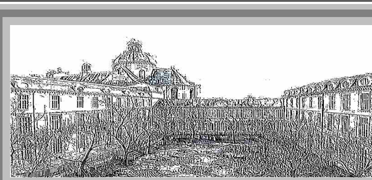
LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 29 septembre
M.P.S.I.2

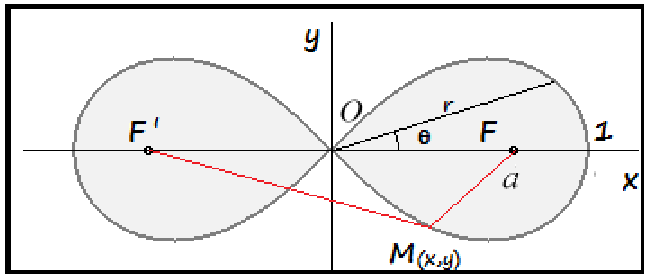


2023 2024

DS01

Trigonométrie de Bernoulli (Jacques). *Un jour, je vous présentrai la famille Bernoulli : 3 Nicolas, 3 Jean, 2 Jacques, des maths, des trahisions, des haines tenaces...*

Inspiré de Mines PSI 2012.
On appelle lemniscate de Bernoulli (notée $\mathbb{B}$) l'ensemble des points (x, y) du plan vérifiant $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$. Son graphe est donné ci-contre. On va l'utiliser à la place du cercle habituel pour définir un sinus lemniscate et un cosinus lemniscate. Vérifiez que $\left(\dfrac{10}{17}, \dfrac{6}{17}\right)$ est sur $\mathbb{B}$. 1 pt.



I~0) **Une définition géométrique de $\mathbb{B}$.** Positionnez convenablement le point F de coordonnées $(a, 0)$ sur $0x$ et son symétrique $F'(-a, 0)$ et ajustez la constante b pour que $\mathbb{B}$ soit le lieu des points M du plan vérifiant $MF \times MF' = b$. 3 pt.

II~0) **Paramétrage en coordonnées polaires.** Soient r un réel strictement positif et θ un réel. On pose $x = r.\cos(\theta)$ et $y = r.\sin(\theta)$. Montrez qu'il y a équivalence entre $(x, y) \in \mathbb{B}$ et $r = \rho(\theta)$ où ρ est une fonction trigonométrique simple que vous déterminerez et dont vous donnerez le domaine de définition. 3 pt. Donnez tous les points de $\mathbb{B}$ dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs. 2 pt.
Dans la suite, on considèrera donc que (x, y) est un point de $\mathbb{B}$.

III~0) **Changement de paramétrage.** θ est entre $-\pi/4$ et $\pi/4$. L'angle φ entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ est défini par $\cos(\varphi) = \tan(\theta)$. Montrez que l'on a alors $x = \dfrac{\sin(\varphi)}{1+\cos^2(\varphi)}$ et exprimez de même y comme fonction de φ (pensez à y/x). 3 pt.

IV~0) **Un peu de cinématique.** On considère donc que les deux formules de la question précédente définissent un point (x_t, y_t) qui parcourt la lemniscate. Déterminez alors sa vitesse $\begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \end{pmatrix}$ et la norme de la vitesse. 3 pt.

V~0) **Passage en complexe.** On pose cette fois ci $t = \tan(\varphi/2)$. Montrez : $e^{i.\varphi} = \dfrac{1+i.t}{1-i.t} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + i.\dfrac{2.t}{1+t^2}$. En identifiant partie réelle et partie imaginaire, exprimez $\cos(\varphi)$ et $\sin(\varphi)$ à l'aide de t. 3 pt.
V~1) Déduisez $x = \dfrac{t+t^3}{1+t^4}$. Exprimez de même y comme fonction de t. 3 pt.
V~2) Montrez qu'on a alors $x + i.y = (1+i).\dfrac{t}{1+i.t^2}$. 1 pt.
V~3) Indiquez par quelles transformations géométriques on passe du points correspondant à t aux trois points correspondant à $-t$, $1/t$ et $-1/t$. 1 pt.
V~4) Montrez que le point (x, y) est à coordonnées toutes deux rationnelles[1] si et seulement si t est rationnel (indication : $\dfrac{x-y}{x+y}$ et $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$). 3 pt.

Un remplaçant pour π. On note ϖ (c'est un π dans son ancienne graphie[2]) le réel $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\sin^2(\theta)}}$ (qu'on ne cherchera pas à calculer, on n'a pas de primitive) qui représente la longueur d'un quart de la lemniscate.

VI~0) **Encadrement.** Montrez $\dfrac{\pi}{2.\sqrt{2}} \leqslant \varpi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. 2 pt.

1. rappel un rationnel est un quotient de la forme p/q avec p et q entiers
2. appelé *varpi* dans certains traitements de texte, de code décimal 982 et hexadécimal/Unicode 03D6

VI~1) Montrez pour tout réel θ entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ par l'étude de deux fonctions différences : $2.\dfrac{\theta}{\pi} \leqslant \sin(\theta) \leqslant \theta$. 3 pt.

VI~2) Montrez $\left(t \longmapsto \ln(t+\sqrt{1+t^2})\right)' = \left(t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$. Calculez $\left(t \longmapsto \dfrac{\pi}{2}.\ln\left(2.t+\sqrt{4.t^2+\pi^2}\right)\right)'$. 2 pt.

VI~3) Déduisez $\frac{\pi}{2}.\ln(1+\sqrt{2}) \geqslant \varpi \geqslant \ln(2) - \ln(\sqrt{\pi^2+4}-\pi)$. 3 pt.

VII~0) **Arc-sinus-lemniscate.** L'application Φ est définie de $]-1,\ 1[$ dans $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$. Montrez que Φ est strictement croissante de $]-1,\ 1[$ dans $\mathbb{R}$. 1 pt.

VII~1) Montrez : $\forall x \in]-1,\ 1[,\ \cos(Arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2},\ Arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 2 pt.

VII~2) Montrez pour tout x de $[0,\ 1[$: $\Phi(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ et déduisez que Φ est bornée sur $[0,\ 1[$. 2 pt.

VII~3) Montrez : $\Phi(x) \longrightarrow_{x\to 1} \varpi$. 3 pt.

VIII~0) **Sinus-lemniscate.** On note $\mathfrak{sl}$ l'application réciproque de Φ de $[-\varpi,\ \varpi]$ dans $[-1,\ 1]$ (c'est lui le sinus-lemniscate). Montrez $\mathfrak{sl}'(\theta) = \sqrt{1-(\mathfrak{sl}(\theta))^4}$. 2 pt.

VIII~1) Montrez aussi $\mathfrak{sl}'' + 2.\mathfrak{sl}^3 = 0$. 2 pt.

IX~0) **Pythagore.** Montrez que $x \longmapsto (\mathfrak{sl}'(x))^2 + (\mathfrak{sl}(x))^4$ est constante. Exprimez cette constante à l'aide de π, ϖ et e. 2 pt.

X~0) **Cosinus lemniscate.** On pose $\mathfrak{cl} = \dfrac{\mathfrak{sl}'}{1+\mathfrak{sl}^2}$ (cosinus-lemniscate). Montrez : $\mathfrak{cl}' = -\dfrac{2.\mathfrak{sl}}{1+\mathfrak{sl}^2}$. 2 pt.

X~1) Montrez $(\mathfrak{cl})^2 + (\mathfrak{sl})^2 = 1 - (\mathfrak{sl}.\mathfrak{cl})^2$ et $\mathfrak{cl}'' = -2.(\mathfrak{cl})^3$ (oscillateur harmonique encore ?). 3 pt.

X~2) Montrez $\forall x \in [-\varpi,\ \varpi],\ \mathfrak{cl}(-x) = \mathfrak{cl}(x)$. 1 pt. puis $\forall x \in [-\varpi,\ \varpi], \mathfrak{cl}(x) = \mathfrak{sl}(\varpi - x)$. 2 pt.

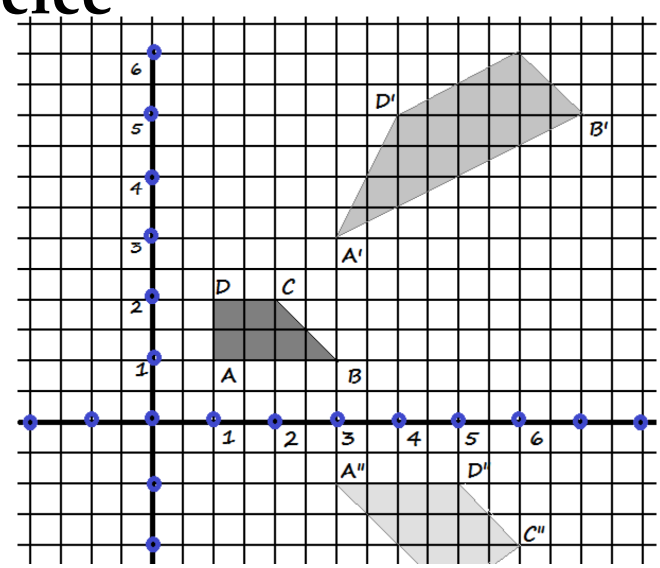
XI~0) **Formule d'addition.** On ne montrera pas ici : $\mathfrak{sl}(a+b) = \dfrac{\mathfrak{sl}(a).\mathfrak{sl}'(b) + \mathfrak{sl}(b).\mathfrak{sl}'(a)}{1+\mathfrak{sl}^2(a).\mathfrak{sl}^2(b)}$, mais on pourrait.

Exercice

James a dessiné une reptuile (A, B, C, D) dans le plan quadrillé (points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$). Il a fait agir dessus la matrice (par $M \longmapsto H.M$) et obtenu la nouvelle figure en gris clair (A', B', C', D') (vous pouvez vérifier).

Calculez $\dfrac{Aire(A', B', C', D')}{Aire(A, B, C, D)}$ et $\det(H)$. 2 pt.

Indiquez la figure pour l'action $M \longmapsto G.M$. Faites le dessin sur votre copie. Même question avec la matrice Q. 3 pt.



H	G	Q
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

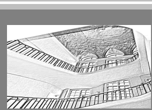
T	R	J
$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ☺ & ☻ \\ ☹ & ☼ \end{pmatrix}$

Les polygones images pour $M \longmapsto T.R.M$ et $M \longmapsto R.T.M$ ont ils un point commun ? 2 pt.

Quelle matrice J a été utilisée pour l'image $(A'',\ B'',\ C'',\ D'')$. 2 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 29 septembre
M.P.S.I.2

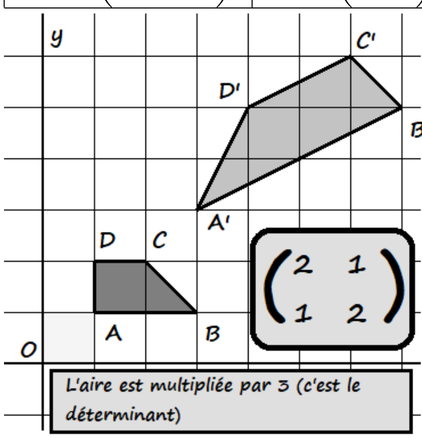
2023 2024
DS01
CORRECTION

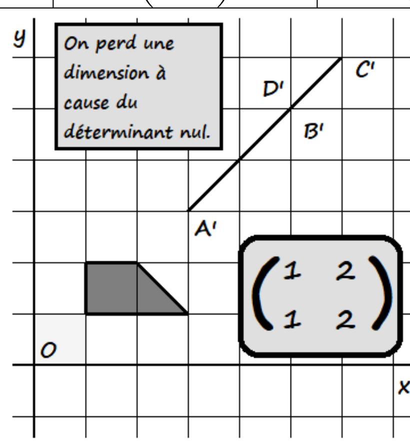


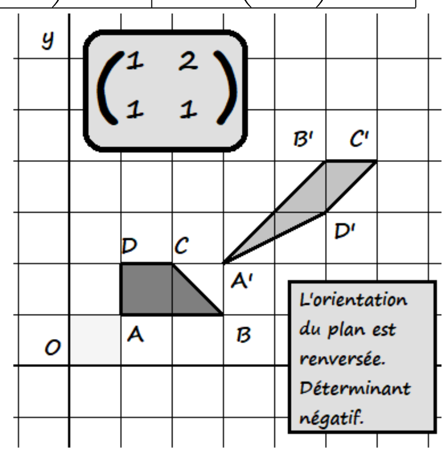
Une figure et des matrices. DS01

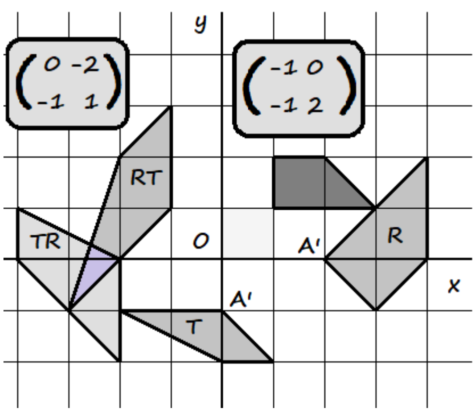
Pour savoir ce que donne (A, B, C, D) il suffit de calculer l'image de chacun des quatre sommets :

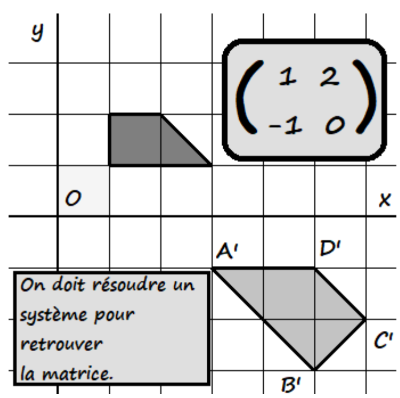
	A	B	C	D
	$\begin{pmatrix} ☺ & ☻ \\ ☹ & ☼ \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ☺ & ☻ \\ ☹ & ☼ \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ☺ & ☻ \\ ☹ & ☼ \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ☺ & ☻ \\ ☹ & ☼ \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$
$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$
$TR = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$
$RT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$











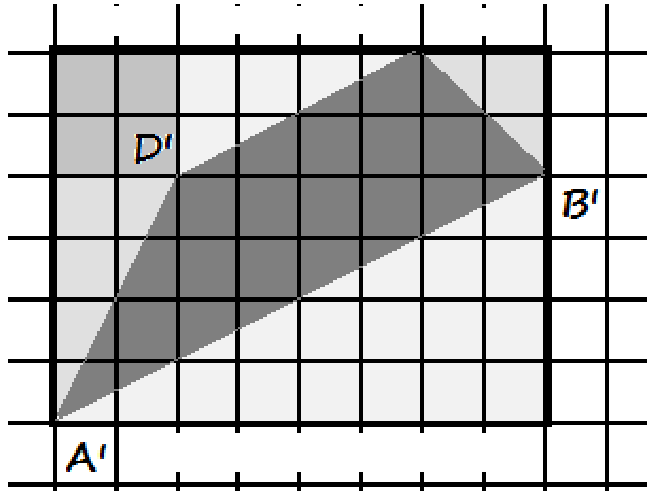
Pour la dernière, on connaît l'image de A, celle de C et celle de D.
Il reste une ambigüité pour l'image de B..

Mais déjà $\begin{pmatrix} ☺ & ☻ \\ ☹ & ☼ \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} ☺ & ☻ \\ ☹ & ☼ \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

et aussi $\begin{pmatrix} ☺ & ☻ \\ ☹ & ☼ \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ qui ne sert à rien car ion le sait déjà.

On résout à la main : la matrice est $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$ On peut ensuite localiser B' hors du dessins si nécessaire.

Sinon, pour les aires, on découpe en trianges que l'on recolle. Par exemple $(A,\ B,\ C,\ D)$ a pour aire $1,5$ (carré de côté 1 et demi carré, ou formule du trspèze).



Pour la figure image, on a d'abord un grand rectangle de côtés 4 et 3 (aire 12).
On enlève ensuite un demi carré dans le coin Nord Est (aire $1/2$).
On enlève un grand triangle rectangle de côtés 4 et 2 (aire 4.2/2).
On enlève un carré de côté 1 au Nord Ouest.
On enlève un autre demi carré de côté 1 dans les Hauts de France.
Et il reste à l'ouset un demi-rectangle d'aire 1.
On trouve une aire de $4,5$.

Pas de théorème, pas de grsse formule ni de truc à apprendre par coeur.
De la réflexion.
Donc le plus dur pour certains.

Premiers points sur la lemniscate. DS01

On doit tester le point $\left(\frac{6}{17},\ \frac{10}{17}\right)$.
On calcule le premier membre :

On calcule le second membre :

$$x^2 - y^2 = \frac{10^2 - 6^2}{17^2} = \frac{(10-6).(10+6)}{17^2} = \frac{64}{17^2}$$

Et le premier :

$$(x^2+y^2)^2 = \left(\frac{10^2}{17^2} + \frac{6^2}{17^2}\right)^2 = \left(\frac{136}{17^2}\right)^2 = \frac{136^2}{17^4}$$

On cherche donc juste à vérifier par produit en croix : $64.17^2 = 136^2$.

Si je ne suis pas matheux, je calcule tout : $136^2 = 18496$ *et* $64.17.17 = 18496$.
Et c'est bon. Mais c'est laborieux.

Mais il y a tellement mieux. On regarde la question $64 \times 17^2 \stackrel{?}{=} 136^2$. On veut un facteur 17 alors ! On le cherche dans 136^2 ? On divise de tête : $136 = 17 \times 8$. Et à partir de là $64 \times 17^2 \stackrel{?}{=} (8 \times 17)^2$. C'est tout. Aucune multiplication à poser. Juste une division de tête ou une vérification.

Formule $MF.MF' = C^{te}$. DS01

On a donc trois points et deux distances :

$F'(-a,\ 0)$	$M(x,\ y)$	$F(a,\ 0)$	$(MF)^2 = (x+a)^2 + y^2$	$(MF')^2 = (x-a)^2 + y^2$

On effectue le produit des deux distances au carré [3].

3. seul le non matheux va trainer des racines partout

Si on n'est pas matheux, on développe comme un masochiste $(x^2+2.a.x+a^2+y^2).(x^2-2.a.x+a^2+y^2)$.
Et on arrive au bout avec seize termes, surtout si on est bon en physique.

Mais **en maths, on réfléchit avant de calculer**. Et on regroupe les termes :

$$(MF').(MF)^2 = \big((x^2+a^2+y^2)+2.a.x\big).\big((x^2+a^2+y^2)-2.a.x\big)$$

Petite identité remarquable

$$(MF').(MF)^2 = (x^2+a^2+y^2)^2-(2.a.x)^2$$

Développement du carré $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2.(\alpha.\beta+\alpha.\gamma+\beta.\gamma)$ car

	α	β	γ
α	α^2	$\alpha.\beta$	$\alpha.\gamma$
β	$\alpha.\beta$	β^2	$\alpha.\gamma$
γ	$\alpha.\gamma$	$\beta.\gamma$	γ^2

et on voit les carrés et les doubles produits (je vous ai déjà dit que **les maths c'était dix pour cent de calcul, et quatre vingt quinze pour cent d'intuition, de vision géométrique**)

$$(MF').(MF)^2 = (x^4+a^4+y^4)+2.(x^2.y^2+a^2.x^2+a^2.y^2)-(2.a.x)^2$$

$$(MF').(MF)^2-b^2 = x^4+y^4+2.x^2.y^2+2.a^2.y^2+2.a^2.y^2+a^4-b^2$$

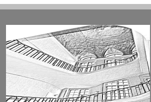
On compare à l'équation de $\mathbb{B}$

$$\Big((x^2+y^2)^2 = x^2-y^2\Big) \Leftrightarrow \Big(x^4+y^4+2.x^2.y^2-x^2+y^2=0\Big)$$

On va donc poser tout naturellement $a^4=b^2$ pour effacer la « constante » et $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ pour que $2.a^2$ vaille 1.

Bref on a l'équivalence : $\boxed{\left(\left(\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2\right).\left(\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2\right)=\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow\left((x^2+y^2)^2=x^2-y^2\right)}$

Il y a une certaine cohérence graphique à ce que soit plus petit que 1.



Coordonnées polaires. DS01

On pose donc $x=r.\cos(\theta)$ et $y=r.\sin(\theta)$ (rayon et argument) et on reporte dans l'équation $(x^2+y^2)=x^2-y^2$

$$(r^2.\cos^2(\theta)+r^2.\sin^2(\theta))^2 = r^2.\cos^2(\theta)-r^2.\sin^2(\theta)$$

On dit merci à Pythagore

$$(r^2)^2 = r^2.(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))$$

Comme le rayon r est supposé non nul il reste $r^2=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)=\cos(2.\theta)$.
On va donc poser $\boxed{\rho=(\theta\longmapsto\sqrt{\cos(2.\theta)})}$ avec une condition : $\cos(2.\theta)$ doit être positif.

Le cosinus est positif sur $[-\pi/2,\ \pi/2]$ modulo $2.\pi$diront certains.
Proprement : $2.\theta\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{2}+2.k.\pi,\ \frac{\pi}{2}+2.k.\pi\right]$ puis $\boxed{\theta\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{4}+k.\pi,\ \frac{\pi}{4}+k.\pi\right]}$

Erreur fatale et classique : trouver $[-\pi/4,\ \pi/4]$ *(c'est bien) puis mettre des* $2.k.\pi$ *à la fin (pour faire plaisir au prof). On se méfie des congruences, il faut les diviser elles aussi.*

Dans les livres anciens, la lemniscate est définie en coordonnées polaires : $\rho=\sqrt{\cos(2.\theta)}$.
Et on voit que l'angle polaire reste dans un certain « cône », entre les bissectrices.

Sur le dessin, on devine que les seuls points à coordonnées entières sur $\mathbb{B}$ sont $\boxed{(-1,\ 0)}\ \boxed{(0,\ 0)}\ \boxed{(0,\ 1)}$
Déjà, les trois obéissent à la définition. Mais ça ne prouve pas qu'il n'y a qu'eux.

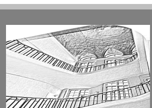
Qui dit qu'avec des entiers énormes mais bien choisis on ne pourrait pas avoir $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$?

Déjà quand même, en coordonnées polaires, le rayon r est égal à la racine carrée d'un cosinus. Il ne peut pas dépasser 1.
La lemniscate est donc incluse dans un disque d erayon 1.
Les seuls points à coordonnées entières dans ce disque sont les trois points cités (on valide) et $(0,\ 1)$ puis $(0,\ -1)$.
Ceux cei ne sont pas sur $\mathbb{B}$. On a donc les deux sens d'implication.

Sinon, on pouvait aussi écrire

$$(x^2+y^2)^2 = x^4+2.y^2+y^4 \geqslant x^4 \geqslant x^2 \geqslant x^2-y^2$$

La majoration $x^4 \geqslant x^2$ n'est pas valable pour x^2 entre 0 et 1, mais on rappelle que x^2 est entier ici.
Le jeu d'inégalités au dessus est strict si x ne vaut pas 0 ou 1, et si y est non nul.
Il ne reste donc que la possibilité x vaut 0, 1 ou -1 et y est nul.



Passage à l'angle φ. DS01

Avant d'aller plus loin, la relation $\cos(\varphi) = \tan(\theta)$ est cohérente. $\cos(\varphi)$ reste entre -1 et 1.
Une tangente peut s'échapper. Mais ici, θ est entre $-\pi/4$ et $\pi/4$ (modulo π) ; sa tangente reste entre -1 et 1.

On avait posé $x = r.\cos(\theta)$ c'est à dire $\sqrt{\cos(2.\theta)}.\cos(\theta)$.
Quel rapport avec $x = \dfrac{\sin(\varphi)}{1+\cos^2(\varphi)}$?
Partons de l'une pour arriver à l'autre. Je propose de remplacer $\cos^2(\varphi)$ par $\tan^2(\theta)$ dans

$$\frac{\sin(\varphi)}{1+\cos^2(\varphi)} = \frac{\sin(\varphi)}{1+\tan^2(\theta)} = \frac{\sin(\varphi)}{\dfrac{1}{\cos^2(\theta)}} = \sin(\varphi).\cos^2(\theta) = \sqrt{1-\cos^2(\varphi)}.\cos^2(\theta)$$

Il y a une arnaque sur le signe, $\sin(\varphi)$ n'est pas forcément positif. On va revenir dessus.
On remplace le cosinus de φ par la tangente de θ :

$$\frac{\sin(\varphi)}{1+\cos^2(\varphi)} = \sqrt{1-\tan^2(\theta)}.\cos^2(\theta) = \sqrt{\frac{\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}.\cos^2(\theta) = \sqrt{\frac{\cos(2.\theta)}{\cos^2(\theta)}}.\cos^2(\theta)$$

Le $\cos^2$ sort de la racine au dénominateur en simple cosinus et se simplifie partiellement avec un des cosinus en haut $\dfrac{\sin(\varphi)}{1+\cos^2(\varphi)} = \sqrt{\cos(2.\theta)}.\cos(\theta)$ c'est bien x.

Il reste le problème du signe. Remplacer $\sin(\varphi)$ par $\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}$ n'est pas légitime. Il y a un signe plus si $\sin(\varphi)$ est positif, et un signe moins sinon.
Mais on le retrouve à la fin avec $\cos(\theta)$.

On pouvait aussi partir de $x = \sqrt{\cos(2.\theta)}.\cos(\theta) = \sqrt{2.\cos^2(\theta)-1}.\cos(\theta) = \sqrt{\frac{2}{1+\tan^2(\theta)}-1}.\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1-\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}}.\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1-\cos^2(\varphi)}{1+\cos^2(\varphi)}}.\cos(\theta)$

Toujours avec le théorème de Pythagore $x = \sqrt{\frac{\sin^2(\varphi)}{1+\cos^2(\varphi)}}.\cos(\theta)$

A compléter.

On tient x, refait on la même chose pour y ?
Mais en fat, une fois qu'on a obtenu $x = \dfrac{\sin(\varphi)}{1+\cos^2(\varphi)}$, on passe à y en écrivant

$$y = r.\sin(\theta) = r.\cos(\theta).\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = x.\tan(\theta) = x.\cos(\varphi)$$

Ceci nous permet d'avoir le jeu de coordonnées $\boxed{x = \dfrac{\sin(\varphi)}{1+\cos^2(\varphi)}}\ \boxed{y = \dfrac{\sin(\varphi).\cos(\varphi)}{1+\cos^2(\varphi)}}$

Cinématique. DS01

On dérive les deux fonctions de φ :

$$\left(\varphi \longmapsto \frac{\sin(\varphi)}{1+\cos^2(\varphi)}\right)' = \left(\varphi \longmapsto \frac{\cos(\varphi).(1+\cos^2(\varphi)) - \sin(\varphi).(-2.\sin(\varphi).\cos(\varphi))}{(1+\cos^2(\varphi))^2}\right)$$

Je vous donne les formules finales : $\boxed{x'_t = \dfrac{3.\cos(\varphi) - \cos^3(\varphi)}{(1+\cos^2(\varphi))^2}}$ $\boxed{y'_t = \dfrac{3.\cos^2(\varphi) - 1}{(1+\cos^2(\varphi))^2}}$

On élève au carré, on pose $c = \cos(\varphi)$ pour alléger nos calculs :

$$\frac{(3.c-c^3)^2}{(1+c^2)^4} + \frac{(3.c^2-1)^2}{(1+c^2)^4} = \frac{\dots}{(1+c^2)^4} = \dots = \frac{1}{1+c^2}$$

C'est ce qui explique l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(\varphi)}}$ *présente dans ce problème.*

La cinématique a été un morceau du cours de mathématiques des années 1970 que les physiciens ont piquée aux mathématiciens à l'époque.
Ils en ont d'ailleurs fait un truc avec moins d'équations et de formules (du moins j'espère).
Ici, on peut vraiment voir le vecteur vitesse d'un point qui se déplace sur l'écran le long de la courbe $\mathbb{B}$.
La direction du vecteur vitesse dit dans quelle direction se déplace le point.
La norme du vecteur vitesse dit si le points va vite ou non.
Et en intégrant la norme de la vitesse, on obtient bien la distance parcourue ; la longueur de la courbe.

Passage en une variable t et l'arc moitié. DS01

La formule $e^{i.\varphi} = \frac{1+i.t}{1-i.t}$ est dans le cours. On part du membre de droite (on part toujours du plus compliqué pour tenter d'arriver au plus simple) :

$$\frac{1+i.t}{1-i.t} = \frac{1+i.\tan(\varphi/2)}{1-i.\tan(\varphi/2)} = \frac{1+i.\dfrac{\sin(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)}}{1-i.\dfrac{\sin(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)}} = \frac{\cos(\varphi/2)+i.\sin(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)-i.\sin(\varphi/2)} = \frac{e^{i\varphi/2}}{e^{-i.\varphi/2}} = e^{(i.\varphi/2)-(-i.\varphi/2)} = e^{i.\varphi/2}$$

Pour la seconde moitié, on peut partir du membre $\frac{1-t^2}{1+t^2} + i.\frac{2.t}{1+t^2}$, le réduire au dénominateur commun, et vérifier l'égalité $\frac{1+i.t}{1-i.t} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i.\frac{2.t}{1+t^2}$ et dire « j'ai réussi, c'est que du calcul, mais c'est étrange comme résultat ».
On peut aussi partir du membre de gauche et penser à celle qu'on oublie toujours (oui, la quantité conjuguée) :

$$\frac{1+i.t}{1-i.t} = \frac{(1+i.t).(1+i.t)}{(1-i.t).(1+i.t)} = \frac{1+(i.t)^2+2.i.t}{1+t^2}$$

Il n'y a plus qu'à séparer en partie réelle et partie imaginaire.

Démonstration au programme. A connaître. Avec aussi la suite que voici.

On a prouvé par transitivité de l'égalité : $e^{i.\varphi} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i.\frac{2.t}{1+t^2}$.

Il ne reste plus qu'à identifier partie réelle et imaginaire : $\boxed{\begin{array}{lll} \cos(\varphi) & = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \text{avec } t = \tan(\varphi/2) \\ \sin(\varphi) & = \dfrac{2.t}{1+t^2} & \end{array}}$

Ces formules sont dans le cours. Ou elles y seront.

On repart de nos formules $x = \dfrac{\sin(\varphi)}{1+\cos^2(\varphi)}$ et $y = \dfrac{\sin(\varphi).\cos(\varphi)}{1+\cos^2(\varphi)}$ et on remplace :

$$x = \frac{\sin(\varphi)}{1+\cos^2(\varphi)} = \frac{\dfrac{2.t}{1+t^2}}{1+\dfrac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = \frac{2.t}{1+t^2}.\frac{1.}{\dfrac{(1+t^2)^2+(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = \frac{2.t.(1+t^2)}{(1+2.t^2+t^4).(1-2.t^2+t^4)} = \frac{2.t+2.t^3}{2+2.t^4}$$

On fait de même pour y avec un facteur $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ en plus

$$y = \frac{\sin(\varphi)}{1+\cos^2(\varphi)}.\cos(\varphi) = \frac{t+t^3}{1+t^4}.\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{t.(1+t^2)}{1+t^4}.\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{t.(1-t^2)}{1+t^4}$$

Finalement $\boxed{x_t = \dfrac{t+t^3}{1+t^4} \text{ et } y_t = \dfrac{t-t^3}{1+t^4}}$

On fusionne $x+i.y = \dfrac{(t+t^3)+i.(t-t)^3}{1+t^4} = t.\dfrac{1+t^2+i.(1-t^2)}{1+t^4}$. On peut prendre des initiatives et trouver le $(1+i)$ en facteur :

$$x+i.y = t.\frac{1+t^2+i.(1-t^2)}{1+t^4} = \frac{(1+i).(1-i.t^2)}{1+t^4}$$

et même factoriser $1+t^4$ en $(1+i.t^2).(1-i.t^2)$ *(ne me dites pas que vous avez oublié $(1+i.x).(1-i.x) = 1+x^2$!)* :

$$x+i.y = t.\frac{1+t^2+i.(1-t^2)}{1+t^4} = \frac{(1+i).(1-i.t^2)}{(1+i.t^2).(1-.t^2)}$$

Et tout se simplifie.

Mais il faut de l'habitude pour ça.

Le plus simple pour un élève de Prépas devant établir $\dfrac{1+t^2+i.(1-t^2)}{1+t^4} = (1+i).\dfrac{t}{1+i.t^2}$ sera de vérifier le produit en croix

$$(1+t^2+i.(1-t^2)).(1+i.t^4) = \ldots = (1+i).(1+t^4)$$

Je vous laisse vérifier ce calcul.

On se donne t strictement positif. On calcule $x_t = \dfrac{t+t^3}{1+t^4}$ et $y_t = \dfrac{t-t^3}{1+t^4}$.
Si on remplace t par $-t$, x et y changent de signe. On a effectué une symétrie centrale par rapport à l'origine.

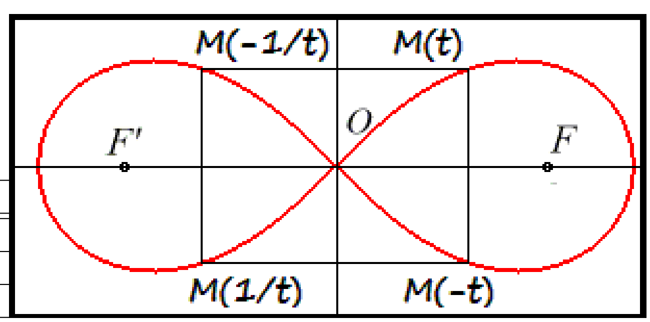
Passons à $\dfrac{1}{t}$:

$$x_{1/t} = \frac{\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^3}}{1+\dfrac{1}{t^4}} = \frac{\dfrac{t^2+1}{t^3}}{\dfrac{t^4+1}{t^4}} = \frac{t.(1+t^2)}{1+t^4} = x_t$$

On fait de même pour y (changement de signe). On passe ensuite à $-1/t$ en changeant des signes.

Reste à interpréter géométriquement

t	x_t	y_t	
$-t$	$x_{-t} = -x_t$	$y_{-t} = -y_t$	symétrie de centre 0
$1/t$	$x_{1/t} = x_t$	$y_{1/t} = -y_t$	symétrie d'axe $0x$
$-1/t$	$x_{-1/t} = -x_t$	$y_{-1/t} = y_t$	symétrie d'axe $0y$



Points à coordonnées rationnelles. DS01

On doit ensuite établir une équivalence, à la recherche de point à coordonnées rationnelles sur $\mathbb{B}$, comme $\left(\frac{10}{17}, \frac{6}{17}\right)$, $\left(\frac{78}{97}, \frac{30}{97}\right)$ et bien d'autres qu'on va apprendre à construire. On doit établir une équivalence, c'est à dire deux implications.

On montre : $(t \in \mathbb{Q}) \Rightarrow ((x,\ y) \in \mathbb{Q}^2)$.
Si t est rationnel, t^3 en est un aussi, de même que t^4, puis les sommes $t + t^3$ et $1 + t^4$ et enfin le quotient.

Tout repose sur « $\mathbb{Q}$ est stable par addition, soustraction, multiplication, division ».

Mais si on préfère les formules explicites, on pose $t = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers et on calcule

$$x = \frac{\dfrac{p}{q} + \dfrac{p^3}{q^3}}{1 + \dfrac{p^4}{q^4}} = \frac{\dfrac{p.q^3 + p^3.q}{q^4}}{\dfrac{q^4 + p^4}{q^4}} = \frac{p.q^3 + p^3.q}{p^4 + q^4}$$

C'est un quotient d'entiers, il est entier. On fait de même avec $y = \dfrac{p.q^3 - p^3.q}{p^4 + q^4}$.

On montre : $((x,\ y) \in \mathbb{Q}^2) \Rightarrow (t \in \mathbb{Q})$.
Que x et y soient rationnels ne force pas t à l'être forcément quand on regarde vite.

Peut être qu'avec $t = \sqrt{2}$ ou un truc bien choisi, x et y sont rationnels.

Alors on regarde les indications. On calcule

$$\frac{x - y}{x + y} = \frac{\dfrac{t + t^3}{1 + t^4} - \dfrac{t - t^3}{1 + t^4}}{\dfrac{t + t^3}{1 + t^4} + \dfrac{t - t^3}{1 + t^4}} = \frac{\dfrac{2.t^3}{1 + t^4}}{\dfrac{2.t}{1 + t^4}} = t^2$$

Déjà, t^2 est rationnel.
Mais si on continue avec

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{\dfrac{(t + t^3)^2}{(1 + t^4)^2} + \dfrac{(t - t^3)^2}{(1 + t^4)^2}}{\dfrac{t + t^3}{1 + t^4} + \dfrac{t - t^3}{1 + t^4}} = \frac{(t + t^2)^2 + (t - t^3)^2}{2.t.(1 + t^4)} = \frac{t^2 + 2.t^3 + t^2 + -2.t^3 + t^4}{2.t.(1 + t^4)} = \frac{2.t^2.(1 + t^2)}{2.t.(1 + t^2)}$$

Trop fort, c'est t lui même. Et on le construit à partir des rationnels x et y. Il est rationnel.

Exemple : si je vous ai donné $\left(\frac{78}{97}, \frac{30}{97}\right)$ vous pouvez remonter à $t = \frac{3}{2}$.

L'intégrale ϖ. DS01

L'intégrale existe, mais effectivement, on n'a pas de primitive à proposer.
On doit encadrer, et la réponse contient des π ! Peut être que c'est juste qu'on a encadré la fonction sous le signe intégrale. D'ailleurs, le $\sqrt{2}$ au dénominateur nous incite à penser à $\sqrt{1 + \sin^2(\theta)}$ quand le sinus vaut 1.
On encadre donc pour tout θ de 0 à $\pi/2$

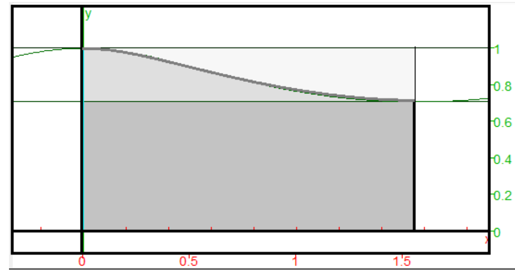
$$0 \leqslant \sin^2(\theta) \leqslant 1 \text{ \textit{puis} } 1 \leqslant 1 + \sin^2(\theta) \leqslant 2$$

On passe à la racine (application croissante) puis à l'inverse (application décroissante sur $]0, +\infty[$:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(\theta)}} \leqslant \frac{1}{1}}$$

On intègre de 0 à $\pi/2$ (croissance de l'intégrale)

$$\boxed{\frac{\pi}{2.\sqrt{2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2}}.d\theta \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\sin^2(\theta)}} \leqslant \int_0^{\pi/2} 1.d\theta = \frac{\pi}{2}}$$



On veut faire plus fin. On va encadrer le sinus plus finement. Et une des inégalités ne servira pas ici, alors qu'elle aurait pû.
Pour prouver $\sin(\theta) \leqslant \theta$ sur $[0, \pi/2]$, on étudie l'application différence $\theta \longmapsto \theta - \sin(\theta)$.
Sa dérivée $\theta \longmapsto 1 - \cos(\theta)$ est positive (ou nulle).
L'application est donc croissante sur $[0, \pi/2]$. Elle est donc plus grande que sa valeur en 0 (c'est à dire 0).
Si vous voulez l'écrire au lieu de le raconter :

$$(0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2) \Rightarrow (0 - \sin(0) \leqslant \theta - \sin(\theta))$$

Pour l'autre fonction, c'est plus délicat, car on ne connaît pas le signe de sa dérivée.
Quelle fonction ? La différence $\theta \longmapsto \sin(\theta) - \dfrac{2.\theta}{\pi}$.

Pour prouver une égalité, on calcule la différence jusqu'à trouver 0. *Pour montrer une inégalité, on étudie la différence jusqu'à la trouver positive.*

Notons la δ et dérivons a : $\delta' = \theta \longmapsto \cos(\theta) - \dfrac{2}{\pi}$.Et comme $\dfrac{2}{\pi}$ est entre 0 et 1 , il existe un point où la dérivée s'annule et change de signe (en $Arccos(2/\pi)$ qu'on notera α).

θ	0	$]0, \alpha[$	α	$]\alpha, \pi/2[$	$\pi/2$
$\delta'(\theta)$	$1-\frac{2}{\pi}$	$\oplus$	0	$\ominus$	$-\frac{2}{\pi}$
δ		$\nearrow$		$\searrow$	
	0	donc positive			0

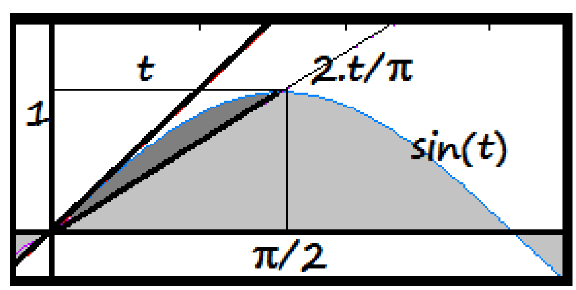
En 0 (et jusqu'à cette valeur), la dérivé est positive. Ensuite, elle devient négative (comme en $\dfrac{\pi}{2}$).
L'application δ est donc croissante, puis décroissante.
Mais si on calcule : $\delta(0) = \delta\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Elle part de 0, elle monte, elle redescend, et termine à 0. Elle est donc positive tout au long de l'intervalle.

Avec un peu d'habitudes, si on prend l'exercice par le bon bout, on dit que c'est graphiquement évident.

Et si on connaît le cours de suite de l'année, on dit que c'est de la convexité.

On va utiliser cet encadrement dans la suite pour estimer ϖ avec un peu plus de précision.



On encadre, on élève au carré, on ajoute 1

$$\sqrt{1+\left(\frac{2}{\pi}.\theta\right)^2} \leqslant \sqrt{1+\sin^2(\theta)} \leqslant \sqrt{1+\theta^2}$$

On passe à l'inverse (changer le sens) et on intègre de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{\pi}.\theta\right)^2}} \geqslant \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\sin^2(\theta)}} \geqslant \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}$$

On va les calculer toutes des deux. Mais il nous faudrait une primitive.

On dérive comme proposé $t \longmapsto t+\sqrt{1+t^2} \longmapsto \ln(t+\sqrt{1+t^2})$ et au passage, on dérive $t \longmapsto t^2 \longmapsto (1+t^2)^{1/2}$. On trouve

$$\Big(t \longmapsto \frac{1+\dfrac{2.t}{2.\sqrt{1+t^2}}}{t+\sqrt{1+t^2}}\Big) = \Big(t \longmapsto \frac{\dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}}{t+\sqrt{1+t^2}}\Big) = \Big(t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\Big)$$

Je vous donnais la dérivée, vous ne pouviez pas vous contenter de "on calcule". Il fallait que l'on puisse voir la simplification 2 *avec* $1/2$ *et la simplification géniale par* $t+\sqrt{1+t^2}$.

Et l'autre dérivée est du même type

$$\Big(t \longmapsto \frac{\pi}{2}.\ln\Big(2.t+\sqrt{4.t^2+\pi^2}\Big)\Big)' = \Big(t \longmapsto \frac{\pi}{2}.\frac{2+\dfrac{8.t}{2.\sqrt{4.t^2+\pi^2}}}{2.t+\sqrt{4.t^2+\pi^2}}\Big) = \Big(t \longmapsto \frac{\pi}{\sqrt{4.t^2+\pi^2}}\Big)$$

On peut calculer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} = \Big[\ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big]_{t=0}^{t=\pi/2} = \ln\Big(\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+1}\Big) = \ln\Big(\frac{\pi+\sqrt{\pi^2+4}}{2}\Big)$$

Étrange, on a $\ln(\pi+\sqrt{\pi^2+4})-\ln(2)$ alors qu'on attend $\ln(2)-\ln(\sqrt{\pi^2+4}-\pi)$ (dont l'existence ne pose pas de problème).
Mais on prouve $\ln(\pi+\sqrt{\pi^2+4})-\ln(2) = \ln(2)-\ln(\sqrt{\pi^2+4}-\pi)$ car

$$\ln(\pi+\sqrt{\pi^2+4})+\ln(\sqrt{\pi^2+4}-\pi)-2.\ln(2) = \ln\Big((\sqrt{\pi^2+4}-\pi).(\sqrt{\pi^2+4}+\pi)\Big)-\ln(4) = 0$$

Mais l'autre dérivée est elle la bonne ?

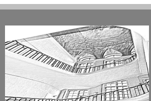
$$\frac{\pi}{\sqrt{4.t^2+\pi^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2.\left(\frac{2.t}{\pi}\right)^2+\pi^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2.t}{\pi}\right)^2+1}}$$

On peut donc calculer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\left(\dfrac{2}{\pi}.\theta\right)^2}} = \Big[\frac{\pi}{2}.\ln\Big(2.t+\sqrt{4.t^2+\pi^2}\Big)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.\Big(\ln\Big(\pi+\sqrt{\pi^2+\pi^2}-\ln(\pi)\Big) = \frac{\pi}{2}.(\ln((1+\sqrt{2}).\pi)-\ln(\pi)$$

Les $\ln(\pi)$ se simplifient, et il reste le terme de l'énoncé.

Finalement, il y a quand même plusieurs questions de calcul dans $\mathbb{C}$ *et questions de calcul sur les logarithmes et les quantités conjuguées.*



Application Φ. DS01

Tant que x est entre -1 et 1, tous les t de $[0,\ x]$ sont aussi entre -1 et 1. C'est ce qui permet à $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ d'être définie et continue sur $[0,\ x]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ existe.

Si x dépasse 1, le réel $t=1$ est dans $[0,\ x]$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ n'existe pas.

Pour x négatif, l'intégrale existe, par relation de Chasles. Par exemple

$$\int_0^{-1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = -\int_{-1/2}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

Cette intégrale est négative. Mais on a aussi par parité

$$\int_0^{-1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = -\int_0^{1/2} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

Pour la croissance, le plus naturel pour un élève est de dériver : $\Phi' = x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

On rappelle en effet que $\left(x \longmapsto \int_a^x f(t).dt\right)' = \left(x \longmapsto f(x)\right)$ c'est le lien entre intégrales et primitives.

> *Deux erreurs classiques.*
> *Certains écrivent $\left(x \longmapsto \int_a^x f(t).dt\right)' = \left(x \longmapsto f(x) - f(a)\right)$, en argumentant je dois dériver $x \longmapsto F(x) - F(a)$.*
> *Et si $x \longmapsto F(x)$ se re-dérive bien en $x \longmapsto f(x)$, l'autre terme est juste une « constante » et sa dérivée est nulle.*
> *Je mets des guillemets sur « constante » car pour moi ça n'a pas de sens si on ne dit pas par rapport à qui. Une fois qu'on a écrit $(x \longmapsto F(a)à)$, on voit bien $(x \longmapsto F(a))' = (x \longmapsto 0)$.*
> *Autre erreur $\left(x \longmapsto \int_a^x f(t).dt\right)' = \left(x \longmapsto f(t)\right)$ en recopiant la fonction sous le signe somme. Mais avec variable t qui ne correspond à rien et n'existe même pas.*

Φ' est positive, Φ est croissante.

> *Pour la croissance, le plus naturel pour le matheux est de raisonner directement. Sans aller chercher de gros théorèmes ! On est en maths bon sang !*

On suppose $-1 < x < y < 1$. On doit montrer $\Phi(x) \leqslant \Phi(y)$. On calcule la différence :

$$\Phi(y) - \Phi(x) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_x^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_x^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

L'intégrale est positive, car l'intervalle est dans le bon sens, avec une fonction positive. On a prouvé $x < y \Rightarrow \Phi(x) < \Phi(y)$. Et ça, c'est la croissance d'une application. Loin de tout théorème tout prêt qu'on applique sans même comprendre ce qu'il y a derrière...

On rappelle deux ou trois choses sur l'Arcsinus. Déjà pour tout x de $[-1,\ 1]$, on a $\sin(Arcsin(x)) = x$ par définition même.
On a donc $\cos^2(Arcsin(x)) = 1 - x^2$ par relation de Pythagore.
De plus $Arcsins(x)$ est entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ par définition. Son cosinus est donc positif.
On a donc $\cos(Arcsin(x)) = +\sqrt{1-x^2}$.

On repart de $\forall x \in]-1,\ 1[,\ \sin(Arcsin(x)) = x$ et on dérive : $\forall x,\ \cos(Arcsin(x)).Arcsin'(x) = 1$.
On remplace, on divise : $Arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

On prend x entre 0 et 1. Tous les t de $[0,\ x]$ vérifient $t^4 \leqslant t^2$.

Rappelons qu'entre 0 et 1, quand on élève un nombre à une grand puissance, il diminue.
Le mieux est de penser à $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 < \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$.
Sinon, ici, on calcule la différence $t^2 - t^4 = t^2.(1-t^2)$ avec $1 - t^2$ positif.

On met un signe moins, on ajoute 1 : $1 - t^4 \geqslant 1 - t^2$.
On passe à la racine (application croissante), et on précise même

$$\sqrt{1-t^4} \geqslant \sqrt{1-t^2} > 0$$

pour pouvoir passer aux inverses. On a cette fois $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. On intègre de 0 à x

$$\int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \leqslant \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \Big[Arcsin(t)\Big]_{t=0}^x$$

On a prouvé

$$\Phi(x) \leqslant Arcsin(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$$

L'application Φ est croissante et majorée (par la constante numérique $\frac{\pi}{2}$)[4].
Un théorème nous assure alors qu'elle a une limite finie quand x tend vers 1.

4. on majore par un nombre, pas par une autre fonction qui pourrait s'amuser à bouger aussi

Cette limite est plus petite que $\frac{\pi}{2}$ *mais rien ne nous dit qu'elle vaudrait* $\frac{\pi}{2}$.
Il est révolu le temps où on a un majorant et où la limite est « comme par hasard » ce majorant.

Pourquoi fait on tout ça ?
Pour vous poser des questions.
Mais aussi parce que $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ *est un peu problématique. La fonction sous le signe somme n'est pas définie en* 1. *Pire encore, elle y admet une asymptote verticale.*
Graphiquement, l'aire semble infinie.
En fait, le domaine n'est pas borné, mais son aire est finie. Il faudra s'habituer à ce genre d'approche.

Comment passer alors de $\Phi(1) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ à $\varpi = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\sin^2(\theta)}}$?

On va tenter un changement de variable $\boxed{t = \sin(\theta)}$

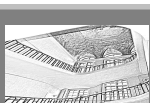
Les bornes passent de $\int_{t=0}^{t=1}$ à $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}$.

On ramène en univers θ la fonction intégrée

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2).(1+t^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}}.\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(\theta)}} = \frac{1}{\cos(\theta)}.\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(\theta)}}$$

L'élément différentiel dt devient $\cos(\theta).d\theta$.
Et tout s'assemble parfaitement.

La question : aurai-je eu le temps de traiter plusieurs changements de variables en T.D. avant le D.S. ?



Sinus lemniscate. DS01

En tant qu'application croissante continue (et même dérivable), ϕ admet une réciproque.
Elle existe, mais comme pour $Arctan$ et les autres, on n'a rien pour la définir.

On sait juste la caractériser.
ϕ va de $[0,\ 1]$ dans $[0,\ \varpi]$ donc $\mathfrak{sl}$ va de $[0,\ \varpi]$ dans $[0,\ 1]$.

Et même, par imparité, ϕ va de $[-1,\ 1]$ dans $[-\varphi,\ \varpi]$ donc $\mathfrak{sl}$ va de $[-\varpi,\ \varpi]$ dans $[-1,\ 1]$.
Comme le sinus va de $[-\pi/2,\ \pi/2]$ dans $[-1,\ 1]$.

La relation $\mathfrak{sl}(\theta) = x$ signifie $\theta = \Phi(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.
Partons comme indiqué de $\phi(\mathfrak{sl}(x)) = x$ et dérivons sans connaître grand chose $\Phi'(\mathfrak{sl}(x)).\mathfrak{sl}'(x) = 1$.

Mais Φ' est connue, c'est $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$. On a donc

$$\mathfrak{sl}'(\theta).\frac{1}{\sqrt{1-(\mathfrak{sl}(\theta))^2}} = 1$$

On multiplie en croix et on élève au carré : $\boxed{\mathfrak{sl}'(\theta) = \sqrt{1-(\mathfrak{sl}(\theta))^4} \text{ et } (\mathfrak{sl}')^2(\theta) = 1-(\mathfrak{sl}(\theta))^4}$

On élève au carré : $(\mathfrak{sl}'(\theta))^2 = 1-(\mathfrak{sl}(\theta))^4$. Comme ceci est vrai pour tout θ, on re-dérive :

$$2.\mathfrak{sl}''(\theta).\mathfrak{sl}'(\theta) = 0 - 4.(\mathfrak{sl}(\theta))^3.\mathfrak{sl}'(\theta)$$

La relation $\Phi'(\mathfrak{sl}(x)).\mathfrak{sl}'(x) = 1$ nous garantissait que $\mathfrak{sl}'$ ne pouvait pas s'annuler (du moins dans notre raisonnement, c'est un peu fallacieux je le reconnais), on peut donc simplifier par $\mathfrak{sl}'(\theta)$ (puis par 2) :

$$\mathfrak{sl}''(\theta) = -2.(\mathfrak{sl}(\theta))^3$$

Ici, la ressemblance avec $\sin'' = -\sin$ (qui correspond à l'équation du pendule) me semble un peu lointaine.

La constante H. DS01

On part de la fonction $(\mathfrak{s}l')^2 + (\mathfrak{s}l)^4$ et on la dérive : $2.\mathfrak{s}l'.\mathfrak{s}l'' + 4.(\mathfrak{s}l)^3.\mathfrak{s}l'$ (formules du type $(u^2)' = 2.u.u'$ et $(v^4)' = 4.v^3.v'$).
On factorise $2.\mathfrak{s}l'.\big(\mathfrak{s}l'' + 2.(\mathfrak{s}l')^3\big)$. Et justement, qu'a-t-on prouvé à la question précédente ?

$$\Big((\mathfrak{s}l')^2 + (\mathfrak{s}l)^4\Big)' = \Big(2.\mathfrak{s}l'.\mathfrak{s}l'' + 4.(\mathfrak{s}l)^3.\mathfrak{s}l'\Big) = \Big(2.\mathfrak{s}l'.(\mathfrak{s}l'' + (\mathfrak{s}l)^3)\Big) = \Big(0\Big)$$

La dérivée est nulle et on travaille sur un intervalle, H est constante.

On la calcule là où ça doit être le plus simple : en 0.

$$H(0) = ((\mathfrak{s}l')(0))^2 + (\mathfrak{s}l(0))^4 = ((\mathfrak{s}l')(0))^2 + (0)^4$$

En effet, on avait $\Phi(0) = 0$ et donc en remontant $0 = \mathfrak{s}l(0)$.

Mais on a aussi prouvé $\mathfrak{s}l' = \sqrt{1 - (\mathfrak{s}l)^4}$ et donc en 0 : $\mathfrak{s}l'(0) = \sqrt{1 - 0^4} = 1$.

On a donc $(\mathfrak{s}l'(x))^2 + (\mathfrak{s}l(x))^4 = 1$ pour tout x.

Ca pourra être intéressant de le regarder en ϖ.

Cosinus lemniscate. DS01

On a posé $\mathfrak{c}l = \dfrac{\mathfrak{s}l'}{1 + (\mathfrak{s}l)^2}$ (par rapport à $\cos = \sin'$, il y a un terme au dénominateur). On dérive :

$$\mathfrak{c}l' = \frac{\mathfrak{s}l''.(1 + \mathfrak{s}l^2) - \mathfrak{s}l'.(0 + 2.\mathfrak{s}l.\mathfrak{s}l')}{(1 + (\mathfrak{s}l)^2)^2} = \frac{-2.\mathfrak{s}l^3.(1 + \mathfrak{s}l^2) - 2.\mathfrak{s}l.(\mathfrak{s}l')^2}{(1 + (\mathfrak{s}l)^2)^2}$$

Or, $(\mathfrak{s}l')^2$ peut être remplacé par $1 - (\mathfrak{s}l)^4$ et même $(1 - (\mathfrak{s}l)^2).(1 + (\mathfrak{s}l)^2)$

$$\mathfrak{c}l' = \frac{-2.\mathfrak{s}l^3.(1 + \mathfrak{s}l^2) - 2.\mathfrak{s}l.(1 - (\mathfrak{s}l)^2).(1 + (\mathfrak{s}l)^2)}{(1 + (\mathfrak{s}l)^2)^2} = \frac{-2.\mathfrak{s}l^3 - 2.\mathfrak{s}l.(1 - (\mathfrak{s}l)^2)}{1 + (\mathfrak{s}l)^2}$$

Les $(\mathfrak{s}l)^3$ s'en vont et il reste $\boxed{\mathfrak{c}l' = \dfrac{-2.\mathfrak{s}l}{1 + (\mathfrak{s}l)^2}}$ Par rapport à $\cos' = -\sin$il y a un 2 en plus.

On re-dérive comme un quotient ?$\mathfrak{c}l'' = \frac{-2.\mathfrak{s}l'.(1+(\mathfrak{s}l)^2)+2.\mathfrak{s}l.(2.\mathfrak{s}l.\mathfrak{s}l')}{(1+\mathfrak{s}l^2)^2} = -2.\frac{(1+\mathfrak{s}l^2)-4.(\mathfrak{s}l)^2}{1+(\mathfrak{s}l)^2}.\frac{\mathfrak{s}l'}{(1+\mathfrak{s}l^2)}$