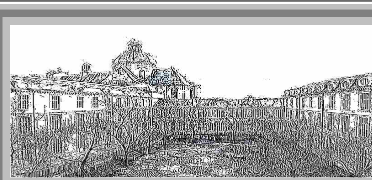


LYCEE CHARLEMAGNE 2023 2024

Mardi 3 octobre

M.P.S.I.2

IS03

♡ 0 ♡ Donnez une primitive de $\theta \longmapsto \dfrac{1}{\sin(\theta)}$ (avec preuve et intervalle de validité). (2 pt.)

♡ 1 ♡ Montrez pour tout quadruplet de réels strictement positifs $(a,\ b,\ c,\ d)$:
$\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a.b}$, $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{a.b.c.d}$ et $\dfrac{2.a.b}{a+b} \leqslant \sqrt{a.b}$. (3 pt.)

♢ 0 ♢ L'équation $z^3 + 9 + 18.i = (1+4.i).z^2 + (9-6.i).z$ d'inconnue complexe z admet une racine réelle. Trouvez la. (1 pt.) Trouvez ensuite les deux racines complexes qui manquent. (3 pt.)

♢ 1 ♢ Combien l'équation $x^x = 3^{18}$ a de solutions dans $\mathbb{R}^+$ (et si il y en a pouvez vous les trouver ?). Combien l'équation $x^{1/x} = \sqrt{2}$ a de solutions ? Et si il y en a pouvez vous les trouver ? (3 pt.)

♣ 0 ♣ Complétez la liste des opposés et des inverses (opérations modulo 17 dans tout cet exercice) (3 pt.)

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$-a$							11										
$1/a$	x				13	7			15								
a^2							2			13		2					

Justifiez : $15! = 1$ en écrivant les quinze facteurs dans un ordre judicieux. (2 pt.)

Résolvez le système $\left\{\begin{array}{ccccc} 2.x & + & 5.y & = & 7 \\ 3.x & + & 2.y & = & 3 \end{array}\right|$ d'inconnues x et y. (2 pt.)

Résolvez l'équation $x^2 + 12.x + 6 = 0$ d'inconnue x. (2 pt.)

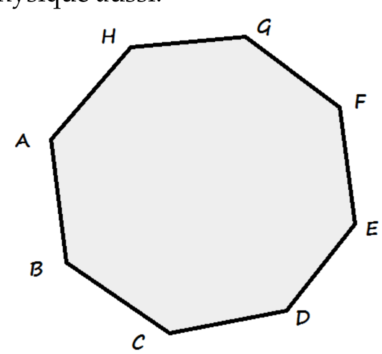
♢ 2 ♢ On se donne deux réels a et b vérifiant $0 < a \leqslant b$. On définit $f = x \longmapsto \dfrac{\ln(1+a.x)}{\ln(1+b.x)}$ sur $]0,\ +\infty[$.
Explicitez g dans la formule $f' = x \longmapsto \dfrac{g(x)}{(1+a.x).(1+b.x).(\ln(1+b.x))^2}$. Calculez $g(0)$ et montrez que g' est positive. (4 pt.) Déduisez $\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right) \times \ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) \leq (\ln(2))^2$. (2 pt.)

	Alice	Bintou	Clio	David	Élise	Fatah	Gwen
maths	2	2		2	10	20	14
physique	10	12	20	1		20	2

Dans cette classe à petit effectif, la moyenne est de 10 en maths et en physique. Retrouvez les notes Justifiez que la médiane en maths est à 10, en physique aussi.

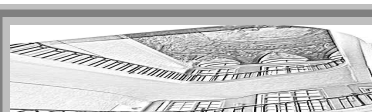
Rappel : médiane d'un échantillon de taille impaire : il y a autant d'éléments au dessus qu'en dessous.

Retrouvez les deux notes qui manquent. On attribue à chaque élève comme note sa moyenne $\dfrac{maths + physique}{2}$. Vérifiez que la moyenne de classe reste à 10, mais quelle est la médiane ? (2 pt.)



$(A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H)$ est un octogone orienté dans le sens positif dans le plan complexe. Calculez $\dfrac{z_F - z_B}{z_D - z_H}$. Calculez $\dfrac{z_D - z_E}{z_A - z_H}$. Calculez $\dfrac{z_D - z_C}{z_C - z_B}$. (3 pt.)

0, 17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, 136, 153, 170, 187, 204, 221, 238, 255, 272, 289, 306, 323



LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 3 octobre
M.P.S.I.2

2023 2024
IS03
CORRECTION

Moyennes. IS03

L'inégalité $\sqrt{a.b}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$ vient de $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$ qui donne en développant $a-2.\sqrt{a.b}+b\geqslant 0$ puis votre résultat.

On écrit le résultat précédent pour a et b, puis pour c et d puis pour $\sqrt{a.b}$ et $\sqrt{c.d}$

$\sqrt{a.b}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$ $\quad\sqrt{\sqrt{a.b}.\sqrt{c.d}}\leqslant\dfrac{\sqrt{a.b}+\sqrt{c.d}}{2}\leqslant\dfrac{\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{c+d}{2}}{2}$

$\sqrt{c.d}\leqslant\dfrac{c+d}{2}$ $\quad$ c'est $(a.b.c.d)^{1/4}\leqslant\dfrac{a+b+c+d}{4}\leqslant\dfrac{\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{c+d}{2}}{2}$

On pense aussi à appliquer le résultat initial au couple $\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{b}\right)$:

$$\frac{1}{\sqrt{a.b}}=\sqrt{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}}\leqslant\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{2}=\frac{a+b}{2.a.b}$$

Il n'y a plus qu'à passer à l'inverse sur ces quantités strictement positives.

On peut aussi à la main calculer

$$\sqrt{a.b}-\frac{2.a.b}{a+b}=\frac{(a+b).\sqrt{a.b}-2.(\sqrt{a.b})^2}{a+b}=\frac{\sqrt{a.b}}{a+b}.(a+b-2.\sqrt{a.b})$$

et d'autres chemins sont aussi possibles.

Primitive(s) du sinus. IS03

On propose $\theta\longmapsto\ln\left(\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$ et on vérifie en dérivant une composée. Le domaine de validité est $]0,\ \Pi[$ par exemple.

Troisième degré dans $\mathbb{C}$. IS03

Si on nous le dit $z^3+9+18.i=(1+4.i).z^2+(9-6.i).z$ avec z réel.
On identifie partie réelle et partie imaginaire :

$$z^3+9=z^2+6.z\ et\ 18=4.z^2-6.z$$

L'équation du second degré a $4.z^2-6.z-18=0$ a deux racines réelles : 3 et $-3/2$.
Mais ce serait idiot de mettre à la poubelle l'autre équation. Et $\dfrac{-3}{2}$ ne vérifie pas $\left(\dfrac{-3}{2}\right)^3+9=\left(\dfrac{-3}{2}\right)^2+6.\dfrac{-3}{2}$ tandis que 3 vérifie $3^3+9=3^2+6.3$.
Comme on impose de raisonner par équivalences, la seule solution est $z=3$.

Une fois qu'on a fait ça au brouillon, on propose et on vérifie !

$$3^3+9+18.i=(1+4.i).3^2+(9-6.i).3$$

On tient une racine, il suffit ensuite de factoriser.
Méthode Viète : une racine de $z^3-(1+4.i).z^2-(9-6.i).z+(9+18.i)=0$ vaut 3, on note les deux autres b et c

et on sait $\boxed{\begin{array}{c} 3+b+c=(1+4.i) \\ \hline 3.b+3.c+b.c=-(9-6.i) \\ \hline 3.b.c=(9+18.i) \end{array}}$

On trouve $b+c$ et $b.c$ et on reconstruit l'équation du second degré.

On peut aussi diviser « à la main »

$$z^3-(1+4.i).z^2+(9-6.i).z+(9+18.i)=(z-3).(z^2+(2-4.i).z-(3+6.i))$$

(on pose a priori trois coefficient, on développe, on identifie)
On calcule le discriminant de l'équation du second degré

$$\Delta=(2-4.i)^2+4.(3+6.i)=4-16-16.i+12+24.i=8.i=(2+2.i)^2$$

L'extraction de la racine s'est faite par la méthode usuelle

$\Re e$	a^2-b^2	$=0$
$\|\Delta\|$	a^2+b^2	$=8$
$\Im m$	$2.a.b$	$=8$

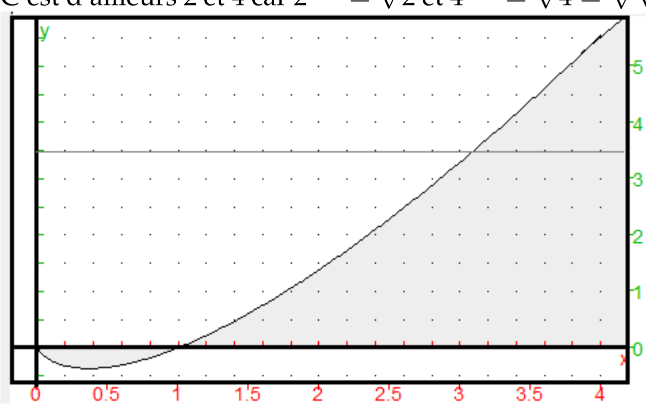
On trouve les deux autres racines $\boxed{S=\{3,\ 3.i,\ -2+i\}}$ et on vérifie si on n'a que ça à faire.

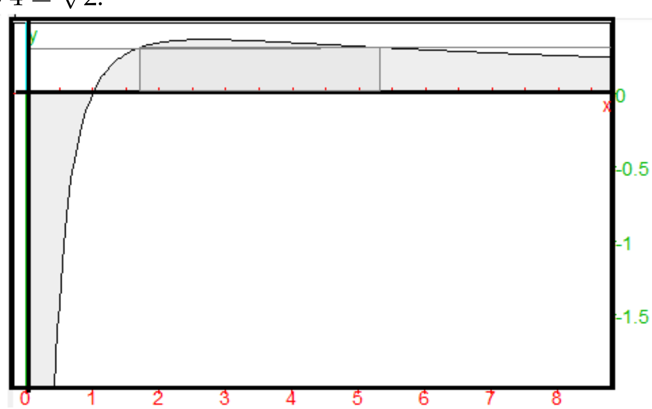
x puissance x. IS03

Pour résoudre $x^x=3^{18}$ on passe au logarithme (équivalence car application injective).
On est ramené à $x.\ln(x)=18.\ln(3)$.
Or, $x\longmapsto x.\ln(x)$ a pour dérivée $x\longmapsto 1+\ln(x)$ qui s'annule et change de signe en $1/e$.
Elle est donc décroissante puis croissante.
Limite en 0 : 0, valeur en $1/e$: $-1/e$. Valeur en 1 : 0. Comme $18.\ln(3)$ est plus grand que 0, il n'y a qu'une solution.

Avec de l'intuition : $x.\ln(x)=9.2.\ln(3)\Leftrightarrow x.\ln(x)=9.\ln(3^2)$
On devine la solution et c'est $x=3$.

L'équation $x^{1/x}=\sqrt{2}$ se ramène à $\dfrac{\ln(x)}{2}=\dfrac{\ln(2)}{2}$. Très tentant d'y voir une solution $x=2$.
Mais l'application $x\longmapsto\dfrac{\ln(x)}{x}$ a pour maximum $\dfrac{1}{e}$ atteint en e.
Et comme elle redescend après et tend vers 0 en $+\infty$, on trouve deux solutions.
C'est d'ailleurs 2 et 4 car $2^{1/2}=\sqrt{2}$ et $4^{1/4}=\sqrt[4]{4}=\sqrt{\sqrt{4}}=\sqrt{2}$.





Travail modulo 17. IS03

On part de ce qu'on nous donne, et on complète vite la liste des opposés. l'opposé de n c'est $17-n$.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$-a$	0	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$1/a$	x				13	7			15								
a^2							2			13		2					

Si l'inverse de 8 est bien 15 ($8\times 15=120=119+1=\times 17+1$) alors l'inverse de 15 est 8.
Si l'inverse de 5 est 7, l'inverse de 7 est 5 ($7\times 5=35=34+1$).
1 est son propre inverse de même que 16 (puisque 16 c'est -1).
Mais si l'inverse de 5 est 7, alors l'inverse de -5 c'est -7 et donc $12^{-1}=10$ (de toutes façons, $10\times 12=119+1$ c'est clair).
On teste ensuite entre eux ceux qui restent seuls, comme 6 et 3 (évident !) ou 11 et 14 (à vérifier) :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$-a$	0	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$1/a$	x	1	9	6	13	7	3	5	15	2	12	14	10	4	11	8	16
a^2							2			13		2					

Ensuite, quelques carrés se calculent à la main comme $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$ et même 5^2.
Ensuite 6 et -6 ont le même carré. Et ainsi de suite.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$-a$	0	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$1/a$	x	1	9	6	13	7	3	5	15	2	12	14	10	4	11	8	16
a^2	0	1	4	9	16	8	2	15	13	13	15	2	8	16	9	4	1

L'entier 15! est le produit $1\times 2\times 3\times 4\ldots\times 15$. Si on fait le calcul dans cet ordre, c'est immonde.
Mais si on le prend dans le bon sens, on regroupe les termes deux à deux : 2 avec 9 puisqu'ils sont inverses l'un de l'autre, 3 avec 6 et ainsi de suite.

$$15!=1\times(2\times 9)\times(3\times 6)\times(4\times 13)\times(5\times 7)\times(8\times 15)\times(10\times 12)\times(11\times 14)=1\times 1\times 1\times 1\times 1\times 1\times 1=1$$

C'est ce qu'on appelle pour un entier p premier le théorème de Wilson : $(p-2)!=1$ et $(p-1)!+1=0$.

Pour l'équation $\left\{\begin{array}{ccccc} 2.x & + & 5.y & = & 7 \\ 3.x & + & 2.y & = & 3 \end{array}\right|$, je propose une mise sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matrice est inversible, son déterminant vaut $4-15$ ce qui fait -11 et même 6. L'inverse du déterminant est 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=3.\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 14 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

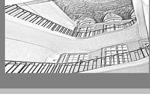
On a la matrice $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ et l'unique solution $\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix}$. On veut un ensemble de couples : $\boxed{S=\{(14,\ 6)\}}$

Pour l'équation du second degré $x^2+12.x+6=0$, on peut mettre sous forme canonique $(x+6)^2-6.6+6=0$.

$$(x+6)^2=36-6=30=13$$

Or, 13 est un carré parfait : celui de 8. L'équation $(x+6)^2=8$ donne $x+6=8$ (donc $x=2$) ou $x+6=-8$ (donc $x=-14=3$).
La somme et le produit des racines sont cohérents.

Sinon, le discriminant Δ vaut $12^2-4.6$ ce qui fait 120 et se réduit à 1. On sort $\delta=1$ (ou $\delta=-1$) et on a les deux mêmes racines.



Des logarithmes. IS03

L'application $f=x\longmapsto\dfrac{\ln(1+a.x)}{\ln(1+b.x)}$ est définie sur $[0,\ +\infty[$ et se dérive comme un quotient

$$f'=\left(x\longmapsto\frac{\frac{a}{1+a.x}.\ln(1+bx)-\ln(1+a.x).\frac{b}{1+b.x}}{(\ln(1+b.x))^2}\right)=\left(x\longmapsto\frac{a.(1+b.x).\ln(1+bx)-b.(1+a.x).\ln(1+a.x)}{(1+a.x).(1+b.x).\ln(1+b.x))^2}\right)$$

On propose $\boxed{g=x\longmapsto a.(1+b.x).\ln(1+bx)-b.(1+a.x).\ln(1+a.x)}$ et on constate $g(0)=0$.
On re-dérive juste ce numérateur :

$$g'=x\longmapsto a.\Big(b.\ln(1+b.x)+(1+bx).\frac{b}{1+b.x}\Big)-b.\Big(a.\ln(1+a.x)+(1+a.x).\frac{a}{1+a.x}\Big)$$

On simplifie ce qui est simplifiable : $\boxed{g' = x \longmapsto a.b.\Big(\ln(1+b.x) - \ln(1+a.x)\Big)}$

Comme b est plus grand que a (et x positif), on a $1+b.x \geqslant 1+a.x$ et par croissance du logarithme, g' est positive.

---

g est donc croissante. Et $g(0)$ est nul. g est positive que $[0,\ +\infty[$.
Comme g est le numérateur de f' (avec dénominateur positif), f' est positive.
Par théorème, f est croissante sur $[0,\ +\infty[$.

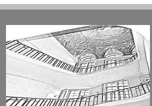
Comment relier la croissance de f à la formule $\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right) \times \ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) \leq (\ln(2))^2$?

La présence de $\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right) \times \ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) \leq (\ln(2))^2$ et $\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right) \times \ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) \leq (\ln(2))^2$ nous fait penser à $f(1/b)$ et $f(1/a)$

Justement $f\left(\dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)}{\ln(1+1)}$ et $f\left(\dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{\ln(1+1)}{\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right)}$. La croissance de f et la relation $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$ donnent directement le résultat

$$\frac{\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)}{\ln(2)} \leqslant \frac{\ln(2)}{\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right)}$$

que je me vois mal obtenir autrement (mais comment l'obtenir sans penser à f ?).



Notes et médiane. IS03

On note m et p les deux notes qui manquent. On a les équations

$$\frac{2+2+m+2+10+20+14}{7} = 10 \ et\ \frac{10+12+20+1+p+20+2}{7} = 10$$

	Alice	Bintou	Clio	David	Élise	Fatah	Gwen
maths	2	2	**20**	2	10	20	14
physique	10	12	20	1	**5**	20	2

On trouve $m = 20$ et $p = 5$.

L'élève astucieux travaille sur l'écart à la moyenne

	Alice	Bintou	Clio	David	Élise	Fatah	Gwen
maths	-8	-8	?	-8	0	+10	+4
-24 face à 14, il manque 10							
physique	0	+2	+10	-9	?	+10	-8
-17 à 22 : Elise fait perdre 5 point à la classe							

On sort la liste trié en maths puis en physique pour avoir la médiane juste au milieu :

maths	2	2	2	**10**	14	20	20
physique	1	2	5	**10**	12	20	20

On calcule les notes moyennes

	Alice	Bintou	Clio	David	Élise	Fatah	Gwen
maths	2	2	20	2	10	20	14
physique	10	12	20	1	5	20	2
moyenne	**6**	**7**	**20**	**1.5**	**7.5**	**20**	**8**

La moyenne des moyennes est

$$\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\frac{m_k+p_k}{2} = \frac{1}{2.n}.\sum_{k=0}^{n-1}(m_k+p_k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}m_k + \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}p_k\right) = \frac{1}{2}.(10+10) = 10$$

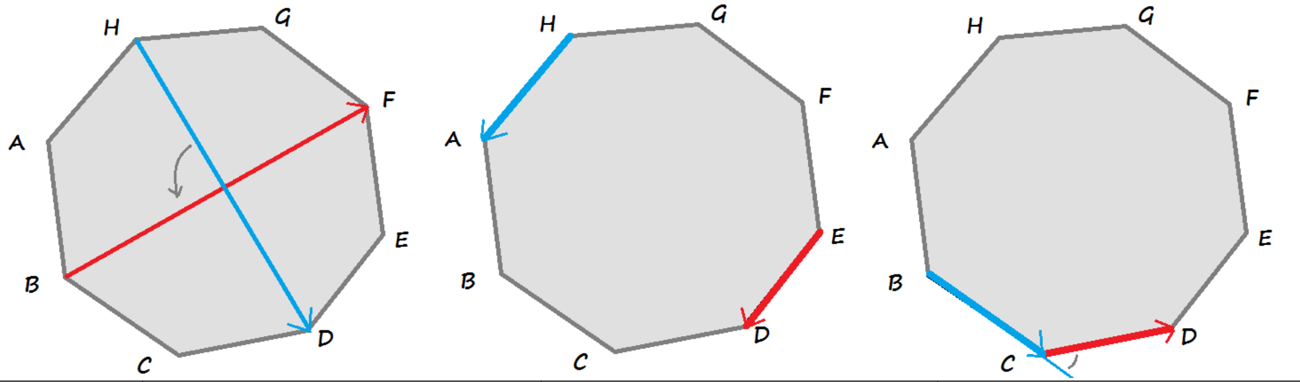
Mais si on trie la liste :

moyenne	**1.5**	**6**	**7**	**7.5**	**8**	**20**	**20**

la médiane est à $7,5$.
Alors que la médiane de maths et la médiane de physique étaient satisfaisantes.

Inspiré de « How to lie with statistics ».

Par construction de l'octogone, les diagonales ont toutes la même longueur. Les côtés aussi.
Si on calcule le module des complexes demandés, on trouve à chaque fois 1.
Il reste à trouver ensuite les angles, orientés, ce qui n'est pas toujours évident.



	$\dfrac{z_F - z_B}{z_D - z_H}$	$\dfrac{z_D - z_E}{z_A - z_H}$	$\dfrac{z_D - z_C}{z_C - z_B}$
module	$\dfrac{\lvert z_F - z_B\rvert}{\lvert z_D - z_H\rvert} = \dfrac{BF}{HD} = 1$	$\dfrac{\lvert z_D - z_E\rvert}{\lvert z_A - z_H\rvert} = \dfrac{ED}{HA} = 1$	$\dfrac{\lvert z_D - z_C\rvert}{\lvert z_C - z_B\rvert} = \dfrac{CD}{BC} = 1$
angle	$(\overrightarrow{HD},\ \overrightarrow{BF}) = \pi/2$	$(\overrightarrow{HA},\ \overrightarrow{ED}) = 0$	$(\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{BC}) = -\pi/4$
complexe	i	1	$e^{-i.\pi/4} = \frac{\sqrt{2}-i.\sqrt{2}}{2}$