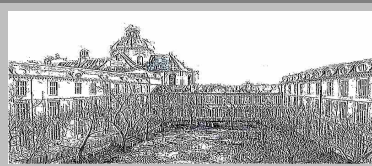


LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 9 octobre
M.P.S.I.2



2023

2024

TD05

◦0◦

♡ Sucri peut être assimilé à une sphère de rayon 10 centimètres. Je lui ai acheté un chapeau rond (cylindrique, mais j'ai du mal à imaginer la chanson « ils ont des chapeaux cylindriques, vive la Bretagne... ») de diamètre 10 centimètres. Quelle hauteur du crane de Sucri disparaîtra sous le chapeau ?

◦1◦

♡ j est le complexe $e^{2.i.\pi/3}$. Calculez j^{2019} et $(1+j)^{2019}$ et $(1-j)^{2019}$.

Calculez	$A = \sum_{k=0}^{2019} j^k$	$B = \sum_{k=0}^{2019} \binom{2019}{k} . j^k$	$C = \sum_{k=0}^{2019} \binom{2019}{p} . j^k$
	$D = \sum_{p=0}^{2019} \binom{2019}{p} . j^k$	$E = \sum_{k=0}^{2019} \binom{2019}{p} . j^p$	$F = \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2019 \\ 0 \leq p \leq 2019}} \binom{2019}{p} . j^k$

◦2◦

♣ ALI et BEN sont jumeaux (*indiscernables, c'est le cas de mes deux boulangers Place des Fêtes*). L'un ment tout le temps. L'autre est toujours sincère.

Lequel ment ? On ne sait pas... Alors, il faut leur poser des questions. En face de vous, un des deux frères. Lequel ? Ali, Ben ? Le menteur, le sincère ?

- a - Quelle sera sa réponse à la question "*Es tu menteur ?*"
- b - Vous lui demandez "*Es tu Ali ?*". Que déduisez vous si il répond "*Oui*" ?
- c - Vous lui demandez "*Ali ment il ?*". Que déduisez vous si il répond "*Oui*" ?
- d - Quelle question pouvez vous poser pour qu'il vous réponde assurément "*Oui*".
- e - Que pensez vous de la question "*Ton frère s'appelle-t-il Ali ?*".
- f - Que pensez vous s'il vous dit "*Mon frère dit qu'il s'appelle Ben*".

◦3◦

Vrai ou faux :

a	$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(2.\theta) \in \mathbb{Q}$
b	$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(\theta/2) \in \mathbb{Q}$
c	$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sin(\theta) \in \mathbb{Z}$
d	$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sin(\theta) \in \mathbb{Q}$
e	$(\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) \in \mathbb{Q}) \Rightarrow (\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin(\theta) \in \mathbb{Q})$
f	$\forall \theta \in]-\pi/2, \pi/2[, \tan(\theta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \tan(n.\theta) \in \mathbb{Q}$

◦4◦

♡ Sachant $\tan(\theta) = 1/2$, calculez $\tan(2.\theta)$, $\tan(4.\theta)$, $\tan(8.\theta)$, $\tan(16.\theta)$ et enfin $\tan(20.\theta)$.

♣ En combien d'étapes pensez vous accéder à $\tan(2021.\theta)$?

◦5◦

♡ Exprimez $\tan(7.\theta)$ comme polynôme en $\tan(\theta)$ (*indication développer $(\cos + i.\sin)^7$, identifier, diviser, et simplifier haut et bas pour avoir des tangentes*).

Déduisez la factorisation de $X^3 - 21.X^2 + 35.X - 7$.

◦6◦

Encore des stations de métro (des terminus de lignes) :

Plan d'égout incorrect. Médailles à iris. Démolirait une rime. Dirigé au métronome. Ponte des vers. Découpons le bandit glouton. Thé lacté. Le pot-de-vin consolable. Soleil adulé téléchargé. Suivant en déchéance.

Et en cadeau : Un con rose, Frais bordel virtuel.

◦7◦

♡ Factorisez $X^3 + (-6 - 4.i).X^2 + (15 + 20.i).X + 2 - 36.i$ sachant qu'une des racines est le double d'une autre.

◦8◦

Pour quels complexes le réel $\Re(\Delta) + |\Delta|$ est il nul ?

Il paraît que l'une des racines carrées du complexe Δ est $\frac{\Delta + |\Delta|}{\sqrt{2.(\Re(\Delta) + |\Delta|)}}$. Ne me faites pas confiance, prouvez le.

◦9◦

♣ Le loir et le chapelier fou mentent certains jours et sont sincères d'autres jours (*c'est encore plus stupide que mes boulangers jumeaux*).

jour	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
loir	menteur	sincère	menteur	sincère	sincère	sincère	menteur
chapelier fou	sincère	sincère	sincère	sincère	menteur	menteur	menteur

Si les deux disent "on est lundi", pouvez vous déduire quel jour on est ?

Si les ai entendu dire "hier je mentais", pouvez vous déduire qui ment ?

Le loir dit "si on demandait au chapelier si on est mercredi, il dirait oui", pouvez vous déduire le jour.

Le loir dit "hier je mentais". Le chapelier peut il ajouter "tiens, moi c'est après-demain que je mens" ?

◦10◦

Un exercice d'oral de Polytechnique était posé sous la forme suivante :

soient $(z_0, \dots, z_{n-1})$ n complexes non nuls,

alors il existe une partie P de $\text{range}(n)$ vérifiant $\left| \sum_{p \in P} z_p \right| \geq \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$

l'exercice était posé tel quel avec une indication que l'on donnera plus loin sur un exemple et pour le traitement général. Mais on commencera ici par quelques cas particuliers.

♠ 0 ♠ Pour $(1, i, -1, -i)$, vérifiez : $|1 + i| \geq \frac{1}{\pi} \cdot (|1| + |i| + |-1| + |-i|)$.

♠ 1 ♠ Pour $(1, -j^2, j, -1, j^2, -j)$, vérifiez : $|j - 1 + j^2| \geq \frac{1}{\pi} \cdot (|1| + |-j^2| + |j| + |-1| + |j^2| + |-j|)$.

♠ 2 ♠ n est un entier naturel non donné, on pose $z_k = e^{i \cdot k \cdot \pi / n}$ pour k dans $\text{range}(2 \cdot n)$.

Justifiez : $\left| \sum_{k=0}^{n-1} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{2 \cdot n - 1} |z_k|$.

♠ 3 ♠ a et b sont deux réels, vérifiant $a < 0 < b$. Prouvez : $|a| \geq \frac{1}{\pi} \cdot (|a| + |b|)$ ou $|b| \geq \frac{1}{\pi} \cdot (|a| + |b|)$.

♠ 4 ♠ Les z_k sont n réels classés par ordre croissant.

Montrez qu'il existe un entier p vérifiant $\left| \sum_{k=0}^{p-1} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$ ou $\left| \sum_{k=p}^{n-1} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$.

♠ 5 ♠ On prend cette fois à titre d'exemple $z_0 = 2, z_1 = 1 + i, z_2 = i, z_3 = -2 + 3i, z_4 = -5$ et $z_5 = -3 - 4i$. Pour tout α entre $-\pi$ et π , on note A_α l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Arg}(z \cdot e^{-i \cdot \alpha})| \leq \pi/2\}$. Justifiez que A_α est un demi plan. Pour tout α , on note $f(\alpha)$ la norme de la somme des z_k qui sont dans A_α . Représentez graphiquement l'application f sur $[-\pi, \pi]$, et calculez l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cdot d\alpha$ ¹.

Le cas général repose aussi sur le demi-plan qui tourne. On calcule la valeur moyenne de l'application f , avec des inégalités dans $\mathbb{C}$ et un peu de trigonométrie. Comme cette valeur moyenne dépasse alors la valeur $\sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$, c'est que f dépasse cette valeur au moins en un point. On ne le détaillera pas ici.

◦11◦

Dans l'ensemble des entiers de 0 à 20 pour l'addition et la multiplication modulo 21, montrez que toute suite arithmétique est périodique.

Déterminez la période de la suite $u_{n+1} = 16 \cdot u_n + 1$.

◦12◦

Qui est le rationnel d'écriture décimale $3,1415914159\dots$?

◦13◦

La division est elle une loi de composition interne sur l'ensemble des entiers ?

Pour quels entiers n la multiplication est elle une loi interne sur l'ensemble des diviseurs de n ! ?

Comment s'appelle une relation qui vérifie $\forall(a, b), (a \mathcal{R} b \text{ et } b \mathcal{R} a) \Leftrightarrow a = b$.

Comment s'appelle une relation qui vérifie $\forall(a, b), (a \mathcal{R} b \text{ et } a \mathcal{R} c) \Leftrightarrow b \mathcal{R} c$.

◦14◦

♥ On pose $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et on demande de calculer le produit des trois matrices ? Mais quel produit $A \cdot B \cdot C$? Ou $A \cdot C \cdot B$? Ou $B \cdot A \cdot C$? D'ailleurs, il y en a combien ? Et quelle est la somme de tous ces produits ?

1. on rappelle que l'intégrale d'une fonction est une aire, et ne se calcule pas forcément par des $[F(x)]_{x=a}^b$ avec des exigences du type "f doit être dérivable" à cause d'un cours de Terminale dans lequel on confond à tout bout de champ "nécessaire" et "suffisant"

◦15◦ Montrez qu'il existe un angle φ entre 0 et $\pi/2$ vérifiant $\tan(\varphi) = 12/5$. Calculez alors $\cos(\varphi)$ et $\sin(\varphi)$.

Complétez : $\forall x \in \mathbb{R}, 12 \cdot \cos(x) + 5 \cdot \sin(x) = \sin(x + \varphi)$.

Vérifiez alors $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{12 \cdot \cos(\theta) + 5 \cdot \sin(\theta)} = \frac{\ln(15/2)}{13}$.

◦16◦ Montrez que les hauteurs du triangle de côtés 580, 609 et 841 sont entières. (ce triangle a une particularité, et ensuite, calculez son aire de plusieurs façons).

◦17◦ Sachant $\tan(\pi/5) = \sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{5}$, calculez $\tan(n \cdot \pi/5)$ pour tout n .

◦18◦ Un classique du domaine de l'astuce mathématique :

On prend treize réels x_k ; montrez qu'il existe au moins deux indices distincts i et j vérifiant $0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i \cdot x_j} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

(indication : se ramener sur $]-\pi/2, \pi/2[$, découper en 12 segments).

◦19◦ ♥ Montrez : $\cos(2 \cdot \pi/5) + \cos(3 \cdot \pi/5) = 0$.

Montrez : $\forall \theta, \cos(3 \cdot \theta) + \cos(\theta) = 2 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(2 \cdot \theta)$ puis $\cos(3 \cdot \theta) = 4 \cdot \cos^3(\theta) - 3 \cdot \cos(\theta)$.

Déduisez que $\cos(\pi/5)$ est racine de l'équation $4 \cdot X^3 + 2 \cdot X^2 - 3 \cdot X - 1 = 0$ d'inconnue réelle X .

Résolvez l'équation ci dessus. Déduisez la valeur de $\cos(\pi/5)$.

◦20◦ Un élève écrit pour tout x réel :

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctan}(x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \frac{dt}{(1+it)(1-it)} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^x \left(\frac{1}{1+it} + \frac{1}{1-it} \right) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \left[\ln(1+it) - \ln(1-it) \right]_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{2i} \cdot \ln \left(\frac{1+it}{1-it} \right) \end{aligned}$$

Qu'en pensez vous ?

Et s'il se justifie en disant : « pose $\theta = \frac{1}{2i} \cdot \ln \left(\frac{1+it}{1-it} \right)$ et calcule $\frac{e^{i \cdot \theta} - e^{-i \cdot \theta}}{i \cdot (e^{i \cdot \theta} + e^{-i \cdot \theta})}$ et dis moi ce que tu en penses... »

◦21◦ Calculez $\int_0^1 t^2 \cdot 2^t \cdot dt$.

◦22◦ A-t-on vraiment $\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(2 + \sqrt{2}) + \operatorname{Arctan}(2 - \sqrt{2}) = \operatorname{Arctan}(-2/9)$? Sinon, rectifiez.

Sur le drapeau de Sucriland, les aires des deux parties grisées sont respectivement de 37 cm^2 et 73 cm^2 (la plus grande pour la tête de Sucriland).

Deux longueurs sont connues (10 cm et 14 cm). Donnez l'aire de la partie blanche au milieu.

Donnez le p.g.c.d. de $100^2 - 33^2$ et $99^2 - 32^2$.

a est un réel donné. On définit $f = \cos + a \cdot \sin$ et $g = \cos^2 + a \cdot \sin^2$.

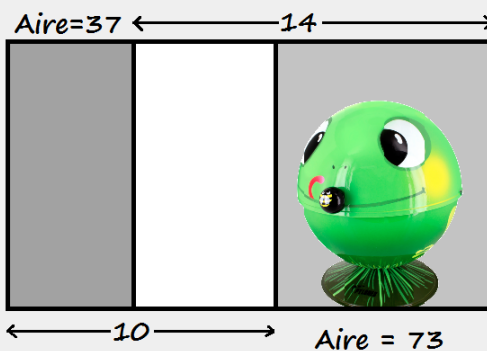
Indiquez suivant la valeur de a qui de f et g a le plus grand maximum sur $\mathbb{R}$. Même question avec minimum..

◦24◦ Résolvez : $\begin{cases} a^2 + b^2 = 3 \\ a + b = 2 \end{cases}$ d'inconnues a et b dans $\mathbb{R}$.

Résolvez : $\begin{cases} 2^a + 2^b = 2^3 \\ a + b = 2 \end{cases}$ d'inconnues a et b dans $\mathbb{R}$.

◦25◦ Montrez que $x \mapsto x^3 + x$ (notée f) est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculez $\int_0^{10} f^{-1}(t) \cdot dt$ (raisonnez, ne tentez pas d'exprimer f^{-1} , même si c'est faisable).

◦26◦ Voici, suivant les jours qui ment, et qui est sincère :



jour	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
loir	menteur	sincère	menteur	sincère	sincère	sincère	menteur
chapelier fou	sincère	sincère	sincère	sincère	menteur	menteur	menteur

“Si tu mens, je mens aussi.” Qui peut dire cela, et quel jour ?

“Hier je mentais, et demain je mentirai”.

◦27◦ Décomposez f en éléments simples et calculez $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n :

$$f = x \mapsto \frac{1}{1-x} \quad f = x \mapsto \frac{1}{1-x^2} \quad f = x \mapsto \frac{1}{x^2-3x+2} \quad f = x \mapsto \frac{x^2-4x-14}{x^3+3x^2-6x-8}$$

◦28◦ ♡ Calculez $\int_0^1 \frac{12x+18}{(x^3+7x^2+14x+8)} dx$ (factorisez le dénominateur, décomposez en trois éléments simples).

Un shikaku est une grille à découper en rectangles de côtés parallèles aux axes. Dans chacun de ces rectangles, il doit y avoir un nombre et un seul. Et ce nombre indique le nombre de cases du rectangle. Voilà, il n’y a pas plus à savoir.

			6			4			3
	6							3	
			3				5		
		4				3			2
7				6					
	6				2		3		
					4			8	
				2		4			
	9								
				2		8			

			4			4			
					3				
						2			4
4	4			9					
3									3
4			2	3					

◦30◦ La relation “avoir une voyelle en commun avec” sur l’ensemble des noms des élèves de la MPSI2 est-elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?
Définissez une relation d’équivalence sur les entiers de 1 à 10 dont les classes d’équivalence sont $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$, $\{9, 10\}$.

◦31◦ ♡ Déterminez les primitives de $x \mapsto \frac{1}{e^{2x} + 3e^x + 2}$.

◦32◦ On raisonne avec les entiers modulo 13. Donnez la liste des opposés et des inverses, et des carrés.

entier	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
opposé													
inverse													
carré													

Résolvez les équations et systèmes suivants :

$2x + 1 = 4$	$x^2 + 6x = 0$	$x^2 + 6x = 7$	$\begin{cases} x + 7y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 7y = 5 \\ 3x + 5y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x + 7y = 5 \\ x + 5y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

L’équation $x^2 + 7x = *$ a une racine double. Retrouvez la ainsi que la tache.

Montrez que le système $\begin{cases} 6x + 2y = 5 \\ 5x + 6y = 2 \end{cases}$ a plusieurs solutions (combien ?).

Ajustez l’étoile pour que $\begin{cases} 5x + y = * \\ x + 8y = 2 \end{cases}$ ait plusieurs solutions.

$x^3 + 10x^2 + 4x + 11 = 0$ a pour racines a , b et c . Calculez $a^2 + b^2 + c^2$ puis $a^3 + b^3 + c^3$.

Qui est alors l’équation (à coefficients entiers) dont les racines sont a^{-1} , b^{-1} et c^{-1} .

Un catcheur, un physicien et un mathématicien sont sujets à une expérience : on les enferme dans une pièce avec chacun une boîte d’épinards, fermée, et sans ouvre-boîte. Au bout de 24 heures, on va voir ce qu’il sont devenus.

Le catcheur réussit à ouvrir sa boîte : « Eh bien, j’ai simplement violemment projeté la boîte contre le mur. L’impact a été tel qu’elle s’est ouverte

», explique-t-il.

Le physicien réussit également à ouvrir sa boîte : « J'ai observé le solide, et calculé ses points de rupture. J'ai alors effectué une pression de manière à exercer une force maximale sur ceux-ci, et la boîte s'est tout naturellement ouverte. »

Le mathématicien, enfin, est retrouvé prostré dans un coin de la pièce, la sueur ruisselant sur son visage, et sa boîte de conserve, fermée, entre les pieds : « Admettons que la boîte est ouverte... Admettons que... »

Une variante propose : À l'arrivée de l'expérimentateur, la boîte est encore fermée et le mathématicien a disparu. Mais d'étranges bruits proviennent de la boîte... Quand l'expérimentateur l'ouvre, il découvre le mathématicien : « Argh ! Une erreur de signe quelque part ! »

Une dernière alternative : Le physicien se débrouille comme cela a été décrit ci-dessus, et le mathématicien est sauvé à temps. Il est alors mené vers les cellules des autres sujets de l'expérience. Au catcheur il dit alors : « Oh, une méthode vraiment grossière. » Dans la cellule du physicien, il regarde la boîte puis les formules, pointe du doigt un tableau et annonce : « Eh bien, ces limites ne peuvent être interverties, et cette intégrale n'existe pas dans $\mathbb{R}$. »

◻33◻ ♡ On veut calculer $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ notée I par changement de variable $u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Exprimez x à l'aide de u .

Calculez dx .

Justifiez $I = \int_0^1 \frac{4.u^2}{(1+u^2)^2} du$ (attention, les bornes sont en u et plus en x , d'accord ?).

Intégrez par parties (en dérivant u). Justifiez : $I = \frac{\pi}{2} - 1$.

Calculez aussi I en changeant de variable : $x = \cos(2\theta)$. Exprimez dx à l'aide de θ et $d\theta$ et exprimez $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ à l'aide de θ . Retrouvez la valeur de I .

◻34◻ ♡ Calculez $\int_0^{5\pi} \text{Arccos}(\cos(\theta)) d\theta$. (gare au piège).

◻35◻ ♠ On se propose de résoudre l'équation $x^4 + 11x^3 - 92x + 80 = 0$ d'inconnue complexe x , sans passer par la recherche de racines évidentes.

Dérivez deux fois, déduisez ses variations. déduisez que l'équation admet quatre racines réelles que l'on peut ordonner : $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$. Précisez le signe de chacune.

Calculez $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$, calculez $r_1.r_2.r_3.r_4$, calculez $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}$.

Prouvez $(r_1)^2 + (r_2)^2 + (r_3)^2 + (r_4)^2 = 121$.

On pose alors : $s_1 = r_1.r_2 + r_3.r_4$, $s_2 = r_1.r_3 + r_2.r_4$ et $s_3 = r_1.r_4 + r_2.r_3$.

Calculez $s_1 + s_2 + s_3$. Montrez : $s_1.s_2 + s_1.s_3 + s_2.s_3 = -1332$ et aussi $s_1.s_2.s_3 = 18144$.

Donnez l'équation de racines s_1, s_2 et s_3 sous la forme $z^3 = p.z + q$ chère à Tartaglia.

Appliquez les formules de Cardan pour trouver que s_1, s_2 et s_3 valent 42, -18 et -24.

Justifiez que c'est s_1 (c'est à dire $r_1.r_2 + r_3.r_4$) qui vaut 42. Que vaut alors $r_1.r_2.r_3.r_4$?

Trouvez alors $r_1.r_2$ et $r_3.r_4$.

On pose à présent : $y = r_1 + r_2 - r_3 - r_4$. Montrez : $y^2 = 289$. Trouvez alors y (attention au signe).

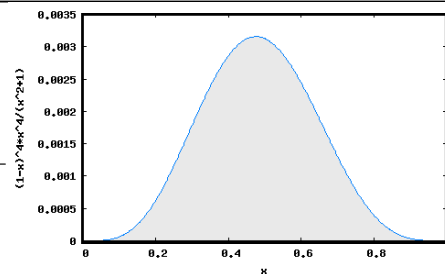
Déduisez : $r_1 + r_2 = -14$ et $r_3 + r_4 = 3$.

Trouvez alors les valeurs de r_1, r_2, r_3 et r_4 . Enfin, félicitez LUDOVICO FERRARI.

Calculez le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^4.(1-X)^4$ par $1+X^2$.

◻36◻ Déduisez : $\int_0^1 \frac{x^4.(1-x)^4}{1+x^2} dx = \frac{22}{7} - \pi$.

Donnez le maximum de $x.(1-x)$ quand x décrit $[0, 1]$. Majorez l'erreur commise quand on remplace π par $22/7$.



◻37◻ Oui, ce sont des exposants : $1 + \left(\sum_{k=0}^{2018} k\right) + j + \left(\sum_{k=0}^{2018} k^2\right) + (j^2) + \left(\sum_{k=0}^{2018} k^3\right)$.

◻38◻ ♡ On définit $f = (x, y) \mapsto (3x + 2y, 4x + 5y)$. Montrez qu'elle n'est pas une bijection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans lui-même.

On pose $E = \{0, 1, 2, \dots, 18\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 19. Montrez que f est une bijection de $E \times E$ dans lui-même.

On pose $E = \{0, 1, 2, \dots, 20\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 21. Montrez que f n'est pas une bijection

de $E \times E$ dans lui même.

On pose $E = \{0, 1, 2, \dots, 19\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 20. f est elle une bijection de $E \times E$ dans lui même.

(pour la bijectivité, la bonne démarche sera de trouver la bijection réciproque).

◦39◦ On veut résoudre $160.X^3 - 240.X + 90.X - 9 = 0$ d'inconnue réelle X .

En étudiant les variations de l'application $x \mapsto 160.x^3 - 240.x + 90.x - 9$, montrez que les trois solutions sont réelles. calculez leur somme, la somme de leurs carrés et la somme de leurs inverses.

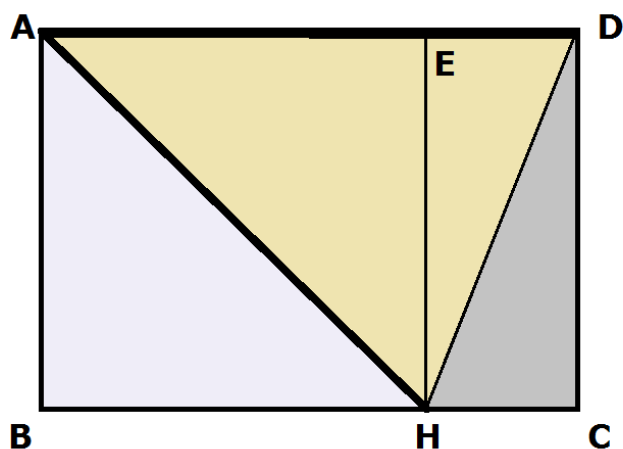
Montrez que par une translation de $1/2$, l'équation devient $160.Y^3 - 30.Y - 4 = 0$ d'inconnue Y .

Posez alors $Y = \alpha \cdot \cos(\theta)$ et ajustez α pour que l'équation prenne la forme $4 \cdot \cos^3(\theta) - 3 \cdot \cos(\theta) = \frac{1}{4}$.

Déterminez alors 3θ (modulo 2π) et déduisez les valeurs de θ (modulo $2\pi/3$) puis les trois valeurs de $\cos(\theta)$. Indiquez la forme des trois solutions réelles de l'équation initiale.

◦40◦ Résolvez $x^2 - x + 1 = 7$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ (entiers de 0 à 6 pour les lois modulo 7).

◦41◦ On a donné dans le cours la valeur de $\tan(\pi/8)$. Justifiez la grâce au schéma ci-contre.



◦42◦ ♡♣ Le polynôme $X^n - n.X^{n-1} + \dots + (-1)^n$ admet n racines réelles positives. Trouvez les.

A priori, il manque plein de coefficients, donc on ne peut pas conclure. Mais rappelez l'inégalité de convexité

$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ et indiquez quand il y a égalité.

◦43◦ ♣ Le polynôme $X^3 + *.X^2 + \sharp.X - 1$ a pour racines $\cos(a)$, $\cos(b)$ et $\cos(c)$. Calculez $\sin(a + b + c)$.

Soit $*$ une loi associative sur un ensemble E

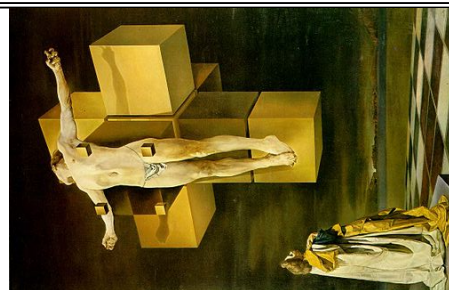
$(\forall (a, b, c), (a * b) * c = a * (b * c))$.

Passez de $((a * b) * c) * (d * e)$ à $(a * (b * (c * d))) * e$ (combien d'étapes ?).

Soit $*$ une loi associative et commutative.

Passez de $((a * b) * c) * d$ à $(d * (c * (b * a)))$.

◦44◦ Passez de $((a * b) * c) * d$ à $((d * c) * b) * a$.



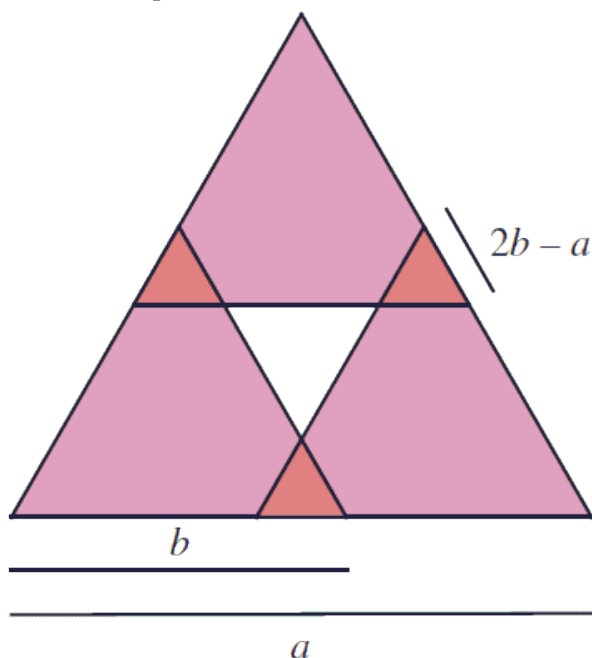
Corpus hypercubus (Salvador Dali 1954)

◦45◦ Le polynôme $X^4 + a.X^3 + b.X^2 + c.X + d$ a pour racines r_1 à r_4 . Combien de valeurs peut prendre $(r_1 - r_2) \cdot (r_1 - r_3) \cdot (r_1 - r_4) \cdot (r_2 - r_3) \cdot (r_2 - r_4) \cdot (r_3 - r_4)$ sous l'action des 4! permutations de la liste d'indices $[1, 2, 3, 4]$? Combien de valeurs peut prendre $r_1 + 2.r_2 + 3.r_3 + 4.r_4$ sous l'action des 4! permutations de la liste d'indices $[1, 2, 3, 4]$? Même question avec $r_1 + 2.r_2 + 3.r_3$.

◦46◦ On veut résoudre $64.X^3 + 96.X^2 + 36.X + 3 = 0$ d'inconnue réelle X , notée (E) . Trouvez les réels qui manquent

$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} X & = & Y + a \\ 64.Y^3 + c.Y + d & = & 0 \end{array} \right| \text{ puis } (E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} X & = & Y + a \\ Y & = & \alpha.T \\ 4.T^3 - 3.T + e & = & 0 \end{array} \right|$. Résolvez l'équation en T puis celle en X .

◦47◦ J'ai croisé la preuve suivante de l'irrationalité de $\sqrt{3}$; hélas, elle est en anglais. Help me.



Assuming $a^2 = 3b^2$ and that the sides of the triangles are as shown in the diagram, that of the triangle in the center equals $2a - 3b$ so that Carpets Theorem implies $(2a - 3b)^2 = 3(2b - a)^2$, implying the possibility of the infinite descent.

Ah, le théorème des tapis (you may use it or not, as you like), c'est "If two carpets of equal area overlap, then, the overlap aside, their remaining parts have equal areas".

Mettez tout ça en forme et en français. Bref, rédigez la preuve.

◦48◦ ♡ On définit sur $\mathbb{N}$ la relation $\mathcal{R}$ par $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \binom{a+b}{b}$ est impair. cette relation est elle symétrique, réflexive, anti-symétrique, transitive ? Qui sont les éléments en relation avec 0 ? Qui sont les éléments en relation avec 1 ?
 ‡ Quelle est la prochaine année n à venir vérifiant $n\mathcal{R}(n+1)$? (Python autorisé)

◦49◦ Calculez ces variations sur le binôme

$A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} . a^k$	$B = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} . a^n$
$C = \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} \binom{k}{i} . a^i$	$D = \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} \binom{n}{k} . a^i$

Attention aux variables de sommation, et surveillez les sommes doubles.

◦50◦ Un polynôme P de degré 6 a six racines r_1 à r_6 . On pose $D = r_1.r_2 + r_3.r_4 + r_5.r_6$. Combien de valeurs peut prendre D sous l'action des permutations σ de la liste $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$? C'est à dire, si on décide de poser $D_\sigma = r_{\sigma(1)}.r_{\sigma(2)} + r_{\sigma(3)}.r_{\sigma(4)} + r_{\sigma(5)}.r_{\sigma(6)}$, que est le cardinal de $\{D_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{S}_6\}$.
 Montrez que $\{\sigma \in \mathcal{S}_6 \mid D = D_\sigma\}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}_6, \circ)$. Quel est son cardinal ? Est il commutatif ?

◦51◦ On constate : $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$, $371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$, $370 = 3^3 + 7^0 + 0^3$. Écrivez un programme Python qui cherche les nombres à trois chiffres égaux à la somme des cubes de leurs chiffres.

◦52◦ Calculez $\int_a^b x^k . dx$ pour a et b strictement positifs et k réel, par le changement de variable $x = e^t$.

◦53◦ ♡ Retrouvez a et b sachant que la maximum de $x \mapsto a . \cos(x) + b . \sin(x)$ vaut 6, atteint en $\frac{\pi}{6}$.

◦54◦ ♡ On sait : $\frac{X^2 + a.X + b}{(X-1).(X-2).(X+3)} = \frac{2}{X-1} + \frac{1}{X-2} + \frac{\alpha}{X+\beta}$. Trouvez α et β . (décomposition en simples éléments ?)

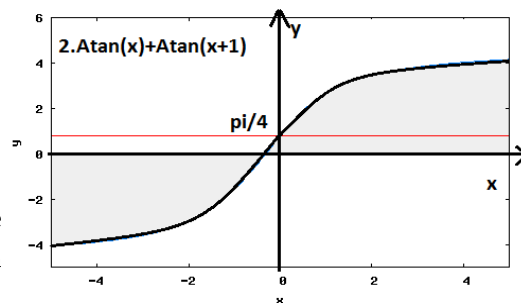
◦55◦

On demande de résoudre l'équation

$$2 \cdot \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{4}.$$

Un élève passe à la tangente dans l'équation

$2 \cdot \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{4}$ et trouve une équation de degré 3 dont il donne les trois racines. Résolvez son équation quand même, mais dites aussi pourquoi il a tort.



Extraits de « How to solve it »
de George Pólya (1887 - 1985)

Comprendre le problème

- En premier lieu, il faut comprendre le problème et son énoncé.
- Quelle est l'inconnue ?
- Quelles sont les données ?
- Quelle est la condition ?
- Est-il possible de satisfaire à la condition ?
- La condition est-elle suffisante pour déterminer l'inconnue.
Est-elle insuffisante ?
Redondante ?
Contradictoire ?
- Dessinez une figure.
- Introduisez la notation appropriée.
- Distinguez les diverses parties de la condition.
- Pouvez-vous les formuler ?

Concevoir un plan

- Avez-vous déjà rencontré ce problème ?
- Ou bien avez-vous rencontré le même problème sous une forme légèrement différente ?
- Connaissez-vous un problème qui s'y rattache ?
- Connaissez-vous un théorème qui puisse être utile ?
- Regardez bien l'inconnue et essayez de penser à un problème qui vous soit familier et qui ait la même inconnue ou une inconnue similaire.
- Voici un problème qui se rattache au vôtre et que vous avez déjà résolu.
- Pourriez-vous vous en servir ?

- Pourriez-vous vous servir de son résultat ?
- Pourriez-vous vous servir de sa méthode ?
- Pourriez-vous énoncer le problème différemment ?
- Reportez-vous aux définitions.
- Pourriez-vous imaginer un problème qui s'y rattache et qui soit plus accessible ?
Un problème plus général ?
Un problème plus particulier ?
Un problème analogue ?
- Pourriez-vous résoudre une partie du problème ?
Ne gardez qu'une partie de la condition, négligez l'autre partie ; dans quelle mesure l'inconnue est-elle alors déterminée, comment peut-elle varier ?
- Pourriez-vous tirer des données un élément utile ?
- Pourriez-vous penser à d'autres données qui pourraient vous permettre de déterminer l'inconnue ?
- Vous êtes-vous servi de toutes les données ?
- Vous êtes-vous servi de la condition toute entière ?
- Avez-vous tenu compte de toutes les notions essentielles que comportait le problème ?

Mettre le plan à exécution

- Il faut donc savoir faire preuve de patience, ne pas se décourager et si vraiment cela est nécessaire, changer de méthode.
- En mettant votre plan à exécution, vérifiez-en chaque détail l'un après l'autre.
- Pouvez-vous voir clairement si ce détail est correct ?
- Pouvez-vous démontrer qu'il est correct ?
- N'oubliez pas d'écrire clairement la réponse à la question posée !
- Mettez-la bien en évidence.
- Revenir sur sa solution
- Pouvez-vous vérifier le résultat ?
- Pouvez-vous vérifier le raisonnement ?
- Pouvez-vous obtenir le résultat différemment ?
- Pouvez-vous le voir d'un coup d'œil ?
- Pouvez-vous vous servir du résultat ou de la méthode pour quelque autre problème ?