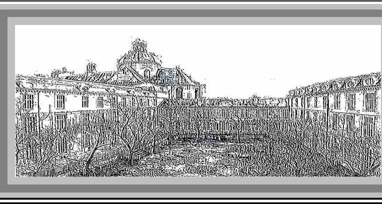
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 2 octobre
M.P.S.I.2



2023 2024

TD03

◦0◦ ♡ Sachant que $273 + 736.i$ a pour racine $23 + 16.i$, donnez les racines carrées de $273.i + 736$. Même question pour $273 - 736.i$.

◦1◦ ♡ Résolvez $\left(\dfrac{1+i.t}{1-i.t}\right)^4 - 2.\cos(\theta).\left(\dfrac{1+i.t}{1-i.t}\right)^2 + 1 = 0$ d'inconnue réelle t *(indication : posez $t = \tan(\alpha)$)*.

◦2◦ ♡ "$(p \Rightarrow q)$ *et* $(\overline{p} \Rightarrow q)$" est il bien équivalent à q ?
De "$(p \Rightarrow q)$ *et* $(q \Rightarrow \overline{p})$", que pouvez vous déduire sur p et sur q ?

◦3◦ « Un ministre, ça ferme sa gueule ou ça démissionne ».
Mettez sous forme d'implication (du type $p \Rightarrow q$ mais aussi $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$).

◦4◦ ♡ Décomposez $\prod_{k=1}^{20}(k!)$ puis $\prod_{k=1}^{20}\big(2.(k!)\big)$ en produit de facteurs premiers.

♠ Quel est l'exposant de 11 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de 10! et de $(\prod_{k=1}^{10}(k!))$?

◦5◦ ♣ Les chiffres du digicode (de 1 à 9) sont mis dans le désordre (comme pour les sites Internet qui veulent vérifier que vous n'êtes pas un bot). Exemple :

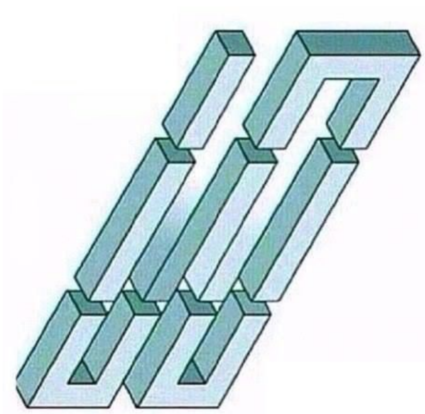
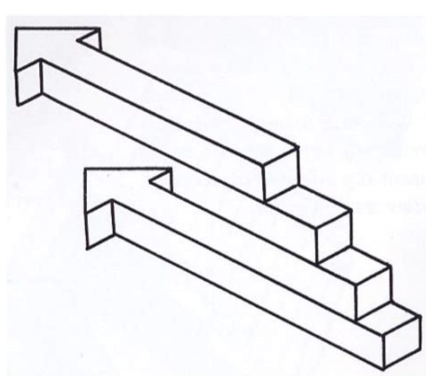
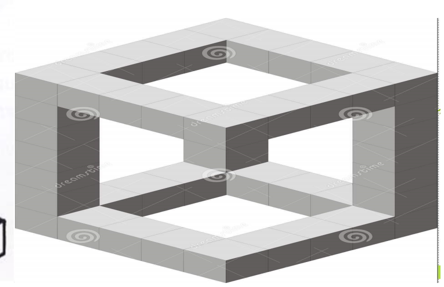
1	3	8
2	4	7
5	6	9

Montrez qu'il existe au moins une ligne où le produit des trois termes vaut au moins 72.
Donnez une situation où chacun des produits vaut au plus 72.

◦6◦ ♣ Un parallélépipède rectangle pour volume . Sa surface latérale vaut $96cm^2$. La somme des longueurs de ses arêtes vaut $48cm$. Calculez ses dimensions.

◦7◦ Résolvez $X^4 + 12.X = 5$ d'inconnue X sachant qu'il y a deux solutions dont le produit vaut -1.

◦8◦ Sachant $a + b + c = 1$, $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ et $a^3 + b^3 + c^3 = 3$ calculez $a^4 + b^4 + c^4$ (mais déjà aussi$a.b + a.c + b.c$ et $a.b.c$).

◦9◦ Le nombre d'écriture décimale *abcde* est un multiple de 41 (exemple $A = 43\,542$). Montrez que ses permutations *bcdea* (ici 35 424), *cdeab*, *deabc* et *eabcd* sont aussi des multiples de 41. Indication : $10.A - B$ et $2\,439 \times 41$.

∘10∘ Vrai ou faux : $\cos(x) = 1 \Rightarrow x = 0\ [\pi]$?

∘11∘ ♡ L'équation $x^2 + b.x + c = 0$ d'inconnue x admet pour racines α et β. Donnez *(sous forme développée)* l'équation polynomiale de racines α^2 et β^2.

L'équation $x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0$ d'inconnue x admet pour racines α, β et γ. Donnez l'équation polynomiale de racines α^2 et β^2 et γ^2.
Donnez l'équation polynomiale de racines $\alpha.\beta$, $\alpha.\gamma$ et $\beta.\gamma$.

∘12∘ ♡ On prend x et y dans $]-1,\ 1[$. Montrez que $\dfrac{x+y}{1+x.y}$ existe.
Montrez, en calculant la différence entre son carré et 1 qu'il est dans $]-1,\ 1[$ aussi.
On pose alors $x * y = \dfrac{x+y}{1+x.y}$. Montrez que c'est une loi interne, associative, commutative sur $]-1,\ 1[$. Trouvez son neutre (est il bien dans $]-1,\ 1[$?). Le symétrique d'un élément de $]-1,\ 1[$ est il dans $]-1,\ 1[$?
Résolvez $x * \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.
On prend a dans $]0,\ 1[$. On définit la suite (a_n) par $a_0 = a$ et $a_{n+1} = a_n * a$ (en fait, c'est donc $a * a * \ldots * a$ n fois). Montrez qu'elle est croissante et majorée. Montrez qu'elle converge, et que la seule valeur possible pour sa limite est 1.

∘13∘ Mon fils a tracé un carré, puis a calculé son périmètre et son aire. Et il a trouvé le même nombre. Quelle est la longueur du côté de ce carré.
∼0) Il me demande alors si il existe un triangle équilatéral dont l'aire est égale au périmètre. Je lui réponds oui. Mais quelle est cette valeur ?
∼1) N'y tenant plus, je me pose la question : quelle est la taille d'un hexagone régulier dont le périmètre et l'aire sont égaux ?

∼2) Tenant à généraliser *(tendance naturelle pour un matheux)*, je note, pour tout n, a_n la longueur du côté du polygone régulier à n côtés dont l'aire est égale au périmètre. Donnez moi la formule pour a_n, ainsi que pour le périmètre p_n associé.
∼3) Formé à bonne école, un élève généralise la question : pour quel rayon le périmètre du cercle égale-t-il l'aire du disque ? Et il y répond. Cette valeur commune du périmètre et de l'aire du cercle/disque est elle d'ailleurs la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

Ayant constaté que a_4 *(cas du carré)* est rationnel, tandis que a_3 et a_6 *(cas du triangle et de l'hexagone)* sont irrationnels, j'en viens à me demander pour quelles valeurs de n le réel a_n est rationnel. Regardons le cas $n = 5$. Montrez que $\cos(\pi/5)$ est racine de l'équation $(4.X^3 - 3.X) + (2.X^2 - 1) = 0$ d'inconnue réelle X. Calculez alors $\cos(\pi/5)$ et $\tan(\pi/5)$. Déduisez que a_5 est irrationnel.

∼4) Exprimez $\tan(a+b)$ à l'aide de $\tan(a)$ et $\tan(b)$ pour tout couple $(a,\ b)$ de réels convenables *(ni a, ni b, ni $a+b$ n'est dans $\{\frac{2.k+1}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$)*.
∼5) Exprimez $\tan(2.\theta)$, $\tan(3.\theta)$ et $\tan(4.\theta)$ à l'aide de $\tan(\theta)$, pour θ convenable *(par exemple compris entre 0 et $\pi/8$)*.
∼6) Montrez que pour tout n, il existe deux polynômes P_n et Q_n vérifiant $\tan(n.\theta) = \dfrac{P_n(\tan(\theta))}{Q_n(\tan(\theta))}$. Montrez qu'on peut écrire $P_{n+1}(X) = P_n(X) + X.Q_n(X)$ et exprimez alors Q_{n+1} à l'aide de $P_n$et Q_n.
∼7) Montrez que P_n et Q_n sont toujours à coefficients entiers.
∼8) Quel est leur degré ?
∼9) Exprimez P_{2n} et Q_{2n} à l'aide de $P_n$et Q_n.
∼10) Exprimez P_{2n+1} à l'aide de P_{2n-1} et Q_{2n-1}. Montrez que dans $P_{2n+1}(X)$ le terme en X^{2n+1} a pour coefficient $(-1)^n$.
∼11) On suppose qu'un rationnel α/β (α et β entiers sans diviseur commun) vérifie $P_{2n+1}(\alpha/\beta) = 0$. En multipliant par β^{2n+1} montrez que β divise α^{2n+1}.
∼12) Déduisez que les racines rationnelles de P_{2n+1} sont des entiers. Déduisez que a_{2n+1} est irrationnel.

∘14∘ Retrouvez les stations de métro (et R.E.R.) dont voici les anagrammes *(Nord)* :
Mon slip / *Le pédé phallocrate* / Valeur risible : lit pour profane / *Ta roue gauche* / Bachoter sa brochure / *Leur vocabulaire universel* / Nuit à inviter des seins.
Armé est triste / Bachoter sa brochure / Ce condor / Huitre de couloir / Les gaz du traitre / Mon étranger

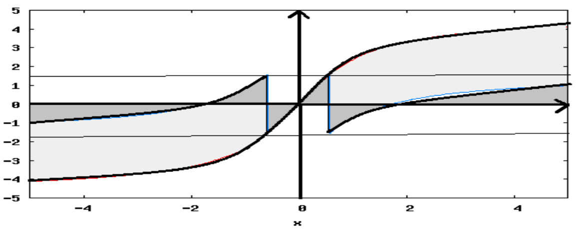
passa / Il est machin / Pas tuer / L'allergique et compétent / Sa chapelière / Pousser le marabout / Aussi pur amour de la voyelle.

◦15◦ ♡ Comparez pour l'ordre usuel $Arccos(5/7)$ et $Arcsin(7/10)$.

◦16◦ Justifiez que le mot « mot » a 3! anagrammes.
Justifiez que le mot « mélange » a 6! anagrammes si on distingue le e et le $é$, et la moitié sinon.
Justifiez que le mot « anagramme » a $\dfrac{9!}{3!.2!}$ anagrammes.

◦17◦ Résolvez le système $\log_x(y) + \log_y(x) = \dfrac{50}{7}$ et $x.y = 256$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$ *(rappel $y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$).*

◦18◦ ♡ Dérivez $t \longmapsto 3.Arctan\left(\dfrac{t^3 - 3.t}{t^2 - 3}\right)$ et $t \longmapsto Arctan\left(\dfrac{t^3 - 3.t}{3.t^2 - 1}\right)$.

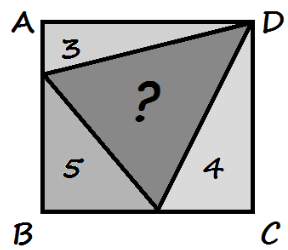


Expliquez ce graphe.

◦20◦

Montrez pour tout x entre 0 et 1 : $Arctan(x) \leqslant x$ et même $x - \dfrac{x^3}{3} \leqslant Arctan(x) \leqslant x$.

La grande figure est un carré. Les triangles ont les aires indiquées. Montrez que le triangle central a pour aire $4.\sqrt{6}$ ou 9 ou $5 + \sqrt{7}$.
Exercices sans rapport, mais c'est pour gagner de la place.



(A,B,C,D) est un carré. On connaît les aires de trois triangles. Calculez l'aire du dernier.

◦19◦ ♡ Résolvez $Arctan(x) + \dfrac{\pi}{6} = Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{\pi}{3}$ d'inconnue réelle x.

◦21◦ $♡^2$ Un classique joli. On se donne cinq réels positifs a_1 à a_5. Montrez qu'il en existe au moins deux : a_i et a_j $(i \neq j)$ vérifiant $\left|\dfrac{a_i - a_j}{1 + a_i.a_j}\right| \leqslant \sqrt{2} - 1$.
Indication : prenez leurs arctangentes, et placez les dans les intervalles $\left[k.\dfrac{\pi}{8},\ (k+1).\dfrac{\pi}{8}\right]$ pour k de 0 à 3.

◦22◦ Résolvez : $Arctan(x) + Arctan(2.x) = \dfrac{\pi}{4}$ d'inconnue réelle x.

◦23◦ Vrai ou vrai : $\forall x \in \mathbb{R},\ Arctan(x) = \dfrac{7.\pi}{3} \Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

◦24◦ ♡ Calculez ces trois là $\displaystyle\int_0^1 t^2.Arctan(t).dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{Arctan(t)}{1+t^2}.dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2.Arctan(t)}{1+t^2}.dt$.

◦25◦ ♡ Calculez $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{e^t + e^{-t}}$ en y trouvant l'arctangente cachée.

◦26◦ ♡ Un parallélépipède rectangle pour volume $180cm^3$. Sa surface latérale vaut $192cm^2$. La somme des longueurs de ses arêtes vaut $68cm$. Calculez ses dimensions.

◦27◦ Indiquez suivant la valeur de λ le nombre de racines réelles du polynôme $X^3 - 7.X^2 + 8.X + \lambda$ (tracez le graphe).

∘28∘ ♡ Classez les en fonction de leur argument :

3+4.i	34+45.i	346+443.i	512+641.i	100+127.i

(calculatrice interdite, quand même !)

∘29∘ Sachant $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$, calculez $\sin(3.\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$

• en appliquant la formule précédente pour $\theta = \frac{\pi}{2} - t$
• en dérivant la formule en cosinus
• en revenant aux formules de Moivre et Euler

∘30∘ ♡ Sachant $\tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}$, calculez $\tan(5.\pi/12)$.

∘31∘ Résolvez

$x^2 - 5.x + 6 < 0$	$(x^2 - 5.x + 6 < 0) \Rightarrow (x > 5)$	$(x > 5) \Rightarrow (x^2 - 5.x + 6 < 0)$
$x^2 - 5.x + 6 < 0$ ou $x > 5$	$x^2 - 5.x + 6 < 0$ et $x > 5$	$(x > 5) \Rightarrow (x^2 > 25)$

d'inconnue réelle x.

∘32∘ ♡ Sachant $a + b + c = 4$, $a^2 + b^2 + c^2 = 20$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6}$ calculez $a.b + a.c + b.c$ et $a.b.c$.
Donnez le polynôme de racines a, b et c. Calculez a, b et c.

∘33∘ ♣ On va prouver que i (de carré -1) est en fait un réel. Considérons l'équation $x = e^{x.\pi/2}$.
le complexe i en est évidemment racine.

Mais si x est racine de $x = e^{x.\pi/2}$, on a donc $x = e^{e^{x.\pi.2}.\pi/2}$ puis $x = e^{e^{e^{x.\pi/2}.\pi.2}.\pi/2}$ et recommencer.

On va donc poser $a = e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\cdots}}}}}$ avec une infinité de termes. Sachant $\infty = \infty + 1$, a est solution de l'équation.
On identifie : $a = i$. Et i se construit donc avec uniquement des réels...

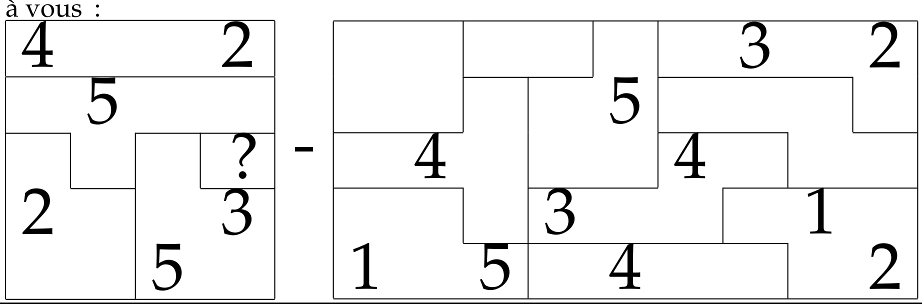
∘34∘ Vrai ou faux : $(1 = 0) \Rightarrow \Big((i^2 + 1 = 0) \Rightarrow (1 < 0)\Big)$ puis $\Big((1 = 0) \Rightarrow (i^2 + 1 = 0)\Big) \Rightarrow (1 < 0)$.

∘35∘ **Rappel des règles :** une maison de n cases contient les nombres de 1 à n, deux nombres égaux ne peuvent pas être côte à côte sur la grille, même en diagonale.

Exemple :

2	1	3	1
5	4	2	4
3	1	5	1
2	4	2	3
1	3	1	5

à vous :



∘36∘ Quantifiez : "*il suffit que je prenne une douche pour que le téléphone sonne*".
Je vous dis : "*quand les andouilles voleront, tu seras chef d'escadrille*". Que déduisez vous si

vous avez vu une andouille qui vole	aucune andouille ne vole	vous êtes chef d'escadrille

Quantifiez : "pour être diplomate, il ne suffit pas d'être bête, il faut aussi être poli" *(citation attribuée je crois à Clemenceau)*.

∘37∘ ♡ On sait $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, $a + b + c = 1$ et $a^2 + b^2 + c^2 = \alpha$ avec α réel.
Pour quelles valeurs de α les trois nombres a, b et c sont ils réels ?

∘38∘ Sachant qu'une des racines cubiques de $46.i - 9$ a pour partie réelle 3, retrouvez les trois racines cubiques.

∘39∘ Un rectangle a pour périmètre 12 unités. Entre combien et combien peut varier son aire. Quel est celui qui a la plus grande aire ?

∘40∘ ♡ Résolvez l'équation « $\frac{z+i}{z-i}$ est un imaginaire pur » d'inconnue complexe z *(décrire l'ensemble des solutions sous géométrique)*.

∘41∘ t est dans $]0,\ \pi[$. Prouvez l'existence de $\int_0^1 \frac{x-\cos(t)}{x^2-2.x.\cos(t)+1}.dx$ et calculez cette intégrale.

∘42∘ Résolvez l'équation $x^2+(1-5.i).\sqrt{2}.x=24$ d'inconnue complexe x.
Résolvez l'équation $e^z+(1-5.i).\sqrt{2}=24.e^{-z}$ d'inconnue complexe z.

∘43∘ ♡ Les a_k sont n réels strictement positifs ; montrez : $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right).\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\geqslant n^2$.

Ce n'est pas évident si on ne pense pas à étudier le signe et le discriminant du trinôme
$x^2.\sum_{k=1}^{n} a_k - 2.x.\sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$, mais une fois qu'on a vu ça, on se dit que c'est génial !

∘44∘ On prend pour un triangle les notations usuelles : sommets A, B et C, d'angles aux sommets α β et γ et de longueurs des côtes opposés aux sommets a, b et c. Un triangle est dit arithmétique si l'un de ses angles est moyenne arithmétique des deux autres. Un triangle est dit géométrique si l'un de ses côtés est moyenne géométrique des deux autres. Montrez que les triangles équilatéraux sont à la fois arithmétiques et géométriques.
Construisez un triangle arithmétique et un triangle géométrique qui ne soient pas équilatéraux *(donnez une construction à la règle et au compas, et donnez les coordonnées des sommets)*.
Peut il exister des triangles qui soient arithmétiques et géométriques à la fois sans être équilatéraux.

Rappel

arithmétique	géométrique	harmonique
$\frac{x+y}{2}$	$\sqrt{x.y}$	$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

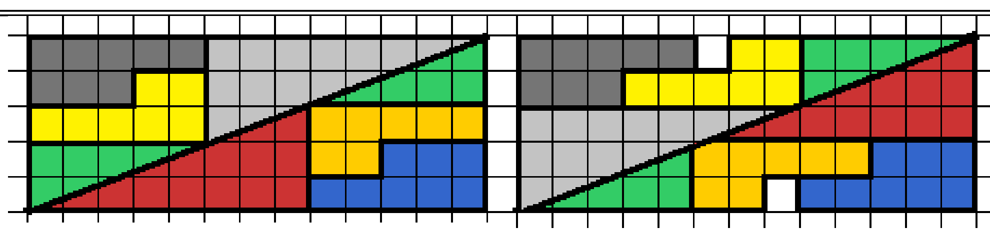
Rappel aussi : $\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}$ que je vous demande de démontrer en calculant de plusieurs façons une hauteur du triangle.

∘45∘ ♣ Donnez un sens à $x\longmapsto\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}}}$ et calculez l'intégrale de cette application de 0 à 1.

∘46∘ ♡ Simplifiez cette petite somme $5.Arctan\left(\frac{1}{7}\right)+2.Arctan\left(\frac{3}{79}\right)$.

∘47∘ ♡ L'équation $x^2+b.x+c=0$ d'inconnue x admet pour racines α et β. Donnez *(sous forme développée)* l'équation polynomiale de racines α^2 et β^2.

L'équation $x^3+b.x^2+c.x+d=0$ d'inconnue x admet pour racines α, β et γ. Donnez l'équation polynomiale de racines α^2 et β^2 et γ^2. Donnez l'équation polynomiale de racines $\alpha.\beta$, $\alpha.\gamma$ et $\beta.\gamma$.

∘48∘  Il y a un truc qui cloche, non ?

∘49∘ Soient a et b deux réels positifs ; qui est le plus grand : la moyenne arithmétique de leurs inverses ou l'inverse de leur moyenne arithmétique ?

∘50∘ Déjà posé pour degré 2.
♡ L'équation $x^2+b.x+c=0$ d'inconnue réelle x admet pour racines $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$. Calculez $\tan(\alpha+\beta)$ *(si elle existe...)*.

Rappel : $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *pour x hors de* $\left\{\frac{2.k+1}{2}.\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, *et* $\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}$ *tant que tout ceci existe.*

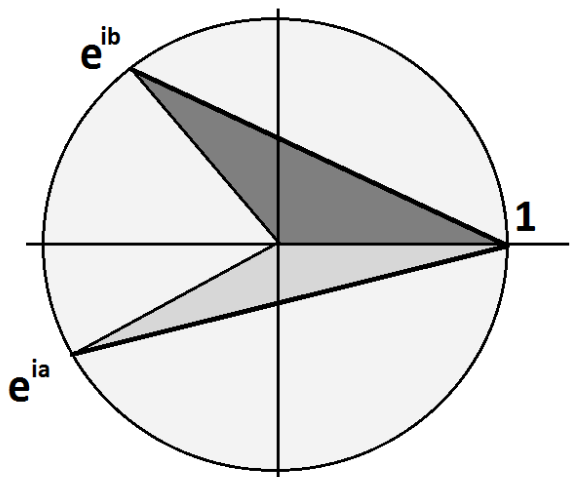
L'équation $x^3+b.x^2+c.x+d = 0$ d'inconnue réelle x admet pour racines $\tan(\alpha)$, $\tan(\beta)$ et $\tan(\gamma)$. Calculez $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$.

∘51∘ Calculez $Arctan\left(\frac{1}{7}\right)+2.Arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ (et sa tangente pour commencer ?).

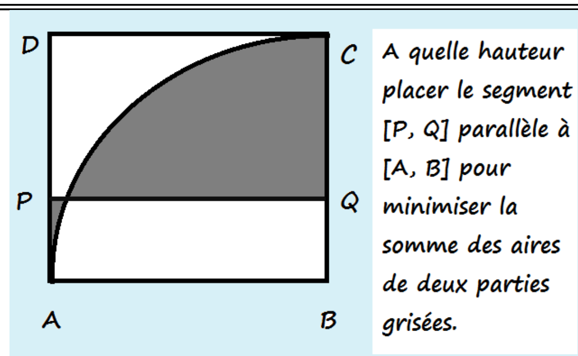
∘52∘ ♡ t est un réel fixé, θ est un réel de $]-\pi/2,\ \pi/2[$. Montrez : $\dfrac{1+i.\tan(\theta)}{1-i.\tan(\theta)} = e^{2.i.\theta}$.

Déterminez partie réelle et partie imaginaire de $\dfrac{1+i.t}{1-i.t}$ en utilisant la quantité conjuguée. retrouvez les formules en arc moitié.

∘53∘ ♡ a et b sont deux réels de $]0,\ 2.\pi[$. Calculez module et argument de $1-e^{i.a}$. Calculez l'argument de $\dfrac{1-e^{i.b}}{1-e^{i.a}}$. Retrouvez le théorème de l'arc capable *(dit aussi de l'angle au centre)* : si A et B sont deux points d'un cercle Γ de centre O, alors pour tout M de Γ, l'angle $\widehat{AMB}$ est constant *(égal à $\widehat{AMB}/2$)*. Trouvez les points M du plan vérifiant $\widehat{OMI}=\pi/2$ et $\widehat{OMJ}=\pi/4$?



∘54∘ Un carré. Un quart de cercle inscrit dans ce carré.
Un segment parallèle à un côté du carré.
Deux aires grisées.
Il faut placer le segment à la bonne hauteur pour minimiser l'aire grisée.
Des points si vous trouvez.



∘55∘ Un professeur fou propose de calculer les moyennes d'une suite de notes *(comprises entre 0 et $\pi/2$, si si !)* d'une façon étrange : l'arcsinus de la moyenne des sinus *(il existe toujours cet arcsinus ?)*. Écrivez un script `Python` qui le fait pour une liste L donnée. Sur trois devoirs, vous avez eu deux 0 et une autre note oubliée. Quelle moyenne maximale pouvez vous obtenir ?

∘56∘ Vrai ou faux :

a	$\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(x)=1\Rightarrow x=0\ [\pi]$
b	$\forall(\alpha,\theta)\in\mathbb{R}^2,\ (\lvert\theta\rvert=\lvert\alpha\rvert\ [2.\pi])\Rightarrow(\cos(\theta)=\cos(\alpha)\ [2.\pi])$
c	$\forall(\alpha,\theta)\in\mathbb{R}^2,\ (\lvert\theta\rvert=\lvert\alpha\rvert\ [2.\pi])\Leftrightarrow(\cos(\theta)=\cos(\alpha)\ [2.\pi])$
d	$\forall(\alpha,\theta)\in(\mathbb{R}-\{\frac{2.k+1}{2}.\pi \mid k\in\mathbb{Z}\})^2,\ (\theta=\alpha\ [\pi])\Leftrightarrow(\tan(\theta)=\tan(\alpha)\ [2.\pi])$

∘57∘ Associez les propriétés à leur nom

propriété				nom
$a\neq b$	$\Rightarrow$	$f(a)\neq f(b)$		f est croissante
a tend vers b	$\Rightarrow$	$f(a)$ tend vers $f(b)$		f est continue
$a<b$	$\Rightarrow$	$f(a)<f(b)$		f est continue pour le physicien
$a=b$	$\Rightarrow$	$f(a)=f(b)$		f est une application
$a\simeq b$	$\Rightarrow$	$f(a)\simeq f(b)$		f est injective
$a\leqslant b$	$\Rightarrow$	$f(a)\leqslant f(b)$		f est strictement croissante

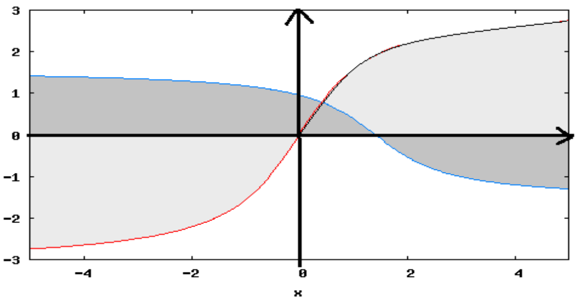
∘58∘ ♡ Simplifiez $\cos\left(Arccos\left(\frac{9}{\sqrt{82}}\right)+Arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\right)$.

∘59∘ Résolvez l'équation $|x+2.i|=15$ d'inconnue réelle x.
Résolvez l'équation $|x+2.i|=15$ d'inconnue complexe x.

∘60∘ ♡ On définit $f=x\longmapsto x^{-1/2}$. Calculez $f^{(n)}$ pour tout n. Montrez : $\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=(-1)^n.\frac{\binom{2.n}{n}}{4^n}$.

∘61∘ Montrez que $\log_{10}(5)+\log_{10}(3)$ est irrationnel.

∘62∘ ♡ Résolvez l'équation $2.Arctan(x)=Arctan(\sqrt{2}-x)$. Attention, pourquoi n'y a-t-il effectivement qu'une racine ?



∘63∘ On se donne deux réels a et b, on veut montrer : $-\sqrt{a^2+b^2}\leqslant a.\cos(x)+b.\sin(x)\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$. Pour cela, exprimez $(a^2+b^2)-(a.\cos(x)+b.\sin(x))^2$ à l'aide de $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, et montrez que le numérateur de cette fraction en t est un carré parfait. Concluez.

∘64∘ On pose $\alpha=Arccos\left(\frac{16}{65}\right)$, $\beta=Arcsin\left(\frac{11}{61}\right)$. Montrez que $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, , $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha+\beta)$ sont rationnels.

∘65∘ On définit : $h=x\longmapsto\frac{.x+\sqrt{5-2.\sqrt{5}}}{1-x.\sqrt{5-2.\sqrt{5}}}$. Justifiez $h\circ h\circ h\circ h\circ h=Id$.

∘66∘ Dérivez $x\longmapsto Arctan\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$ et simplifiez le au maximum.

∘67∘ Résolvez $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}=2$ d'inconnue réelle x.

∘68∘ Résolvez $2.z^2+(3.i-7).z+5-5.i=0$ d'inconnue complexe z.

∘69∘ a et b sont les racines de $X^2-S.X+P$ (P non nul). Calculez $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$.

∘70∘ On définit : $h=x\longmapsto\frac{.x+\sqrt{5-2.\sqrt{5}}}{1-x.\sqrt{5-2.\sqrt{5}}}$. Justifiez $h\circ h\circ h\circ h\circ h=Id$.

∘71∘ Montrez que $\cos\left(Arctan\left(\frac{33}{56}\right)+Arcsin\left(\frac{12}{37}\right)\right)$ est un rationnel positif.

∘72∘ Montrez : $\forall x\in\mathbb{R},\ (x\notin\mathbb{Q})\Leftrightarrow\Big(\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4,\ (a+b.x=c+d.x)\Leftrightarrow\big((a=c)\ et\ (b=d)\big)\Big)$.

∘73∘ Montrez que l'application $x\longmapsto x+\frac{4}{\pi}.Arctan(x)$ (notée f) réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminez $f^{-1}(2)$. En dérivant $f(f^{-1}(x))=x$ calculez aussi $(f^{-1})'(2)$. Est ce que $(f')^{-1}(2)$ existe ? Calculez $\int_0^2 f^{-1}(t).dt$.

∘74∘ Démontrez : $Arctan(2)+2.Arctan(3)+Arctan\Big(\frac{1}{5}\Big)+Arctan\Big(\frac{1}{8}\Big)=\frac{5.\pi}{4}$.

∘75∘ Trouvez les six solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^6+z^3.(z+1)^3+(z+1)^6=0$ *(il n'y a que si vous êtes masochiste que vous développerez tout ! trouvez le changement de variable)*. Calculez leur somme.

∘76∘

On m'a dit : « $2^{x/3}=3^{2/x}$ ». Mais que vaut alors $x^{2/3}$?

Si, je sais calculer ! C'est juste que ce calcul n'est pas en base 10. Alors,il est en base combien ?

$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & 5 & 0\\ & + & 3 & 4 & 6\\ & + & 6 & 5 & 1\\ \hline = & 1 & 1 & 1 & 7\end{array}$$

∘77∘ t est un réel fixé non nul ; décomposez en éléments simples $\frac{1}{(1+x^2).(1+(x-t)^2)}$ sous la forme $\frac{a.x+b}{1+x^2}+\frac{c.x+d}{1+(x-t)^2}$. Justifiez que $\ln\Big(\frac{a^2+1}{1+(a-t)^2}\Big)$ tend vers 0 quand a tend vers $+\infty$ (et vers $-\infty$). Montrez : $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2).(1+(x-t)^2)}=\frac{2.\pi}{t^2+4}$.

∘78∘ *Dans cinq secondes, tu pourras ignorer cet exercice, mais ce qu'on ne peut pas ignorer, c'est le échauffement climatique.*

Résolvez $\int_0^x\frac{dt}{t^2-6.t+10}=\frac{\pi}{4}$ d'inconnue rationnelle x.

∘79∘

I∼0) Exprimez $\cos(4.\pi/5)$, $\cos(6.\pi/5)$ et $\cos(9.\pi/5)$ en fonction de $\cos(\pi/5)$ *(noté c)*.
I∼1) Exprimez $\cos(2.\pi/5)$, $\cos(7.\pi/5)$ et $\cos(8.\pi/5)$ en fonction de $\cos(3.\pi/5)$ *(noté γ)*.
I∼2) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5+1=0$. Calculez leur somme, puis déduisez : $c+\gamma=\frac{1}{2}$.
I∼3) Déduisez que c et γ sont les racines de $4.X^2-2.X-1$, et explicitez c et γ.

I∼4) Démontrez que $\sqrt{5}$, c et γ sont irrationnels.
I∼5) Montrez pour k dans $\mathbb{N}-5.\mathbb{N}$: $\cos(k.\pi/5)\notin\mathbb{Q}$.

II∼0) On considère la suite $U_0(X)=1$, $U_1(X)=2.X$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+2}(X)=2.X.U_{n+1}(X)-U_n(X)$.
Calculez $U_n(X)$ pour n dans $range(6)$ *(tableau)*.
II∼1) Montrez que pour tout n, U_n est un polynôme, à coefficients entiers, de degré n, dont vous donnerez le coefficient dominant.
II∼2) Montrez pour tout n : $U_n(-X)=(-1)^n.U_n(X)$, exprimez ce résultat en termes de « fonction pair/impaire ».
II∼3) Calculez $U_n(1)$ et $U_n(-1)$ pour tout n.

II∼4) Rappelez la forme factorisée de $\sin(a)+\sin(b)$ et simplifiez $\cos(\theta).\sin((n+2).\theta)-\sin((n+1).\theta)$.
II∼5) Déduisez pour tout n et pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sin(\theta).U_n(\cos(\theta))=\sin((n+1).\theta)$.
II∼6) Déduisez que U_n admet n racines réelles distinctes que vous préciserez et donnez l'expression factorisée de $U_n(X)$ *(vous pourrez changer de variable en $\theta=Arccos(x)$, mais gare au domaine, et attention pour la forme factorisée)*.

III∼0) Pour tout n, on définit : $V_n(X)=U_n\Big(\frac{X}{2}\Big)$. Calculez $V_n(X)$ pour n de 0 à 5 *(tableau)*.

III∼1) On pose $V_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\mu_{n,k}.X^k$. Montrez que tous les $\mu_{n,k}$ sont dans $\mathbb{Z}$; que vaut $\mu_{n,n}$?

III∼2) On considère que x est une racine rationnelles de V_n d'écriture irréductible $x=\frac{p}{q}$ *(p dans $\mathbb{Z}$, q dans $\mathbb{N}^*$, sans facteur commun avec p)*. En considérant $q^n.V_n\Big(\frac{p}{q}\Big)$ et $q.\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\mu_{n,k}.p^k.q^{n-1-k}\Big)$, montrez : $q=1$.

III∼3) Montrez que les seules racines rationnelles de U_n sont dans $\Big\{-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\Big\}$.

IV∼0) Pour quelles valeurs de n le réel $\cos\Big(\frac{\pi}{n+1}\Big)$ est il rationnel ?

IV∼1) Montrez que $\cos\Big(\frac{\pi}{n+1}\Big)$ est irrationnel pour n strictement plus grand que 2, k dans $range(1,n+1)$ et $\frac{k}{n+1}$

irréductible. Montrez que $\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ est irrationnel pour n strictement plus grand que 2, k entier et $\dfrac{k}{n+1}$ irréductible.

V$\sim$0) Montrez $\forall x \in]-1,\ 1[,\ \sqrt{1-x^2}.U_n(x) = \sin((n+1).Arccos(x))$.

V$\sim$1) Déduisez $\forall x \in]-1,\ 1[,\ (1-x^2).U_n'(x) - x.U_n(x) = -(n+1).\cos((n+1).Arccos(x))$.

$$(1-x^2).U_n''(x) - 3.x.U_n'(x) + n.(n+2).U_n(x) = 0$$

V$\sim$2) On pose $U_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}.X^k$,

montrez : $\sum_{k=0}^{n} k.(k-1).\lambda_{n,k}.x^{k-2} + \sum_{k=0}^{n} (k.(1-k) + n.(n+2)).\lambda_{n,k}.x^k = 3.\sum_{k=0}^{n} k.\lambda_{n,k}.x^k$.

V$\sim$3) Déduisez $\lambda_{n,n-2.k} = \dfrac{(-1)^k}{2^{2.k}}.\dbinom{n-k}{k}.\lambda_{n,0}$. Explicitez U_{10}.

V$\sim$4) Écrivez une procédure Python qui pour n donné retourne la liste des coefficients de U_n (int -> list of int).