Pourquoi décomposer une fraction $\dfrac{A(X)}{B(X)}$ en éléments simples ?

$\boxed{\mathbb{A}}$ Pour l'intégrer facilement.
$\boxed{\mathbb{B}}$ Pour la dériver facilement.
$\boxed{\mathbb{C}}$ Pour connaître son allure locale en un point où le dénominateur s'annule.
$\boxed{\mathbb{D}}$ Pour obtenir son développement limité et appliquer à des exercices de dénombrement, de suites récurrentes linéaires...
$\boxed{\mathbb{E}}$ Pour calculer par télescopage des séries.

Quelles questions se poser ?

$\boxed{\mathbb{A}}$ Quel est le degré du dénominateur $B(X)$?
. | Pour savoir combien de coefficients il faudra calculer dans la partie polaire.

$\boxed{\mathbb{B}}$ Le numérateur est il d'un degré supérieur ou égal à celui du dénominateur ?
. | Pour savoir si il y aura une « partie entière » (polynomiale).

$\boxed{\mathbb{C}}$ Doit on décomposer sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$?
. | Sur $\mathbb{C}$ il n'y a que des éléments de première espèce, sur $\mathbb{R}$ il y a des éléments simples de deuxième espèce en $\dfrac{a.X+b}{(X^2-S.X+P)^k}$ avec $S^2-4.P<0$.

$\boxed{\zeta}$ Sur autre chose que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$...
. | ..., ce n'est plus au programme des Prépas.

$\boxed{\mathbb{D}}$ Quelle est la multiplicité des pôles.

Que faut il faire en premier ?

Factoriser le dénominateur sur $\mathbb{R}$ et/ou sur $\mathbb{C}$, et compter la multiplicité des racines du dénominateur.
Si on est sur $\mathbb{C}$ ou si toutes les racines sont réelles :
$\dfrac{A(X)}{B(X)} = \dfrac{A(X)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)^{r_k}}$ avec $\deg(A)<\deg(B)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k$ les r_k sont les multiplicités des racines

cas des pôles réels

$$\frac{A(X)}{(X-a).autres} = \ldots + \frac{\alpha_1}{X-a}$$

$$\frac{A(X)}{(X-a)^2.autres} = \ldots + \frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{\alpha_2}{(X-a)^2}$$

$$\frac{A(X)}{(X-a)^3.autres} = \ldots + \frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{\alpha_2}{(X-a)^2} + \frac{\alpha_3}{(X-a)^3}$$

$$\frac{A(X)}{(X-a)^r.autres} = \ldots + \frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{\alpha_2}{(X-a)^2} + \frac{\alpha_3}{(X-a)^3} + \ldots + \frac{\alpha_r}{(X-a)^r}$$

Si on est sur $\mathbb{R}$ et qu'il y a des racines non réelles [1] (conjuguées), en les regroupant, on a des termes $(X^2-S.X+P)$ avec $S^2-4.P<0$ [2]

1. erreur classique de débutant : dire « les racines sont complexes » au lieu de « non réelles » ; rappelons que 1, 5, $\sqrt{2}$ sont des complexes...
2. les classiques sont X^2+1 ou X^2-X+1

cas des pôles non réels

$$\frac{A(X)}{(X^2-S.X+P).autres} = \dots \qquad + \frac{\beta_1.X+\gamma_1}{X^2-S.X+P}$$

$$\frac{A(X)}{(X^2-S.X+P)^2.autres} = \dots \qquad + \frac{\beta_1.X+\gamma_1}{X^2-S.X+P} \qquad + \frac{\beta_2.X+\gamma_2}{(X^2-S.X+P)^2}$$

$$\frac{A(X)}{(X^2-S.X+P)^r.autres} = \dots \qquad + \frac{\beta_1.X+\gamma_1}{X^2-S.X+P} \qquad + \frac{\beta_2.X+\gamma_2}{(X^2-S.X+P)^2} \qquad \dots + \frac{\beta_r.X+\gamma_r}{(X^2-S.X+P)^r}$$

Un terme tel que $\dfrac{\beta_1.X+\gamma_1}{X^2-S.X+P}$ vient de la fusion de $\dfrac{\mu}{X-u-i.v} + \dfrac{\overline{\mu}}{X-u+i.v}$ avec $u+i.v = \dfrac{S+i.\sqrt{4.P-S^2}}{2}$.
Un terme tel que $\dfrac{\beta_1.X+\gamma_1}{X^2-S.X+P} + \dfrac{\beta_2.X+\gamma_2}{(X^2-S.X+P)^2}$ vient de la fusion de
$\dfrac{\mu_1}{X-u-i.v} + \dfrac{\overline{\mu_1}}{X-u+i.v} + \dfrac{\mu_2}{(X-u-i.v)^2} + \dfrac{\overline{\mu_2}}{(X-u+i.v)^2}$.
Et ainsi de suite.

Pourquoi une partie polynômiale ?

Si vous réduisez $\dfrac{\alpha}{X-1} + \dfrac{\beta}{X-3} + \dfrac{\gamma}{X-4}$ au dénominateur commun vous ne pourrez jamais avoir par exemple $\dfrac{X^4+3.X^2+X+1}{(X-1).(X-3).(X-4)}$. Au mieux, votre numérateur sera de degré 2.

De toutes façons, vers $+\infty$ $\dfrac{\alpha}{X-1} + \dfrac{\beta}{X-3} + \dfrac{\gamma}{X+4}$ tend vers 0 tandis que $\dfrac{X^4+3.X^2+X+1}{(X-1).(X-3).(X-4)}$ tend vers l'infini (équivalent à X).

En revanche, si vous réduisez $\lambda.X+\mu+\dfrac{\alpha}{X-1} + \dfrac{\beta}{X-3} + \dfrac{\gamma}{X+4}$, vous pouvez obtenir un numérateur de degré 4, et le comportement à l'infini est cohérent.

Mais comment obtenir ces termes ?
On effectue la division euclidienne du numérateur par le dénominateur : $A(X) = B(X).Q(X) + R(X)$.
On divise ensuite : $\dfrac{A(X)}{B(X)} = \dfrac{B(X).Q(X)}{B(X)} + \dfrac{R(X)}{B(X)}$ et cette fois, $\dfrac{R(X)}{B(X)}$ va se décomposer en $\dfrac{\alpha}{X-1} + \dfrac{\beta}{X-2} + \dfrac{\gamma}{X-4}$ ou autres.

Exemple :

$$\begin{array}{rrrrr||rrrr}
X^4 & & +3.X^2 & +X & +1 & X^3 & -8.X & +19.X & -12 \\ \hline
-(X^4 & -8.X^2 & +19.X & -12.X) & & X & +8 & & \\
 & 8.X^2 & -16.X & +13.X & +1 & & & & \\
 & -(8.X^3 & -64.X^2 & +152.X & -96) & & & & \\ \hline
 & & 48.X^2 & -139.X & +97 & & & &
\end{array}$$

$$\frac{X^4+3.X^2+X+1}{(X-1).(X-3).(X-4)} = X+8+\frac{48.X^2-139.X+97}{(X-1).(X-3).(X-4)} = X+8+\frac{\alpha}{(X-1)}+\frac{\beta}{(X-3)}+\frac{\gamma}{(X-4)}$$

Il ne reste qu'à calculer α, β et γ par la méthode des pôles ici, puisque les pôles sont simples.

Question	*Pour calculer α par la méthode des pôles, vous allez multiplier par $X-1$ et calculer la limite en 1.* *Mais la limite en 1 de qui ? $X^4+3.X^2+X+1$ ou $48.X^2-139.X+97$.* *Et est ce que cela change quelquechose ? Pourquoi ?*

Que faut il faire à la fin ?

Vérifier qu'on a bien déterminé $Max(deg(P)+1,\ deg(Q))$ coefficients.
Calculer en un point autre qu'un pôle pour vérifier la cohérence.
Tracer sur la calculatrice le graphe de la fonction et du développement trouvé pour vérifier qu'ils se superposent.

Quelles astuces sont disponibles ?

Les considérations de parité.
Les équivalents en $+\infty$.
La division suivant les puissances croissantes.

Des exemples.

$$\frac{4.X-7}{X^2-3.X+2} = \frac{3}{X-1}+\frac{1}{X-2}$$

$$\frac{2.X^2-2.X-3}{X^2-3.X+2} = 2+\frac{3}{X-1}+\frac{1}{X-2}$$

$$\frac{X^3-X^2-3}{X^2-3.X+2} = X+2+\frac{3}{X-1}+\frac{1}{X-2}$$

$$\frac{5.X^2+2.X-19}{X^3-7.X+6} = \frac{3}{X-1}+\frac{1}{X-2}+\frac{1}{X+3}$$

$$\frac{4.X^3-2.X^2-X-3}{(X^2-3.X+2)^2} = \frac{3}{X-1}+\frac{1}{X-2}-\frac{2}{(X-1)^2}+\frac{19}{(X-2)^2}$$

$$\frac{-X^4+10.X^3-15.X^2+11.X-7}{(X^2-3.X+2)^2} = -1+\frac{3}{X-1}+\frac{1}{X-2}-\frac{2}{(X-1)^2}+\frac{19}{(X-2)^2}$$

$$\frac{5.X^3-7.X^2-3.X-1}{X^4-3.X^3+3.X^2-3.X+2} = \frac{3}{X-1}+\frac{1}{X-2}+\frac{X+3}{X^2+1}$$

et

$$\frac{3}{X-1}+\frac{1}{X-2}+\frac{1+3.i}{2.(X-i)}+\frac{1-3.i}{2.(X+i)}$$

$$\frac{X^4-X^3+4.X+5}{X^3+1} = X-1+\frac{1}{X+1}+\frac{-X+5}{X^2-X+1}$$

$$\frac{9.X^2+18.X-27}{(X^3+1)^2} = \frac{-8}{X+1}+-\frac{4}{(X+1)^2}+\frac{8.X-12}{X^2-X+1}+\frac{12.X-3}{(X^2-X+1)^2}$$

$$\frac{100.(X^2-X+4)}{X^2.(X+2).(X^2+1)^2.(X^2-2.X+2)} = \frac{1}{X+1}+\frac{25}{X}+\frac{100}{X^2}+\frac{6.X-14}{X^2-2.X+2}+\frac{-32.X-96}{X^2+1}+\frac{-20.X-60}{(X^2+1)^2}$$

sachant $X^2-3.X+2=(X-1).(X-2)$,
$X^3-7.X+6=(X-1).(X-2).(X+3)$,
$X^4-3.X^3+3.X^2-3.X+2=(X-1).(X-2).(X^2+1)$
$X^3+1=(X+1).(X^2-X+1)$

Et par exemple, pour $\dfrac{100.(X^2-X+4)}{X^2.(X+2).(X^2+1)^2.(X^2-2.X+2)}$, vous citerez :
degré du numérateur plus petit que celui du dénominateur : pas de partie polynômiale

		première espèce			
0	double	$\frac{\alpha_0}{X}$	$\frac{\alpha_1}{X^2}$		
-2	simple	$\frac{\beta}{X+2}$			
		deuxième espèce sur $\mathbb{R}$		sur $\mathbb{C}$	
$1+i$ et$1-i$	simples	$\frac{\lambda_0.X+\mu_0}{X^2-2.X+2}$		$\frac{\gamma}{X-1-i}$	$\frac{\overline{\gamma}}{X-1+i}$
i et $-i$	doubles	$\frac{\lambda_1.X+\mu_1}{X^2+1}$	$\frac{\lambda_2.X+\mu_2}{(X^2+1)^2}$	$\frac{\delta}{X-i}$ $\frac{\varepsilon}{(X-i)^2}$	$\frac{\overline{\delta}}{X+i}$ $\frac{\overline{\varepsilon}}{(X+i)^2}$

Remarque — *L'envie pourrait vous prendre de fusionner en une seul terme les deux éléments simples de seconde espèce d'ordres 1 et 2* $\dfrac{-32.X-96}{X^2+1}+\dfrac{-20.X-60}{(X^2+1)^2}$ *(ce terme donnerait* $\dfrac{-32.X^3-96.X^2-52.X-156}{X^4+2.X^2+1}$ *et certains étaient prêts à trouver ça cohérent).*
Mais ce ne seraient pas des éléments simples, et ils ne seraient pas aussi faciles à dériver, intégrer.