbb{Z}\}) = \Big(\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}]p.\pi,\ (p+1).\pi[\Big)$$

Et en mettant bout à bout nos dérivées calculées au bons points :

$-\sin(\theta)$	$\times\dfrac{-2}{(1+\cos(\theta))^2}$	$\times\dfrac{1}{2.\sqrt{\dfrac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}}$	$\times\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}}$

Il ne reste plus qu'à simplifier cette horreur.

Mais cette démarche est idiote. En faisant ceci on s'est empressé d'appliquer des formules en montrant : « tu vois, je sais calculer ». Et si finalement on savait ne pas se fatiguer ?
$\ln(\sqrt{u})$ c'est juste $\dfrac{\ln(u)}{2}$ plus facile à dériver.
Et le logarithme d'un quotient, c'est la différence des logarithmes.
Ré-écrivons notre fonction $\theta \longmapsto \dfrac{\ln(1-\cos(\theta)) - \ln(1+\cos(\theta))}{2}$. Elle se dérive alors sans effort

$$\theta \longmapsto \frac{1}{2}.\Big(\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)} - \frac{-\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}\Big)$$

Mais si on réduit au dénominateur, il nous reste $2.\sin(\theta)$ au numérateur.
Et le dénominateur $(1-\cos(\theta)).(1+\cos(\theta))$ n'est autre que $\sin^2(\theta)$ (non nul sur notre domaine !).
Bref, il nous reste $\theta \longmapsto \dfrac{1}{2}.\dfrac{2.\sin(\theta)}{16\cos^2(\theta)}$ ce qui fat $\dfrac{1}{\sin(\theta)}$.

On a trouvé une autre primitive de $\dfrac{1}{\sin}$!

Mais en fait, si on regarde bien :

$$\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}} = \sqrt{\frac{2.\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2.\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = \sqrt{\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \left|\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$$

Trigonométrie. IS03

Connaissant $\cos(a) = \dfrac{15}{17}$ on calcule

$$\sin^2(a) = 1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2 = \frac{17^2 - 15^2}{17^2} = \frac{(17+15).(17-15)}{17^2} = \frac{32.2}{17^2} = \frac{64}{17^2} = \left(\frac{8}{17}\right)^2$$

Seul l'élève qui confond « mathématiques » avec « punition de l'école élémentaire » aura calculé $289 - 225$ *pour certes trouver la même chose !*

Le signe précisé nous permet de compléter et de trouver $\sin(a) = 8/17$. On trouve ensuite la tangente.
Les formules du cours nous donnent par exemple

$$\sin(2.a) = 2.\frac{8}{17}.\frac{15}{17} = \frac{2^4.3.5}{17^2} = \frac{240}{289}$$

	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\cos(2.x)$	$\sin(2.x)$	$\tan(2.x)$
$x = a$	$\dfrac{3.5}{17} = \dfrac{15}{17}$	$\dfrac{2^3}{17} = \dfrac{8}{17}$	$\dfrac{2^3}{3.5} = \dfrac{8}{15}$	$\dfrac{7.23}{17^2} = \dfrac{161}{17^2}$	$\dfrac{2^4.3.5}{17^2} = \dfrac{240}{289}$	$\dfrac{2^4.3.5}{17^2} = \dfrac{240}{161}$

Pour b on fait de même. On écrit

$$\frac{1}{\cos^2(b)} = 1 + \tan^2(b) = 1 + \frac{4^2}{3^2} = \frac{3^2+4^2}{3^2} = \frac{25}{3^2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

Le signe nous donne la valeur du cosinus et le sinus (égal à $\tan(b).\cos(b)$) est forcément négatif.

	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\cos(2.x)$	$\sin(2.x)$	$\tan(2.x)$
$x = b$	$\dfrac{3}{5}$	$-\dfrac{4}{5}$	$-\dfrac{4}{3}$	$-\dfrac{7}{5^2}$	$-\dfrac{2^3.3}{5^2} = \dfrac{-8}{25}$	$\dfrac{2^3.3}{7} = \dfrac{24}{7}$

Pour l'angle $a+b$, les formules donnent par exemple

$$\cos(a+b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b) = \frac{15}{17}.\frac{3}{5} + \frac{8}{17}.\frac{4}{5} = \frac{45+32}{5.17} = \frac{7.11}{5.17}$$

Pour le sinus, on trouve de même $\dfrac{84}{85}$ ou, si je préfère : $\dfrac{2^2.3.7}{5.17}$.

Tangentes et multiplication de l'angle par 5. IS03

Quand on regarde $(1+i.t)^5.(1-i.\tan(5.\theta)) = (1-i.t)^5.(1+i.\tan(5.\theta))$, on pense à quoi ? Au cours avec $\dfrac{1+i.\tan(\theta)}{1-i.\tan(\theta)} = \dfrac{\cos(\theta)+i.\sin(\theta)}{\cos(\theta)-i.\sin(\theta)} = \dfrac{e^{i.\theta}}{e^{-i.\theta}} = e^{2.i.\theta}$.
La question se ramène, après « quotient en croix » : $(e^{2.i.\theta})^5 = e^{2.i.(5.\theta)}$:

$$\left(\frac{1+i.t}{1-i.t}\right)^5 = (e^{2.i.\theta})^5 = e^{2.i.(5.\theta)}\frac{1+i.\tan(5.\theta)}{1-i.\tan(5.\theta)}$$

On rappelle la formule du binôme [1]

$$(a+b)^5 = a^5 + 5.a^4.b + 10.a^3.b^2 + 10.a^2.b^3 + 5.a.b^4 + b^5$$

On remplace b par $i.b$: $(a+b)^5 = a^5 + 5.a^4.(i.b) + 10.a^3.(i.b)^2 + 10.a^2.(i.b)^3 + 5.a.(i.b)^5 + (i.b^5)$.
On simplifie les puissances de i et on regroupe partie réelle et partie imaginaire.

1. sinon on développe $(a^2+2.a.b+b^2).(a^2+2.a.b+b^2)$ puis $(a^4+4.a^3.b+6.a^2.b^2+4.a.b^3+b^4).(a+b)$

On recommence avec $-i.b$ à la place de b (ou avec $-b$ dans la dernière).

On repart ensuite de la formule $(1+i.t)^5.(1-i.\tan(5.\theta)) = (1-i.t)^5.(1+i.\tan(5.\theta))$ où on développe avec $a=1$ et $b=t$:

$$\Big((1-10.t^2+5.t^4)+i.(5.t-10.t^3+t^5)\Big).(1-i.\tan(5.\theta)) = \Big((1-10.t^2+5.t^4)-i.(5.t-10.t^3+t^5)\Big).(1+i.\tan(5.\theta))$$

On développe et on garde la partie imaginaire de chaque côté :

$$-(1-10.t^2+5.t^4).\tan(5.\theta)+(5.t-10.t^3+t^5) \;=\; (1-10.t^2+5.t^4).\tan(5.\theta)-(5.t-10.t^3+t^5)$$

On fait passer d'un même côté, et on simplifiera par 2 :

$$2.(5.t-10.t^3+t^5) \;=\; 2.(1-10.t^2+5.t^4).\tan(5.\theta)$$

On divise $\boxed{\tan(5.\theta) = \dfrac{5.\tan(\theta)-10.\tan^3(\theta)+\tan^5(\theta)}{1-10.\tan^2(\theta)+5.\tan^4(\theta)}}$

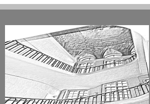
On pouvait aussi l'obtenir avec $\tan(2.\theta) = \dfrac{2.\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$, $\tan(4.\theta) = \dfrac{2.\tan(2.\theta)}{1-\tan^2(2.\theta)}$ *et enfin* $\tan(5.\theta) = \dfrac{\tan(\theta)+\tan(4.\theta)}{1-\tan(4.\theta).\tan(\theta)}$.

On applique en $\theta = \dfrac{\pi}{5}$ (dans notre domaine) :

$$\frac{5.\tan(\pi/5)-10.\tan^3(\pi/5)+\tan^5(\pi/5)}{1-10.\tan^2(\pi/5)+5.\tan^4(\pi/5)} = \tan(5.\pi/5) = 0$$

C'est donc que le numérateur est nul. Comme $\tan(\pi/5)$ est non nul, on élimine : $5-10.\tan^2(\pi/5)+\tan^4(\pi/5)$. Si on pose $T=\tan^2(\pi/5)$, on a $T^2-10.T+5=0$. On résout et on ne garde que la solution plus petite que 1 (car $\tan^2(\pi/5)$, c'est peu).

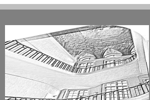
On revient à $\tan(\pi/5)$ par la racine (positive) : $\boxed{\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5-2.\sqrt{5}}}$



Equation en puissances. IS03

On raisonne par équivalences en passant au logarithme $4^{4^4} = \sqrt[128]{2^{2^{2^x}}} \Leftrightarrow 4^4.\ln(4) = \frac{1}{128}.\ln(2^{2^{2^x}})$
On remplace 128 par 2^7 et on effectue un produit en croix : $2^7.4^4.\ln(2^2) = 2^{2^x}.\ln(2)$
On simplifie par $\ln(2)$ et on regroupe les puissances de 2 : $2^7.2^8.2 = 2^{2^x}$
Finalement, en passant encore au logarithme de base 2 : $7+8+1 = 2^x$.
La solution est directe : $\boxed{x=4}$ (unique solution)

Pour information 4^{4^4} *=134078079299425970995740249982058461274793658205923933777235614437217640300735469768 0187429816690342769003185818648605085375388281194656994643364900608409 6*



Une intégrale avec un paramètre a. IS03

Pour a non nul, on factorise

$$\int_1^2 \frac{dx}{a^2+x^2} = \int_1^2 \frac{1}{a^2}.\frac{dx}{\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \frac{1}{a}.\int_1^2 \frac{\frac{dx}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}.\Big[Arctan\Big(\frac{x}{a}\Big)\Big]_1^1$$

On trouve

$$\frac{1}{a}.\Big(Arctan\Big(\frac{2}{a}\Big) - Arctan\Big(\frac{2}{a}\Big)\Big) \text{ et pas } \frac{1}{a}.Arctan\Big(\frac{a}{a^2+2}\Big)$$

Mais ces deux angles sont peut être égaux, comme $\ln(2)+\ln(3)$ est égal à $\ln(6)$.
Calculons la tangente de $Arctan\Big(\dfrac{a}{a^2+2}\Big)$ et de $Arctan\Big(\dfrac{2}{a}\Big) - Arctan\Big(\dfrac{2}{a}\Big)$.

On trouve $\dfrac{a}{a^2+2}$ et aussi $\dfrac{\frac{2}{a}-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}.\frac{2}{a}}$. Et après avoir multiplié haut et bas par a^2, on voit qu'il y a a égalité.

Les deux réels $Arctan\Big(\dfrac{a}{a^2+2}\Big)$ et

$$Arctan\Big(\frac{2}{a}\Big) - Arctan\Big(\frac{2}{a}\Big)$$

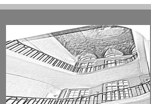
ont la même tangente. Ils sont entre 0 et $\dfrac{\Pi}{2}$ (le premier, c'est évident, et pour le second, c'est une distance entre deux réels de $\Big[0,\ \dfrac{\pi}{2}\Big[$). Ils sont égaux. L'élève a raison.

Et quand a tend vers 0 ? L'intégrale devient $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{0^2+t^2}$ c'est à dire $\Big[-\frac{1}{t}\Big]_{t=1}^{2}$. On trouve $\dfrac{1}{2}$.

Et notre autre formule ? On a une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ (proprement : $\dfrac{o(1)}{o(1)}$ pour dire « tend vers 0 » sur « tend vers 0 »). Mais si on écrit $\dfrac{Arctan\Big(\dfrac{a}{2+a^2}\Big)}{a} = \dfrac{Arctan\Big(\frac{a}{2+a^2}\Big)-Arctan(0)}{\dfrac{a}{a^2+2}}.\dfrac{1}{a^2+2}$

on a d'abord un taux d'accroissement de l'arctangente entre 0 et $\dfrac{a}{2+a^2}$. Il tend vers la dérivée en 0 de l'arctangente, ce qui fait $\dfrac{1}{1+0^2}$.

L'autre terme tend vers $\dfrac{1}{2}$. La formule reste cohérente.



Homographies. IS03

Partant de $f = x \longmapsto \dfrac{16.x-13}{5.x-4}$, $g = x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$, on définit $F = \begin{pmatrix} 16 & -13 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ et $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

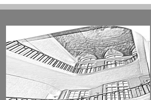
Le cours nous garantit que $f \circ g$ est une homographie de matrices $\begin{pmatrix} 16 & -13 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ce qui fait $\begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Mais il faut encore calculer $(f\circ g)\circ(f\circ g)\circ(f\circ g)$. Il nous suffit de calculer

$$\begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 13 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On refait le calcul pour être sûr de ne pas s'être trompé :

$$(f\circ g)\circ(f\circ g)\circ(f\circ g) = \Big(x \longmapsto \frac{x+0}{0.x+1}\Big) = (x \longmapsto x) = Id$$



Python. IS03

```
def somme0(n) :
....return (1//2*n*(n+1)
```

Non

Le premier facteur calculé c'est 1//2 et il vaut 0.
Quelle que soit la valeur de n on trouve 0.
En plus il manque une parenthèse !

```
def somme1(n) :
....return (n*(n+1))/2
```

Non

Le calcul est correct.
Mais pas pour le matheux. La division nous fait partir dans es flottants, avec une capacité limitée. Et par exemple pour $n = 6$ on trouve 21. (flottant) au lieu de 21 (entier). Et si n est grand ce calcul sera arrondi ! Cornegidouille quelle hérésie !

```
def somme3(n) :
....return n*((n+1)//2)
```

Non

On divise d'abord n+1. Mais s'il est impair ?
Exemple : $n = 6$. On va calculer $6*(7//2) = 6*3 = 18$ au lieu de $(6.7)/2$ qui vaut 21.

```
def somme3(n) :
....return (n*(n+1))//2
```

Oui

C'est la bonne formule.