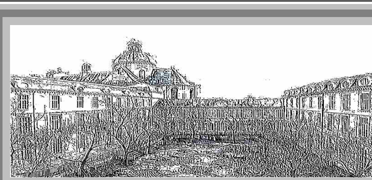
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 2 octobre
M.P.S.I.2



2023 2024

TD03

∘0∘ ♡ Sachant que $273+736.i$ a pour racine $23+16.i$, donnez les racines carrées de $273.i+736$. Même question pour $273-736.i$.

On peut vérifier quand même : $(23+16.i)^2 = 23^2-16^2+2.23.16.i = (23+16).(23-16)+32.23.i = 273+736.i$.
Les deux racines de $273+736.i$ sont donc $23+16.i$ et son opposé $-23-16.i$.

On écrit ensuite
$$273-736.i = \overline{273+736.i} = \overline{(23+16.i)^2} = \left(\overline{23+16.i}\right)^2$$
Les deux racines de $273-736.i$ sont donc $23-16.i$ et son opposé $-23+16.i$.

On écrit ensuite $273.i+736 = i.(273-736.i) = i.(23-16.i)^2$
Il serait bon d'écrire i comme carré de quelqu'un à son tour.
En passant par la forme polaire : $i = e^{i.\pi/2} = (e^{i.\pi/4})^2$.
On a donc $273.i+736 = (e^{i.\pi/4})^2.(23-16.i)^2$.
On tient donc une de ses racines carrées : $e^{i.\pi/4}.(23-16.i)$.
On peut l'écrire $\dfrac{\sqrt{2}+i.\sqrt{2}}{2}.(23-16.i)$.
Et on sort aussi son opposé.

∘1∘ ♡ Résolvez $\left(\dfrac{1+i.t}{1-i.t}\right)^4 - 2.\cos(\theta).\left(\dfrac{1+i.t}{1-i.t}\right)^2 + 1 = 0$ d'inconnue réelle t *(indication : posez $t = \tan(\alpha)$)*.

On pose déjà $X = \left(\dfrac{1+i.t}{1-i.t}\right)^2$ et on résout donc $T^2 - 2.\cos(\theta).T + 1 = 0$.
On trouve deux solutions à séparer : $X = e^{i.\theta}$ | $X = e^{-i.\theta}$

On remonte

$X = e^{i.\theta}$		$X = e^{-i.\theta}$	
$\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = e^{i.\theta/2}$	$\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = -e^{i.\theta/2}$	$\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = e^{-i.\theta/2}$	$\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = -e^{-i.\theta/2}$

On pourra même écrire

$X = e^{i.\theta}$		$X = e^{-i.\theta}$	
$\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = e^{i.\theta/2}$	$\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = e^{i.\theta/2+i.\pi}$	$\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = e^{-i.\theta/2}$	$\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = e^{-i.\theta/2+i.\pi}$

On résout ensuite des choses comme $\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = e^{i.\alpha}$.
On trouve $t = \dfrac{e^{i.\alpha}-1}{i.(1+e^{i.\alpha})}$ dont on peut se contenter.
Mais pourquoi ne pas multiplier haut et bas par $e^{i.\alpha/2}$?
$$t = \frac{e^{i.\alpha/2}-e^{-i.\alpha/2}}{i.(e^{i.\alpha/2}+e^{-i.\alpha/2})}$$
Mieux encore : $t = \dfrac{e^{i.\alpha/2}-e^{-i.\alpha/2}}{2.i}.\dfrac{2}{e^{i.\alpha/2}+e^{-i.\alpha/2}} = \sin(\alpha/2).\dfrac{1}{\cos(\alpha/2)}$.

On résume : $\boxed{S = \left\{\tan\left(\dfrac{\theta}{4}\right),\ \tan\left(\dfrac{\theta}{4}+\dfrac{\pi}{2}\right),\ \tan\left(-\dfrac{\theta}{4}\right),\ \tan\left(-\dfrac{\theta}{4}+\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}}$

On note que c'est un ensemble de a forme $\left\{t,\ \dfrac{-1}{t},\ -t,\ \dfrac{1}{t}\right\}$.

∘2∘ ♡ "$(p \Rightarrow q)$ *et* $(\overline{p} \Rightarrow q)$" est il bien équivalent à q ?
De "$(p \Rightarrow q)$ *et* $(q \Rightarrow \overline{p})$", que pouvez vous déduire sur p et sur q ?

On prend "$(p \Rightarrow q)$ *et* $(\overline{p} \Rightarrow q)$" qu'on met sous forme disjonctive "$(\overline{p}$ *ou* $q)$ *et* $(p$ *ou* $q)$".

On factorise en "$(\overline{p}\ et\ p)\ ou\ q$".
Mais on ne peut pas avoir une chose et son contraire : $\overline{p}\ ou\ p$ est Faux.
Et $Faux\ ou\ q$ ne laisse plus le choix : c'est q.

"$(p \Rightarrow q)\ et\ (q \Rightarrow \overline{p})$" semble luche.
Si on a p, alors par transitivité, on n'a pas p. Contradiction.
C'est donc que p est impossible.
En revanche, maintenant qu'on a $\overline{p}$, on n'a pas d'information sur q.

○3○ « Un ministre, ça ferme sa gueule ou ça démissionne ».
Mettez sous forme d'implication (du type $p \Rightarrow q$ mais aussi $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$).

On en a deux	si un ministre refuse de fermer sa gueule	alors il démissionne
	si un ministre ne veut pas démissionner	alors qu'il se taise

---

○4○ ♡ Décomposez $\prod_{k=1}^{20}(k!)$ puis $\prod_{k=1}^{20}\big(2.(k!)\big)$ en produit de facteurs premiers.

♠ Quel est l'exposant de 11 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de 10! et de $\big(\prod_{k=1}^{10}(k!)\big)$?

facteur	2	3	5	7	11	13	17	19
1 !								
2 !	2							
3 !	2	3						
4 !	2.2^2	3						
5 !	2.2^2	3	5					
6 !	$2.2^2.2$	3.3	5					
7 !	$2.2^2.2$	3.3	5	7				
18 !	$2.2^2.2.2^3.2.2^2.2.2^4.2$	$3.3.3^2.3.3.3^2$	$5.5.5$	7.7	11	13	17	
19 !	$2.2^2.2.2^3.2.2^2.2.2^4.2$	$3.3.3^2.3.3.3^2$	$5.5.5$	7.7	11	13	17	19
20 !	$2.2^2.2.2^3.2.2^2.2.2^4.2.2^2$	$3.3.3^2.3.3.3^2$	$5.5.5.5$	7.7	11	13	17	19
produit	2^{168}	3^{78}	5^{34}	7^{21}	11^{10}	13^{8}	17^{4}	19^{2}

C'est monstrueux et ça ne se fait quasiment que « à la main ».

On multiplie chaque facteur par 2. Sur le tableau du dessus, il y a une colonne de 20 facteurs 2.

produit	2^{188}	3^{78}	5^{34}	7^{21}	11^{10}	13^{8}	17^{4}	19^{2}

L'intérêt de la question est

$$\prod_{k=1}^{20}\big(2.(k!)\big) = \Big(\prod_{k=1}^{20}2\Big).\Big(\prod_{k=1}^{20}(k!)\Big) = 2^{20}.\prod_{k=1}^{20}(k!)$$

Ne vous laissez pas influencer par les sommes.

$$\sum_{k=1}^{20}\big(2.(k!)\big) = 2.\sum_{k=1}^{20}(k!)$$

mais

$$\sum\prod_{k=1}^{20}\big(2.(k!)\big) \neq 2.\prod_{k=1}^{20}(k!)$$

Dans 10!, pas de 11. L'exposant est nul.

Mais dans $(\prod_{k=1}^{10} k)!$ qui n'est autre que $(10!)!$, il va y en avoir.
Ce produit est $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 3628800$.
Il contient plein de facteurs 11. Il y en a un pour chaque multiple de 11. Et il y a 329890 multiples de 11.
Mais il en contient un de plus pour les multiples de 121. Et eux, ils sont 29990 (quotient entier de 10! par 121).
Et que dire des multiples de 11^3 ? Qu'ils apportent chacun trois facteurs 11 au moins. Donc chacun un de plus : 2726.
Et aussi les 247 multiples de 11^4.

Et les 22 multiples de 11^5.
Et les deux multiples de 11^6 : 1771561 et 3543122 qui sont bien plus petits que $10! = 3628800$.

Et après, c'est fini.
La formule est

$$\left[\frac{10!}{11}\right] + \left[\frac{10!}{11^2}\right] + \left[\frac{10!}{11^3}\right] + \left[\frac{10!}{11^4}\right] + \left[\frac{10!}{11^5}\right] + \left[\frac{10!}{11^6}\right]$$

Le résultat à encadrer est 11^{362877}.

∘5∘

♣ Les chiffres du digicode (de 1 à 9) sont mis dans le désordre (comme pour les sites Internet qui veulent vérifier que vous n'êtes pas un bot). Exemple :

1	3	8
2	4	7
5	6	9

Montrez qu'il existe au moins une ligne où le produit des trois termes vaut au moins 72.
Donnez une situation où chacun des produits vaut au plus 72.

On part de

a	b	c
d	e	f
g	h	i

sans savoir autre chose de plus que les lettres de a à i représentent les entiers de 1 à 9.
Il faut prouver $a.b.c \geqslant 72$ ou $d.e.f \geqslant 72$ ou $g.h.i \geqslant 72$.
On va le faire par l'absurde.
Si tel n'était pas le cas, on aurait $a.b.c < 72$ et $d.e.f < 72$ et $g.h.i < 72$.
Et on veut aboutir à une contradiction.
L'idée naturelle est d'effectuer le produit des trois lignes positives : $(a.b.c).(d.e.f).(g.h.i) < 72^3$.

Or, le produit de ces neuf entiers est égal à 9! (qu'importe l'ordre dans lequel on les a cités).
On aboutit à $9! < 72^3$ et on tient notre contradiction.

En effet, on compare

9!	face à	72^3
$2^7.3^4.5.7$	face à	$2^9.3^6$
5.7	face à	$2^3.3^2$
35	face à	36

Oh non ! Déception. Il n'y a pas de contradiction !

Pourtant, la piste semble bonne. Reprenons la, en tenant compte du fait qu'on a des entiers.
Il faut prouver $a.b.c \geqslant 72$ ou $d.e.f \geqslant 72$ ou $g.h.i \geqslant 72$.
On va le faire par l'absurde.
Si tel n'était pas le cas, on aurait $a.b.c < 72$ et $d.e.f < 72$ et $g.h.i < 72$.
et donc $a.b.c \leqslant 71$ et $d.e.f \leqslant 71$ et $g.h.i \leqslant 71$.
En multipliant, on trouve $(a.b.c).(d.e.f).(g.h.i) \leqslant 71^3$.
Et cette fois, c'est bien contradictoire.

Pour un exemple où on ls produits sont inférieur ou égaux à 72, on en rend un (au moins) égal à 72, avec $8 \times 9 \times 1$.
Il reste la possibilité de jouer avec $3 \times 6 \times 4$.

Et pour le reste 5, 7 et 2 de produit 70 :

9	8	1
3	6	4
5	7	2

∘6∘

♣ Un parallélépipède rectangle pour volume . Sa surface latérale vaut $96 cm^2$. La somme des longueurs de ses arêtes vaut $48 cm$. Calculez ses dimensions.

Aurait on trop peu d'informations avec les formules de Viète ?
On note a, b et c les trois mesures.
On traduit les hypothèses : $a.b.c = P$ (inconnu)
$a.b + a.c + b.c = 48$ (c'est 96/2)
$a + b + c = 12$ (c'est $48/4$)
Le polynôme s'écrit $X^3 - 12.X^2 + 48.X - P$.
Et il a trois racines réelles.
C'est donc que la fonction polynôme n'est pas monotone. Et coupe même trois fois l'axe.
Or, si on dérive, on trouve $3.X^2 - 24.X + 48$. C'est à dire$3.(X-4)^2$.
La dérivée refuse de changer de signe !
La seule solution pour avoir trois racines réelles est « on a une racine triple ».

Et cette racine, c'est 4.

Le seul parallélépipède possible est un cube. De côté 4 avec $P = 64$.

∘7∘ Résolvez $X^4 + 12.X = 5$ d'inconnue X sachant qu'il y a deux solutions dont le produit vaut -1.

Nommons a, b, c et $\frac{-1}{a}$ les quatre solutions.

Les formules de Viète nous disent alors $a - \frac{1}{a} + b + c = 0$, jusqu'à $-b.c = -5$.

On sait aussi qu'on peut factoriser $\Big(X^2 - \Big(a - \frac{1}{a}\Big).X + 1\Big).\Big(X^2 - (b+c).X + b.c\Big)$.

Mais on peut espérer trouver a en écrivant $a^4 + 12.a = 5$ et aussi $\frac{1}{a^4} - \frac{12}{a} = 5$.
Deux équations en a, on peut reporter l'une dans l'autre ou bien bricoler (à coups de conditions nécessaires déjà, donc par analyse).
On a donc $a^4 + 12.a - 5 = 0$ et $1 - 12.a^3 = 5.a^4$ (j'ai multiplié la seconde par a^4).
On reporte la première dans la seconde : $5.(5 - 12.a) = 1 - 12.a^3$.
a est maintenant racine d'une équation de degré 3 seulement.$12.a^3 - 60.a + 24 = 0$.
On la multiplie par a, elle reste valable : $12.a^4 - 60.a^2 + 24.a = 0$.
On la compare de nouveau avec $a^4 = -12.a + 5$ et on trouve : $-144.a + 60 = 60.a^2 - 24.a$ (et c'est $12.a^4$).
Cette dernière équation se simplifie énormément : $-1 + \sqrt{2}$ et $-1 - \sqrt{2}$.

On tient a et $\frac{-1}{a}$. On vérifie que le produit$(-1 + \sqrt{2}).(-1 - \sqrt{2})$ vaut bien -1.

Et on jette un coup d'oeil à l'équation initiale : $(-1 + \sqrt{2})^4 + 12.(-1 + \sqrt{2}) = \ldots = \ldots = \ldots = 5$.

Il faut quand même trouver les deux autres racines.
Mais inutile de poser la division.
On a écrit les formules de Viète : $(-1 + \sqrt{2}) + (-1 - \sqrt{2}) + b + c = 0$ et $(-1 + \sqrt{2}) \times (-1 - \sqrt{2}) \times b \times c = -5$.
$b + c$ vaut 2 et $b.c$ vaut 5.
Les deux racines qui manquent sont les racines de $X^2 - 2.X + 5$. Elles valent $1 + 2.i$ et $1 - 2.i$.

Allez, les racines $\boxed{S_x = \{-1 - \sqrt{2},\ -1 + \sqrt{2},\ 1 + 2.i,\ 1 - 2.i\}}$

∘8∘ Sachant $a + b + c = 1$, $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ et $a^3 + b^3 + c^3 = 3$ calculez $a^4 + b^4 + c^4$ (mais déjà aussi$a.b + a.c + b.c$ et $a.b.c$).

On imagine l'équation $X^3 - S.X^2 + D.X - P$ de racines a, b et c.
Les formules de Viète donnent $S = 1$.
Le cours donne $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2.D$ donc $D = \frac{-1}{2}$.

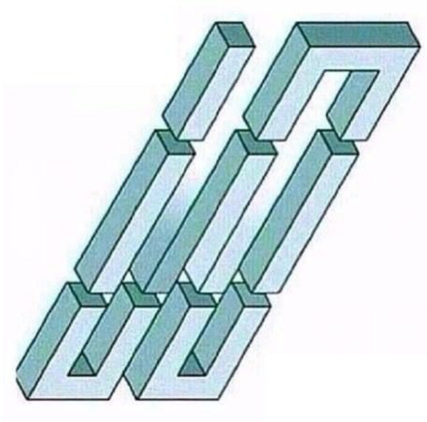
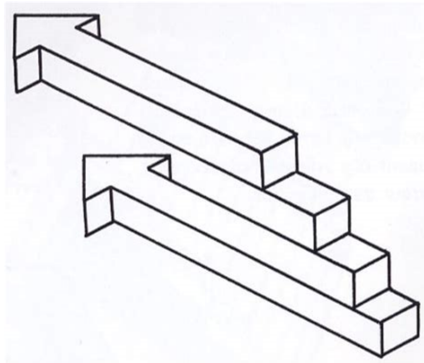
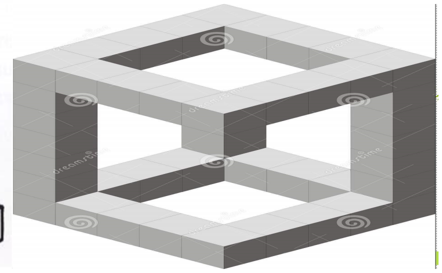
On reporte a, b et c dans l'équation et on somme $\begin{array}{ccccc} a^3 & -a^2 & -\frac{a}{2} & -p & = 0 \\ b^3 & -b^2 & -\frac{b}{2} & -p & = 0 \\ c^3 & -c^2 & -\frac{c}{2} & -p & = 0 \\ 3 & -2 & -\frac{1}{2} & -3.p & = 0 \end{array}$

On trouve $p = \frac{1}{6}$.

On ne sait pas résoudre $X^3 - X^2 - \frac{X}{2} - \frac{1}{6} = 0$. Mais pas grave.

On recommence en multipliant les lignes plus haut par a, b et c : $\begin{array}{ccccc} a^4 & -a^3 & -\frac{a^2}{2} & -\frac{a}{6} & = 0 \\ b^4 & -b^3 & -\frac{b^2}{2} & -\frac{b}{6} & = 0 \\ c^4 & -c^3 & -\frac{c^2}{2} & -\frac{c}{6} & = 0 \end{array}$.

On extrait : $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{25}{6}$.
L'exercice se généralise.
Et sinon, on le trouve « à l'américaine » sur https ://www.youtube.com/watch ?v=4FNCIYD8HdA.

◦9◦

Le nombre d'écriture décimale $abcde$ est un multiple de 41 (exemple $A = 43\,542$). Montrez que ses permutations $bcdea$ (ici 35 424), $cdeab$, $deabc$ et $eabcd$ sont aussi des multiples de 41. Indication : $10.A - B$ et $2\,439 \times 41$.

Comment passe-t-on de $A = 43\,542$ à $B = 35\,424$ et plus généralement de $abcde$ à $bcdea$?
On multiplie A par 10 : $10.A = 435\,420$ ou $10.A = abcde0$.
On lui ajoute l'entier a : $10.A + 4 = 435\,424$ ou $10.A + a = abcdea$.
On efface le chiffre de tête qui est $10^5.a$: $10.A + 4 - 10^5.4 = 35\,424$ ou $10.A + a - 10^5.a = bcdea$.

On passe d'un nombre au suivant par $A \longmapsto 10.A + (1 - 10^5).a$ avec a entier.

Si A est multiple de 41, alors $10.A$ l'est aussi.
Et $10^5 - 1$ est « comme par hasard » un multiple de 41 (voir indication de l'énoncé).
Par combinaison, $10.A + (1 - 10^5).a$ est un multiple de 41.

On met en boucle pour passer aux entiers suivants (54 243, 42 435, 24 354, 43 542), qui sont alors encore tous multiples de 41.

Une remarque : les résultat qui disent « si A est multiple de 41, alors $10 \times A$ est multiple de 41 »
« si A et B sont multiples de 41, alors $A + B$ est multiple de 41 »
sont à énoncer sans s'encombrer de démonstrations. ce sont, à votre niveau, des évidences mathématiques.
Alourdir votre copie avec des $A = 41.k$ et autres, c'est passer pour un individu qui a encore besoin de poser sur sa copie une addition telle que $17 + 43 = 60$. Vous devez faire de l'arithmétique élémentaire, sans remettre des $\times k$ partout.
Ou alors c'est que face à $x^2 + 3.x + 5 = 0$ écrire noir sur blanc : $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$, donc $\Delta = b - 4.a.c = 9 - 4.5 = \ldots$.
Avouez qu'en première ça fait sérieux, mais qu'en Sup ça fait gros bourrin.

◦10◦

Vrai ou faux : $\cos(x) = 1 \Rightarrow x = 0\ [\pi]$?

Vrai.

On a en fait $\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0\ [2.\pi]$.

Mais ici, on a juste $\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0\ [2.\pi] \Rightarrow x = 0\ [\pi]$.
En effet, si x s'écrit $2.k.\pi$ avec k entier, il s'écrit $p.\pi$ avec p entier (pair).
On n'a évidemment pas une équivalence ici.

◦11◦

♡ L'équation $x^2 + b.x + c = 0$ d'inconnue x admet pour racines α et β. Donnez *(sous forme développée)* l'équation polynomiale de racines α^2 et β^2.

L'équation $x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0$ d'inconnue x admet pour racines α, β et γ. Donnez l'équation polynomiale de racines α^2 et β^2 et γ^2.
Donnez l'équation polynomiale de racines $\alpha.\beta$, $\alpha.\gamma$ et $\beta.\gamma$.

On sait $\alpha + \beta = -b$ et $\alpha.\beta = c$.

L'équation de racines α^2 et β^2 est $x^2 - S.x + P = 0$ avec $S = \alpha^2 + \beta^2$ et $P = \alpha^2.\beta^2$.
Classiquement : $S = (\alpha + \beta)^2 - 2.\alpha.\beta = b^2 - 2.c$.

L'équation cherchée est donc $\boxed{x^2 - (b^2 - 2.c).x + c^2 = 0}$

Il faut savoir utiliser les formules de Viète dans les deux sens.

On recommence avec $\alpha + \beta + \gamma = -b$, $\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma = c$ et $\alpha.\beta.\gamma = -d$.
Notre mission est de calculer $S = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$
$D = \alpha^2.\beta^2 + \alpha^2.\gamma^2 + \beta^2.\gamma^2$
et $P = \alpha^2.\beta^2.\gamma^2$
Deux ne posent pas de problème : $S = (-b)^2 - 2.c$ et $P = (-d)^2$.
Pour D, on va développer $c^2 = (\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma)^2$.
On trouve la somme cherchée $\alpha^2.\beta^2 + \alpha^2.\gamma^2 + \beta^2.\gamma^2$ et un terme « en trop » :
$2.(\alpha.\beta.\alpha.\gamma + \alpha.\beta.\beta.\gamma + \alpha.\gamma.\beta.\gamma)$ qui n'est autre que $2.\alpha.\beta.\gamma.(\alpha + \beta + \gamma)$.
On a donc $D = c^2 - 2.(-b).(-d)$.

On n'a plus qu'à reporter dans le polynôme.

Même type de travail pour le dernier.

∘12∘ ♡ On prend x et y dans $]-1,\ 1[$. Montrez que $\dfrac{x+y}{1+x.y}$ existe.
Montrez, en calculant la différence entre son carré et 1 qu'il est dans $]-1,\ 1[$ aussi.
On pose alors $x * y = \dfrac{x+y}{1+x.y}$. Montrez que c'est une loi interne, associative, commutative sur $]-1,\ 1[$. Trouvez son neutre (est il bien dans $]-1,\ 1[$?). Le symétrique d'un élément de $]-1,\ 1[$ est il dans $]-1,\ 1[$?
Résolvez $x * \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.
On prend a dans $]0,\ 1[$. On définit la suite (a_n) par $a_0 = a$ et $a_{n+1} = a_n * a$ (en fait, c'est donc $a * a * \ldots * a$ n fois). Montrez qu'elle est croissante et majorée. Montrez qu'elle converge, et que la seule valeur possible pour sa limite est 1.

On se donne x et y entre -1 et 1. En écrivant $|x.y| = |x|.|y|$, on voit que $x.y$ est entre -1 et 1 (strictement), et le dénominateur ne peut pas s'annuler.

Ensuite, la belle question est « loi interne ».
La mauvaise méthode est « je tape sur les hypothèses ».
Et la pire est « j'invente des manipulations sur les inégalités et les quotients ».

Proprement, on doit montrer que le réel $\dfrac{x+y}{1+x.y}$ reste entre -1 et 1.
On va comparer son carré à 1.
C'est donc pourquoi l'énoncé nous propose de calculer $1 - \left(\dfrac{x+y}{1+x.y}\right)^2$.
Si ce réel est positif, on aura gagné.

L'élève qui dit « ah c'est pour ça qu'on nous demande de calculer ça » me doit un bonbon. Il aurait dû le comprendre tout de suite.

On calcule donc $1 - \dfrac{x^2 + 2.x.y + y^2}{(1+x.y)^2} = \dfrac{1 + x^2.y^2 + 2.x.y - x^2 - y^2 - 2.x.y}{(1+x.y)^2}$.
Le dénominateur est positif. Mais le numérateur ? Quel est le signe de $x^2.y^2 - x^2 - y^2 + 1$?
Il y a des termes positifs et des termes négatifs.

Mais si on y regarde de plus près, c'est $(1-x^2).(1-y^2)$.
Comme x^2 est entre 0 et 1 et y^2 aussi, le produit est positif.

Variante : on voit $x^2.(y^2 - 1) + 1 - y^2$ comme un trinôme en x de coefficient dominant négatif.
Mais x est entre -1 et 1, c'est à dire entre les racines.

Bref, on a bien $1 - \dfrac{(x+y)^2}{(1+x.y)^2} \geqslant 0$ et $\dfrac{(x+y)^2}{(1+x.y)^2}$ entre -1 et 1. La loi est interne.

Sans loi interne, on ne pourrait envisager de calculer $(x*y)*z$ puisque si $x*y$ sortait de $]-1,\ 1[$, le dénominateur en $1+(x*y).z$ pourrait s'annuler !

On calcule ensuite sans effort : $(x*y)*z = \dfrac{(x*y)+z}{1+(x*y).z} = \dfrac{\dfrac{x+y}{1+x.y}+z}{1+\dfrac{x+y}{1+x.y}.z}$.

Après élmination des dénominateurs, il va rester $\dfrac{x+y+z+x.y.z}{1+x.y+x.z+y.z}$ (l'ami Viète ne doit plus être loin).

Le calcul de $x*(y*z)$ conduit au même résultat.
La loi est associative.

La commutativité est un jeu d'enfants.

Le neutre est 0 puisque poiur tout x, on a $x*0=x$.

On se donne a et on résout $a*\alpha=0$ d'inconnue α. On trouve $\alpha=-a$.
Et on vérifie que ce symétrique est dans $]-1,\ 1[$ à son tour.

La résolution de $x*\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$ se fait sans effort.

On peut résoudre l'équation finalement du premier degré $\dfrac{x+\dfrac{1}{2}}{1+x.\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$.

Mais on peut aussi le jouer « algébriste » : $(x*a=b) \Leftrightarrow ((x*a)*(-a)=b*(-a))$
$(x*a=b) \Leftrightarrow (x*(a*(-a))=b*(-a))$
$(x*a=b) \Leftrightarrow (x*(0)=b*(-a))$
$(x*a=b) \Leftrightarrow (x=b*(-a))$

La solution est donc ici $\dfrac{1}{3}*\dfrac{-1}{2}$. On trouve $\boxed{\dfrac{-1}{5}}$

> *Ce n'est pas plus rapide que la résolution brute. Mais c'est plus joli et surtout, ça donne des idées pour aller plus vite ensuite dans d'autres circonstances.*

Partant de a, tous les $a*a$, $a*a*a$, $a*a*a*a$ et autres sont dans $]-1,\ 1[$.
Comme a est positif, par récurrence évidente, ils sont tous positifs.

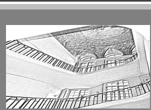
On se donne n, on veut montrer $a_{n+1}\geqslant a_n$.
On va eprimer le premier à l'aide du second et calculer leur différence : $a_{n+1}-a_n = \dfrac{a_n+a}{1+a.a_n}-a_n = \dfrac{a_n+a-a_n-a.(a_n)^2}{1+a.a_n}$.
Au numérateur, $a.(1-(a_n)^2)$ est bien positif.

La suite est croissante. Et majorée par 1.
Elle converge donc par théorème de convergence des suites réelles croissantes majorées.
Et sa limite est inférieure ou égale à 1.
Mais elle peut être strictement inférieure à 1 après tout.

Toutefois, maintenant qu'on sait que $a_n$converge vers une limite qu'on va noter λ, passons à la limite dans $a_{n+1}=\dfrac{a+a_n}{1+a.a_n}$.
Comme $a_n$converge vers λ, le membre de droite converge vers $\dfrac{a+\lambda}{1+a.\lambda}$.
Et le membre de gauche converge aussi vers λ (avec une longueur d'avance diront certains).
On a donc $\lambda=\dfrac{a+\lambda}{1+a.\lambda}$.
On effectue le produit en croix et on simplifie : $a.\lambda=a$.
La seule solution est bien $\lambda=1$.

∘13∘

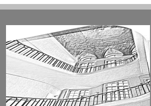
Mon fils a tracé un carré, puis a calculé son périmètre et son aire. Et il a trouvé le même nombre. Quelle est la longueur du côté de ce carré.
∼0) Il me demande alors si il existe un triangle équilatéral dont l'aire est égale au périmètre. Je lui réponds oui. Mais quelle est cette valeur ?
∼1) N'y tenant plus, je me pose la question : quelle est la taille d'un hexagone régulier dont le périmètre et l'aire sont égaux ?



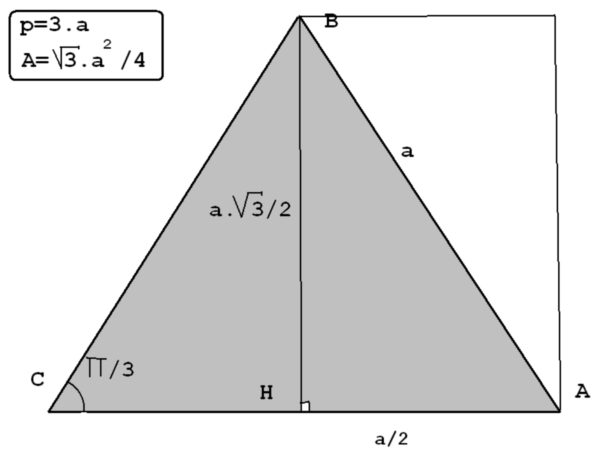
Un carré d'aire et périmètres égaux. TD03

On note a le côté de ce carré. Son périmètre est alors $4.a$. Son aire est a^2.
On doit donc résoudre l'équation $a^2 = 4.a$ qui admet deux racines : 0 et 4.
On ne garde que la solution $\boxed{a = 4}$ *(rationnelle, disons le tout de suite).*

Pour résoudre $a^2 = 4.a$, il serait idiot de passer par $a^2 - 4.a = 0$ et de calculer le discriminant. Il ne faut pas non plus rater la solution $a = 0$ en divisant à tort l'équation de chaque côté par a sans vérifier s'il est nul ou non. La bonne méthode, c'est de factoriser : $a.(a - 4) = 0$.



Un triangle équilatéral. TD03

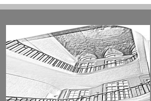


On note là encore a la longueur du côté d'un tel triangle.

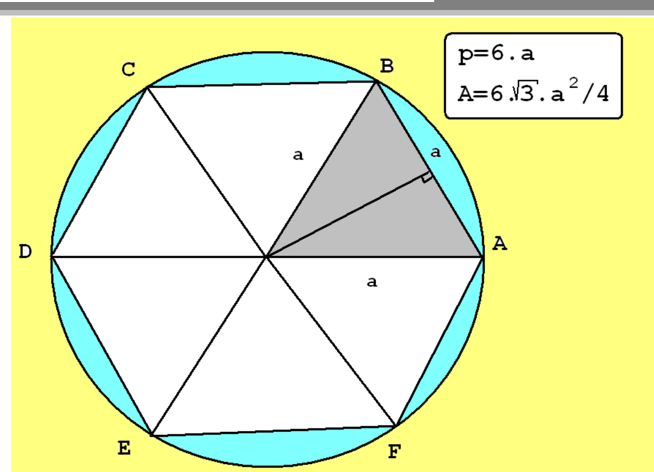
Son périmètre vaut naturellement $3.a$.

On découpe ensuite son aire en deux triangles rectangles d'hypoténuse a. On a donc un rectangle de base $a/2$ et de hauteur $a.\sqrt{3}/2$ *(théorème de Pythagore, ou "opposé sur hypoténuse").*

On a donc pour aire $\dfrac{a^2.\sqrt{3}}{4}$ et pour équation $3.a = \dfrac{a^2.\sqrt{3}}{4}$ et pour solution $\boxed{a = 4.\sqrt{3}}$ *(irrationnelle disons le aussi).*



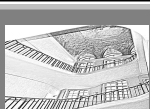
Cas de l'hexagone régulier. TD03



On note là aussi a le côté. Comme l'hexagone en a six, le périmètre vaut $6.a$.
La surface se découpe en six triangles équilatéraux, chacun de côté a. Chaque triangle a, comme on l'a vu, une aire de $\dfrac{a^2.\sqrt{3}}{4}$.

L'équation est donc cette fois $6.\dfrac{a^2.\sqrt{3}}{4} = 6.a$ et elle donne la solution non nulle $\boxed{a = 4/\sqrt{3}}$ ou encore $a = \dfrac{4.\sqrt{3}}{3}$.

$\sim$0) Tenant à généraliser *(tendance naturelle pour un matheux)*, je note, pour tout n, a_n la longueur du côté du polygone régulier à n côtés dont l'aire est égale au périmètre. Donnez moi la formule pour a_n, ainsi que pour le périmètre p_n associé.
$\sim$1) Formé à bonne école, un élève généralise la question : pour quel rayon le périmètre du cercle égale-t-il l'aire du disque ? Et il y répond. Cette valeur commune du périmètre et de l'aire du cercle/disque est elle d'ailleurs la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

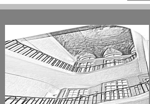


Cas du polygône à n côtés. TD03

On note a le côté commun. Le périmètre est évidemment $n.a$.
Le polygone est forme de n triangles isocèles dont le côté unique vaut a. L'angle au centre vaut $2.\pi/n$ puisqu'il en faut n pour faire une tarte complète.
En plaçant "debout" chaque triangle isocèle, on mesure sa base : a. Il faut trouver sa hauteur h par demi triangle isocèle, donc rectangle : $\tan(\pi/n) = \dfrac{a/2}{h}$. Son aire vaut $\dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{2.\tan(\pi/n)}$.
L'aire du polygone vaut donc $\dfrac{n.a^2}{4.\tan(\pi/n)}$. L'équation devient $n.a = \dfrac{n.a^2}{4.\tan(\pi/n)}$.
On résout en éliminant la solution inutile $a = 0$: $\boxed{a = 4.\tan(\pi/n)}$

On vérifie :

n	3	4	5	6
$4.\tan(\pi/n)$	$4.\sqrt{3}$	4	$4.\tan(\pi/5)$	$4/\sqrt{3}$



Cas du cercle. TD03

On rappelle les formules pour un cercle de rayon R :

périmètre du cercle	aire du disque
$2.\pi.R$	$\pi.R^2$

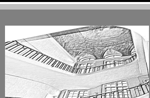
La solution est $\boxed{R = 2}$

On se demande maintenant si le cercle peut être vu comme limite de polygones où le nombre de côtés augmente indéfiniment *(d'ailleurs, avez vous déjà regardé comment un logiciel de C.A.O./D.A.O.*[1] *trace des "cercles" ?)*.

Pour le polygone à n côtés, le côté vaut $4.\tan(\pi/n)$ et le périmètre vaut $4.n.\tan(\pi/n)$.
On doit donc trouver la limite de $\dfrac{4.n.\sin(\pi/n)}{\cos(\pi/n)}$ quand n tend vers l'infini.
Le numérateur est une forme indéterminée et le dénominateur tend vers 1.
Mais en posant $\theta_n = \pi/n$, on reconnaît dans n le facteur π/θ_n.

On doit donc étudier la limite de $\dfrac{4}{\cos(\pi/n)}.\pi.\dfrac{\sin(\theta_n)}{\theta_n}$.
On rappelle que $\dfrac{\sin(\theta)}{\theta}$ tend vers 1 quand θ tend vers 0 (et c'est le cas pour θ_n quand n tend vers l'infini). La limite de p_n est donc $4.\pi$.
Or, pour un rayon de 2, le périmètre d'un cercle vaut $4.\pi$. La coïncidence est notable.

Ayant constaté que a_4 *(cas du carré)* est rationnel, tandis que a_3 et a_6 *(cas du triangle et de l'hexagone)* sont irrationnels, j'en viens à me demander pour quelles valeurs de n le réel a_n est rationnel. Regardons le cas $n = 5$. Montrez que $\cos(\pi/5)$ est racine de l'équation $(4.X^3 - 3.X) + (2.X^2 - 1) = 0$ d'inconnue réelle X. Calculez alors $\cos(\pi/5)$ et $\tan(\pi/5)$. Déduisez que a_5 est irrationnel.



Cas du pentagone. TD03

La démonstration ci dessus a donné le côté du pentagone répondant à notre question : $4.\tan(\pi/5)$. *La question devient :* $\tan(\pi/5)$ *est elle rationnelle ou irrationnelle ?*[2]

1. *conception ou dessin assisté par ordinateur, comme Paint, Photoshop...*
2. *à la question "rationnelle", la réponse sera "non" ; à la question "rationnelle ou irrationnelle", la réponse sera "oui"*

Pour prouver que $\cos(\pi/5)$ est racine de l'équation $(4.X^3 - 3.X) + (2.X^2 - 1) = 0$, on le reporte dans le premier membre :

$$(4.\cos(\pi/5)^3 - 3.\cos(\pi/5)) + (2.\cos^2(\pi/5) - 1) = \cos(3.\pi/5) + \cos(2.\pi/5)$$

d'après les formules trigonométriques de duplication

Or, $2.\pi/5$ et $3.\pi/5$ sont deux angles qui se complètent pour avoir pour somme π. Leurs cosinus sont donc opposés et ont pour somme 0, comme demandé.

Or, le polynôme $4.X^3 + 2.X^2 - 3.X - 1$ a une racine évidente *(c'est -1)*.
Il se factorise donc

$$4.X^3 + 2.X^2 - 3.X - 1 = (X+1).(4.X^2 - 2.X - 1)$$

On résout l'équation du second degré et on trouve que $4.X^3 + 2.X^2 - 3.X - 1$ a pour racines -1, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.
L'une d'entre elles est $\cos(\pi/5)$. Or, $\cos(\pi/5)$ est positif.

Par élimination évidente, il reste juste $\boxed{\cos(\pi/5) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$

On élève au carré, on passe à l'inverse, on soustrait 1 *(formule $\dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$)* :

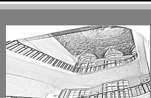
$$\tan^2(\pi/5) = \frac{16}{1+5+2.\sqrt{5}} - 1 = \frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = 5 - 2.\sqrt{5}$$

(après usage de la quantité conjuguées).

Par positivité *(entre 0 et $\pi/4$)*, on a donc $\tan(\pi/5) = \sqrt{5 - 2.\sqrt{5}}$.

Ce nombre n'a vraiment pas l'air rationnel. Il ne l'est pas.
Si il l'était *(raisonnement par l'absurde)*, son carré le serait aussi, puis par soustraction, $\sqrt{5}$ serait rationnel, ce qui n'est pas vrai.

$\sim$0) Exprimez $\tan(a+b)$ à l'aide de $\tan(a)$ et $\tan(b)$ pour tout couple $(a,\ b)$ de réels convenables *(ni a, ni b, ni $a+b$ n'est dans $\{\frac{2.k+1}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$)*.
$\sim$1) Exprimez $\tan(2.\theta)$, $\tan(3.\theta)$ et $\tan(4.\theta)$ à l'aide de $\tan(\theta)$, pour θ convenable *(par exemple compris entre 0 et $\pi/8$)*.
$\sim$2) Montrez que pour tout n, il existe deux polynômes P_n et Q_n vérifiant $\tan(n.\theta) = \dfrac{P_n(\tan(\theta))}{Q_n(\tan(\theta))}$. Montrez qu'on peut écrire $P_{n+1}(X) = P_n(X) + X.Q_n(X)$ et exprimez alors Q_{n+1} à l'aide de $P_n$et Q_n.
$\sim$3) Montrez que P_n et Q_n sont toujours à coefficients entiers.
$\sim$4) Quel est leur degré ?
$\sim$5) Exprimez P_{2n} et Q_{2n} à l'aide de $P_n$et Q_n.
$\sim$6) Exprimez P_{2n+1} à l'aide de P_{2n-1} et Q_{2n-1}. Montrez que dans $P_{2n+1}(X)$ le terme en X^{2n+1} a pour coefficient $(-1)^n$.
$\sim$7) On suppose qu'un rationnel α/β (α et β entiers sans diviseur commun) vérifie $P_{2n+1}(\alpha/\beta) = 0$. En multipliant par β^{2n+1} montrez que β divise α^{2n+1}.
$\sim$8) Déduisez que les racines rationnelles de P_{2n+1} sont des entiers. Déduisez que a_{2n+1} est irrationnel.



Expression de $\tan(n.\theta)$ comme fraction en $\tan(\theta)$.

TD03

Pour a et b convenables, on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a).\cos(b) + \cos(a).\sin(b)}{\cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)} = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a).\tan(b)}$$

C'est la formule demandée, avec les conditions d'existence des diverses tangentes.

Dans le cas particulier, avec $a = b = \theta$ et $t = \tan(\theta)$: $\tan(2.\theta) = \dfrac{2.t}{1-t^2}$.
On a ensuite :

$$\tan(2.\theta+\theta) = \frac{\tan(\theta)+\tan(2.\theta)}{1-\tan(\theta).\tan(2.\theta)} = \frac{t+\dfrac{2.t}{1-t^2}}{1-t.\dfrac{2.t}{1-t^2}} = \frac{3.t-t^3}{1-3.t^2}$$

Ensuite, qu'on passe par $\tan(2.(2.\theta))$ ou par $\tan(\theta+3.\theta)$ on a $\tan(4.\theta) = \dfrac{4.t-4.t^3}{t^4-6.t^2+1}$
A ce stade, on a exprimé les premières tangentes comme fractions en la variable t.

Avec les notations suggérées : $\tan(n.\theta) = \dfrac{P_n(t)}{Q_n(t)}$:

n	0	1	2	3	4
$P_n(t)$	0	t	$2.t$	$3.t-t^3$	$4.t-4.t^3$
$Q_n(t)$	1	1	$1-t^2$	$1-3.t^3$	$1-6.t^2+t^4$

Les deux premières colonnes ne sont pas demandées, mais elles n'en sont pas moins cohérentes...

On montre l'existence des polynômes P_n et Q_n par récurrence sur n. La récurrence a été initialisée, puisque les premiers polynômes existent.
On suppose ensuite pour un n donné quelconque que P_n et Q_n existent. Il faut alors montrer l'existence de P_{n+1} et Q_{n+1} c'est à dire, ici, les construire.
On écrit pour tout θ convenable : $\tan((n+1).\theta) = \tan(n.\theta+\theta) = \dfrac{\tan(\theta)+\tan(n.\theta)}{1-\tan(\theta).\tan(n.\theta)}$

On remplace par hypothèse de récurrence au rang n : $\tan((n+1).\theta) = \dfrac{t+\dfrac{P_n(t)}{Q_n(t)}}{1-t.\dfrac{P_n(t)}{Q_n(t)}} = \dfrac{t.Q_n(t)+P_n(t)}{Q_n(t)-t.P_n(t)}$

On pose alors naturellement pour les construire : $\boxed{P_{n+1}(t) = t.Q_n(t)+P_n(t)}$ $\boxed{Q_{n+1}(t) = Q_n(t)-t.P_n(t)}$

Ils existent, mais il faut encore préciser que ce sont bien des polynômes, comme produits et sommes de polynômes.
La récurrence s'achève.

C'était une récurrence sur le modèle "$P_n$et Q_n existent" implique "P_{n+1}et Q_{n+1} existent" ; et non pas une récurrence sur une formule avec égalité comment en Terminale.

Avec les formules ci dessus, on montre alors que chacun de ces polynômes est bien à coefficients entiers.

C'est le cas des premiers, encadrés plus haut.

Si on suppose ensuite pour un n donné quelconque que $P_n(X)$ et $Q_n(X)$ sont à coefficients entiers, alors $X.P_n(X)$ et $X.Q_n(X)$ le sont aussi *(tout est décalé d'un degré)*. Les combinaisons $P_{n+1}(X)$ et $Q_{n+1}(X)$ le sont donc aussi, et la récurrence s'achève.

Attention, on travaille sur l'existence des polynômes et sur quelques informations sur eux, mais on n'a pas encore de formule explicite pour tous leurs coefficients. Patience.

Pour le degré, c'est un peu moins évident. On allonge donc la liste, avec la double formule de récurrence

n	0	1	2	3	4	5	6
$P_n(X)$	0	X	$2.X$	$3.X-X^3$	$4.X-4.X^3$	$5.X-10.X^3+X^5$	$6.X-20.X^3+6.X^5$
$Q_n(X)$	1	1	$1-X^2$	$1-3.X^2$	$1-6.X^2+X^4$	$1-10.T^2+5.T^4$	$1-15.X^2+15.X^4-X^6$

On va distinguer suivant la parité de n :

n	$n=2.k$ pair	$n=2.k+1$ impair
$deg(P_n)$	$2.k-1=n-1$	$2.k+1=n$
$deg(Q_n)$	$2.k=n$	$2.k=n-1$

La récurrence est initialisée avec le tableau ci-dessus.

On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un n donné. Il faut le faire passer à $n+1$. Mais il faut distinguer deux cas.

• Si n est pair,

$\deg(P_n) = n$	$\deg(X.P_n) = n+1$	$deg(X.Q_n + P_n) = n$	
	$deg(Q_n) = n$		$deg(P_{n+1}) = n$
	$deg(P_n) = n$		$deg(Q_{n+1}) = n+1$
$\deg(Q_n) = n-1$	$deg(X.Q_n) = n$	$deg(Q_n - X.P_n) = n+1$	

La formule est cohérente puisque $n+1$ est impair et que $(n+1)-1$ vaut n.

• Si n est impair *(et $n+1$ pair)*,

$\deg(P_n) = n-1$	$\deg(X.P_n) = n$	$deg(X.Q_n + P_n) = n$	
	$deg(Q_n) = n$		$deg(P_{n+1}) = n+1$
	$deg(P_n) = n-1$		$deg(Q_{n+1}) = n = (n+1)-1$
$\deg(Q_n) = n$	$deg(X.Q_n) = n+1$	$deg(Q_n - X.P_n) = n$	

Les deux cas ayant été traités, l'hérédité est démontrée.

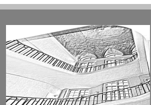
Pour trouver P_{2n} et Q_{2n}, il suffit d'écrire

$$\tan(2.n.\theta) = \tan(2.(n.\theta)) = \frac{2.\tan(n.\theta)}{1-\tan^2(n.\theta)} = \frac{2.P_n(t)/Q_n(t)}{1-(P_n(t)/Q_n(t))^2} = \frac{2.P_n(t).Q_n(t)}{(Q_n(t))^2-(P_n(t))^2}$$

et d'identifier

$P_{2n}(X) = 2.P_n(X).Q_n(X)$	$Q_{2n}(X) = (Q_n(X))^2 - (P_n(X))^2$

(c'était astucieux ou c'était évident ?)



Les racines de P_{2n+1}. TD03

En prenant les cas particuliers de $2n-1$ et $2n$ en lieu et place de n dans les formules

$\boxed{P_{n+1}(X) = X.Q_n(X) + P_n(X)}$
$\boxed{Q_{n+1}(X) = Q_n(X) - X.P_n(X)}$ on trouve

$\boxed{P_{2n}(X) = X.Q_{2n-1}(X) + P_{2n-1}(X)}$
$\boxed{Q_{2n}(X) = Q_{2n-1}(X) - X.P_{2n-1}(X)}$ et $\boxed{P_{2n+1}(X) = X.Q_{2n}(X) + P_{2n}(X)}$
$\boxed{Q_{2n+1}(X) = Q_{2n}(X) - X.P_{2n}(X)}$ et on reporte :

$P_{2n+1}(X) = 2.X.Q_{2n-1}(X) - X^2.P_{2n-1}(X) + P_{2n-1}(X)$

On l'avait aussi avec $\tan((2n+1).x) = \dfrac{\tan(2.x)+\tan((2n-1).x)}{1-\tan(2.x).\tan((2n-1).x)} = \dfrac{\dfrac{2.t}{1-t^2}+\dfrac{P_{2n-1}(t)}{Q_{2n-1}(t)}}{1-\dfrac{2.t}{1-t^2}.\dfrac{P_{2n-1}(t)}{Q_{2n-1}(t)}}.$

On a trouvé P_1, P_3 et P_5.

On confirme

n	0	1	2
$P_{2n+1}(X)$	X	$3.X - X^3$	$5.X - 10.X^3 + X^5$
terme en X^{2n+1}	X	$-X^3$	X^5

La récurrence sur le terme en X^{2n+1} de P_{2n+1} est amorcée.

On passe à l'hérédité. On suppose que P_{2n-1} commence pour un n donné par $(-1)^{n-1}.X^{2n-1}$. On veut passer au rang impair suivant $P_{2(n+1)-1} = P_{2n+1}$.

On cherche dans $P_{2n+1}(X) = 2.X.Q_{2n-1}(X) - X^2.P_{2n-1}(X) + P_{2n-1}(X)$ le terme de degré $2n+1$. Il ne peut venir que de $-X^2.P_{2n-1}(X)$ et il vaut $-X^2.((-1)^{n-1}.X^{2n-1})$.La récurrence s'achève.

On suppose que α/β est racine de P_{2n+1}. On a donc $(-1)^n.\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2n+1} + autres\ termes = 0$. Proprement, en donnant des noms aux autres coefficients du polynôme :

$$(-1)^n.\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2n+1} + c_{2n}.\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2n} + c_{2n-1}.\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2n-1} + \ldots + c_0 = 0$$

On multiplie par β^{2n+1} pour éliminer les dénominateurs :

$$(-1)^n.\alpha^{2n+1} + c_{2n}.\beta.\alpha^{2n} + c_{2n-1}.\beta^2.\alpha^{2n-1} + \ldots + c_0.\beta^{2n+1} = 0$$

Dans la somme $c_{2n}.\beta.\alpha^{2n} + c_{2n-1}.\beta^2.\alpha^{2n-1} + \ldots + c_0.\beta^{2n+1}$, on peut factoriser β, et ce qu'il reste après factorisation est un entier

$$c_{2n}.\alpha^{2n} + c_{2n-1}.\beta.\alpha^{2n-1} + \ldots + c_0.\beta^{2n}$$

Le nombre $c_{2n}.\beta.\alpha^{2n} + c_{2n-1}.\beta^2.\alpha^{2n-1} + \ldots + c_0.\beta^{2n+1}$ est un multiple de β. Son opposé aussi, et c'est α^{2n+1} *(au signe près, ce qui ne change rien)*.

Mais si β divise α^{2n+1} il y a comme un problème, puisque α et β n'ont même pas de facteur commun *(fraction irréductible)*. La seule façon de s'en sortir, c'est d'avoir $\beta = 1$.
Ainsi, si P_{2n+1} admet une racine rationnelle α/β, alors le dénominateur vaut 1. La conséquence est que cette racine est un entier en $\alpha/1$.

On met bout à bout les résultats. Pour tout n et tout x $\tan((2n+1).x) = \dfrac{P_{2n+1}(\tan(x))}{Q_{2n+1}(\tan(x))}$. En particulier, pour $x = \pi/(2n+1)$, on a

$$0 = \frac{P_{2n+1}(\tan(\pi/(2n+1)))}{Q_{2n+1}(\tan(\pi/(2n+1)))}$$

On en déduit que $\tan\left(\dfrac{\pi}{2n+1}\right)$ est racine du polynôme P_{2n+1}.
Ce nombre peut il être rationnel ? Si c'est le cas, alors c'est un entier. Mais $\tan\left(\dfrac{\pi}{2n+1}\right)$ est entre 0 et $\tan(\pi/3)$. Le seul entier entre ces deux nombres est 1. Et 1 c'est $\tan(\pi/4)$ et pas $\tan(\pi/(2n+1))$. On tient la contradiction.

Bref, $\tan(\pi/(2n+1))$ ne peut pas être rationnel.

∘14∘

`Retrouvez les stations de métro (et R.E.R.) dont voici les anagrammes` *(Nord)* :
Mon slip / *Le pédé phallocrate* / Valeur risible : lit pour profane / *Ta roue gauche* / Bachoter sa brochure / *Leur vocabulaire universel* / Nuit à inviter des seins.
Armé est triste / Bachoter sa brochure / Ce condor / Huitre de couloir / Les gaz du traitre / Mon étranger passa / Il est machin / Pas tuer / L'allergique et compétent / Sa chapelière / Pousser le marabout / Aussi pur amour de la voyelle.

Simplon. Porte de la Chapelle. Château Rouge. Barbès-Rochechouard. La Courneuve-Aubervilliers. Saint-Denis Université.

Arts et métiers. Concorde. Richelieu-Drouot. Gare d'Austerlitz. Saint-Michel. Pasteur. La Motte-Picquet-Grenelle. Père Lachaise. Réaumur Sébastopol. Palais Royal-Musée du Louvre.

∘15∘

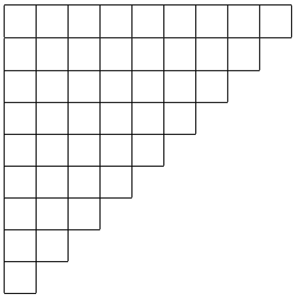
♡ Comparez pour l'ordre usuel $Arccos(5/7)$ et $Arcsin(7/10)$.

Les deux sont entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, domaine où le sinus est croissant.
Le premier a pour sinus $\sqrt{\dfrac{24}{49}}$,l'autre a pour sinus $\dfrac{7}{10}$.
Comparons les carrés de ces deux réels positifs : $\dfrac{24}{49}$ face à $\dfrac{49}{100}$.
2400 est plus petit que 49^2 (de une unité).
On a donc $\dfrac{24}{49} < \dfrac{49}{100}$ puis $Arccos(5/7) < Arcsin(7/10)$
Ça se joue à un centième de degré. Ça doit cacher quelquechose, ça !

∘16∘

Justifiez que le mot « mot » a 3! anagrammes.
Justifiez que le mot « mélange » a 6! anagrammes si on distingue le *e* et le *é*, et la moitié sinon.
Justifiez que le mot anagramme a $\dfrac{9!}{3!.2!}$ anagrammes.

Le mot a neuf lettres. Si elles étaient toutes distinctes, il aurait 9! anagrammes. En effet, il faut choisir la première lettre du mot parmi neuf. Une fois ce choix fait, il reste 8 choix pour la seconde, et ainsi de suite



Mais il y a des lettres identiques

a	a	a	m	m	n	g	r	e

Plaçons les trois a dans 9 emplacements	$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!.6!}$	a - - a - a - - -
Plaçons ensuite les deux m sur deux des six cases qui restent	$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!.4!}$	a - m a - a - m -
Plaçons le n parmi les quatre cases qui restent	4	a - m a - a - m n
Plaçons le g parmi les trois cases qui restent	3	a - m a g a - m n
Il reste deux cases pour le r	2	a - m a g a r m n
Et le e est forcé	1	a e m a g a r m n

On effectue le produit des possibilités : $\frac{9!}{3!.6!}.\frac{6!}{2!.4!}.4! = \frac{9!}{3!.2!}$

On peut aussi partir des 9! anagrammes de a_1 n a_2 g r a_3 m_1 m_2 e
Les neuf lettres étant marquées distinctes, il y en a bien 9!.
Mais ensuite, si on permute m_1 et m_2 on trouve finalement le même anagramme.
Il y en a donc deux fois moins.
Et si on permute a_1, a_2 et a_3 (et il y a six façons de le faire), on obtient le même anagramme.
Finalement, il faut diviser 9! par 2!.3!.

∘17∘

Résolvez le système $\log_x(y) + \log_y(x) = \frac{50}{7}$ et $x.y = 256$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$ *(rappel $y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$).*

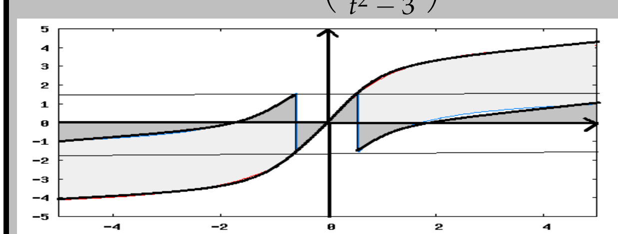
On rappelle
$$\begin{aligned} y = \log_a(x) &\Leftrightarrow a^y = x \\ &\Leftrightarrow e^{y.\ln(a)} = x \\ &\Leftrightarrow y.\ln(a) = \ln(x) \\ &\Leftrightarrow y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$
(et pour $a = e$, on a le logarithme naturel).

L'équation $\log_x(y) + \log_y(x) = \frac{50}{7}$ donne $\frac{(\ln(x))^2 + (\ln(y))^2}{\ln(x).\ln(y)} = \frac{50}{7}$.
et $x.y = 256$ donne $\ln(x) + \ln(y) = 8\ln(2)$.
On note a et b les deux « vraies inconnues » : $a = \ln(x)$ et $b = \ln(y)$: $7.(a^2 + b^2) = 50.a.b$
$a + b = 8.\ln(2)$
La première équation dit $7.(a+b)^2 = 64.a.b$. En y reportant la seconde (et en divisant par 64) : $a.b = 7.(\ln(2))^2$.

a et b sont les deux racines de $X^2 - 8.\ln(2).X + 7.(\ln(2))^2$ de discriminant $25.(\ln(2))^2$ et de racines $7.\ln(2)$ et $\ln(2)$.
On a donc $\{a, b\} = \{\ln(2), 7.\ln(2)\}$ puis $\{x, y\} = \{2, 128\}$.
On encadre $\boxed{S_{x,y} = \{(2, 128), (128, 2)\}}$ et on vérifie : $\log_2(128) + \log_{128}(2) = 7 + \frac{1}{7}$.

∘18∘

♡ Dérivez $t \longmapsto 3.Arctan\left(\frac{t^3 - 3.t}{t^2 - 3}\right)$ et $t \longmapsto Arctan\left(\frac{t^3 - 3.t}{3.t^2 - 1}\right)$.



Expliquez ce graphe.

Les deux dérivées donnent $t \longmapsto \frac{3}{t^2+1}$.
On a envie de dire que ces fonctions sont $t \longmapsto 3.Arctan(t)$.

Mais il n'en est rien.
Il peut y avoir une constante de différence.
Et surtout, cette intégration pour remonter va dépendre de l'intervalle de travail. Et justement ces applications sont définies par intervalle.

De fait

	$]-\infty,\ -\sqrt{3}[$	$]-\sqrt{3},\ \sqrt{3}[$	$]\sqrt{3},\ +\infty[$
$3.Arctan\left(\dfrac{t^3-3.t}{t^2-3}\right)$	$3.Atan(t)$	$3.Atan(t)$	$3.Atan(t)$

complété par les limites aux bornes ou la valeur en 0 ou en des points particuliers.

	$]-\infty,\ -1/\sqrt{3}[$	$]-1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}[$	$]1/\sqrt{3},\ +\infty[$
$Arctan\left(\dfrac{t^3-3.t}{3.t^2-1}\right)$	$3.Atan(t)+\pi$	$3.Atan(t)$	$3.Atan(t)-\pi$

Et cette application fait un saut quand elle n'est pas définie, afin que l'arctangente reste entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ (alors que $3.Arctan(t)$ sort de l'intervalle en question).

Tout repose quand même dans cet exercice sur la formule $\tan(3.\theta)=\dfrac{3.\tan(\theta)-\tan^3(\theta)}{3.\tan^2(\theta)-1}$.

∘19∘

♡ Résolvez $Arctan(x)+\dfrac{\pi}{6}=Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{\pi}{3}$ d'inconnue réelle x.

Si x est positif, la question devient $Arctan(x)+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}-Arctan(x)+\dfrac{\pi}{3}$.

On résout : $Arctan(x)=\dfrac{\dfrac{\Pi 2}{}+\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}}{2}$. *On trouve* $x=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$. *Et c'est cohérent.*

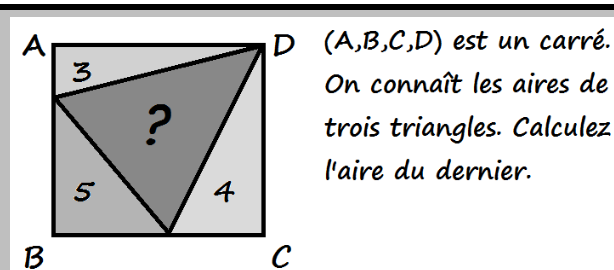
Et pour x négatif : $Arctan(x)+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{2}-Arctan(x)+\dfrac{\pi}{3}$. *On trouve cette fois* $x=\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$. *Et c'est cohérent.*

$$\boxed{S=\left\{\sqrt{3},\ \dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right\}}$$

∘20∘

Montrez pour tout x entre 0 et 1 : $Arctan(x)\leqslant x$ et même $x-\dfrac{x^3}{3}\leqslant Arctan(x)\leqslant x$.

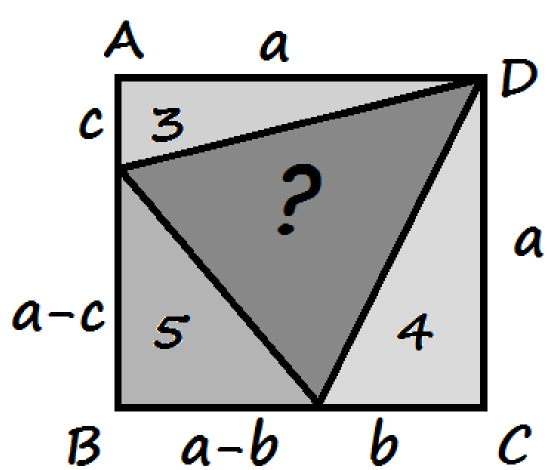
La grande figure est un carré. Les triangles ont les aires indiquées. Montrez que le triangle central a pour aire $4.\sqrt{6}$ ou 9 ou $5+\sqrt{7}$.



Deux exercices sans rapport. Mais c'est juste pour la mise en page.

On décide de nommer les longueurs qui interviennent. a est le côté du carré, b et c les côtés de deux des triangles.

Les longueurs du troisième triangle se déduisent par soustraction : $a-b$ et $a-c$.
Mais la formule « base fois hauteur sur 2 » permet d'écrire $a.b=8$ et $a.c=6$ puis $(a-b).(a-c)=10$.
On reporte : $\left(a-\dfrac{8}{a}\right).\left(a-\dfrac{6}{a}\right)=10$.
On développe : $a^2-24.a+\dfrac{48}{a^2}=0$.
On multiplie par a^2 non nul et on pose même $X=a^2$. On a cette fois $X^2-24.X+48=0$.
On résout avec un discriminant positif : $X=12-4.\sqrt{6}$ ou $X=12+4.\sqrt{6}$.
Les deux sont positives. Gardons les a priori.
Mais alors le grand carré a pour aire justement a^2ce qui fait X.



Pour trouver l'aire du triangle central, il suffit de lui soustraire les aires des trois triangles déjà connus.
L'aire cherchée est donc $X-(3+4+5)=X-12$.
On voit que $X=12-4.\sqrt{6}$ conduit à une aire étrange et négative pour le triangle central.
On élimine. L'aire cherchée vaut donc $(12+4.\sqrt{6})-12$, ce qui fait effectivement $\boxed{4.\sqrt{6}}$

L'inégalité $x-\dfrac{x^3}{3}\leqslant Arctan(x)\leqslant x$ sent son inégalité de convexité et sa formule de Taylor.
On dérive l'arctangente trois ou quatre fois et on calcule en 0 :

$Arctan(t)$	$\dfrac{1}{1+t^2}$	$\dfrac{-2.t}{(1+t^2)^2}$	$\dfrac{6.t^2-2}{(1+t^2)^3}$	$\dfrac{24.(t-t^3)}{(1+t^2)^4}$
0	1	0	-2	signe ?

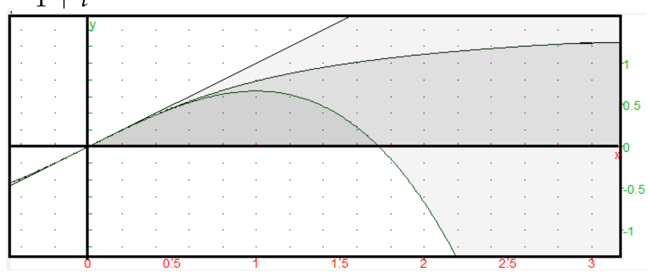
La formule de Taylor donne par exemple $Arctan(x)=0+1.x+\dfrac{x^2}{1}.\displaystyle\int_0^1(1-t).\dfrac{-2.t.x}{(1+t.x)^3}.dt$. Pour x positif, le reste intégrale est négatif : $Arctan(x)\leqslant x$.
(on l'a aussi par variations de la fonction $x\longmapsto x-Arctan(x)$, et ça va même plus vite).

Poussons un peu plus loin : $Arctan(x)=0+1.x+0.x^2+\dfrac{-2}{6}.x^3+\dfrac{x^4}{6}.\displaystyle\int_0^1(1-t)^3.\dfrac{24.t.x.(1-t^2.x^2)}{(1+t.x)^4}.dt$.
cette fois, $t.x$ reste plus petit que 1, le reste intégrale est positif.

Pardon ? Vous ne connaissez pas la formule de Taylor ?
Alors, variations de fonctions.
On définit $t\longmapsto t-Arctan(t)$. On la dérive : $t\longmapsto 1-\dfrac{1}{1+t^2}$. En l'écrivant $t\longmapsto\dfrac{t^2}{1+t^2}$ cette dérivée est positive.
L'application $t\longmapsto t-Arctan(t)$ est croissante. Étant nulle en 0, elle est positive sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $t-Arctan(t)\geqslant 0$ pour tout t positif.

On définit ensuite $t\longmapsto Arctan(t)-t+\dfrac{t^3}{3}$, et on la nomme g.
Elle est nulle en 0, c'est un bon début. Elle se dérive en $t\longmapsto\dfrac{1}{1+t^2}-1+t^2$.

On réduit au commun dénominateur : $t\longmapsto\dfrac{t^4}{1+t^2}$.
Cette dérivée est positive, g est croissante.
g est nulle en 0, elle est donc positive sur $[0,\ +\infty[$. Et tant pis si l'énoncé se limite à $[0,\ 1]$. mais il est vrai qu'au delà de 1 ce n'est plus guère intéressant.



○21○

Un classique joli. On se donne cinq réels positifs a_1 à a_5. Montrez qu'il en existe au moins deux : a_i et a_j ($i\neq j$) vérifiant $\left|\dfrac{a_i-a_j}{1+a_i.a_j}\right|\leqslant\sqrt{2}-1$.
Indication : prenez leurs arctangentes, et placez les dans les intervalles $\left[k.\dfrac{\pi}{8},\ (k+1).\dfrac{\pi}{8}\right]$ pour k de 0 à 3.

Si les cinq réels sont dans $\mathbb{R}$, leurs cinq arctangente sont dans $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

On découpe en

$\left[0,\ \dfrac{\pi}{8}\right]$	$\left[\dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{\pi}{4}\right]$	$\left[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3.\pi}{8}\right]$	$\left[\dfrac{3.\pi}{8},\ \dfrac{\pi}{2}\right[$

Ayant cinq mesures angulaires à placer dans quatre tiroirs, il existe au moins un tiroir $\left[\dfrac{k.\pi}{8},\ \dfrac{(k+1).\pi}{8}\right]$ qui en contient au moins deux.
La distance entre ces deux angles est donc plus petite que $\dfrac{\pi}{8}$: $\dfrac{k.\pi}{8}\leqslant\alpha_i\leqslant\alpha_j\leqslant\dfrac{(k+1).\pi}{8}$.
On soustrait : $0\leqslant\alpha_j-\alpha_i\leqslant\dfrac{\pi}{8}$.

On passe à la tangente (croissante sur l'intervalle) :

$$0 \leqslant \tan(\alpha_j - \alpha_i) = \frac{\tan(\alpha_j) - \tan(\alpha_i)}{1 + \tan(\alpha_j).\tan(\alpha_i)} \leqslant \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$$

(valeur du cours de MPSI2).
C'est exactement la majoration que l'on voulait sur les a_i et a_j.

◦22◦ Résolvez : $Arctan(x) + Arctan(2.x) = \frac{\pi}{4}$ d'inconnue réelle x.

Pas de condition sur x pour qu'existence ces arctangentes.
Passons à la tangente (la condition ne sera que nécessaire, et on introduira trop de solutions peut être, il faudra revenir à des équivalences) :

$$\frac{x + 2.x}{1 - x.2.x} = 1$$

donc x vaut $\frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$ ou $\frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$.
On élimine $\frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$ qui donne un premier membre négatif (égal sans nul doute à $-\frac{3.\pi}{4}$).
Mais ceci ne dit pas qu'il faille quand même conserver $\frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$. L'équation pourrait n'avoir aucune solution.
Toutefois, $x \longmapsto Arctan(x) + Arctan(2.x)$ est continue, croissante, partant de $-\pi$ pour filer vers π. Elle passe donc une fois (et une seule par $\frac{\pi}{4}$).
On a donc notre solution : $\boxed{S = \left\{\frac{-3 + \sqrt{17}}{4}\right\}}$

◦23◦ Vrai ou vrai : $\forall x \in \mathbb{R},\ Arctan(x) = \frac{7.\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Un arctangente reste entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. On a donc une implication du type « Faux implique ce qu'on veut ».

◦24◦ ♡ Calculez ces trois là $\int_0^1 t^2.Arctan(t).dt$, $\int_0^1 \frac{Arctan(t)}{1+t^2}.dt$ et $\int_0^1 \frac{t^2.Arctan(t)}{1+t^2}.dt$.

Toutes ces intégrales existent. Et la présence d'arctangente fait penser à des intégrations par parties. On doit alors pousser un cran plus loin et passer de « continues » à « C^1 ».
Cela dit, il y a aussi des choses rapides avec $u'.u$:

$$\int_0^1 t^2.Arctan(t).dt = \left[\frac{t^3}{3}.Arctan(t)\right]_0^1 - \int \frac{t^3}{3.(1+t^2)}.dt$$

On décompose ensuite

$$\frac{t^3}{1+t^2} = \frac{t^3+t}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} = 1 - \frac{t}{1+t^2}$$

$$\int_0^1 \frac{Arctan(t)}{1+t^2}.dt = \left[\frac{(Arctan(t))^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}$$

$$\int_0^1 \frac{t^2.Arctan(t)}{1+t^2}.dt = \int_0^1 \frac{(1+t^2).Arctan(t)}{1+t^2}.dt - \int_0^1 \frac{Arctan(t)}{1+t^2}.dt = \int_0^1 1.Arctan(t).dt - \frac{\pi^2}{32}$$

La première est un classique « par parties » et s'intègre en $t \longmapsto t.Arctan(t) - \frac{\ln(1+t^2)}{2}$.

$\int_0^1 t^2.Arctan(t).dt$	$\int_0^1 \frac{Arctan(t)}{1+t^2}.dt$	$\int_0^1 \frac{t^2.Arctan(t)}{1+t^2}.dt$
$\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{\ln(2)}{6}$	$\frac{\pi^2}{32}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\pi^2}{32}$

∘25∘

♡ Calculez $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{e^t+e^{-t}}$ en y trouvant l'arctangente cachée.

Posons $x = e^t$. L'intégrale devient $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x+\frac{1}{x}}.\frac{dx}{x}$.

On intègre en *Arctan* et on trouve $\boxed{Arctan(e) - \frac{\pi}{4}}$

∘26∘

♡ Un parallélépipède rectangle pour volume $180cm^3$. Sa surface latérale vaut $192cm^2$. La somme des longueurs de ses arêtes vaut $68cm$. Calculez ses dimensions.

On note a, b et c les trois côtés.

On traduit les hypothèses :

volume	surface	arêtes
$a.b.c = 180$	$2.(a.b+a.c+b.c) = 192$	$4.a+4.b+4.c = 68$

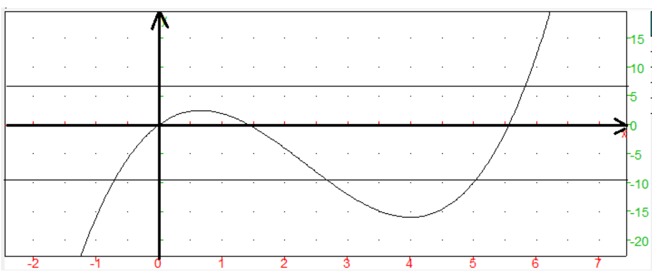
On arrive à l'équation $X^3 - 17.X^2 + 96.X - 180$.A la calculatrice on trouve une racine évidente : 5 puis après factorisation : 5, 6 et 6.

Rappel : La clef des relations coefficients racines, c'est de dire que a, b et c sont les racines du polynôme $(X-a).(X-b).(X-c)$.
On se contente de développer en $(X^2-(a+b).X+a.b).(X-c)$
$X^3-(a+b+c).X+(a.b+a.c+b.c).X-a.b.c$

∘27∘

Indiquez suivant la valeur de λ le nombre de racines réelles du polynôme $X^3 - 7.X^2 + 8.X + \lambda$.

On trace les variations de $x \longmapsto x^3 - 7.x^2 + 8.x$ en dérivant déjà (4 et 2/3) :



x	$]-\infty, 2/3]$	$[2/3, 4]$	$[4, +\infty[$	
$f'(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	
	$-\infty \nearrow 68/27$	$\searrow -16$	$\nearrow +\infty$	

λ	$\left]-\infty, -\frac{68}{27}\right[$	$\frac{-68}{27}$	$\left]\frac{-68}{27}, 16\right[$	16	$]16, +\infty[$
	une racine	deux racines dont une double	trois racines	deux racines dont une double	une racine

---

∘28∘

♡ Classez les en fonction de leur argument :

3+4.i	34+45.i	346+443.i	512+641.i	100+127.i

(calculatrice interdite, quand même !)

Les quatre sont dans le même quart de plan « x et y positifs ».
Il suffit de calculer les tangentes de leurs arguments.

Rappelons en effet que (pour x et y positifs en tout cas), e, posant $x + i.y = \rho.\cos(\theta) + \rho.\sin(\theta)$, on atan$(\theta) = \frac{y}{x}$.
Sur l'intervalle de travail, la tangente est croissante. Les arguments seront donc dans le même ordre que les tangentes.

complexe	3+4.i	34+45.i	346+443.i	512+641.i	100+127.i
tangente	$\frac{4}{3}$	$\frac{45}{34}$	$\frac{443}{346}$	$\frac{641}{512}$	$\frac{127}{100}$
tangente à 10^{-3} près	1,333	1,323	1,280	1,252	1,270

Certes la calculatrice est interdite, mais elle permet au moins d'avoir une idée du classement. Reste ensuite à prouver :

complexe	512+641.i	100+127.i	346+443.i	34+45.i	3+4.i
tangente	$\frac{641}{512}$	$\frac{127}{100}$	$\frac{443}{346}$	$\frac{45}{34}$	$\frac{4}{3}$
tangente à 10^{-3} près	1,252	1,270	1,280	1,323	1,333

On le fait par produits en croix :

complexe	512+641.i	100+127.i	346+443.i	34+45.i	3+4.i
tangente	$\dfrac{641}{512}$	$\dfrac{127}{100}$	$\dfrac{443}{346}$	$\dfrac{45}{34}$	$\dfrac{4}{3}$
preuve	$641 \times 100 < 127 \times 512$	$127 \times 346 < 443 \times 100$	$443 \times 34 < 45 \times 346$	$45 \times 3 \leqslant 34 \times 4$	
détail	$64100 < 65024$	$43942 < 44300$	$15062 < 15570$	$135 < 136$	

L'usage de la calculatrice a permis de n'avoir que ces tests à faire, et à ne pas se lancer dans la comparaison de $\dfrac{45}{34}$ et $\dfrac{641}{512}$ par exemple.

∘29∘

Sachant $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$, calculez $\sin(3.\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$
- en appliquant la formule précédente pour $\theta = \dfrac{\pi}{2} - t$
- en dérivant la formule en cosinus
- en revenant aux formules de Moivre et Euler

La première formule est à connaître par coeur. On la démontre de plusieurs façon.
Mais passons à la seconde.

On part de $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$, valable pour tout θ donc aussi pour $\dfrac{\pi}{2} - \theta$:

$$\cos\left(3.\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = 4.\cos^3\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 3.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

On remplace :

$$\cos\left(3.\frac{\pi}{2} - 3.\theta\right) = 4.\sin^3(\theta) - 3.\sin(\theta)$$

Rappel :
La formule $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$ *est une évidence.*
Si vous devez la démontrer (et la comprendre), faites un dessin sur le cercle trigonométrique.
Si vous devez convaincre un élève de Terminale, développez $\cos(\pi/2).\cos(\theta) + \sin(\pi/2).\sin(\theta)$.
Mais sachez que vous ne lui rendrez pas service. Vous ne lui permettrez pas de comprendre.
Vous ferez de lui un crétin qui transforme les maths en formules qu'on applique sans comprendre.
tant pis pour cet élève de Terminale, il ne fera pas ingénieur. Une place de gagnée si vous faites 5/2.
Mais retenez que si aux concours vous faites la preuve en $\cos.\cos + \sin.\sin$, *le correcteur se dire « élève un peu con-con, esprit non scientifique, bon, on va voir avec le reste si il a de l'intuition et si il comprend ce dont il parle ».*

Même argument de trigonométrie sur le cercle :

$$4.\sin^3(\theta) - 3.\cos(\theta) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} - 3.\theta\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3.\theta\right) = -\sin(3.\theta)$$

On vire les signes : $\sin(3.\theta = 3.\sin(\theta) - 4.\sin^3(\theta)$

Approche par dérivation : on part encore de $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$ valable pour tout θ et on dérive.

$$-3.\sin(3.\theta) = 4.3.\cos^2(\theta).(-\sin(\theta) + 3.\sin(\theta)$$

On simplifie par 3 :

$$\sin(3.\theta) = 4.\cos^2(\theta).\sin(\theta) - \sin(\theta)$$

Ce n'est pas la même qu'au dessus, mais $\sin(3.\theta) = 4.(1 - \sin^2(\theta)).\sin(\theta) - \sin(\theta)$
$\sin(3.\theta) = 4.s - 4.s^3 - s = 3.s - 4.s^3$ c'est bon

Remarque :
On ne dérive jamais une relation $f(x) = g(x)$ *en* $f'(x) = g'(x)$.
Ce qu'on a le droite de faire c'est dériver $\forall x,\ f(x) = g(x)$ *en* $\forall x,\ f'(x) = g'(x)$.
Sans le $\forall x$, *c'est a priori juste en un point deux courbes qui se croisent. Elles n'ont aucune raison d'y avoir la même tangente.*
Avec le $\forall x$, *vous avez deux courbes qui se superposent sur un intervalle, et les tangentes sont les mêmes.*
Et avec le $\forall x$ *mis en valeur, vous afites enfin des maths et pas juste du calcul...*

On écrit $\sin(3.\theta) = \dfrac{e^{3.i.\theta} - e^{-3.i.\theta}}{2.i}$

$$\sin(3.\theta) = \frac{(e^{i.\theta})^3 - (e^{-i.\theta})^3}{2.i}$$
$$\sin(3.\theta) = \frac{(c+i.s)^3 - (c-i.s)^3}{2.i}$$
$$\sin(3.\theta) = \frac{(c^3+3.c^2.i.s+3.c.i^2.s^2+i^3.s^3) - (c^3-3.c^2.i.s+3.c.i^2.s^2-i^3.s^3)}{2.i}$$
$$\sin(3.\theta) = \frac{(c^3+3.c^2.i.s-3.c.i^2.s^2-i.s^3) - (c^3-3.c^2.i.s-3.c.i^2.s^2+i.s^3)}{2.i}$$
$$\sin(3.\theta) = \frac{6.c^2.i.s - 2.i.s^3}{2.i}$$
$$\sin(3.\theta) = 3.c^2.s - s^3$$
$$\sin(3.\theta) = 3.(1-s^2).s - s^3$$
$$\sin(3.\theta) = 3.s - 4.s^3$$

On notera • qu'on retrouve effectivement la même
• qu'un prof de Sup estimera que c'est le type de calcul que vous devez maîtriser sans faute, et de votre propre initiative
• qu'on avait aussi ce résultat par $\Im m(e^{3.i.\theta})$

◦30◦

♡ Sachant $\tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}$, calculez $\tan(5.\pi/12)$.

Facile : $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{\tan(\pi/12)} = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$.

◦31◦

Résolvez

$x^2 - 5.x + 6 < 0$	$(x^2 - 5.x + 6 < 0) \Rightarrow (x > 5)$	$(x > 5) \Rightarrow (x^2 - 5.x + 6 < 0)$
$x^2 - 5.x + 6 < 0$ ou $x > 5$	$x^2 - 5.x + 6 < 0$ et $x > 5$	$(x > 5) \Rightarrow (x^2 > 25)$

d'inconnue réelle x.

$x^2 - 5.x + 6 < 0$

Étude du signe d'un trinôme du second degré, orienté dans le sens « classique » : $S =]2,\ 3[$

Conseil : Pour le signe du trinôme, ne retenez pas « du signe de a à l'extérieur des racines ».
Visualisez la parabole, c'est tout.
Halte au « par coeur », vive le « par les yeux ».

$(x^2 - 5.x + 6 < 0) \Rightarrow (x > 5)$

Quand est ce que l'implication serait fausse ? Quand on aurait $(x^2 - 5.x + 6 < 0)$ *et* $(x \leqslant 5)$.
On doit donc refuser $(2 < x < 3)$ *et* $(x \leqslant 5)$.

On a donc $\boxed{S =]-\infty,\ 2] \bigcup [3,\ +\infty[}$

Pour vérifier

x	$]-\infty,\ 2]$	$]2,\ 3[$	$[3,\ 5]$	$]5,\ +\infty[$
assertion $(x^2 - 5.x + 6) < 0$	False	True	False	False
assertion $(x > 5)$	False	False	False	True
implication	True	False	True	True

On rappelle que False implique (n'importe) est toujours vrai.
Si ma tante en avait...

$(x > 5) \Rightarrow (x^2 - 5.x + 6 < 0)$

Finalement, c'est facile avec tableau

x	$]-\infty,\ 2]$	$]2,\ 3[$	$[3,\ 5]$	$]5,\ +\infty[$
assertion $(x > 5)$	False	False	False	True
assertion $(x^2 - 5.x + 6) < 0$	False	True	False	False
implication	True	True	True	False

Ici, $\boxed{S =]-\infty,\ 5]}$

$x^2 - 5.x + 6 < 0$ ou $x > 5$

Encore un tableau.

x	$]-\infty,\ 2]$	$]2,\ 3[$	$[3,\ 5]$	$]5,\ +\infty[$
assertion $(x > 5)$	False	False	False	True
assertion $(x^2 - 5.x + 6) < 0$	False	True	False	False
disjonction	False	True	False	True

$\boxed{S =]2,\ 3[\bigcup]5,\ +\infty[}$ assez naturellement.

$x^2 - 5.x + 6 < 0$ et $x > 5$

Ici, naturellement, $\boxed{S = \emptyset}$

$(x > 5) \Rightarrow (x^2 > 25)$

Toujours vrai, heureusement. $\boxed{S =]-\infty,\ +\infty[}$

∘32∘

♡ Sachant $a+b+c = 4$, $a^2+b^2+c^2 = 20$ et $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{1}{6}$ calculez $a.b+a.c+b.c$ et $a.b.c$.
Donnez le polynôme de racines a, b et c. Calculez a, b et c.

Les relations $a+b+c = 4$ et $a^2+b^2+c^2 = 20$ donnent $4^2 - 2.(a.b+a.c+b.c) = 20$, d'où $a.b+a.c+b.c = 2$.

Les relations $a.b+a.c+b.c = -2$ et $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{1}{6}$ donnent $\frac{-2}{a.b.c} = \frac{1}{6}$ puis $a.b.c = -12$.

Les formules de Viète offrent :

$$(X-a).(X-b).(X-c) = X^3 - 4.X^2 - 2.X + 12$$

On résout l'équation $x^3 - 4.x^2 - 2.x + 12 = 0$ d'inconnue réelle (ou complexe x).

Une racine évidente ? 2 car $2^3 + 12 = 20 = 4.4 + 2.2$.
On cherche les deux autres racines, de somme 2 et de produit -6.
On résout donc $x^2 - 2.x - 6 = 0$.
On trouve $1+\sqrt{7}$ et $1-\sqrt{7}$.

On peut vérifier : $2 + (1+\sqrt{7}) + (1-\sqrt{7}) = 4$

$$4 + (1+\sqrt{7})^2 + (1-\sqrt{7})^2 = 4+1+7+1+7 = 20$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{1+\sqrt{7}} + \frac{1}{1-\sqrt{7}} = \frac{(1+\sqrt{7}).(1-\sqrt{7}) + 2.(1-\sqrt{7}) + 2.(1+\sqrt{7})}{2.(1+\sqrt{7}).(1-\sqrt{7})} = \frac{-6+4}{1.(-6)}$$

$$S = \left\{ \begin{array}{lll} (2, 1+\sqrt{7}, 1-\sqrt{7}), & (1+\sqrt{7}, 2, 1-\sqrt{7}), & (1+\sqrt{7}, 1-\sqrt{7}, 2), \\ (2, 1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}), & (1-\sqrt{7}, 2, 1+\sqrt{7}), & (1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}, 2), \end{array} \right\}$$

six triplets solutions.

∘33∘

♣ On va prouver que i (de carré -1) est en fait un réel. Considérons l'équation $x = e^{x.\pi/2}$.
le complexe i en est évidemment racine.
Mais si x est racine de $x = e^{x.\pi/2}$, on a donc $x = e^{e^{x.\pi.2}.\pi/2}$ puis $x = e^{e^{e^{x.\pi/2}.\pi.2}.\pi/2}$ et recommencer.
On va donc poser $a = e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\cdots}}}}}}$ avec une infinité de termes. Sachant $\infty = \infty + 1$, a est solution de l'équation.
On identifie : $a = i$. Et i se construit donc avec uniquement des réels...

Première objection : il se peut qu'il y ait une autre solution (réelle) à l'équation $x = e^{x.\pi/2}$, et que notre nombre a soit celle ci.

Il se peut que a n'existe pas.
a est la limite (si elle existe) de la suite $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = e^{u_n.\pi/2}$. Et si cette suite diverge, ça n'a pas de sens de nommer a.

D'ailleurs en mettant ensemble les deux idées : $\infty = e^{\infty.\pi/2}$ donc $a = e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\cdots}}}}}} = +\infty$.

∘34∘

Vrai ou faux : $(1=0) \Rightarrow \Big((i^2+1=0) \Rightarrow (1<0)\Big)$ puis $\Big((1=0) \Rightarrow (i^2+1=0)\Big) \Rightarrow (1<0)$.

$Faux \Rightarrow (qu'importe)$: c'est vrai.
$(Faux \Rightarrow Vrai)$ est vrai. Et $Vrai \Rightarrow Faux$ est faux.

Finalement, l'implication n'est pas associative.

∘35∘

Rappel des règles : une maison de n cases contient les nombres de 1 à n, deux nombres égaux ne peuvent pas être côte à côte sur la grille, même en diagonale.

Exemple :

2	1	3	1
5	4	2	4
3	1	5	1
2	4	2	3
1	3	1	5

à vous :

4			2
	5		
			?
2			3
		5	

-

						3		2
				5				
	4				4			
			3				1	
1		5		4				2

Au choix :

4	3	1	2
2	5	4	3
4	1	2	1
2	3	4	3
5	1	5	1

-

						3		2
		3		5				
	4				4			
2	3		3		1		1	
1	4	5	1	4				2

Ou alors `https ://replit.com/@redrapious/TektonikSolver2000#main.py`
Antoine G. propose un solveur de Tektonic, en Python.

∘36∘

Quantifiez : "*il suffit que je prenne une douche pour que le téléphone sonne*".
Je vous dis : "*quand les andouilles voleront, tu seras chef d'escadrille*". Que déduisez vous si

vous avez vu une andouille qui vole	aucune andouille ne vole	vous êtes chef d'escadrille

Quantifiez : "pour être diplomate, il ne suffit pas d'être bête, il faut aussi être poli" *(citation attribuée je crois à Clemenceau)*.

(je me douche)⇒(ça sonne).

vous avez vu une andouille qui vole	aucune andouille ne vole	vous êtes chef d'escadrille
mais volent elles toutes ?	rien à déduire	rien à déduire

(mais qui utilise encore cette citation d'une chanson de Georgius en 1930 ?)

$\overline{(bete \Rightarrow diplomate)}$ et $(diplomate \Rightarrow poli)$.
On a donc $(\exists A,\ A\ bete\ et\ A\ non\ diplomate)$ et $(\forall x,\ (x\ dimplomate) \Rightarrow (x\ poli))$

Mc Mahon (autre homme politique d'il y a un siècle et demi) disait aussi :
« la fièvre typhoïde, on en meurt ou on reste idiot ; je le sais, je l'ai eue. »

∘37∘

♡ On sait $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, $a + b + c = 1$ et $a^2 + b^2 + c^2 = \alpha$ avec α réel.
Pour quelles valeurs de α les trois nombres a, b et c sont ils réels ?

On crée le polynôme $X^3 - S.X^2 + D.X - P$.
On nous livre : $S = 1$, $\frac{D}{P} = 1$ et enfin $S^2 - 2.D = \alpha$.
Le polynôme devient $X^3 - X + D.X - D$ avec $D = \frac{1-\alpha}{2}$.
On a une racine évidente : 1 : $X^3 - X + D.X - D = (X-1).(X^2 + D)$.
On a une racine réelle, et ensuite tout dépend de D.
On aura trois racines réelles si et seulement si D est négatif. Condition : $\alpha \geqslant 1$.

∘38∘

Sachant qu'une des racines cubiques de $46.i - 9$ a pour partie réelle 3, retrouvez les trois racines cubiques.

Merci pour l'indice. On résout donc $(3 + i.y)^3 = -9 + 46.i$.
On obtient $27 - 9.y^2 = -9$ et $27.y - y^3 = 46$.

La première équation donne $y = 2$ ou $y = -2$.
La seconde ne valide que 2.
La racine cubique cherchée est donc $3 + 2.i$ (on vérifie).
Et les deux autres sont $(3 + 2.i).j$ et $(3 + 2.i).j^2$.
Si on y tient : $\dfrac{-3 - 2.\sqrt{3} + i.(-2 + 3.\sqrt{3})}{2}$ et $\dfrac{-3 + 2.\sqrt{3} + i.(-2 - 3.\sqrt{3})}{2}$.

◦39◦

Un rectangle a pour périmètre 12 unités. Entre combien et combien peut varier son aire. Quel est celui qui a la plus grande aire ?

On note a et b ses côtés.
On sait $a + b = 6$ (et ils sont positifs).
L'aire est $a.b$. Elle reste positive ou nulle.
D'ailleurs elle peut être nulle, pour un rectangle plat (côtés 0 et 6).
Sinon, on a une majoration : $\sqrt{a.b} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ (avec égalité si et seulement si $a = b$).
On majore donc $\sqrt{a.b}$ par 3.
L'aire ne pourra pas dépasser 9. Et elle l'attenidra pour le carré (côtés 3 et 3).

◦40◦

♡ Résolvez l'équation « $\dfrac{z+i}{z-i}$ est un imaginaire pur » d'inconnue complexe z *(décrire l'ensemble des solutions sous géométrique)*.

On note M le complexe d'affixe z
A le complexe d'affixe i
B le complexe d'affixe $-i$.
Un imaginaire pur est un complexe d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π.
La condition $\dfrac{z+i}{z-i}$ a pour argument $\dfrac{\pi}{2}$ signifie qu'il y a un angle droit entre les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA}$.
Qui sont les points qui voient $[A,\ B]$ sous un angle droit ? Les points du cercle de diamètre $[A,\ B]$.
On trouve donc le cercle unité, les complexes de module 1.

Sinon, on peut poser $z = x + i.y$ et annuler la partie réelle de $\dfrac{x + i.(y+1)}{x + i.(y-1)}$.
C'est déjà un calcul quand même intéressant : $\dfrac{x + i.(y+1)}{x + i.(y-1)} = \dfrac{(x + i.(y+1)).(x - i.(y-1))}{x^2 + (y-1)^2}$.
Le dénominateur est maintenant réel, on peut le mettre de côté et annuler $\Re e((x + i.(y+1)).(x - i.(y-1))$.
On trouve $x^2 + (y-1).(y+1) = 0$. C'est directement $x^2 + y^2 = 1$. On a bien le cercle trouvé géométriquement.

◦41◦

t est dans $]0,\ \pi[$. Prouvez l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x - \cos(t)}{x^2 - 2.x.\cos(t) + 1}.dx$ et calculez cette intégrale.

Le seul problème serait l'annulation du dénominateur.
Est il possible que $x^2 - 2.x.\cos(t) + 1$ s'annule pour un x entre 0 et 1.
On calcule le discriminant de ce trinôme en x : $4.\cos^2(t) - 4$ ce qui fait $-4.\sin^2(t)$.
Et comme t n'est pas un multiple de π ce discriminant est strictement négatif.
Le trinôme ne s'annule pas.
Le dénominateur n'est jamais nul, $x \longmapsto \dfrac{x - \cos(t)}{x^2 - 2.x.\cos(t) + 1}$ est continue, donc intégrable.

Rappel

dérivable
$\Downarrow$
continue
$\Downarrow$
intégrable

On a une forme en $\dfrac{u'}{u}$. On intègre en $x \longmapsto \dfrac{1}{2}.\ln(x^2 - 2.x.\cos(t) + 1)$ ou même $x \longmapsto \ln(\sqrt{x^2 - 2.x.\cos(t) + 1})$ pour tromper l'adversaire.
Finalement $\displaystyle\int_0^1 \frac{x - \cos(t)}{x^2 - 2.x.\cos(t) + 1}.dx = \frac{1}{2}.\ln(1 - 2.\cos(t) + 1) = \frac{1}{2}.\ln(4.\sin^2(t/2)) = \ln(2) + \ln(\sin(t/2))$
puisque $\sin(t/2)$ est strictement positif.

Remarque : c'est encore plus beau de compacter à la fin si on a demandé $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x - \cos(t)}{x^2 - 2.x.\cos(t) + 1}.dx$.
la réponse doit dépendre de t, et seulement de t, soyons logique sur les variables.

∘42∘

Résolvez l'équation $x^2+(1-5.i).\sqrt{2}.x=24$ d'inconnue complexe x.
Résolvez l'équation $e^z+(1-5.i).\sqrt{2}=24.e^{-z}$ d'inconnue complexe z.

Le discriminant vaut $48-20.i$.
Une de ses racines est $\sqrt{2}.(5-i)$.
Les solutions sont $\sqrt{2}.(-2-2.i)$ et $\sqrt{2}.(3-3.i)$.

On résout ensuite $e^x.e^{i.y}=4.\dfrac{-\sqrt{2}-i.\sqrt{2}}{2}$ et on trouve $x=\ln(4)$ et $y=\dfrac{5.\pi}{4}+2.k.\pi$ avec k pouvant décrire $\mathbb{Z}$.
On fait à peu près de même avec l'autre racine, où seul le module change, donc la partie réelle x.

∘43∘

♡ Les a_k sont n réels strictement positifs ; montrez : $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\Big).\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}\Big)\geqslant n^2$.
Ce n'est pas évident si on ne pense pas à étudier le signe et le discriminant du trinôme
$x^2.\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-2.x.\sum\limits_{k=1}^{n}1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}$, mais une fois qu'on a vu ça, on se dit que c'est génial !

Partons comme suggéré (mais pourquoi donc ?) de

$$x^2.\sum_{k=1}^{n}a_k-2.n.x+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

(puisque $\sum_{k=1}^{n}1=n$).

C'est un trinôme du second degré en x de discriminant $2.n^2-4.\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\Big).\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}\Big)$. Et pourquoi pas. On peut envisager d'en prendre la racine carrée pour trouver les racines. Si toutefois ce discriminant est positif.

Mais sinon, on peut écrire $x^2.\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-2.x.\sum\limits_{k=1}^{n}1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k.x^2-\sum\limits_{k=1}^{n}2.x+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}$

$$x^2.\sum_{k=1}^{n}a_k-2.x.\sum_{k=1}^{n}1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k.x^2-2.x+\frac{1}{a_k}\Big)$$

Et chaque trinôme du second degré a un discriminant nul $(4-4)$.
Mais rien ne relie le discriminant de la somme des polynômes aux discriminants de chacun !
Seulement voilà, chaque petit trinôme $\Big(a_k.x^2-2.x+\dfrac{1}{a_k}\Big)$ reste de signe constant positif (c'est en fait $(\sqrt{a_k}.x-1)^2$, si si).
La somme est donc positive.

Le trinôme $x^2.\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-2.n.x+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}$ reste donc positif.
Comme il ne change jamais de signe, son discriminant est négatif ou nul.
On a donc

$$2.n^2-4.\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big).\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\Big)\leqslant 0$$

On traduit : $2.n^2-4.\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\Big).\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}\Big)\geqslant n^2$.
C'est exactement ce qu'on voulait.

Rédigé dans le sens direct et magique. Considérons

$$x\longmapsto\sum_{k=1}^{n}\Big(\sqrt{a_k}.x-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\Big)^2$$

C'est une application positive, comme somme de carrés de réels.
Si on la développe , c'est le trinôme du second degré

$$x\longmapsto x^2.\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)-2.n.x+\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\Big)$$

Comme il reste de signe constant, il n'a pas de racines, et son discriminant est négatif ou nul.
On calcule donc :

$$0 \geqslant \Delta = 4.n^2 - 4.\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big).\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\Big)$$

Démonstration dite « de Cauchy-Schwarz ».

Il existe aussi une preuve directe, en développant.
On part du produit $\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big).\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\Big)$ qu'on va noter P.
On écrit plutôt $P = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big).\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\Big)$ par soucis des variables indépendantes.
On développe

$$P = \Big(\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant i\leqslant n}} \frac{a_k}{a_i}\Big)$$

avec n^2 termes.
On isole déjà les n termes diagonaux ($i = k$) :

$$P = \Big(\sum_{i=k} \frac{a_k}{a_i} + \sum_{i\neq k} \frac{a_k}{a_i}\Big)$$

(n termes plus $n^2 - n$ termes).
On regroupe les autres deux à deux :

$$P = \Big(\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i<k} \frac{a_k}{a_i} + \frac{a_i}{a_k}\Big)$$

(n termes, plus $\frac{n.(n-1)}{2}$ couples de deux termes « symétriques »).
Mais chaque $\frac{a_k}{a_i} + \frac{a_i}{a_k}$ vaut au moins 2 (quantités de la forme $x + \frac{1}{x}$, c'est classique [3]).
On a donc n termes égaux à 1 et $\frac{n^2 - n}{2}$ termes plus grands que 2.
La somme dépasse $n + 2.\frac{n^2 - n}{2}$. C'est bien n^2.

Corolaire :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots a_n}{n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}}$$

La moyenne arithmétique est plus grande que la moyenne harmonique.
Qui est la moyenne harmonique ? C'est l'inverse de la moyenne des inverses.
Pour deux termes, c'est $\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

∘44∘ On prend pour un triangle les notations usuelles : sommets A, B et C, d'angles aux sommets α β et γ et de longueurs des côtes opposés aux sommets a, b et c. Un triangle est dit arithmétique si l'un de ses angles est moyenne arithmétique des deux autres. Un triangle est dit géométrique si l'un de ses côtés est moyenne géométrique des deux autres. Montrez que les triangles équilatéraux sont à la fois arithmétiques et géométriques.
Construisez un triangle arithmétique et un triangle géométrique qui ne soient pas équilatéraux *(donnez une construction à la règle et au compas, et donnez les coordonnées des sommets).*
Peut il exister des triangles qui soient arithmétiques et géométriques à la fois sans être équilatéraux.

	arithmétique	géométrique	harmonique
Rappel	$\frac{x+y}{2}$	$\sqrt{x.y}$	$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$

---

3. variations de $t \longmapsto t + \frac{1}{-t}$, ou développement de $\Big(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\Big)^2$, ou comparaison de moyenne arithmétique et géométrique, ou reconnaissance de $2.ch(\ln(t))$

Rappel aussi : $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ que je vous demande de démontrer en calculant de plusieurs façons une hauteur du triangle.

∘45∘

♣ Donnez un sens à $x \longmapsto \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}}$ et calculez l'intégrale de cette application de 0 à 1.

Réflexe pas assez mathématique, mais futé : si $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}}$ alors $y^2 = x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}} = x+y$.

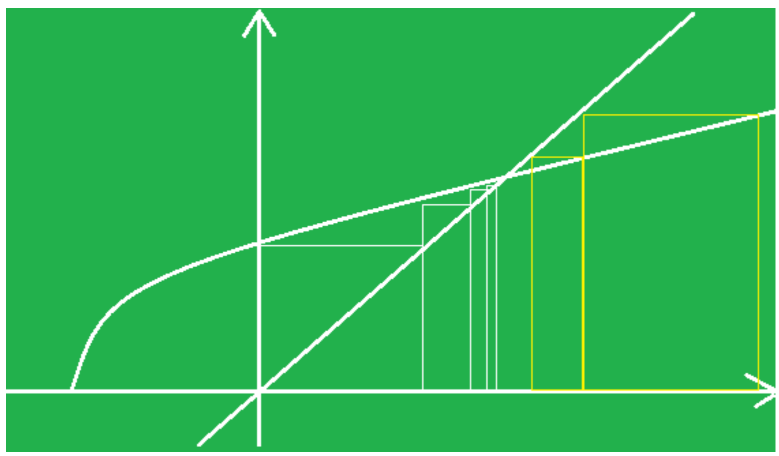
---

y est donc clairement défini à partir de x par une équation du second degré $y^2 - y - x = 0$ dont on ne retient que la racine positive : $y = \frac{1+\sqrt{1+4.x}}{2}$.

C'est alors facile d'intégrer $\boxed{\int_0^1 \frac{1+\sqrt{1+4.x}}{2}.dx = \frac{1}{2} + \left[\frac{(1+4.x)^{\frac{3}{2}}}{6}\right]_0^1 = \frac{5+5.\sqrt{5}}{12}}$

Mais on est en maths. On veut bien faire des recherches sur des objets dont l'existence n'a pas été prouvée, se perdre en conjecture plus ou moins étonnantes voire farfelues (comme $1+2+4+8+16+\ldots = -1$), mais après, il faut quand même prouver que ce dont on parle existe. Le physicien n'a pas ce problème. Il dit qu'il ne parle que ce ce qui existe. Et vous demande dès lors un acte de foi sur l'univers qui vous entoure (vous faites plus confiance à vos sens ou à votre cerveau, c'est peut être ça qui distingue physique et maths [4]*)*

On a la suite $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{x+u_n}$, dont les termes sont donc 0, $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+\sqrt{x}}$, $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ et ainsi de suite.
On étudie donc la suite récurrente, et elle converge.
Attention, sur le dessin, x est fixé, et on compare les graphes de $u \longmapsto u$ et $u \longmapsto \sqrt{x+u}$.



Et si on s'entraînait à TeX ? $x \longmapsto \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}}$ c'est
\$x \rightarrow \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x+\ldots}}}}\$.
Et cette fois, **\displaystyle** n'apporte rien. **\ldots** c'est les trois petits points.

∘46∘

♡ Simplifiez cette petite somme $5.Arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2.Arctan\left(\frac{3}{79}\right)$.

Voici un angle pas très grand (c'est vague mais ça va servir), dont on peuyt calculer la tangente.
On pose $\alpha = Arctan(1/7)$ et $\beta = Arctan - 3/79)$.

On calcule $\tan(2.\alpha) = \frac{2.\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}.\frac{1}{7}} = \frac{2.7}{48} = \frac{7}{24}$.

On poursuit : $\tan(4.\alpha) = \frac{2.\frac{7}{24}}{1-\frac{7}{24}.\frac{7}{24}} = \frac{336}{527}$.

Et même $\tan(5.\alpha) = \frac{2879}{3353}$.

De même : $\tan(2.\gamma) = \frac{237}{3116}$.

---

4. *mais c'est quoi les cinq sens si il n'y a pas un cerveau derrière pour interpréter*

Et c'est magique : $\tan(5.\alpha + 2.\gamma) = 1$.

Plus rapide peut-être : $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{2}{11}$.

$$\tan(\alpha + \beta + \alpha) = \frac{1}{3}$$
$$\tan(2.(2.\alpha + \beta)) = \frac{3}{4}$$
$$\tan(\alpha + 2.(2.\alpha + \beta)) = 1$$

La tangente de notre angle ne dit pas tout. Encore faut il qu'il soit dans le bon intervalle.
Mais on a $\alpha \leqslant Arctan(1/\sqrt{3})$ et $\beta \leqslant Arctan(1/\sqrt{3})$.
Ceci permet d'avoir α et β entre 0 et $\dfrac{\pi}{6}$.
La somme $4.\alpha + 2.\beta$ est entre 0 et $\dfrac{7.\pi}{6}$.
Et sur cet intervalle, seul $\dfrac{\pi}{4}$ a pour tangente 1.
$\boxed{5.Arctan\left(\dfrac{1}{7}\right) + 2.Arctan\left(\dfrac{3}{79}\right) = \dfrac{\pi}{4}}$ encore une fois.

∘47∘ ♡ L'équation $x^2 + b.x + c = 0$ d'inconnue x admet pour racines α et β. Donnez *(sous forme développée)* l'équation polynomiale de racines α^2 et β^2.

L'équation $x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0$ d'inconnue x admet pour racines α, β et γ. Donnez l'équation polynomiale de racines α^2 et β^2 et γ^2. Donnez l'équation polynomiale de racines $\alpha.\beta$, $\alpha.\gamma$ et $\beta.\gamma$.

La méthode de Terminale ou de Physique : on résout, on trouve α et β, on les élève au carré, et on construit la nouvelle équation.

Mais on sait (relations coefficients racines) : $\alpha + \beta = -b$ et $\alpha.\beta = c$.
On passe aux carrés : $(\alpha + \beta)^2 = b^2$ et $(\alpha.\beta) = c^2$.
On arrange : $\alpha^2 + \beta^2 + 2.c = b^2$ et $\alpha^2.\beta^2 = c^2$.
On extrait : $\alpha^2 + \beta^2 = b^2 - 2.c$ et $\alpha^2.\beta^2 = c^2$.
On développe (relations racines coefficients) : $(X - \alpha^2).(X - \beta^2) = X^2 - (b^2 - 2.c).X + c^2$
On tient l'équation : $\boxed{x^2 - (b^2 - 2.c).x + c^2 = 0}$

On recommence avec trois racines : $X^3 + b.X^2 + c.X + d$.

$\alpha + \beta + \gamma = -b$	$\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma = c$	$\alpha.\beta.\gamma = -d$

De même alors

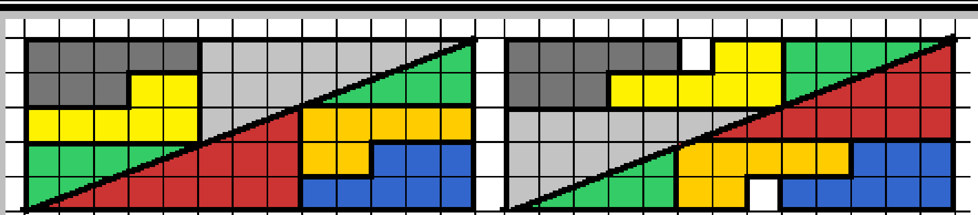
$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = b^2 - 2.c$	$\alpha^2.\beta^2 + \alpha^2.\gamma^2 + \beta^2.\gamma^2 = c^2 - 2.b.d$	$\alpha^2.\beta^2.\gamma^2 = d^2$

L'équation est donc $X^3 - (b^2 - 2.c).X^2 + (c^2 - 2.b?d).X - d^2$.

Enfin :

$\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma = c$	$\alpha.\beta^2.\gamma + \alpha^2.\beta.\gamma + \alpha.\beta.\gamma^2 = b.d$	$(\alpha.\beta).(\alpha.\gamma).(\beta.\gamma) = d^2$

On a aussi l'équation.

∘48∘  Il y a un truc qui cloche, non ?

C'est un puzzle de Fibonacci.
Les pièces sont bien les mêmes entre les deux assemblages.
Mais les triangles ne peuvent pas être « alignés ».
Dans les grands triangles, l'angle au sommet « pointu » est $Arctan(3/7)$.
Dans les petits triangles, l'angle au sommet « pointu » est $Arctan(2/5)$.
Il n'y a pas égalité.
Ceci signifie qu'il rest de l'espace un peu d epart et d'autre de la diagonale.

Ou qu'au contraire dans l'autre puzzle, il y a un léger chevauchement.

◦49◦

Soient a et b deux réels positifs ; qui est le plus grand : la moyenne arithmétique de leurs inverses ou l'inverse de leur moyenne arithmétique ?

On doit comparer deux nombres : • la moyenne arithmétique de leurs inverses $A = \dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$

• l'inverse de leur moyenne arithmétique $B = \dfrac{1}{\frac{a+b}{2}}$.

On soustrait : $B - A = \dfrac{2}{a+b} - \dfrac{a+b}{2.a.b} = \dfrac{4.a.b-(a+b)^2}{2.a.b.(a+b)} = \ldots = \dfrac{-(a-b)^2}{2.a.b.(a+b)}$.
Le numérateur est négatif, et le dénominateur positif : l'inverse de la moyenne est plus petit que la moyenne des inverses.

Et on peut le prouver avec des résistances en parallèle. Si si !

◦50◦

Déjà posé pour degré 2.
♡ L'équation $x^2 + b.x + c = 0$ d'inconnue réelle x admet pour racines $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$. Calculez $\tan(\alpha+\beta)$ *(si elle existe...)*.

Rappel : $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *pour x hors de* $\left\{\dfrac{2.k+1}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, *et* $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}$ *tant que tout ceci existe.*

Inutile de résoudre l'équation. On connaît la somme des racines : $\tan(\alpha)+\tan(\beta) = -b$
le produit des racines : $\tan(\alpha).\tan(\beta) = c$

On effectue : $\boxed{\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha).\tan(\beta)} = \dfrac{-b}{1-c} = \dfrac{b}{c-1}}$

L'équation $x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0$ d'inconnue réelle x admet pour racines $\tan(\alpha)$, $\tan(\beta)$ et $\tan(\gamma)$. Calculez $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$.

On applique deux fois la formule : $\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\gamma)}{1-\tan(\alpha+\beta).\tan(\gamma)} = \dfrac{\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}+\tan(\gamma)}{1-\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}.\tan(\gamma)}$.

On simplifie : $\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma)-\tan(\alpha)\times\tan(\beta)\times\tan(\gamma)}{1-\tan(\alpha)\times\tan(\beta)+\tan(\beta)\times\tan(\gamma)-\tan(\beta)\times\tan(\gamma)}$.

Cette fois, on développe $(X-\tan(\alpha)).(X-\tan(\beta)).(X-\tan(\gamma))$ et on identifie avec $X^3+b.X^2+c.X+d$.

On identifie (relations coefficients racines) :
$$\begin{array}{lllllll} \tan(\alpha) & +\tan(\beta) & +\tan(\gamma) & = & -b & & \\ \tan(\alpha) & \times\tan(\beta) & \times\tan(\gamma) & = & -d & & \\ \tan(\alpha) & \times\tan(\beta) & +\tan(\alpha) & \times\tan(\gamma) & +\tan(\beta) & \times\tan(\gamma) & = \; c \end{array}$$

Tous calculs faits : $\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{-b-d}{1-c}$.

◦51◦

Calculez $Arctan\left(\dfrac{1}{7}\right) + 2.Arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)$ (et sa tangente pour commencer ?).

La tangente de cet angle vaut 1 (après calcul comme $\dfrac{\frac{1}{7}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{7}.\frac{1}{3}}$).

C'est bien parti pour être $\dfrac{\pi}{4}$. mais pourquoi pas $\dfrac{5.\pi}{4}$?

L'angle est entre 0 et $Arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2.Arctan(1)$.

Sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{2.\pi}{3}\right]$ un seul angle a pour tangente 1 : $\boxed{Arctan\left(\dfrac{1}{7}\right) + 2.Arctan\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}}$

∘52∘

♡ t est un réel fixé, θ est un réel de $]-\pi/2,\ \pi/2[$. Montrez : $\dfrac{1+i.\tan(\theta)}{1-i.\tan(\theta)}=e^{2.i.\theta}$.
Déterminez partie réelle et partie imaginaire de $\dfrac{1+i.t}{1-i.t}$ en utilisant la quantité conjuguée. retrouvez les formules en arc moitié.

On part de

$$\frac{1+i.\tan(\theta)}{1-i.\tan(\theta)}=\frac{1+i.\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1-i.\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}=\frac{\cos(\theta)+i.\sin(\theta)}{\cos(\theta)-i.\sin(\theta)}$$

en multipliant haut et bas par $\cos(\theta)$.
On utilise les formules de Moivre :

$$\frac{1+i.\tan(\theta)}{1-i.\tan(\theta)}=\frac{e^{i.\theta}}{e^{-i.\theta}}=e^{i.\theta}.(e^{-i.\theta})^{-1}=e^{i.\theta}.e^{i.\theta}=e^{2.i.\theta}$$

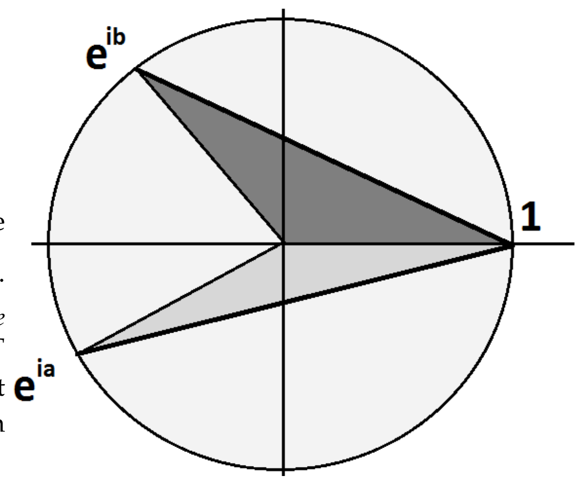
En posant $t=\tan(\theta)$ on a donc $\dfrac{1+i.t}{1-i.t}=\cos(2.\theta)+i.\sin(2.\theta)$.
On efface les i du dénominateur par quantité conjuguée dans le premier membre :

$$\cos(2.\theta)+i.\sin(2.\theta)=\frac{1+i.t}{1-i.t}=\frac{(1+i.t).(1+i.t)}{(1-i.t).(1+i.t)}=\frac{1-t^2+2.i.t}{1+t^2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}+i.\frac{2.t}{1+t^2}$$

Il ne reste plus qu'à identifier partie réelle et partie imaginaire.

∘53∘

♡ a et b sont deux réels de $]0,\ 2.\pi[$. Calculez module et argument de $1-e^{i.a}$. Calculez l'argument de $\dfrac{1-e^{i.b}}{1-e^{i.a}}$.
Retrouvez le théorème de l'arc capable *(dit aussi de l'angle au centre)* : si A et B sont deux points d'un cercle Γ de centre O, alors pour tout M de Γ, l'angle $\widehat{AMB}$ est constant *(égal à $\widehat{AMB}/2$)*. Trouvez les points M du plan vérifiant $\widehat{OMI}=\pi/2$ et $\widehat{OMJ}=\pi/4$?



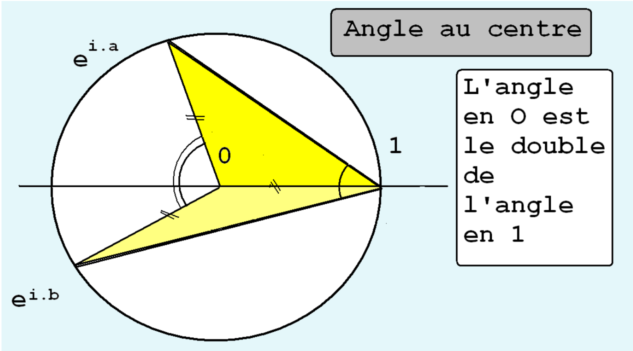
Que du calcul algébrique (bien conduit) dans un premier temps.

$$1-e^{i.a}=e^{\frac{i.a}{2}}.(e^{-\frac{i.a}{2}}-e^{\frac{i.a}{2}})=e^{\frac{i.a}{2}}.(-2.i.\sin(a/2))=e^{\frac{i.a}{2}}.(-i).(2.\sin(a/2))=e^{\frac{i.a}{2}-\frac{i.\pi}{2}}.(2.\sin(a/2))$$

Le réel $(2.\sin(a/2))$ est un réel positif.
Le complexe $e^{i.\frac{a-\pi}{2}}$ est de module 1 et a justement un argument entre $-\pi$ et π. On ne peut demander mieux.
$1-e^{i.a}$ a pour module $2.\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)$ et pour argument $\dfrac{a-\pi}{2}$.

Le quotient $\dfrac{1-e^{i.a}}{1-e^{i.b}}$ a pour module $\dfrac{\sin(a/2)}{\sin(b/2)}$ (quotient des modules)
a pour argument $\dfrac{a-b}{2}$ (différence des arguments, entre $-\pi$ et π justement)

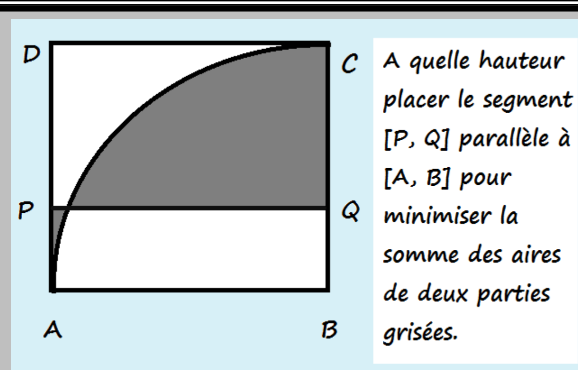
Si A et B sont sur le cercle trigonométrique, on les écrit $e^{i.a}$ et $e^{i.b}$. a et b désignent es angles $\widehat{IOA}$ et $\widehat{IOB}$.
Le quotient $\dfrac{1-e^{i.a}}{1-e^{i.b}}$ a pour module un truc sans intérêt
a pour argument l'angle entre AI (affixe $1-e^{ia}$) et BI (affixe $1-e^{i.b}$).
L'argument de $\dfrac{1-e^{i.a}}{1-e^{i.b}}$ est la moitié de l'argument de $\dfrac{e^{i.a}}{e^{i.b}}$.
L'angle $\widehat{AIB}$ est la moitié de l'angle $\widehat{AOB}$.



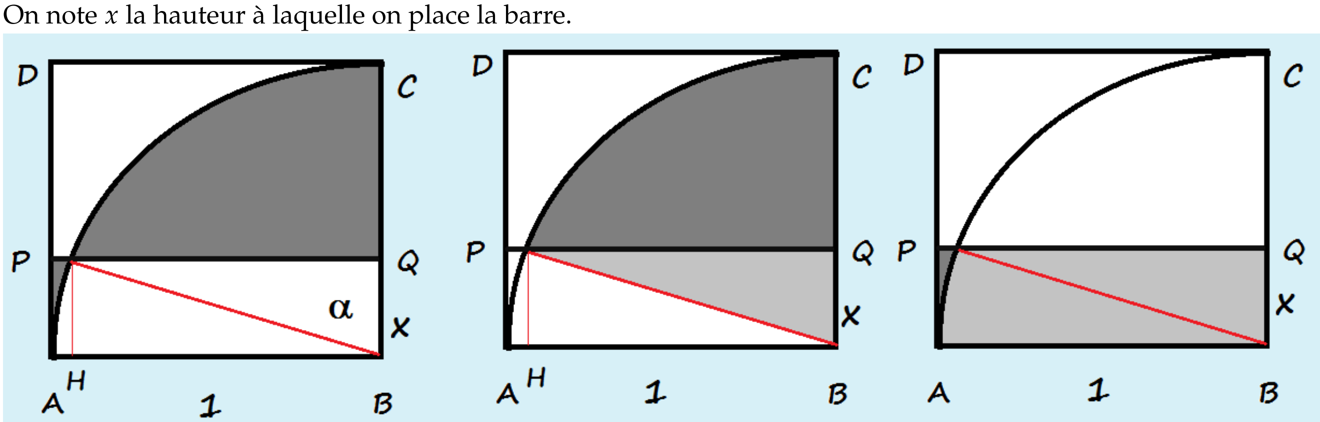
Ensuite, il y a plein de choses à raconter sur ce théorème. Par exemple son usage en marine pour se situer sur la mer en relevant juste quelques angles entre vous et des points de référence à l'horizon.
Ou même comment un G.P.S. vous localise (précision grossière si on ne joue pas sur les longueurs d'ondes et déphasages) à l'intersection de trois cercles.

∘54∘

Un carré. Un quart de cercle inscrit dans ce carré.
Un segment parallèle à un côté du carré.
Deux aires grisées.
Il faut placer le segment à la bonne hauteur pour minimiser l'aire grisée.
Des points si vous trouvez.



On considère que le carré et le disque ont le même rayon égal à 1 pour définir finalement la longueur de référence.
On note x la hauteur à laquelle on place la barre.



On dispose alors d'un angle α et de son complémentaire $\frac{\pi}{2} - \alpha$.
La trigonométrie de base nous dit $x = BQ = \cos(\alpha)$ et $BH = \sin(\alpha) = \sqrt{1 - x^2}$.

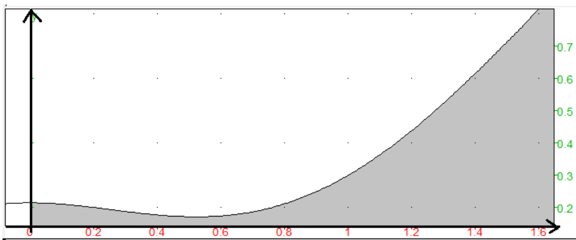
On découpe alors par exemple une portion de disque CBP d'aire $\frac{\alpha}{2}$ *(le secteur est proportionnel à l'angle au centre et pour $\alpha = 2.\pi$ il doit donner $\pi.R^2$ avec ici $R = 1$).*
On lui soustrait l'aire du triangle rectangle BQP et on a l'aire du morceau supérieur : $\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin(\alpha).\cos(\alpha)}{2}$.

On dispose ensuite d'un rectangle $ABPQ$ d'aire $\cos(\alpha)$. (c'est le côté x). Enlevons un quartier d'angle au centre $\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2}$ et un triangle d'aire $\frac{\sin(\alpha).\cos(\alpha)}{2}$, et on récupère l'aire de la partie grisée « en bas ».

On somme les deux : $\boxed{\textit{Aire grise} = \alpha + \cos(\alpha) - \frac{\sin(2.\alpha)}{2} - \frac{\pi}{4}}$

On vérifie pour α égal à $\frac{\pi}{2}$: un quart de disque d'aire $\frac{\pi}{4}$.
pour α égal à 0 : le complémentaire de ce quart de disque ; d'aire $1 - \frac{\pi}{4}$.

On dérive pour minimise cette application : $\frac{dA}{d\alpha} = 1 - \sin(\alpha) - \cos(2.\alpha)$.
Comment résoudre ? En exprimant tout à l'aide d seul sinus ($\cos(2.\alpha) = 1 - 2.\sin^2(\alpha)$).



Annuler la dérivée nous amène à résoudre $2.\sin^2(\alpha) - \sin(\alpha) = 0$.
$\sin(\alpha) = 0$ nous place aux bornes de l'intervalle, pas au minimum mais un maximum (signe de la dérivée seconde, ou passage de la dérivée du positif ou négatif).
C'est donc en $\frac{\pi}{6}$ que le minimum est atteint.

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}}$$

∘55∘

Un professeur fou propose de calculer les moyennes d'une suite de notes *(comprises entre 0 et $\pi/2$, si si !)* d'une façon étrange : l'arcsinus de la moyenne des sinus *(il existe toujours cet arcsinus ?)*. Écrivez un script **Python** qui le fait pour une liste L donnée. Sur trois devoirs, vous avez eu deux 0 et une autre note oubliée. Quelle moyenne maximale pouvez vous obtenir ?

La moyenne d'une suite $(a_0, \dots a_{n-1})$ se calcule par $Arcsin\left(\frac{a_0 + \dots + a_{n-1}}{n}\right)$.
Pour ce qui est de l'existence, chaque sinus est entre -1 et 1, la somme est entre $-n$ et n, la moyenne arithmétique est entre -1 et 1 et on peut en prendre l'arcsinus.
Le script est par exemple :

```
def moyenne_sinus(L) :
....S = 0
....for note in L :
........S = S+sin(note)
....S = S/len(L)
....return(asin(S))
```

Il ne faudra pas oublier d'importer : `from math import sin, asin`.
On pourra aussi se montrer prudent pour éviter la division par 0 :
`if len(L) == 0 :`
`....return(0)`
`else` ce qu'on a déjà tapé plus haut.

Si vous avez eu deux 0 et une note α, votre moyenne sera $Arcsin\left(\frac{\sin(\alpha)}{3}\right)$.
Le réel $\sin(\alpha)/3$ reste entre 0 et $1/3$. Par croissance de l'arcsinus, la moyenne reste entre 0 et $Arcsin(1/3)$ *(maximum atteint avec une note de $\pi/2$).*

∘56∘

Vrai ou faux :

a	$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 1 \Rightarrow x = 0\ [\pi]$
b	$\forall(\alpha,\theta) \in \mathbb{R}^2,\ (\lvert\theta\rvert = \lvert\alpha\rvert\ [2.\pi]) \Rightarrow (\cos(\theta) = \cos(\alpha)\ [2.\pi])$
c	$\forall(\alpha,\theta) \in \mathbb{R}^2,\ (\lvert\theta\rvert = \lvert\alpha\rvert\ [2.\pi]) \Leftrightarrow (\cos(\theta) = \cos(\alpha)\ [2.\pi])$
d	$\forall(\alpha,\theta) \in (\mathbb{R} - \{\frac{2.k+1}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})^2,\ (\theta = \alpha\ [\pi]) \Leftrightarrow (\tan(\theta) = \tan(\alpha)\ [2.\pi])$

a	Vrai
b	Vrai
c	Vrai
d	Faux

a : $\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0\ [2\pi]$ mais ceci implique $x = 0\ [\pi]$. Donc Vrai.

b : $\lvert\theta\rvert = \lvert\alpha\rvert\ [2.\pi] \Rightarrow (\cos(\theta) = \cos(\alpha)$ par périodicité et parité. Mais $a = b$ implique bien $a = b$ modulo ce qu'on veut.
Donc Vrai.

c : $(\lvert\theta\rvert = \lvert\alpha\rvert\ [2.\pi]) \Leftrightarrow (\cos(\theta) = \cos(\alpha))$ est connu, c'est du cours.
Mais ensuite $(\cos(\theta) = \cos(\alpha)\ [2.\pi]) \Leftrightarrow (\cos(\theta) = \cos(\alpha)\ [2.\pi]$ car deux nombres entre -1 et 1 différant d'un multiple de $2.\pi$ sont forcément égaux car $2.\pi$ dépasse la longueur de l'intervalle.

Donc Vrai.

$d\ : \forall(\alpha,\theta) \in (\mathbb{R} - \{\dfrac{2.k+1}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})^2,\ (\theta = \alpha\ [\pi]) \Leftrightarrow (\tan(\theta) = \tan(\alpha)\ [2.\pi])$.
C'est Faux. L'équivalence est $(\theta = \alpha\ [\pi]) \Leftrightarrow (\tan(\theta) = \tan(\alpha))$.
L'implication écrite comme un porc $(\theta = \alpha\ [\pi]) \Leftrightarrow (\tan(\theta) = \tan(\alpha)) \Rightarrow (\tan(\theta) = \tan(\alpha)\ [2.\pi])$ est vraie.
Mais $(\tan(\theta) = \tan(\alpha)\ [2.\pi])$ ne permet pas de remonter.
Prenons 0 et $Arctan(2.\pi)$. On a $(\tan(0) = 2.\pi\ [2.\pi])$ et donc $(\tan(0) = \tan(Arctan(2.\pi))\ [2.\pi])$.
Mais on n'a pas $(0 = Arctan(2.\pi)\ [\pi])$ puisque les deux sont entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.
Donc Faux.

∘57∘

Associez les propriétés à leur nom

propriété				nom
$a \neq b$	$\Rightarrow$	$f(a) \neq f(b)$		f est croissante
a tend vers b	$\Rightarrow$	$f(a)$ tend vers $f(b)$		f est continue
$a < b$	$\Rightarrow$	$f(a) < f(b)$		f est continue pour le physicien
$a = b$	$\Rightarrow$	$f(a) = f(b)$		f est une application
$a \simeq b$	$\Rightarrow$	$f(a) \simeq f(b)$		f est injective
$a \leqslant b$	$\Rightarrow$	$f(a) \leqslant f(b)$		f est strictement croissante

Ce tableau ne figure dans aucun livre ? il devrait.

propriété			nom
$a \neq b$	$\Rightarrow$	$f(a) \neq f(b)$	f est injective
a tend vers b	$\Rightarrow$	$f(a)$ tend vers $f(b)$	f est continue
$a < b$	$\Rightarrow$	$f(a) < f(b)$	f est strictement croissante
$a = b$	$\Rightarrow$	$f(a) = f(b)$	f est une application
$a \simeq b$	$\Rightarrow$	$f(a) \simeq f(b)$	f est continue pour le physicien
$a \leqslant b$	$\Rightarrow$	$f(a) \leqslant f(b)$	f est croissante

L'ipmlication $(a = b \Rightarrow f(a) = f(b))$ est la moindre des choses pour une application.
Un élément ne peut pas avoir plusieurs images.
Que feriez vous si vous deviez avoir $f(3) \neq f(1+2)$?

Les seuls cas de correspondance qui ne soiet pas des applications sont :
à un complexe vous associez une de ses racines cubiques, mais vous ne savez pas laquelle choisir
à un complexe vous associez ses arguments (avec des modulo $2.\pi$ dans la réponse finalement.

∘58∘

♡ Simplifiez $\cos\Big(Arccos\Big(\dfrac{9}{\sqrt{82}}\Big) + Arcsin\Big(\dfrac{4}{\sqrt{17}}\Big)\Big)$.

$\alpha = Arccos(9/\sqrt{82})$	$\cos(\alpha) = \dfrac{9}{\sqrt{82}}$	$\cos^2(\alpha) = \dfrac{81}{82}$	$\sin^2(\alpha) = \dfrac{1}{82}$	$\sin(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{82}}$
$\beta = Arcsin(4/\sqrt{17})$	$\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$	$\cos^2(\alpha) = \dfrac{1}{17}$	$\sin^2(\alpha) = \dfrac{16}{17}$	$\sin(\alpha) = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$

La première ligne se lit de gauche à droite, a seconde de droite à gauche.
On justifie par exemple le passage de $\sin^2(\alpha) = \dfrac{1}{82}$ à $\sin(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{82}}$ par le fait que α est entre 0 et π ; son sinus est bien positif, et cen'est pas $\sin(\alpha) = -\dfrac{1}{\sqrt{82}}$.
On utilise la formule $\cos.\cos - \sin.\sin$: $\cos\Big(Arccos\Big(\dfrac{9}{\sqrt{82}}\Big) + Arcsin\Big(\dfrac{4}{\sqrt{17}}\Big)\Big) = \dfrac{5}{\sqrt{82.17}}$ et c'est moche.

∘59∘

Résolvez l'équation $|x + 2.i| = 15$ d'inconnue réelle x.
Résolvez l'équation $|x + 2.i| = 15$ d'inconnue complexe x.

La première donne deux solutions : $\sqrt{221}$ et $-\sqrt{221}$ en résolvant $\sqrt{x^2 + 4} = 15$.

La seconde donne le cercle de centre $-2.i$ et de rayon 15. Et ce cercle coupe évidemment Ox en les deux points indiqués.
Il suffit en effet de reconnaître $|z - z_0| = r$ ou même $MM_0 = r$ si vous préférez.

Tout élève qui sera parti en posant $z = x + i.y$ restera un élève de Terminable.

◦60◦

♡ On définit $f = x \longmapsto x^{-1/2}$. Calculez $f^{(n)}$ pour tout n. Montrez : $\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!} = (-1)^n.\dfrac{\binom{2.n}{n}}{4^n}$.

On dérive $x \longmapsto x^n$ en $x \longmapsto x.x^{n-1}$ y compris si n n'est pas entier.
En répétant l'opération, on trouve

n	0	1	2	3	4		
$f^{(n)}(x)$	$x^{-1/2}$	$-\dfrac{x^{-3/2}}{2}$	$(-1).(-3).\dfrac{x^{-5/2}}{2.2}$	$(-1).(-3).(-5).\dfrac{x^{-7/2}}{2.2.2}$	$(-1).(-3).(-5).(-7).\dfrac{x^{-9/2}}{2.2.2.2}$	conjecture	$(-1)^n$

La formule conjecturée serait vraie à partir du rang 0 et I_n désignerait le produit des entiers impairs : $1.3.5\ldots(2.n-1)$.
On la démontre par récurrence sur n déjà initialisée (c'est aussi à ça que sert la recherche des premières valeurs).

On se donne n, on suppose la formule vraie, on redérive, et elle est validée au rang suivant.

Ensuite, on écrit $1.3.5\ldots.(2.n-1) = \dfrac{1.2.3.4.5\ldots(2.n-1).(2.n)}{2.4\ldots(2.n)} = \dfrac{(2.n)!}{2^n.n!}$.
Inutile de faire une récurrence pour si peu.

On calcule en 1 et on a le résultat.

Remarque : on ne pouvait pas démontrer $\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!} = (-1)^n.\dfrac{\binom{2.n}{n}}{4^n}$ *par récurrence sur n. Connaître la dérivée n^{ieme} en 1 ne permet pas de trouver la dérivée $(n+1)^{ieme}$. On ne peut dériver que si la variable bouge un peu, puisque « dériver c'est mesurer des variations ».*
En revanche, on peut démontrer : $f^{(n)} = \left(x \longmapsto (-1)^n.\dfrac{(2.n)!}{4^n.n!}.x^{-(2.n+1)/2}\right)$ *car là, l'hérédité ne pose pas de problème.*
On peut dériver une fonction connue sur tout un intervalle, et on connaît alors sa dérivée sur tout cet intervalle.

◦61◦

Montrez que $\log_{10}(5) + \log_{10}(3)$ est irrationnel.

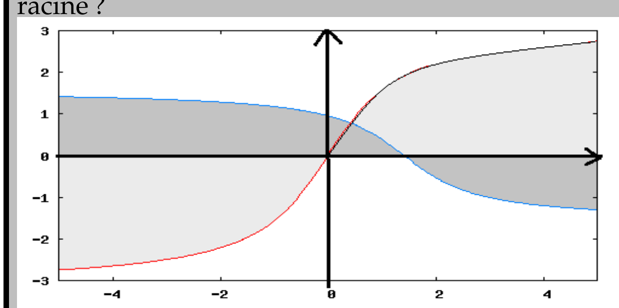
Par l'absurde. Supposons que ce nombre s'écrit $\dfrac{p}{q}$.

On a alors $\log_{10}(15) = \dfrac{p}{q}$.

On revient à la définition : $10^{\frac{p}{q}} = 15$ puis $10^p = 15^q$.
On a une formule dans $\mathbb{N}$. On écrit des décompositions en produit de facteurs premiers : $2^p.5^p = 3^q.5^q$.
On écrit même $2^p.3^0.5^p = 2^0.3^q.5^q$.
Par unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers : $p = 0$, $q = 0$.
Et ça c'est incohérent.

◦62◦

♡ Résolvez l'équation $2.Arctan(x) = Arctan(\sqrt{2} - x)$. Attention, pourquoi n'y a-t-il effectivement qu'une racine ?



On part de $2.Arctan(x) = Arctan(\sqrt{2} - x)$ et on passe à la tangente de chaque côté.

Attention, c'est donc juste une implication.
$(a = b) \Rightarrow (\tan(a) = \tan(b))$ c'est vrai.

$(\tan(a) = \tan(b)) \Rightarrow (a = b)$ c'est faux.

On a donc $\tan(2.Arctan(x)) = \tan(Arctan(\sqrt{2} - x))$.
C'est le sens favorable à droite, et à gauche, c'est $\tan(2.a) = \dfrac{2.\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$: $\dfrac{2.x}{1 - x^2} = \sqrt{2} - x$.

On vérifie que $x = 1$ n'est pas racine de l'équation initiale, de même que $x = -1$.

On fait un produit en croix et on a une équation du troisième degré : $x^3 - \sqrt{2}.x^2 - 3.x + \sqrt{2} = 0$.
On doit deviner une racine évidente.
On trouve (avec effort) : $x = -\sqrt{2}$.
On factorise puis on trouve les deux autres racines.
L'équation de degré 3 a trois solutions : $-\sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$ et $-1 + \sqrt{2}$.

Mais attention, toutes ne sont pas solutions de l'équation initiale.
On a raisonné par implication, on doit vérifier.

x	$-\sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$
$2.Arctan(x)$	$-2.Arctan(\sqrt{2})$	positif (c'est $2.(3.\pi/8)$)	$2.(\pi/8)$ en tout cas positif
$Arctan(\sqrt{2} - x)$	$Arctan(2.\sqrt{2})$	$-\pi/4$	$\pi/4$
erreur	signes !	c'est sûr	ça semble bon
	$-\pi$	$+\pi$	0

Pouvait on prévoir qu'il n'y avait qu'une solution ?
Oui, l'application différence $x \longmapsto 2.arctan(x) - Arctan(\sqrt{2} - x)$ est croissante (comme somme de deux application croissantes).
Son graphe ne coupera qu'une fois l'axe des abscisses (au maximum).

∘63∘

On se donne deux réels a et b, on veut montrer : $-\sqrt{a^2 + b^2} \leqslant a.\cos(x) + b.\sin(x) \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$. Pour cela, exprimez $(a^2 + b^2) - (a.\cos(x) + b.\sin(x))^2$ à l'aide de $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, et montrez que le numérateur de cette fraction en t est un carré parfait. Concluez.

On remplace par les formules dans $(a^2 + b^2) - (a.\cos(x) + b.\sin(x))^2$ et on trouve

$$(a^2 + b^2) - \frac{(a.(1 - t^2) + 2.b.t)^2}{(1 + t^2)^2}$$

puis

$$\frac{(a^2 + b^2).(1 + 2.t^2 + t^4) - (a^2.(1 + t^4 - 2.t^2) + 4.b^2.t^2 + 4.b.t.a.(1 + t)^2)}{(1 + t^2)^2}$$

Ne regardons que le numérateur et simplifions le peu qu'on peut :

$$b^2.t^4 + 4.a.b.t^3 + (4.a^2 - 2.b^2).t^2 - 4.a.b.t + b^2$$

On doit y chercher un carré. Pas le carré d'une somme $(\alpha + \beta)^2$, il y a trop de termes.
Mais pour $(\alpha + \beta + \gamma)^2$ avec ses carrés et double produits, on a bon espoir.
Vu qui sont les carrés, et vus les signes, on propose de développer $(b.t^2 + 2.a.t - b)^2$.

En tant que carré de réel, ce numérateur est tout aussi positif que le dénominateur.

On a donc $(a^2 + b^2) - \dfrac{(a.(1 - t^2) + 2.b.t)^2}{(1 + t^2)^2} \geqslant 0$ puis $(a^2 + b^2) \geqslant \left(a.\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} + \dfrac{2.b.t}{1 + t^2}\right)^2$
et enfin

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geqslant \left|a.\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{2.b.t}{1 + t^2}\right|$$

et c'est ce qu'on voulait.

∘64∘

On pose $\alpha = Arccos\left(\dfrac{16}{65}\right)$, $\beta = Arcsin\left(\dfrac{11}{61}\right)$. Montrez que $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, , $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$, $\tan(\alpha + \beta)$ sont rationnels.

On rappelle : $\cos(Arccos(x)) = x$ par définition, et $\sin(Arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ par théorème de Pythagore et signe

imposé (intervalle).
On peut donc déterminer les sinus et cosinus de nos angles, puis leurs tangentes par quotient.
Comme on veut qu'ils soient rationnels, il suffit de vérifier que $\sqrt{1-\frac{16^2}{65^2}}$ est rationnel. Son dénominateur est 65, c'est bon, et son numérateur $\sqrt{65^2-16^2}$. On l'écrit

$$\sqrt{(65+16).(65-16)} = \sqrt{81.49} = \sqrt{9^2.7^2} = 9.7$$

De même, pour l'autre angle :

$$\sqrt{61^2-11^2} = \sqrt{(61-11).(61+11)} = \sqrt{50.72} = \sqrt{25.4.36} = \sqrt{(5.2.6)^2}$$

Bref, on dresse le tableau :

angle	$Arccos(16/65)$	$Arcsin(11/61)$
cosinus	$16/65$	$60/61$
sinus	$63/63$	$11/61$
tangente	$63/16$	$11/60$

Et les autres ? pas besoin de terminer les calculs : $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha).\cos(\beta)+\cos(\alpha).\sin(\beta)$. C'est une somme et produit de rationnels. C'est un rationnel.
Il en va de même du cosinus puis du quotient sinus sur cosinus.
La clef est juste $\boxed{\text{« } (\mathbb{Q},+,.) \text{ est un corps »}}$

◦65◦

Dérivez $x \longmapsto Arctan\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$ et simplifiez le au maximum.

On décompose la composée, et on calcule les dérivées, aux points convenables :

fonction	exp		homographie		Arctan	
x	$\longrightarrow$	e^x	$\longrightarrow$	$\frac{e^x-1}{e^x+1}$	$\longrightarrow$	$Arctan\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$
	exp en x		$\frac{2}{(.+1)^2}$ en e^x		$\frac{1}{1+.^2}$ en $\frac{e^x-1}{e^x+1}$	
	e^x		$\frac{2}{(e^x+1)^2}$		$\frac{1}{1+\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2}$	

On trouve donc $e^x.\frac{2}{(e^x+1)^2}.\frac{1}{1+\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2} = \frac{2.e^x}{(e^x+1)+(e^x-1)^2} = \frac{2.e^x}{2+2e^{2.x}}$ et on encadre sous forme de fonction $\boxed{x \longmapsto \frac{e^x}{1+e^{2.x}}}$

◦66◦

Résolvez $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}} = 2$ d'inconnue réelle x.

On commence par dire $\sqrt{x} = x^{1/2}$ puis $\sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt{x^{1/2}} = x^{1/4}$ et enfin $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = x^{1/8}$.

On passe au quotient pour x non nul (et positif) : $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{8}}} = x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{8}} = x^{\frac{5}{24}}$.

On résout $x^{\frac{5}{24}} = 2$ et on trouve $\boxed{x = 2^{24/5}}$

◦67◦

Résolvez $2.z^2+(3.i-7).z+5-5.i = 0$ d'inconnue complexe z.

On calcule le discriminant de $2.X^2+(3.i-7).X+5-5.i$: $\Delta = (3.i-7)^2-8.(5-5.i) = -9+49-42.i-40+40.i = -2.i$.
On cherche une racine carrée sous la forme $a+i.b$ vérifiant donc $a^2-b^2 = 0$ et $2.a.b = -2$.

Directement, sans même lire le module : $(1-i)^2 = -2.i$.

Les deux racines cherchées sont $\frac{7-3.i+(1-i)}{4}$ et $\frac{7-3.i-(1-i)}{4}$. On en fait un ensemble : $\boxed{\left\{2-i,\ \frac{3-i}{2}\right\}}$

∘68∘

a et b sont les racines de $X^2 - S.X + P$ (P non nul). Calculez $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a}$.

Sachant $a + b = S$ et $a.b = P$, on a $\boxed{\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{a^3 + b^3}{a.b} = \dfrac{(a+b)^3 - 3.a^2.b - 3.a.b^2}{a.b} = \dfrac{S^3 - 3.S.P}{P}}$

∘69∘

On définit : $h = x \longmapsto \dfrac{.x + \sqrt{5 - 2.\sqrt{5}}}{1 - x.\sqrt{5 - 2.\sqrt{5}}}$. Justifiez $h \circ h \circ h \circ h \circ h = Id$.

On trouve la matrice associée : $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5 - 2.\sqrt{5}} \\ -\sqrt{5 - 2.\sqrt{5}} & 1 \end{pmatrix}$ puis on en calcule les puissances successives de cette matrice appelée M.

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5 - 2.\sqrt{5}} \\ -\sqrt{5 - 2.\sqrt{5}} & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5 - 2.\sqrt{5}} \\ -\sqrt{5 - 2.\sqrt{5}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 2.\sqrt{5} & 2.\sqrt{5 - 2.\sqrt{5}} \\ -2.\sqrt{5 - 2.\sqrt{5}} & -4 + 2.\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$M^4 = \begin{pmatrix} -4 + 2.\sqrt{5} & 2.\sqrt{5 - 2.\sqrt{5}} \\ -2.\sqrt{5 - 2.\sqrt{5}} & -4 + 2.\sqrt{5} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -4 + 2.\sqrt{5} & 2.\sqrt{5 - 2.\sqrt{5}} \\ -2.\sqrt{5 - 2.\sqrt{5}} & -4 + 2.\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

avec $a = (-4 + 2.\sqrt{5})^2 - 4.(5 - 2.\sqrt{5}) = 16 - 8.\sqrt{5}$ et $b = -8.\sqrt{5 - 2.\sqrt{5}}$

On prend son courage à deux mains pour le dernier produit $M.M^4$ et on trouve $\begin{pmatrix} 176 - 80.\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 176 - 180.\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Notre application est $x \longmapsto \dfrac{(176 - 180.\sqrt{5}).x + 0}{0.x + (176 - 180.\sqrt{5})}$ ce qui fait bien $x \longmapsto x$.

∘70∘

Montrez que $\cos\left(Arctan\left(\dfrac{33}{56}\right) + Arcsin\left(\dfrac{12}{37}\right)\right)$ est un rationnel positif.

Posons $\alpha = Arctan\left(\dfrac{8}{15}\right)$ et $\beta = Arcsin\left(\dfrac{12}{37}\right)$.
On va calculer $\cos(\alpha + \beta)$ c'est à dire $\cos(\alpha).\cos(\beta) - \sin(\alpha).\sin(\beta)$.
Déjà, $\sin(\beta)$ est rationnel, c'est $12/37$.
Mais son cosinus ? C'est $\sqrt{1 - \left(\dfrac{12}{37}\right)^2}$ ce qui fait $\dfrac{\sqrt{37^2 - 12^2}}{37}$.
En factorisant et regroupant : $37^2 - 12^2 = (37 + 12).(37 - 12) = 49.25 = 7^2.5^2$ on a bien $\cos(\beta) = \dfrac{35}{37}$. C'est aussi un rationnel.

Passons à α. Sa tangente vaut $\dfrac{8}{15}$. On peut retrouver son cosinus :
$1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$ donc $\cos^2(\alpha) = \dfrac{1}{1 + (8/15)^2} = \dfrac{15^2}{15^2 + 8^2} = \dfrac{15^2}{17^2}$ (voir liste des carrés). On remonte : $\cos(\alpha) = \dfrac{15}{17}$ *(signe imposé car α est entre $-\pi/2$ et $\pi/2$)*. Par produit : $\sin = \tan.\cos$. C'est aussi un rationnel.

Le réel $\cos(\alpha).\cos(\beta) - \sin(\alpha).\sin(\beta)$ est rationnel comme somme produit de rationnels ($(\mathbb{Q}, +, .)$ est un corps).

Sera-t-il positif ? α est plus petit que $\pi/4$ et β aussi.
La somme est entre 0 et $\pi/2$, le cosinus est positif.

∘71∘

Montrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x \notin \mathbb{Q}) \Leftrightarrow \Big(\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4,\ (a + b.x = c + d.x) \Leftrightarrow \big((a = c)\ et\ (b = d)\big)\Big)$.

On se donne x dans $\mathbb{R}$.On doit montrer une équivalence. On sépare en deux.

- On suppose x irrationnel. On doit montrer une double implication.
  - On se donne un quadruplet (a, b, c, d).
    On suppose $a + b.x = c + d.x$. On doit montrer $a = c$ et $b = d$.
    On regroupe d'un côté : $(a - c) = x.(d - b)$.
    Si $d - b$ est non nul, on a $x = \dfrac{a - c}{d - b}$. C'est un rationnel. Contradiction.
    Par élimination, $d - b$ est nul.
    On reporte : $a - c = x.0$. On a enfin $a = c$.
  - Réciproquement, si on a $a = c$ et $b = d$, on a évidemment $a + b.x = c + d.x$.

Peut-on montrer facilement que si on a la formule $\Big(\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4,\ (a+b.x=c+d.x)\Leftrightarrow\big((a=c)\ et\ (b=d)\big)\Big)$ alors x est irrationnel ?
Je propose plutôt de raisonner par contraposée :
$(x\in\mathbb{Q})\Rightarrow\Big(\exists(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4,\ \overline{(a+b.x=c+d.x)\Leftrightarrow\big((a=c)\ et\ (b=d)\big)}\Big)$.

- On suppose x rationnel. On l'écrit $\dfrac{p}{q}$.
  On a alors $(p+(-q).x=0+0.x)$ $et\ pourtant$ $\big((p\neq 0)\ ou\ (-q\neq 0)\big)$.
  C'est la négation de $(a+b.x=c+d.x)\Rightarrow\big((a=c)\ et\ (b=d)\big)$ par « contre-argument ».

Cet exercice, c'est l'idée de « si on a $a+b.\sqrt{2}=c+d.\sqrt{2}$ avec a, b, c et d entiers, alors on identifie $a=c$ et $b=d$ ».
En revanche, avec $a+b.\dfrac{2}{3}=c+d.\dfrac{2}{3}$ on ne peut pas identifier.

∘72∘

Montrez que l'application $x\longmapsto x+\dfrac{4}{\pi}.Arctan(x)$ (notée f) réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminez $f^{-1}(2)$. En dérivant $f(f^{-1}(x))=x$ calculez aussi $(f^{-1})'(2)$. Est ce que $(f')^{-1}(2)$ existe ? Calculez $\displaystyle\int_0^2 f^{-1}(t).dt$.

$x\longmapsto x+\dfrac{4}{\pi}.Arctan(x)$ est continue, dérivable, strictement croissante comme somme d'applications croissantes.
Elle est injective par croissance stricte.
Elle est continue et tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (c'est ce que fait x et l'arctangente reste bornée). De même, $-\infty$ en $-\infty$.
Par théorème des valeurs intermédiaires, elle atteint tous les réels.

L'application réciproque ne peut pas être explicitée. mais pour calculer $f^{-1}(2)$, on résout $f(x)=2$.
Une solution « simple » est $x=1$: $1+\dfrac{4}{\pi}.Arctan(1)=1+\dfrac{4}{\pi}.\dfrac{\pi}{4}=2$.

On a pour tout x : $f(f^{-1}(x))=x$. On dérive : $f'(f^{-1}(x)).(f^{-1})'(x)=1$.
On calcule en $x=2$: $f'(f^{-1}(2)).(f^{-1})'(2)=1$ puis $f'(1).(f^{-1})'(2)=1$.
On effectue le calcul : $f'(1)=1+\dfrac{4}{\pi}.\dfrac{1}{1+1^2}$: $\boxed{(f^{-1})'(2)=\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{\pi}}}$

Pour l'intégrale, on trace le rectangle de côtés 1 et 2. On lui soustrait l'aire sous le graphe de f :

$$\int_0^2 f^{-1}(t).dt=1.2-\int_0^1 f(x).dx$$

Mais l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\Big(x+\frac{4}{\pi}Arctan(x)\Big).dx$ nécessite de connaître $x\longmapsto x.Arctan(x)-\dfrac{\ln(1+x^2)}{2}$.
On trouve $\boxed{\dfrac{1}{2}+2.\dfrac{\ln(2)}{\pi}}$ *(mention spéciale « calculable » du jury).*

∘73∘

Démontrez : $Arctan(2)+2.Arctan(3)+Arctan\Big(\dfrac{1}{5}\Big)+Arctan\Big(\dfrac{1}{8}\Big)=\dfrac{5.\pi}{4}$.

On nomme α, β, γ et δ les quatre angles de $Arctan(2)+2.Arctan(3)+Arctan\Big(\dfrac{1}{5}\Big)+Arctan\Big(\dfrac{1}{8}\Big)$.
Ils sont entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ et caractérisés par leurs tangentes. En utilisant $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}$ on complète :

$\tan(\alpha)=2$	$\tan(\beta)=3$	$\tan(\gamma)=\dfrac{1}{5}$	$\tan(\gamma)=\dfrac{1}{8}$

$\tan(\alpha)=2$	$\tan(2.\beta)=\dfrac{3+3}{1-3.3}=-\dfrac{3}{4}$	$\tan(\gamma+\delta)=\dfrac{\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{8}}{1-\dfrac{1}{5}.\dfrac{1}{8}}=\dfrac{13}{39}=\dfrac{1}{3}$
$\tan(\alpha+2.\beta)=\dfrac{1}{2}$		$\tan(\gamma+\delta)=\dfrac{1}{3}$
$\tan(\alpha+2.\beta+\gamma+\delta)=1$		

Ceci caractérise presque $\alpha+2.\beta+\gamma+\delta$: $\alpha+2.\beta+\gamma+\delta=\dfrac{\pi}{4}$ $[\pi]$.
Dans quel intervalle se trouve $\alpha+2.\beta+\gamma+\delta$?
Chacun des angles est positif, et plus petit que $\dfrac{\pi}{2}$. On est donc dans $\Big[0,\ \dfrac{5.\pi}{2}\Big[$. Trop large. dans cet intervalle, il y a

$\frac{\pi}{4}$, $\frac{5.\pi}{4}$ et $\frac{9.\pi}{4}$ qui ont la bonne tangente. Il faut encadrer plus finement. On va donc comparer à $\frac{\pi}{4}$ (c'est à dire à $Arctan(1)$) :

$\frac{\pi}{4} \leqslant Arctan(2) < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4} \leqslant Arctan(3) < \frac{\pi}{2}$	$0 \leqslant Arctan\left(\frac{1}{5}\right) \leqslant \frac{\pi}{4}$	$0 \leqslant Arctan\left(\frac{1}{8}\right) \leqslant \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha + 2.\beta + \gamma + \delta \leqslant \frac{3.\pi}{2}$

Cette fois, on n'a plus le choix : notre angle vaut $\pi + \frac{\pi}{4}$.

∘74∘

Trouvez les six solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^6 + z^3.(z+1)^3 + (z+1)^6 = 0$ *(il n'y a que si vous êtes masochiste que vous développerez tout ! trouvez le changement de variable)*. Calculez leur somme.

On part de $z^6 + z^3.(z+1)^3 + (z+1)^6 = 0$ et on tente d'y voir cachés nos complexes utiles ou des transformations.

0 n'étant pas solution, on peut diviser : $1 + \frac{(z+1)^3}{z^3} + \frac{(z+1)^6}{z^6} = 0$.

L'envie nous vient de poser $t = \frac{z+1}{z}$ ou même $T = \frac{z+1}{z}$. On a alors l'équation $T^2 + T + 1 = 0$.

On la connaît bien : $T = j$ ou $T = j^2$.

Du classique	$T = j$			$T = j^2$		
mais qui est T ?	$t^3 = e^{2.i.\pi/3}$			$t^3 = e^{4.i.\pi/3}$		
Trois racines à chaque fois	$t = e^{2.i.\pi/9}$	$t = e^{2.i.\pi/9}.j$	$t = e^{2.i.\pi/9}.j^2$	$t = e^{4.i.\pi/9}$	$t = e^{4.i.\pi/9}.j$	$t = e^{4.i.\pi/9}.j^2$
mais $t = 1 + \frac{1}{z}$ donc $z = \frac{1}{t-1}$						

La somme des racines se retrouve par les formules de Viète.
On commence à développer $z^6 + z^3.(z+1)^3 + (z+1)^6 = z^6 + z^3.(z^3 + 3.z^2 + \ldots) + (z^6 + 6.z^5 + \ldots)$.
On trouve $3.z^6 + 9.z^5 + \ldots$. On divise par le coefficient dominant : $z^6 + 3.z^5 + \ldots$.
La somme des racines vaut $\boxed{-3}$

∘75∘

On m'a dit : « $2^{x/3} = 3^{2/x}$ ». Mais que vaut alors $x^{2/3}$?

Si, je sais calculer ! C'est juste que ce calcul n'est pas en base 10. Alors,il est en base combien ?

$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & 5 & 0 \\ & + & 3 & 4 & 6 \\ & + & 6 & 5 & 1 \\ \hline = & 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}$$

L'équation $2^{x/3} = 3^{2/x}$ donne, en passant au logarithme : $\frac{x}{3}.\ln(2) = \frac{2}{x}.\ln(3)$.

On récupère par produit en croix : $x^2 = \frac{6.\ln(3)}{\ln(2)}$ (deux solutions pour x).

On termine : $\boxed{x^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{6.\ln(3)}{\ln(2)}}}$

Posons l'addition en notant b la base $\begin{array}{cccc} & 4 & 5 & 0 \\ + & 3 & 4 & 6 \\ + & 6 & 5 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}$:

$$(4.n^2 + 5.n) + (3.n^2 + 4.n + 6) + (6.n^2 + 5.n + 1) = (n^4 + n^3 + n + 7)$$

On simplifie $n^3 = 12.n^2 + 13.n$.
On élimine la solution $n = 0$ (c'est quoi la base 0 ? riens).
On élimine aussi -1 et il ne reste que $\boxed{\text{la base 13}}$
On vérifie :
- unités : six plus un égalent sept
- b-aines : cinq plus quatre plus cinq égalent quatorze, je pose un et je retiens une treizaine,
- b^2-aines quatre plus trois plus six plus une retenue égalent quatorze : je pose un et je retiens un.

∘76∘

t est un réel fixé non nul ; décomposez en éléments simples $\frac{1}{(1+x^2).(1+(x-t)^2)}$ sous la forme $\frac{a.x+b}{1+x^2} + \frac{c.x+d}{1+(x-t)^2}$. Justifiez que $\ln\left(\frac{a^2+1}{1+(a-t)^2}\right)$ tend vers 0 quand a tend vers $+\infty$ (et vers $-\infty$). Montrez : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2).(1+(x-t)^2)} = \frac{2.\pi}{t^2+4}$.

t est fixé, c'est donc en x qu'on va intégrer. Et pas qu'un peu, mais carrément de $-\infty$ à $+\infty$.

Commençons par décomposer en éléments simples comme proposé

$$\frac{1}{(1+x^2).(1+(x-t)^2)} = \frac{a.x+b}{1+x^2} + \frac{c.x+d}{1+(x-t)^2}$$

Faute de pôles réels (et avec des pôles complexes pas très pratiques), on réduit au dénominateur commun et n a un système :

$$\frac{1}{(1+x^2).(1+(x-t)^2)} = \frac{(a.x+b).(x^2-2.x.t+t^2+1)+(c.x+d).(x^2+1)}{(1+x^2).(1+(x-t)^2)}$$

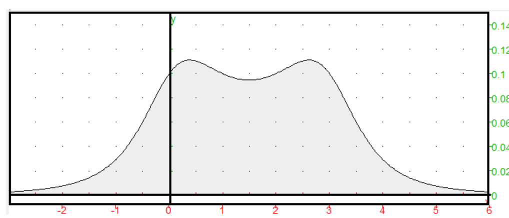
En identifiant on a un système : $\left\{\begin{array}{cccccccc} x^3 & : & a & & +c & & = & 0 \\ x^2 & : & -2.t.a & +b & & +d & = & 0 \\ x & : & (1+t^2).a & -2.t.b & +c & & = & 0 \\ 1 & : & & (t^2+1).b & & +d & = & 1 \end{array}\right|$.

On garde $L1$ et $L2$, mais on soustrait $L1$ à $L3$ et $L2$ à $L4$: $\left\{\begin{array}{cccccccc} x^3 & : & a & & +c & & = & 0 \\ x^2 & : & -2.t.a & +b & & +d & = & 0 \\ x & : & t^2.a & -2.t.b & & & = & 0 \\ 1 & : & 2.a.t & +t^2.b & & & = & 1 \end{array}\right|$ Les deux dernières livrent a et b par « simple » combinaison : $a = \frac{2}{t^3+4.t}$ et $b = \frac{t}{t^3+4.t}$.

On reporte dans les autres :

$$\frac{1}{(1+x^2).(1+(x-t)^2)} = \frac{1}{t^3+4.t}.\Big(\frac{2.x+t}{1+x^2} + \frac{-2.x+3.t}{1+(x-t)^2}\Big)$$

On va pouvoir intégrer, disons entre deux bornes véritables. On met déjà de côté $\frac{1}{t^3+4.t}$ qui fait penser au $\frac{\pi}{t^2+4}$ de la réponse attendue.



$\int_a^b \frac{2.x+t}{1+x^2}.dx$ se sépare par linéarité

$\int_a^b \frac{2.x}{1+x^2}.dx + \int_a^b \frac{t}{1+x^2}.dx = \ln\Big(\frac{1+b^2}{1+a^2}\Big) + t.\Big[Arctan(x)\Big]_{x=a}^{b}$

On traite de même la seconde en effectuant un changement de variable par translation :

$$\int_{x=a}^{b} \frac{-2.x+3.t}{1+(x-t)^2}.dx = \int_{u=a-t}^{b-t} \frac{-2.(u+t)+3.t}{1+u^2}.du = -\int_{u=a-t}^{b-t} \frac{du}{1+u^2} + t.\int_{a-t}^{b-t} \frac{du}{1+u^2}$$

On recolle les morceaux :

$$\int_a^b \frac{dx}{(1+x^2).(1+(x-t)^2)} = \ln\Big(\frac{1+b^2}{1+a^2}\Big) - \ln\Big(\frac{1+(b-t)^2}{1+(a-t)^2}\Big) + t.\Big[Arctan(x)\Big]_{x=a}^{b} + t.\Big[Arctan(u)\Big]_{u=a-t}^{b-t}$$

Quand b tend vers $+\infty$, les deux arctangentes $Arctan(b)$ et $Arctan(b-t)$ tendent vers $\frac{\pi}{2}$.

Et en regroupant, on a $\ln\Big(\frac{b^2+1}{(b-t)^2+1}\Big)$. Ce terme fait l'objet d'un lemme :

$\frac{b^2+1}{(b-t)^2+1}$ s'écrit $\frac{1+\frac{1}{b^2}}{1-\frac{2.t}{b}+\frac{1+b^2}{b^2}}$ et tend vers 1. Son logarithme tend vers 0.

	$\ln\Big(\frac{1+b^2}{1+(b-t)^2}\Big)$	$+\ln\Big(\frac{1+(a-t)^2}{1+a^2}\Big)$	$+t.\Big[Arctan(x)\Big]_{x=a}^{b}$	$+t.\Big[Arctan(u)\Big]_{u=a-t}^{b-t}$
$b \longrightarrow +\infty$	$\longrightarrow 0$		$\longrightarrow t.\frac{\pi}{2}$	$\longrightarrow t.\frac{\pi}{2}$
$a \longrightarrow -\infty$		$\longrightarrow 0$	$\longrightarrow -t.\frac{-\pi}{2}$	$\longrightarrow -t.\frac{-\pi}{2}$

On additionne en $2.t.\pi$.

On divise par $t^3+4.t$ et on a bien $\boxed{\frac{4.\pi}{t^2+4}}$

∘77∘

Dans cinq secondes, tu pourras ignorer cet exercice, mais ce qu'on ne peut pas ignorer, c'est le échauffement climatique.

Résolvez $\int_0^x \frac{dt}{t^2-6.t+10} = \frac{\pi}{4}$ d'inconnue rationnelle x.

On commence par calculer l'intégrale $\int_0^x \frac{dt}{t^2-6.t+10}$ qui existe pour tout x (dénominateur jamais nul, application continue).

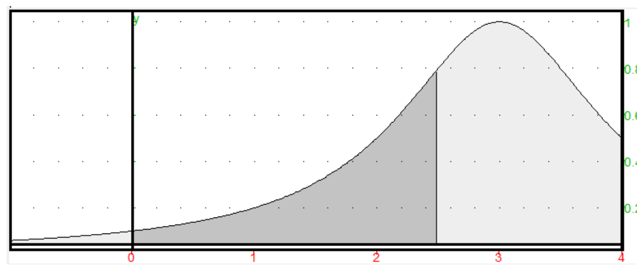
On met sous forme canonique : $\int_0^x \frac{dt}{(t-3)^2+1}$ puis on intègre $\Big[Arctan(t-3)\Big]_0^x$.

Les calculs étant faits, on passe à l'équation : $Arctan(x-3) - Arctan(-3) = \frac{\pi}{4}$.

On isole : $Arctan(x-3) = \frac{\pi}{4} - Arctan(3)$.

On passe à la tangente *(tan(Arctan(...) est le bon sens, mais on ne raisonne que par implication)* :

$$x-3 = \tan\left(\frac{\pi}{4} - Arctan(3)\right)$$



Mais cette solution (unique) est elle rationnelle ?

On exploite la formule en $\tan(a-b)$: $x-3 = \frac{1-3}{1+1.3}$.

On isole : $\boxed{x = \frac{1-3}{1+1.3} + 3 = \frac{5}{2}}$

Oui, il fallait vérifier que notre solution est rationnelle, donc on ne s'arrête pas à la formule avec des Arctan.

Comme on est passé à la tangente, il faut vérifier $Arctan\left(\frac{5}{2}-3\right) = \frac{\pi}{4} - Arctan(3)$.

Il y a égalité des tangentes, et les deux angles sont entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Une faute de frappe m'a fait poser l'équation peu différente

$$\int_0^x \frac{dt}{t^2+6.t+10} = \frac{\pi}{4}$$

Le calcul est similaire : $\int_0^x \frac{dt}{(t+3)^2+1} = Arctan(x+3) - Arctan(3)$.

L'équation est alors $Arctan(x+3) = \frac{\pi}{4} + Arctan(3)$.

On passe à la tangente. Et toute la question est là.

On obtient $x+3 = \frac{1+3}{1-3}$ soit $x = -5$.

Mais alors, il faut revenir en arrière.

Est ce cohérent : $\int_0^{-5} \frac{dt}{t^2+6.t+10} \overset{?}{=} \frac{\pi}{4}$.

Le premier membre est négatif (intégrale d'une application positive, mais prise dans le mauvais sens). le second membre est positif.

Pas cohérent.

En fait, $\int_0^{-5} \frac{dt}{t^2+6.t+10} = -\frac{3.\pi}{4}$.

La question ne se limitait donc pas à savez vous calculer une intégrale et calculer $\tan(a+b)$.
La question était une question de maths.
Quand on passe à la tangente, c'est comme quand on passe au carré, on perd de l'information.
On a juste une implication, et pas une équivalence.
Mais évidemment, vous sortez de Terminale, vous croyez qu'une question de maths c'est juste trois formules et du calcul.
Non, c'est une question. Et ça nécessite un cerveau !

∘78∘

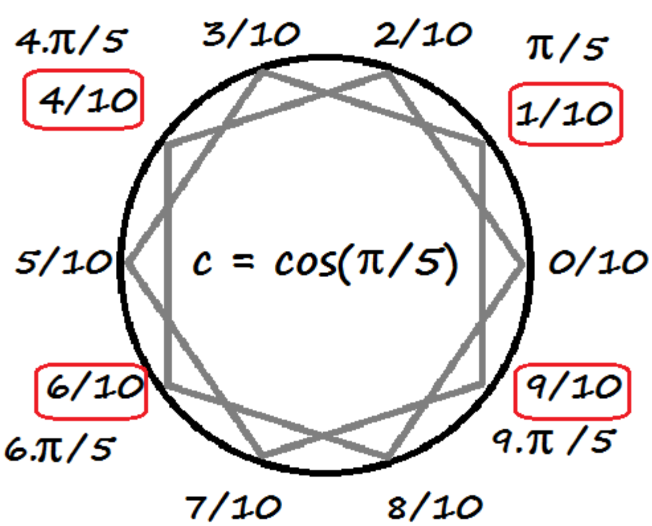
I~0) **Exprimez $\cos(4.\pi/5)$, $\cos(6.\pi/5)$ et $\cos(9.\pi/5)$ en fonction de $\cos(\pi/5)$ *(noté c)*.**

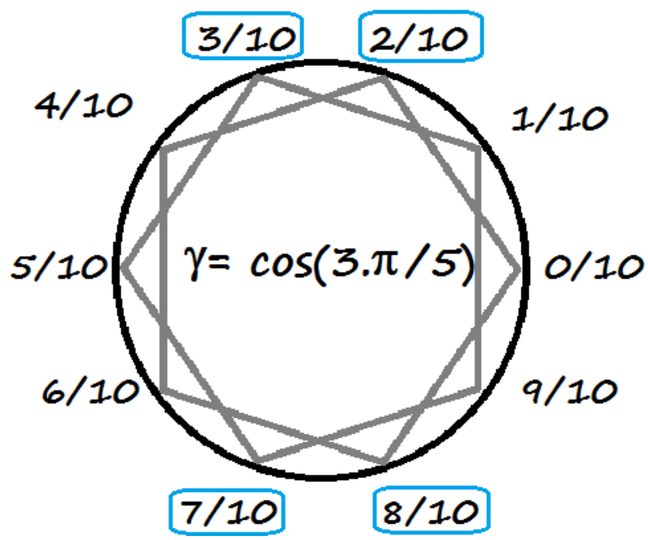
I~1) **Exprimez $\cos(2.\pi/5)$, $\cos(7.\pi/5)$ et $\cos(8.\pi/5)$ en fonction de $\cos(3.\pi/5)$ *(noté γ)*.**

On trace un cercle trigonométrique pour voir tout de suite qui sont les angles complémentaires, supplémentaires.

Par exemple

$\dfrac{4.\pi}{5}=\pi-\dfrac{\pi}{5}$	donc	$\cos\left(\dfrac{4.\pi}{5}\right)$	$=-\cos\left(\dfrac{4.\pi}{5}\right)$	$=-c$
$\dfrac{6.\pi}{5}=\pi+\dfrac{\pi}{5}$	donc	$\cos\left(\dfrac{6.\pi}{5}\right)$	$=-\cos\left(\dfrac{4.\pi}{5}\right)$	$=-c$
$\dfrac{9.\pi}{5}=2.\pi-\dfrac{\pi}{5}$	donc	$\cos\left(\dfrac{9.\pi}{5}\right)$	$=\cos\left(\dfrac{4.\pi}{5}\right)$	$=c$
$\dfrac{2.\pi}{5}=\pi-\dfrac{3.\pi}{5}$	donc	$\cos\left(\dfrac{2.\pi}{5}\right)$	$=-\cos\left(\dfrac{3.\pi}{5}\right)$	$=-\gamma$
$\dfrac{7.\pi}{5}=2.\pi-\dfrac{3.\pi}{5}$	donc	$\cos\left(\dfrac{7.\pi}{5}\right)$	$=\cos\left(\dfrac{3.\pi}{5}\right)$	$=\gamma$
$\dfrac{8.\pi}{5}=\pi+\dfrac{3.\pi}{5}$	donc	$\cos\left(\dfrac{2.\pi}{5}\right)$	$=-\cos\left(\dfrac{3.\pi}{5}\right)$	$=-\gamma$





Remarque : il étaient tentant de partir dans des formules $\cos(2.\theta)=2.\cos^2(\theta)-1$ *et* $\cos(4.\theta)=8.\cos^4(\theta)-8.\cos^2(\theta)+1$ *et autres.*
J'y suis d'ailleurs parti moi même, jusqu'à ce que je comprenne que c'était bien plus tard que ça allait servir.
L'énoncé était peut être trompeur.

I~2) **Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5+1=0$. Calculez la somme des racines, puis déduisez : $c+\gamma=\dfrac{1}{2}$.**

L'équation $z^5=-1$ se résout en posant $z=\rho.e^{i.\theta}$.
On trouve $\rho^5=1$ puis $\rho=1$.
On trouve surtout $5.\theta=\pi\ [2.\pi]$ d'où θ valant $\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{2.k.\pi}{5}$ avec k dans $range(5)$.

$\exp\left(i.\dfrac{\pi}{5}\right)$	$\exp\left(i.\dfrac{3.\pi}{5}\right)$	$\exp\left(i.\dfrac{5.\pi}{5}\right)$	$\exp\left(i.\dfrac{7.\pi}{5}\right)$	$\exp\left(i.\dfrac{9.\pi}{5}\right)$

La somme vaut 0 , c'est Viète qui le dit.

Mais on peut aussi les regrouper deux à deux *(avec la racine -1 en solitaire)*.

Comme la somme a été calculé de deux façons, on a $0=(e^{i.\pi/5}+e^{9.\pi/5})+1+(e^{3.i.\pi/5}+e^{i.7.\pi/5})$.
Par conjugaison : $0=2.\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)+1+2.\cos\left(\dfrac{3.\pi}{5}\right)$.

On comprend pourquoi la valeur γ a été choisie de la sorte *(plutôt que $\cos(2.\pi/5)$)* : $\boxed{2.c+1+2.\gamma=0}$

I~3) **Déduisez que c et γ sont les racines de $4.X^2-2.X-1$, et explicitez c et γ.**

On tient la somme : $c+\gamma = -\frac{1}{2}$.
Cherchons leur produit. C'est le produit de deux cosinus :

$$c.\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right).\cos\left(\frac{3.\pi}{5}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{3.\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{5}-\frac{3.\pi}{5}\right)}{2} = \frac{\cos\left(\frac{4.\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2.\pi}{5}\right)}{2} = \frac{-c-\gamma}{2} = \frac{-1/2}{2}$$

Le produit des deux cosinus vaut $-\frac{1}{4}$.
Avec la somme et le produit, on a l'équation.

On résout l'équation $4.x^2 - 2.x - 1 = 0$ de discriminant 20.
c et γ valent $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

Comme γ est négatif *(angle entre $\pi/2$ et π)*, on répartit :

c	$=\cos(\pi/5)$	$=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$
γ	$=\cos(3.\pi/5)$	$=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

Le sujet est ici conçu pour que, même si vous n'avez pas trouvé le chemin avec c et γ, leur somme, leur produit, vous puissiez continuer en donnant leur valeur.

I~4) **Démontrez que $\sqrt{5}$, c et γ sont irrationnels.**

$\sqrt{5}$ est irrationnel.
Par l'absurde, on imagine qu'il existe p et q entiers premiers entre eux vérifiant $p^2/q^2 = 5$.
Par produit en croix *($p^2 = 5.q^2$)*, il vient que p^2 est multiple de 5.

Par tableau de congruences, p est forcément multiple de 5

p modulo 5	0	1	2	3	4
p^2 modulo 5	0	1	4	4	1

On l'écrit $p = 5.r$, l'équation devient $25.r^2 = 5.q^2$ puis $q^2 = 5.r^2$.
q est à son tour multiple de 5 *(en transitant par « q^2 est multiple de 5 »)*, et ceci contredit « fraction irréductible ».

Si $\cos(\pi/5)$ était rationnel, alors $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ serait rationnel, puis par addition et multiplication, $\sqrt{5}$ serait rationnel.
C'est la contradiction voulue.

L'argument direct pour passer de $\sqrt{5}$ à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est certes légitime, mais il vaut mieux contraposer.
En effet, par exemple, $\sqrt{5}$ est irrationnel, donc $\sqrt{5}-1$ et $\sqrt{5}+1$ sont irrationnels, mais leur produit ne l'est plus. Or, la phrase aurait tellement bien sonné « irrationnel comme produit d'irrationnels ».

I~5) **Montrez pour k dans $\mathbb{N} - 5.\mathbb{N}$: $\cos(k.\pi/5) \notin \mathbb{Q}$.**

Les angles $\frac{k.\pi}{5}$ avec k non multiple de 5 se ramènent par congruence modulo $2.\pi$ à la liste

$\pi/5$	$4.\pi/5$	$6.\pi/5$	$9.\pi/5$
$2.\pi/5$	$3.\pi/5$	$7.\pi/5$	$8.\pi/5$

Les cosinus de ces angles valent c ou γ ou leur opposés. Ils sont irrationnels.

II~0) **On considère la suite $U_0(X) = 1$, $U_1(X) = 2.X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2}(X) = 2.X.U_{n+1}(X) - U_n(X)$.Calculez $U_n(X)$ pour n dans *range*(6)** *(ta*

On les calcule de proche en proche :

$\longrightarrow 2.X.(2.X)-1$		$\longrightarrow 2.X.(8.X^3-4.X)-(4.X^2-1)$			
1	$2.X$	$4.X^2-1$	$8.X^3-4.X$	$16.X^4-12.X^2+1$	$32.X^5-32.X^3+6.X$
	$\longrightarrow 2.X.(4.X^2-1)-2.X$		$\longrightarrow 2.X.(16.X^5-12.X^3+1)-(8.X^4-4.X)$		
$U_0(X)$	$U_1(X)$	$U_2(X)$	$U_3(X)$	$U_4(X)$	$U_5(X)$

II~1) **Montrez que pour tout n, U_n est un polynôme, à coefficients entiers, de degré n, dont vous donnerez le coefficient dominant.**

Il faut prouver que ce qu'on obtient existe : on construit de proche en proche.
S'agit-il ensuite bien de polynômes ?
On pose P_n : U_n est un polynôme, à coefficients entiers.

On initialise P_0 et P_1 : les deux premiers sont bien des polynômes, à coefficients entiers.

On se donne n et on suppose que $U_n(X)$ et $U_{n+1}(X)$ sont deux polynômes.
On sort la définition : $U_{n+2}(X) = 2.X.U_{n+1}(X) - U_n(X)$.
Dans la second membre on a une somme de produits de polynômes à coefficients entiers, c'est un polynôme à coefficients entiers.

La récurrence ne porte pas sur « une égalité à montrer », mais sur l'appartenance à un espace.
On notera qu'on sait que les coefficients de chaque U_n sont entiers.
Mais on ne sait pas combien ils valent.
Si on regarde d'ailleurs le sujet jusqu'au bout, on comprend qu'on va mettre du temps à trouver leur valeur.
Sinon, un mot clef était « $(\mathbb{Z}[X], +, .)$ est un anneau ».

Calculons les valeurs en 1 et -1, le degré et le coefficient dominant (tout en un).

	1	$2.X$	$4.X^2 - 1$	$8.X^3 - 4.X$	$16.X^4 - 12.X^2 + 1$	$32.X^5 - 32.X^3 + 6.X$
	$U_0(X)$	$U_1(X)$	$U_2(X)$	$U_3(X)$	$U_4(X)$	$U_5(X)$
$U_n(1)$	1	1	3	4	5	6
$U_n(-1)$	1	-2	3	-4	5	-6
degré	0	1	2	3	4	5
terme	$1.X^0$	$2.X^1$	$4.X^2$	$8.X^3$	$16.X^4$	$32.X^5$

On conjecture que $U_n(X)$ est de degré n et de terme dominant $2^n.X^n$.

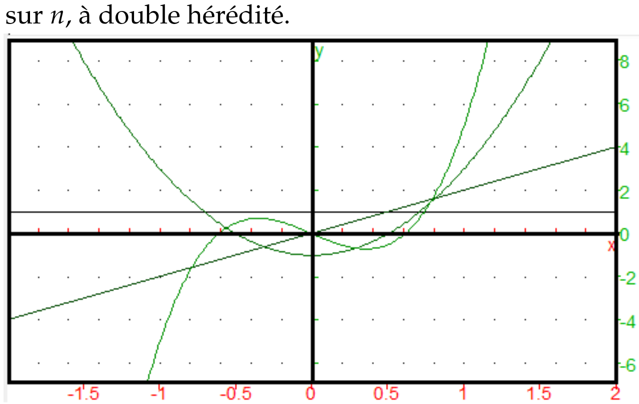
Mais une conjecture n'est pas une preuve. C'est juste une intime conviction confirmée par les premières valeurs.
On va devoir utiliser une récurrence. A double hérédité.
La propriété P_n sera : $U_n(X) = 2^n.X^N + Q_n(X)$ avec $Q_n(X)$ de degré inférieur à n strictement.
C'est vrai pour n de 0 à 5.

On se donne un entier n, on suppose que P_n et P_{n+1} sont vraies.
On étudie P_{n+2}. Il s'agit donc de regarder le polynôme $U_{n+1}(X)$ et d'en déterminer le degré.
On applique la définition : $U_{n+2}(X) = 2.X.U_{n+1}(X) - U_n(X)$.
Dans $2.X.U_{n+1}(X)$ il y a un terme de degré $n+2$, venant de $2.X.(2^n.X^n)$, et des termes de degré plus petit.
Dans $-U_n(X)$ le terme de plus haut degré est de degré $n-1$. Pas de terme de degré $n+1$.
Le polynôme $U_{n+2}(X)$ a donc un terme de degré $n+2$, c'est $2^{n+2}.X^{n+2}$ et c'est bien le terme de plus haut degré.

Il était bon de mener en parallèle degré et terme dominant.

II∼2) **Montrez pour tout n : $U_n(-X) = (-1)^n.U_n(X)$, exprimez ce résultat en termes de « fonction pair/impaire ».**

On montre $U_n(-X) = (-1)^n.U_n(X)$ encore par récurrence sur n, à double hérédité.



On initialise sans problème.
On se donne n et on suppose la propriété vraie aux rangs n et $n+1$.
On calcule $U_{n+2}(-X) = 2.(-X).U_{n+1}(-X) - U_n(-X)$.

On exploite la double hypothèse :
$U_{n+2}(-X) = 2.(-X).(-1)^{n+1}.U_{n+1}(X) - (-1)^n.U_n(X)$.

On factorise :
$U_{n+2}(-X) = (-1)^n.(2.X.U_{n+1}(X) - U_n(X))$
sachant $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$.

On reconnaît : $U_{n+2}(-X) = (-1)^{n+1}.(2.X.U_{n+1}(X) - U_n(X))$.

La propriété est établie par récurrence.

Elle s'interprète :

n pair	$U_n(-X) = U_n(X)$	U_n paire	graphe de symétrie axiale Oy
n impair	$U_n(-X) = -U_n(X)$	U_n impaire	graphe de symétrie centrale O

J'ai une belle phrase : U_n a la même parité que n.

II∼3) **Calculez $U_n(1)$ et $U_n(-1)$ pour tout n.**

On écrit ensuite $\boxed{U_n(1) = n+1}$

On va le démontrer par récurrence sur n. La récurrence est initialisée.
On se donne un entier naturel n et on suppose la propriété vraie aux rangs n et $n+1$.
On regarde au rang $n+2$. On calcule $U_{n+1}(1) = 2.1.U_{n+1}(1) - U_n(1)$.
On remplace en tenant compte des deux hypothèses : $U_{n+1}(1) = 2.1.(n+2) - (n+1)$.
On développe et simplifie : $U_{n+2}(1) = (n+2)+1$. Ceci achève la récurrence.

On a enfin $\boxed{U_n(1) = (-1)^n.(n+1)}$ La récurrence est quasiment la même.
L'hérédité s'écrit $U_{n+1}(-1) = 2.(-1).(-1)^{n+1}.(n+2) - (-1)^n.(n+1)$ et donne bien $U_{n+2}(-1) = (-1)^{n+2}.(n+3)$.

On peut aussi utiliser la parité des $U_{2.p}$ et l'imparité des $U_{2.p+1}$ pour passer de $U_n(1)$ à $U_n(-1)$.
C'est même mieux, dans l'esprit des concours.

II∼4) **Rappelez la forme factorisée de $\sin(a)+\sin(b)$ et simplifiez $\cos(\theta).\sin((n+2).\theta) - \sin((n+1).\theta)$.**

La formule est dans le cours : $\sin(a)+\sin(b) = 2.\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$$\boxed{\sin((n+3).\theta)+\sin((n+1).\theta) = 2.\sin((n+1).\theta).\cos(\theta)}$$

avec $a = (n+3).\theta$ et $b = (n+1).\theta$

II∼5) **Déduisez pour tout n et pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sin(\theta).U_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1).\theta)$.**

On prouve $\sin(\theta).U_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1).\theta)$ par récurrence sur n (θ fixé).
On a bien $\sin(\theta).1 = \sin((0+1).\theta)$ et $\sin(\theta).2.(\cos(\theta)) = \sin((1+1).\theta)$.

On se donne n et on suppose $\sin(\theta).U_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1).\theta)$ et $\sin(\theta).U_{n+1}(\cos(\theta)) = \sin((n+2).\theta)$.

On calcule $\sin(\theta).U_{n+2}(\cos(\theta)) = \sin(\theta).\Big(2.\cos(\theta).U_{n+1}(\cos(\theta)) - U_n(\cos(\theta)\Big)$

$\sin(\theta).U_{n+2}(\cos(\theta)) = 2.\cos(\theta).\sin(\theta).U_{n+1}(\cos(\theta)) - \sin(\theta).U_n(\cos(\theta)$ (on développe)

$\sin(\theta).U_{n+2}(\cos(\theta)) = 2.\cos(\theta).\sin((n+2).\theta) - \sin((n+1).\theta)$

La formule plus haut identifie bien $\sin((n+3).\theta)$. C'est le résultat au rang $n+2$.

II∼6) **cines réelles distinctes que vous préciserez et donnez l'expression factorisée de $U_n(X)$** *(vous pourrez changer de variable en $\theta = Arccos(x)$, mais gare a*

On va résoudre l'équation $U_n(x) = 0$ d'inconnue réelle x dans $]-1,\ 1[$.
On cherche le lien avec la question précédente.
Et si on posait $x = \cos(\theta)$?

Disons qu'on va poser $\theta = Arccos(x)$ même,nouvelle inconnue entre 0 et π.

L'équation devient $U_n(\cos(\theta)) = 0$.
On remplace : $\dfrac{\sin((n+1).\theta)}{\sin(\theta)} = 0$ ($\sin(\theta)$ est non nul puisque l'on a posé θ dans $]0,\ \pi[$).
On résout $\sin((n+1).\theta) = 0$. On trouve $(n+1).\theta = 0\ [\pi]$.
On déduit : $\theta = \dfrac{k.\pi}{n+1}$ avec k entier.
Mais comme θ est entre 0 et π *(strictement)*, k est entre 1 et n *(inclus tous deux, $range(1,\ n+1)$ dira le MPSI2)*.

Attention, l'inconnue est x, on va donc revenir à lui : $x = \cos\left(\dfrac{k}{n+1}.\pi\right)$ *(tiens, on en croise dans la suite de l'énoncé)*.

On pense pourvoir conclure $S_x = \left\{\cos\left(\dfrac{k.\Pi}{n+1}\right) \mid k \in range(1,\ n+1)\right\}$

Mais en fait, non.
On a juste prouvé $\left\{\cos\left(\dfrac{k.\pi}{n+1}\right) \mid k \in range(1,\ n+1)\right\} \subset S_x$

ou $\boxed{S_x \cap [-1,\ 1] = \left\{\cos\left(\dfrac{k.\pi}{n+1}\right) \mid k \in range(1,\ n+1)\right\}}$

En effet, en posant $x = \cos(\theta)$ et $\theta = Arccos(x)$, on n'a cherché que les solutions entre -1 et 1.

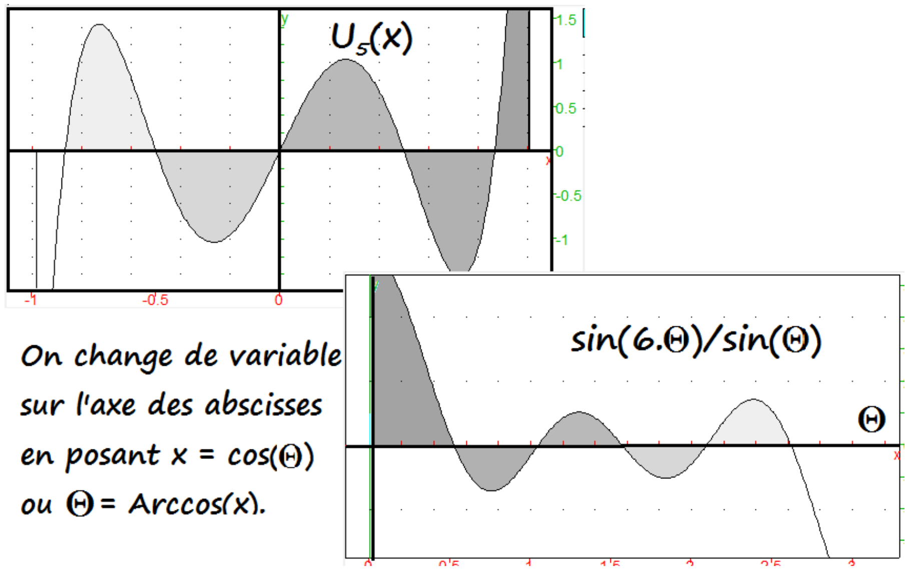
Mais les autres ? Les solutions dans $]-\infty,\ -1]$, et dans $[1,\ +\infty[$, ou même dans $\mathbb{C} - \mathbb{R}$?

C'est là qu'il faut non plus calculer, mais aussi réfléchir.

Le polynôme est de degré n.

On vient de lui trouver n racines entre -1 et 1.

C'est donc qu'on les a toutes !



Finalement, mais seulement après réflexion fine : $\boxed{S_x = \left\{ \cos\left(\frac{k.\Pi}{n+1}\right) \mid k \in range(1,\ n+1) \right\}}$

Erreur classique : $S_x = \left\{ \left(\frac{k.\Pi}{n+1}\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ *alors qu'à ce stade il s'agit juste de* S_θ.
Oubli de non matheux : être heureux d'avoir trouvé les $\cos\left(\frac{k.\Pi}{n+1}\right)$ *mais avoir oublié de se demander « et celles hors de* $]-1,\ 1[$.
Sinon, on ne pouvait pas obtenir $n+1$ *racines, comme le feront ceux qui oublient qu'il y a une contrainte :* $\sin(x)$ *non nul.*
De toutes façons, si vous trouvez la racine $x = 1$*, il y a un problème puis que* $U_n(1) = n+1 \neq 0$.

La forme factorisée est $\boxed{U_n(x) = 2^n.\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\left(\frac{k}{n+1}.\pi\right)\right)}$

Attention en effet, il ne faut pas oublier le 2^n devant. Le polynôme a un coefficient dominant qui ne vaut pas 1.

III~0) Pour tout n, on définit : $V_n(X) = U_n\left(\frac{X}{2}\right)$. Calculez $V_n(X)$ pour n de 0 à 5 *(tableau)*.

On calcule les premiers :

$U_0(X)$	$U_1(X)$	$U_2(X)$	$U_3(X)$	$U_4(X)$	$U_5(X)$
1	$2.X$	$4.X^2 - 1$	$8.X^3 - 4.X$	$16.X^4 - 12.X^2 + 1$	$32.X^5 - 32.X^3 + 6.X$
$V_0(X)$	$V_1(X)$	$V_2(X)$	$V_3(X)$	$V_4(X)$	$V_5(X)$
1	X	$X^2 - 1$	$X^3 - 2.X$	$X^4 - 3.X^2 + 1$	$X^5 - 8.X^3 + 3.X$

L'énoncé ne disait pas de mettre les résultats sous forme de tableau.
Mais sincèrement, que pensez vous de la lecture de
$V_0 = 1, V_1(X) = X$, $V_2(X) = X^2 - 1$, $V_3(X) = X^3 - 2.X$ avec ensuite un éventuel retour à la ligne, éventuellement au milieu d'un polynôme ?
Pensez que votre copie est destinées à être lue. Donc, rendez les choses agréables à lire, et aidez le correcteur à trouver tout de suite ce qu'il cherche.

III~1) On pose $V_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \mu_{n,k}.X^k$. Montrez que tous les $\mu_{n,k}$ sont dans $\mathbb{Z}$; que vaut $\mu_{n,n}$?

Chaque $V_n(X)$ reste un polynôme.
Il est de degré n.
Son terme dominant est $2^n.\left(\frac{X}{2}\right)^n$ ce qui fait X^n.
Ce sont des polynômes unitaires.

Les coefficients sont rationnels : ce sont des entiers divisés par des puissances de 2.

Mais pourquoi des entiers ?

On revient à la définition des U_n par récurrence et on remplace :

$$V_{n+2}(X) = U_{n+2}\Big(\frac{X}{2}\Big) = 2.\Big(\frac{X}{2}\Big).U_{n+1}\Big(\frac{X}{2}\Big) - U_n\Big(\frac{X}{2}\Big)$$

On simplifie et on trouve :

$$V_{n+2}(X) = 2.X.V_{n+1}5X) - V_n(X)$$

On peut dire « par récurrence double sur n, les $V_n(X)$ sont à coefficients entiers ».
Et on ne la refait pas.

III~2) st une racine rationnelles de V_n d'écriture irréductible $x = \dfrac{p}{q}$ *(p dans $\mathbb{Z}$, q dans $\mathbb{N}^*$, sans facteur commun avec p)*. En considérant $q^n.V_n\Big(\dfrac{p}{q}\Big)$ et $q.\Big(\sum_{k=0}^{n-}$

Supposons donc que $\dfrac{p}{q}$ est racine de V_n. On a donc $\sum_{k=0}^{n} \mu_{n,k}.\Big(\dfrac{p}{q}\Big)^k = 0$ puis $q^n.\sum_{k=0}^{n} \mu_{n,k}.\Big(\dfrac{p}{q}\Big)^k = 0$.

On distribue $\sum_{k=0}^{n} \mu_{n,k}.p^k.q^{n-k} = 0$.
Le premier membre est une somme d'entiers.
On en met un de côté : $1.p^n + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_{n,k}.p^k.q^{n-k} = 0$.
On isole, puis on factorise : $q.\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \mu_{n,k}.p^k.q^{n-1-k}\Big) = -p$.

C'est moi qui ai ajouté à l'énoncé de l'EPITA l'indication $q.\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \mu_{n,k}.p^k.q^{n-1-k}\Big)$.

Tant que k est plus petit que $n-1$ l'exposant $n-1-k$ est positif.
On a donc $q.entier = -p^n$.
C'est donc que q divise p^n.
Mais q n'a aucun facteur commun avec p *(écriture irréductible)*.
C'est contradictoire.
Sauf si q vaut 1.

Proprement : q divise p^n, donc q divise $p.p^{n-1}$.
Or, q est premier avec p. C'est donc qu'il divise p^{n-1}.
On recommence : q divise $p.p^{n-2}$ et il est premier avec p.
Gauss nous dit que q divise p^{n-2}.
Ainsi de suite jusqu'à q divise $p.1$ et q est premier avec p.
Donc l'entier q divise 1.
Il ne peut que valoir 1.

Les racines rationnelles de V_n sont forcément entières *(et les autres racines sont irrationnelles)*.

Mais on a vu que c'étaient des $2.\cos\Big(\dfrac{k.\pi}{n+1}\Big)$ *(on passe des racines de $U_n(X)$ à celles de $V_n(X)$ en multipliant par 2)*.

Ce sont donc des nombres entre -2 et 2 *(strictement)*.

Et des entiers entre -2 et 2, il n'y a que -1, 0 et 1.

Les seules racines rationnelles de V_n sont -1, 0 et 1 *(et encore, elles ne le sont pas forcément)*.
Les seules racines rationnelles de U_n sont donc $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{0}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$ *(mais elles ne le sont même pas forcément)*.

III~3) Montrez que les seules racines rationnelles de U_n sont dans $\Big\{-\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\Big\}$.

Les racines de U_n sont les $\cos\Big(\dfrac{k.\pi}{n+1}\Big)$. Parmi elles, il y a donc $\cos\Big(\dfrac{\pi}{n+1}\Big)$ *(première de liste)*.

Les racines de U_n sont réelles, mais irrationnelles, ou rationnelles, mais alors elles ne peuvent valoir que $-1/2$, 0 ou $1/2$.

$\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ est donc irrationnel. Sauf si il vaut $\dfrac{-1}{2}$ ou 0 ou $\dfrac{1}{2}$.

Est il possible que ce cosinus vaille $\dfrac{-1}{2}$, 0 ou $\dfrac{1}{2}$?

Pour 0, c'est oui, mais avec un seul cas.
C'est $n+1=2$.
Le cosinus vaut alors $\cos(\pi/2)$, ce qui fait bien un rationnel.
C'est le seul cas pour avoir 0.

Pour $\dfrac{1}{2}$, on veut $\dfrac{\pi}{n+1}$ égal à $\dfrac{\pi}{3}$. C'est $n=2$.

Pour $\dfrac{-1}{2}$, $\dfrac{\pi}{n+1}$ est trop petit.

Bref, les $\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ rationnels sont uniquement ceux qu'on connait déjà bien : $\cos\left(\dfrac{\pi}{1}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Ensuite, on connaissait $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ irrationnels.

Mais ça continue, $\cos\left(\dfrac{\pi}{31}\right)$ est aussi irrationnel, et ainsi de suite.

IV∼0) **Pour quelles valeurs de n le réel $\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ est il rationnel ?**

Les $\cos\left(\dfrac{k.\pi}{n+1}\right)$ sont les racines de U_n.

Les seules racines rationnelles de U_n sont $-\dfrac{1}{2}$, 0 et $\dfrac{1}{2}$.

Peut on avoir $\cos\left(\dfrac{k.\pi}{n+1}\right)=0$ hormis dans le cas $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ croisé plus haut ?

n étant plus grand que 2, il faudrait avoir $n+1$ pair et $k=\dfrac{n+1}{2}$. Comme par exemple $\cos\left(\dfrac{7.\pi}{13+1}\right)$
Fraction réductible. Refusé.

Peut on avoir $\cos\left(\dfrac{k.\pi}{n+1}\right)=\dfrac{1}{2}$ hormis dans le cas $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ croisé plus haut ?

n étant plus grand que 2, il faudrait avoir $n+1$ multiple de 3 et $k=\dfrac{n+1}{3}$. Comme par exemple $\cos\left(\dfrac{5.\pi}{14+1}\right)$
Fraction réductible. Refusé.

De même pour le dernier. Bref, jamais $\cos\left(\dfrac{k.\pi}{n+1}\right)$ avec $n\geqslant 2$ et k premier avec $n+1$ n'est rationnel.

IV∼1) **nel pour n strictement plus grand que 2, k dans $range(1,n+1)$ et $\dfrac{k}{n+1}$ irréductible. Montrez que $\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ est irrationnel pour n strictem**

Et si k varie dans tout n tout en gardant $\dfrac{k}{n+1}$ irréductible ? C'est pareil.
Par périodicité du cosinus, on se ramènerait à k' dans $range(1,\ n+1)$ déjà traité.

> *C'est ainsi que tous les* $\cos\left(\dfrac{k.\pi}{31}\right)$ *sont irrationnels (sauf pour k lui même multiple de* 31*).*
> *Et le physicien répondra « oui, et alors ? ».*

V∼0) **Montrez $\forall x\in]-1,\ 1[,\ \sqrt{1-x^2}.U_n(x)=\sin((n+1).Arccos(x))$.**

On veut prouver $\forall x\in]-1,\ 1[,\ \sqrt{1-x^2}.U_n(x)=\sin((n+1).Arccos(x))$?
On sait $\forall\theta\in\mathbb{R},\ \sin(\theta).U_n(\cos(\theta))=\sin((n+1).\theta)$.
Si on se donne x quelconque dans $]-1,\ 1[$ et qu'on pose $\theta=Arccos(x)$, on a

$$\sin(Arccos(x)).U_n(x)=\sin((n+1).Arccos(x))$$

et le cours permet de simplifier $\sin(Arccos(x))$ en $\sqrt{1-x^2}$.

V∼1) $\boxed{\begin{array}{c}\text{Déduisez } \forall x \in]-1,\ 1[,\ (1-x^2).U_n'(x) - x.U_n(x) = -(n+1).\cos((n+1).Arccos(x)) \quad . \\ (1-x^2).U_n''(x) - 3.x.U_n'(x) + n.(n+2).U_n(x) = 0\end{array}}$

Comme cette égalité est vraie pour tout x, on peut la dériver *(attention, on dérive un produit et des composées)* :
$\frac{-2.x}{2.\sqrt{1-x^2}}.U_n(x) + \sqrt{1-x^2}.U_n'(x) = \frac{-(n+1)}{\sqrt{1-x^2}}\cos((n+1).Arccos(x))$
On multiplie par $\sqrt{1-x^2}$: $-x.U_n(x) + (1-x^2).U_n'(x) = -(n+1).\cos((n+1).Arccos(x))$.

On recommence pour avoir à nouveau un sinus à droite :

$$-\Big(U_n(x) + x.U_n'(x)\Big) + \Big((1-x^2).U_n''(x) - 2.x.U_n'(x)\Big) = (n+1).\frac{-(n+1)}{\sqrt{1-x^2}}.\sin((n+1).Arccos(x))$$

(j'ai moi même recompté trois signes moins à droite).
On remplace $\sin((n+1).Arccos(x))$ par $\sqrt{1-x^2}.U_n(x)$ et on a :
$-\Big(U_n(x) + x.U_n'(x)\Big) + \Big((1-x^2).U_n''(x) - 2.x.U_n(x)\Big) = -(n+1)^2.U_n(x)$.
Il ne reste plus qu'à faire passer de l'autre côté et à regrouper les $U_n'(x)$:

$$(1-x^2).U_n''(x) - 3.x.U_n'(x) - U_n(x) + (n+1)^2U_n(x) = 0$$

Victoire !

V∼2) $\boxed{\text{On pose } U_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}.X^k\text{,montrez : } \sum_{k=0}^{n} k.(k-1).\lambda_{n,k}.x^{k-2} + \sum_{k=0}^{n}(k.(1-k) + n.(n+2)).\lambda_{n,k}.x^k = 3.\sum_{k=0}^{n} k.\lambda_{n,k}.x^k}$.

On a écrit $U_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}.X^k$. C'est légitime car on sait qu'on a un polynôme de degré n.

On peut dériver : $U_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k}.k.x^{k-1}$ *(le terme $\lambda_{n,0}.x^0$ est une constante, il a disparu à la dérivation)*.

On peut multiplier par x : $x.U_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k}.k.x^k$.

On peut ré-incorporer le terme $k=0$, il est nul : $x.U_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}.k.x^k$.

On peut même multiplier par 3 : $3.x.U_n'(x) = \sum_{k=0}^{n}(3.\lambda_{n,k}.k).x^k$.

Mais on pouvait aussi re-deriver $U_n''(x) = \sum_{k=2}^{n} \lambda_{n,k}.k.(k-1).x^{k-2}$ *(un terme de plus a disparu à la dérivation)*.

On peut alors faire deux choses :
- re-indexer
- multiplier par x^2

On va multiplier par $-x^2$: $-x^2.U_n''(x) = \sum_{k=2}^{n} \lambda_{n,k}.k.(k-1).x^k = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}.k.(k-1).x^k$.

De la première à la seconde, ai-je ajouté des termes *($k=2$ est devenu $k=0$)* ? Ils sont nuls : $\lambda_{n,0k}.0.(0-1).x^0 + \lambda_{n,1}.1.(1-1).x^1$.

Ayant tout à la fois $\boxed{\begin{array}{l} 1.U_n''(x) = \sum_{k=2}^{n} \lambda_{n,k}.k.(k-1).x^{k-2} \\ -x^2.U_n''(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}.k.(k-1).x^k \\ n.(n+2).U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} n.(n+2).\lambda_{n,k}.X^k \\ 3.x.U_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} 3.\lambda_{n,k}.k.x^k \end{array}}$

on peut reporter dans $(1-x^2).U_n''(x) + n.(n+2)U_n(x) = -3.x.U_n'(x)$ et obtenir

$$\sum_{k=0}^{n} k.(k-1).\lambda_{n,k}.x^{k-2} + \sum_{k=0}^{n}(k.(1-k)+n.(n+2)).\lambda_{n,k}.x^k = 3.\sum_{k=0}^{n} k.\lambda_{n,k}.x^k$$

Cette question ne figurait pas dans le sujet de l'EPITA qui passait directement de $\forall\theta,\ \sin(\theta).U_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1).\theta)$ *à* $\forall x,\ (1-x^2).U_n''(x) - 3.x.U_n'(x) + n.(n+2).U_n(x) = 0$ *puis* $\lambda_{n,n-2.k} = \frac{(-1)^k}{2^{2.k}}.\binom{n-k}{k}.\lambda_0$.
Mais vous pouvez demander aux Spé, c'est une démarche usuelle : obtenir une équation différentielle en dérivant deux fois, puis en déduire une relation de récurrence sur les coefficients du développement limité (ou ici du polynôme).

On nous offre ensuite la formule à prouver, profitons en : $\lambda_{n,n-2.k} = \frac{(-1)^k}{2^{2.k}}.\binom{n-k}{k}.\lambda_{n,0}$.
On va faire une récurrence sur k *(n est fixe tout au long de l'exercice)*.

Pour k nul, on doit prouver $\lambda_{n,n} = \frac{(-1)^0}{2^{2.0}}.\binom{n-0}{0}.\lambda_{n,0}$.
Les trois nombres $(-1)^0$, $\binom{n-0}{0}$ et 2^0 valent 1. C'est bien engagé.

On se donne k *(plus petit que n pour ne pas aller au delà des bornes)*, et on suppose $\lambda_{n,n-2.k} = \frac{(-1)^k}{2^{2.k}}.\binom{n-k}{k}.\lambda_{n,0}$.
On veut accéder à $\lambda_{n,n-2.(k+1)}$ c'est à dire $\lambda_{n,n-2.k-2}$.
La formule $\sum_{k=0}^{n} k.(k-1).\lambda_{n,k}.x^{k-2} + \sum_{k=0}^{n}(k.(1-k)+n.(n+2)).\lambda_{n,k}.x^k = 3.\sum_{k=0}^{n} k.\lambda_{n,k}.x^k$ doit nous aider à cela.
Je la réécris $\sum_{k=0}^{n} k.(k-1).\lambda_{n,k}.x^{k-2} = \sum_{k=0}^{n}(3.k+k.(k-1)-n.(n+2)).\lambda_{n,k}.x^k$
puis $\sum_{k=0}^{n} k.(k-1).\lambda_{n,k}.x^{k-2} = \sum_{k=0}^{n}(k.(k+2)-n.(n+2)).\lambda_{n,k}.x^k$

Ceux qui, pour prouver $\sum_{k=0}^{n} k.(k-1).\lambda_{n,k}.x^{k-2} + \sum_{k=0}^{n}(k.(1-k)+n.(n+2)).\lambda_{n,k}.x^k = 3.\sum_{k=0}^{n} k.\lambda_{n,k}.x^k$ *ont d'abord tout fait passer d'un même côté sans chercher à voir d'abord le rapport avec la question précédente ont perdu.*
La difficulté vient d'un chemin est moins balisé qu'en Terminale ; c'est à vous d'en saisir les étapes et l'enchainement.

Je l'écris même avec une variable p $\sum_{p=0}^{n} p.(p-1).\lambda_{n,p}.x^{p-2} = \sum_{p=0}^{n} 2.$
J'identifie de part et d'autres du signe égale le terme en $x^{n-2.k-2}$.
D'un côté il faut prendre $p = n-2.k$: $(n-2.k).(n-2.k-1).\lambda_{n,n-2.k}.x^{n-2.k-2}$
De l'autre il faut prendre $p = n-2.k-2$: $((n-2.k-2).(n-2.k)-n.(n+2)).\lambda_{n,n-2.k-2}.x^{n-2.k-2}$.
On égalise les deux coefficients : $(n-2.k).(n-2.k-1).\lambda_{n,n-2.k} = ((n-2.k-2).(n-2.k)-n.(n+2)).\lambda_{n,n-2.k-2}$.

V~3)	Déduisez $\lambda_{n,n-2.k} = \frac{(-1)^k}{2^{2.k}}.\binom{n-k}{k}.\lambda_{n,0}$. Explicitez U_{10}.
V~4)	Écrivez une procédure Python qui pour n donné retourne la liste des coefficients de U_n (int -> list of int).