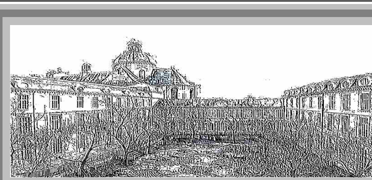
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 9 octobre
M.P.S.I.2

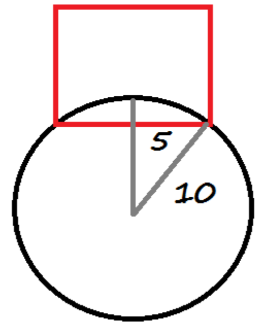


2023 2024

TD05

∘0∘

♡ Sucri peut être assimilé à une sphère de rayon 10 centimètres. Je lui ai acheté un chapeau rond (cylindrique, mais j'ai du mal à imaginer la chanson « ils ont des chapeaux cylindriques, vive la Bretagne... ») de diamètre 10 centimètres. Quelle hauteur du crane de Sucri disparaitra sous le chapeau ?



On fait une coupe (ouille).
On a un triangle rectangle d'hypoténuse 10, de petit côté 5.
Son grand côté vaut $5.\sqrt{3}$ (Pythagore).
La hauteur qui reste sous le chapeau vaut $10-5.\sqrt{3}$.
Application numérique : $1,34$ centièmtre à 10^{-2} près.

∘1∘

♡ j est le complexe $e^{2.i.\pi/3}$. Calculez j^{2019} et $(1+j)^{2019}$ et $(1-j)^{2019}$.

Calculez	$A=\sum_{k=0}^{2019} j^k$	$B=\sum_{k=0}^{2019}\binom{2019}{k}.j^k$	$C=\sum_{k=0}^{2019}\binom{2019}{p}.j^k$
	$D=\sum_{p=0}^{2019}\binom{2019}{p}.j^k$	$E=\sum_{k=0}^{2019}\binom{2019}{p}.j^p$	$F=\sum_{\substack{0\leq k\leq 2019\\0\leq p\leq 2019}}\binom{2019}{p}.j^k$

$j^{2019}=j^{673.3}=1$
$j^{2019}=1$, $(1+j)^{2019}=(e^{i.\pi/3})^{2019}=-1$
$(1-j)=\sqrt{3}.e^{-i.\pi/6}$ on élève à la puissance 2019 : $-3^{2019/2}$

$A=\sum_{k=0}^{2019} j^k=\dfrac{1-j^{2020}}{1-j}$	1	série géométrique ou groupement
$B=\sum_{k=0}^{2019}\binom{2019}{k}.j^k=(1+j)^{2019}$	$(1+j)^{2019}$	binôme de Newton
$C=\sum_{k=0}^{2019}\binom{2019}{p}.j^k$	$\binom{2019}{p}.j^k$	série géométrique, p donné
$D=\sum_{p=0}^{2019}\binom{2019}{p}.j^k=j^k.\sum_{p=0}^{2019}\binom{2019}{p}$	$2^{2019}.j^k$	binôme de Newton, k donné
$E=\sum_{k=0}^{2019}\binom{2019}{p}.j^p=\binom{2019}{p}.j^p.\sum_{k=0}^{2019}1$	$2020.\binom{2019}{p}.j^p$	compteur, p fixé
$F=\sum_{\substack{0\leq k\leq 2019\\0\leq p\leq 2019}}\binom{2019}{p}.j^k=\Big(\sum_{0\leq p\leq 2019}\binom{2019}{p}\Big).\Big(\sum_{0\leq k\leq 2019}j^k\Big)$	$2^{2019}.$	somme double

A est une série géométrique, mais on sait aussi que c'est une somme où les termes s'en vont par trois : $A=1$.

B est la formule du binôme : $B=(1+j)^{2019}$ déjà calculé.

Dans C, p est fixé et le binomial sort : $C=\binom{2019}{p}.A=\binom{2019}{p}$.

Dans D, c'est k qui est fixé et on a la somme des binomiaux : $D=j^k.\Big(\sum_{p=0}^{2019}\binom{2019}{p}\Big)=2^{2019}.j^k$.

Dans E, k est un compteur pour 2020 termes tous égaux à $\binom{2019}{p}.j^p$ et donc $E = 2020.\binom{2019}{p}.j^p$.

F est le produit de deux sommes déjà calculées : $F = \left(\sum_{0\leq p\leq 2019}\binom{2019}{p}\right).\left(\sum_{0\leq k\leq 2019} j^k\right) = 2^{2019}.1$

◦2◦

♣ ALI et BEN sont jumeaux *(indiscernables, c'est le cas de mes deux boulangers Place des Fêtes)*. L'un ment tout le temps. L'autre est toujours sincère.
Lequel ment ? On ne sait pas... Alors, il faut leur poser des questions. En face de vous, un des deux frères. Lequel ? Ali, Ben ? Le menteur, le sincère ?
a - Quelle sera sa réponse à la question "***Es tu menteur ?***"
b - Vous lui demandez "***Es tu Ali ?***". Que déduisez vous si il répond "***Oui***" ?
c - Vous lui demandez "***Ali ment il ?***". Que déduisez vous si il répond "***Oui***" ?
d - Quelle question pouvez vous poser pour qu'il vous réponde assurément "***Oui***".
e - Que pensez vous de la question "***Ton frère s'appelle-t-il Ali ?***".
f - Que pensez vous s'il vous dit "***Mon frère dit qu'il s'appelle Ben***".

a - Menteur ou sincère, nul ne dira « je suis menteur ». Il dira toujours « non »

b - On ne saura pas si c'est Ali. On saura juste que Ali est sincère. mais celui en face de nous peut être Ali le sincère ou Ben le menteur.

c - Celui qui est en face de nous est Ben (menteur ou sincère).

d - Demandez lui si il est sincère.

e - Ton frère s'appelle Ali ?

	Ali	Ben	interlocuteur
sincère	Non	Oui	
menteur	Oui	Non	
statut			

On ne sait pas qui est en face de nous, ni si il ment. Mais on sait suivant sa réponse qui est le menteur et qui est le sincère.

f - Mon frère dit s'appeler Ben. Le frère énonce une phrase. Puis votre interlocuteur la retransmet. Comme un et un seul ment, la phrase est fausse. le frère ne s'appelle pas Ben. C'est donc que le frèere est Ali. Et votre interlocuteur Ben. Mais qui ment ? Qui est sincère ?

◦3◦

Vrai ou faux :

a	$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(\theta)\in\mathbb{Q}\Rightarrow\cos(2.\theta)\in\mathbb{Q}$
b	$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(\theta)\in\mathbb{Q}\Rightarrow\cos(\theta/2)\in\mathbb{Q}$
c	$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(\theta)\in\mathbb{Z}\Rightarrow\sin(\theta)\in\mathbb{Z}$
d	$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(\theta)\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sin(\theta)\in\mathbb{Q}$
e	$(\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(\theta)\in\mathbb{Q})\Rightarrow(\forall\theta\in\mathbb{R},\ \sin(\theta)\in\mathbb{Q})$
f	$\forall\theta\in]-\pi/2,\pi/2[,\ \tan(\theta)\in\mathbb{Q}\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ \tan(n.\theta)\in\mathbb{Q}$

a vrai, utiliser $\cos(2.\theta) = 2.\cos^2(\theta) - 1$ et les stabilités de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

b faux : donner un contre-exemple tel que $\pi/2$.

c vrai : passer par $(\cos(\theta)\in\mathbb{Z}) \Rightarrow (\cos(\theta)\in\{-1,0,1\}) \Rightarrow (|\sin(\theta)|\in\{0,\ 1\})$.

d faux : contre-exemple avec $\pi/3$.

e vrai : du type Faux implique ce qu'on veut.

f vrai : on se donne θ, on suppose que $\tan(\theta)$ est rationnelle, et on montre par récurrence sur n que chaque $\tan(n.\theta)$ l'est aussi, en utilisant $\tan((n+1).\theta) = \dfrac{\tan(\theta)+\tan(n.\theta)}{1-\tan(\theta).\tan(n.\theta)}$.
Mais il reste un problème d'existence. Si on part de $\tan(\theta) = 1$ (rationnel), on arrive à $\tan(2.\theta)$ n'existe même pas...

◦4◦

♡ Sachant $\tan(\theta) = 1/2$, calculez $\tan(2.\theta)$, $\tan(4.\theta)$, $\tan(8.\theta)$, $\tan(16.\theta)$ et enfin $\tan(20.\theta)$.
♣ En combien d'étapes pensez vous accéder à $\tan(2021.\theta)$?

En utilisant la formule $\tan(2.x) = \dfrac{2.\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$ autant de fois qu'il faut, on trouve

$\tan(\theta)$	$\tan(2.\theta)$	$\tan(4.\theta)$	$\tan(8.\theta)$	$\tan(16.\theta)$	$\tan(20.\theta)$
$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{4}{3}$	$\dfrac{-24}{7}$	$\dfrac{336}{527}$	$\dfrac{354144}{164833}$	$\dfrac{-1476984}{9653287}$

Pour $\tan(20.\theta)$ on passe par $\tan(4.\theta + 16.\theta)$.

Pour $\tan(2021.\theta)$, on peut monter pas à pas avec $\tan((n+1).\theta) = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \tan(n.\theta)}{1 - \dfrac{\tan(n.\theta)}{2}}$

$\tan(\theta)$	$\tan(2.\theta)$	$\tan(3.\theta)$	$\tan(4.\theta)$	$\tan(5.\theta)$	$\ldots$	$\tan(2020.\theta)$	$\tan(2021.\theta)$

C'est long.

En utilisant $\tan(2^{n+1}.\theta) = \dfrac{2.\tan(2^n.\theta)}{1-\tan^2(2^n.\theta)}$, on trouve les valeurs de

$\tan(\theta)$	$\tan(2.\theta)$	$\tan(4.\theta)$	$\tan(8.\theta)$	$\tan(16.\theta)$	$\ldots$	$\tan(512.\theta)$	$\tan(1024.\theta)$

Il suffit ensuite d'applier la formule $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}$ pour obtenir

avec	$\tan(36.\theta)$	et	$\tan(\theta)$	on a	$\tan(37.\theta)$
avec	$\tan(64.\theta)$	et	$\tan(37.\theta)$	on a	$\tan(101.\theta)$
avec	$\tan(128.\theta)$	et	$\tan(101.\theta)$	on a	$\tan(229.\theta)$
avec	$\tan(256.\theta)$	et	$\tan(229.\theta)$	on a	$\tan(485.\theta)$
avec	$\tan(512.\theta)$	et	$\tan(485.\theta)$	on a	$\tan(997.\theta)$
avec	$\tan(1024.\theta)$	et	$\tan(997.\theta)$	on a	$\tan(2021.\theta)$

Aurez vous un chemin plus rapide ?

∘5∘

♡ Exprimez $\tan(7.\theta)$ comme polynôme en $\tan(\theta)$ *(indication développer* $(\cos + i.\sin)^7$*, identifier, diviser, et simplifier haut et bas pour avoir des tangentes).*
Déduisez la factorisation de $X^3 - 21.X^2 + 35.X - 7$.

On développe : $e^{7.i.\theta} = (e^{i.\theta})^7 = (c+i.s)^7 = c^7 + 7.c^6.i.s - 21.c^5.s^2 - 35.c^4.i.s^3 + 35.c^3.s^4 + 21.c^2.i.s^5 - 7.c.s^6 - i.s^7$.
On identifie partie réelle et partie imaginaire :

$\Re e$	$\cos(7.\theta)$	$=$	$\cos^7(\theta)$		$-21.\cos^5(\theta).\sin^2(\theta)$		$+35.\cos^3(\theta).\sin^4(\theta)$		$-7.\cos(\theta).\mathrm{si}$
$\Im m$	$\sin(7.\theta)$	$=$		$7.\cos^6(\theta).\sin(\theta)$		$-35.\cos^4(\theta).\sin^3(\theta)$		$+21.\cos^2(\theta).\sin^5(\theta)$	

On effectue le quotient : $\tan(7.\theta) = \dfrac{c^7 - 21.c^5.s^2 + 35.c^3.s^4 - 7.c.s^6}{7.c^6.s - 35.c^4.s^3 + 21.c^2.s^5 - s^7}$ avec toujours notre notation.

On divise haut et bas par c^7 : $\tan(7.\theta) = \dfrac{1 - 21.\dfrac{s^2}{c^2} + 35.\dfrac{s^4}{c^4} - 7.\dfrac{s^6}{c^6}}{\dfrac{7.c^6.s - 35.c^4.s^3 + 21.c^2.s^5 - s^7}{c^7}} = \dfrac{1 - 21.T^2 + 35.T^4 - 7.T^6}{7.T - 35.T^3 + 21.T^5 - T^7}$ avec $T = \tan(\theta)$.

Pour l'équation $X^3 - 21.X^2 + 35.X - 7$, on se pose finalement la question « pour quelles valeurs de $\tan(\theta)$ est ce que $\tan(7.\theta)$ n'existe pas !

∘6∘

Encore des stations de métro (des terminus de lignes) :
`Plan d'égout incorrect. Médailles à iris. Démolirait une rime. Dirigé au métronome. Ponte des vers. Découpons le bandit glouton. Thé lacté. Le pot-de-vin consolable. Soleil adulé téléchargé. Suivant en déchéance.`
Et en cadeau : Un con rose, Frais bordel virtuel.

Porte de Clignancourt.
Mairie des Lilas.
Mairie de Montreuil.
Mairie de Montrouge.
Pont de Sèvres.
Boulogne pont de Saint-Cloud.
Châtelet.
Pont de Levallois-Becon.
Charles de Gaulle-Etoile.
Château de Vincennes.

Et sur `http ://metromap.fr/assets/img/Paris_Metro_map_04_2020.pdf` vous avez un plan de métro « anamorphosé ».

∘7∘

♡ Factorisez $X^3+(-6-4.i).X^2+(15+20.i).X+2-36.i$ sachant qu'une des racines est le double d'une autre.

On note a, $2.a$ et b le strois racines.
On a alors $3.a+b=6+4.i$
$$3.b+2.a^2=15+20.i$$
$$2.a^2.b=-2+36.i$$
A finir.

∘8∘

Pour quels complexes le réel $\Re e(\Delta)+|\Delta|$ est il nul ?

Il parait que l'une des racines carrées du complexe Δ est $\dfrac{\Delta+|\Delta|}{\sqrt{2.(\Re e(\Delta)+|\Delta|)}}$. Ne me faites pas confiance, prouvez le.

$\Re e(\Delta)+|\Delta|$ est nul si et seulement si Δ est un réel négatif.

Ensuite, on élève au carré le membre de droite. Est il égal à Δ ?

∘9∘

♣ Le loir et le chapelier fou mentent certains jours et sont sincères d'autres jours *(c'est encore plus stupide que mes boulangers jumeaux)*.

jour	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
loir	menteur	sincère	menteur	sincère	sincère	sincère	menteur
chapelier fou	sincère	sincère	sincère	sincère	menteur	menteur	menteur

Si les deux disent "*on est lundi*", pouvez vous déduire quel jour on est ?
Si les ai entendu dire "*hier je mentais*", pouvez vous déduire qui ment ?
Le loir dit "*si on demandait au chapelier si on est mercredi, il dirait oui*", pouvez vous déduire le jour.
Le loir dit "*hier je mentais*". Le chapelier peut il ajouter "*tiens, moi c'est après-demain que je mens*" ?

	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
Loir dit « on est lundi »	non	non	oui	non	non	non	oui
Chapelier dit « on est lundi »	oui	non	non	non	oui	oui	oui
question 1							oui
Loir dit « hier je mentais »	non	oui	oui	oui	non	non	oui
Chapelier dit « hier je mentais »	oui	non	non	non	oui	non	non
question 2	impossible						
Chapelier dit « oui, mercredi »	non	non	oui	non	oui	oui	oui
Loir dit « Chapelier dit... »	oui	non	non	non	oui	oui	non
question 3	oui				oui	oui	
Loir dit « hier je mentais »	non	oui	oui	oui	non	non	oui
Chapelier « je mens après demain »	non	non	oui	oui	non	oui	oui
question 4			oui	oui			oui

A la question 4, on ne peut pas déduire le jour.
Pour la première question, il y a plus court.
On ne peut pas être lundi, car lundi, le loir doit mentir (il ne peut donc pas donner le bon jour). Comme on est un autre jour, il faut donc que les deux mentent.

A suivre.

∘10∘ Un exercice d'oral de Polytechnique était posé sous la forme suivante :

soient $(z_0, \dots z_{n-1})$ n complexes non nuls,
alors il existe une partie P de `range(n)` vérifiant $\Big|\sum_{p\in P} z_p\Big| \geqslant \frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{n-1}|z_k|$

l'exercice était posé tel quel avec une indication que l'on donnera plus loin sur un exemple et pour le traitement général. Mais on commencera ici par quelques cas particuliers.

♠ 0 ♠ Pour $(1,\ i, -1, -i)$, vérifiez : $|1+i| \geqslant \frac{1}{\pi}.(|1|+|i|+|-1|+|-i|)$.

♠ 1 ♠ Pour $(1, -j^2,\ j, -1,\ j^2, -j)$, vérifiez : $|j-1+j^2| \geqslant \frac{1}{\pi}.(|1|+|-j^2|+|j|+|-1|+|j^2|+|-j|)$.

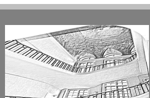
♠ 2 ♠ n est un entier naturel non donné, on pose $z_k = e^{i.k.\pi/n}$ pour k dans $range(2.n)$.
Justifiez : $\Big|\sum_{k=0}^{n-1} z_k\Big| \geqslant \frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{2.n-1}|z_k|$.

♠ 3 ♠ a et b sont deux réels, vérifiant $a<0<b$. Prouvez : $|a| \geqslant \frac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$ ou $|b| \geqslant \frac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$.

♠ 4 ♠ Les z_k sont n réels classés par ordre croissant.
Montrez qu'il existe un entier p vérifiant $\Big|\sum_{k=0}^{p-1} z_k\Big| \geqslant \frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{n-1}|z_k|$ ou $\Big|\sum_{k=p}^{n-1} z_k\Big| \geqslant \frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{n-1}|z_k|$.

♠ 0 ♠ On prend cette fois à titre d'exemple $z_0 = 2$, $z_1 = 1+i$, $z_2 = i$, $z_3 = -2+3.i$, $z_4 = -5$ et $z_5 = -3-4.i$.
Pour tout α entre $-\pi$ et π, on note A_α l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |Arg(z.e^{-i.\alpha})| \leqslant \pi/2\}$. Justifiez que A_α est un demi plan.
Pour tout α, on note $f(\alpha)$ la norme de la somme des z_k qui sont dans A_α. Représentez graphiquement l'application f sur $[-\pi,\ \pi]$, et calculez l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha).d\alpha$[1].

Le cas général repose aussi sur le demi-plan qui tourne. On calcule la valeur moyenne de l'application f, avec des inégalités dans $\mathbb{C}$ et un peu de trigonométrie. Comme cette valeur moyenne dépasse alors la valeur $\sum_{k=0}^{n-1}|z_k|$, c'est que f dépasse cette valeur au moins en un point. On ne le détaillera pas ici.



Cas particuliers de l'inégalité dans $\mathbb{C}$. TD05

1. on rappelle que l'intégrale d'une fonction est une aire, et ne se calcule pas forcément par des $[F(x)]_{x=a}^{b}$ avec des exigences du type "f doit être dérivable" à cause d'un cours de Terminale dans lequel on confond à tout bout de champ "nécessaire" et "suffisant"

On commence par quatre complexes de module 1 : $(1,\ i, -1, -i)$. La somme du membre de droite

$$\frac{1}{\pi}.(|1|+|i|+|-1|+|-i|)$$

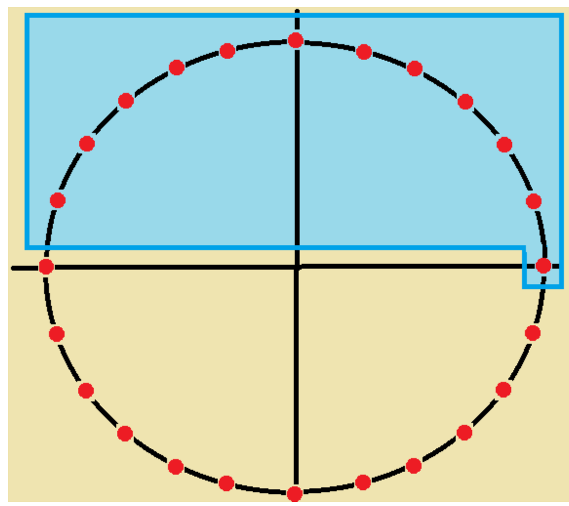
vaut $\frac{4}{\pi}$. On ne garde que deux des quatre complexes : 1 et i , on effectue la somme : $1+i$, on en prend le module : $\sqrt{2}$ (calcul direct).
On se dont donc juste de vérifier $\sqrt{2} \geqslant \frac{4}{\pi}$, c'est à dire $\sqrt{2}.\pi \geqslant 4$. On le joue à la physicienne en comparant les carrés car tout est positif : $2.\pi^2 \simeq 2.10$ et $4^2 = 16$. C'est rapide.

Pour $(1, -j^2,\ j, -1,\ j^2, -j)$ *(sommets de l'hexagone régulier)*, le membre de droite se calcule

$$\frac{1}{\pi}.(|1|+|-j^2|+|j|+|-1|+|j^2|+|-j|+|-i|) = \frac{6}{\pi}$$

(un peu moins que 2).
Des six complexes, on n'en garde que trois : -1, j et j^2. On calcule leur somme : $-1+j+j^2 = -1-1$ car $1+j+j^2=0$. On passe au module : $|j-1+j^2| = 2 \geqslant \frac{6}{\pi}$.

On prend cette fois $2.n$ nombres notés z_k. Dans $e^{i.k.\pi/n}$ on reconnait une racine d'ordre $2.n$ de l'unité. Nos $2.n$ points sont répartis régulièrement sur le cercle unité. La somme du membre de droite $\frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{2.n-1}|z_k|$vaut $\frac{2.n}{\pi}$ puisqu'ils sont tous de module 1.
Avec $\sum_{k=0}^{n-1} z_k$, on ne garde visiblement que les n premiers. La somme $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i.k.\pi/n}$ est alors simplement une série géométrique de premier terme 1 ($k=0$), de raison $e^{i.\pi/n}$ et de terme à venir $e^{i.n.\pi/n}$ ($k=n$). Cette somme se simplifie :
$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i.k.\pi/n} = \frac{1-e^{i.\pi}}{1-e^{i.\pi/n}} = \frac{1-(-1)}{1-e^{i.\pi/n}}$.



On doit en prendre le module. Il y a des façons plus ou moins rusées de le faire.
• La pire : virer le dénominateur par quantité conjuguée *(même si c'est souvent un bon réflexe)*, et s'empêtrer dans des cosinus et sinus partout.
• La méthode du bon élève de Terminale : le module de l'inverse est l'inverse du module. On va donc juste calculer le module de $1-e^{i.\pi/n}$. Celui ci vaut $\sqrt{(1-\cos(\pi/n))^2+\sin^2(\pi/n)}$. On développe, on simplifie et on arrive à $\sqrt{2}.\sqrt{1-\cos(\pi/n)}$. On a donc

$$\Big|\sum_{k=0}^{n-1} e^{i.k.\pi/n}\Big| = \Big|\frac{2}{1-e^{i.\pi/n}}\Big| = \frac{2}{\sqrt{2}.\sqrt{1-\cos(\pi/n)}}$$

et on est déjà content.
Si on va plus loin : $1-\cos(\theta) = 2.\sin^2(\theta/2)$:

$$\Big|\sum_{k=0}^{n-1} e^{i.k.\pi/n}\Big| = \Big|\frac{2}{1-e^{i.\pi/n}}\Big| = \frac{2}{2.\Big|\sin\Big(\frac{\pi}{2.n}\Big)\Big|}$$

• *Mais en fait, il y avait plus rusé* (et classique à connaitre) *:* $|1-e^{i.\theta}| = |e^{i.\theta/2}.(e^{-i.\theta/2}-e^{i.\theta/2})| = |e^{i.\theta/2}|\times|e^{-i.\theta/2}-e^{i.\theta/2}| = 1.2.\sin(\theta/2)$ *puisque* $\sin(\theta/2) = \frac{e^{i.\theta/2}-e^{-i.\theta/2}}{2.i}$ *! On en reparlera en cours avec le "noyau de Dirichlet".*

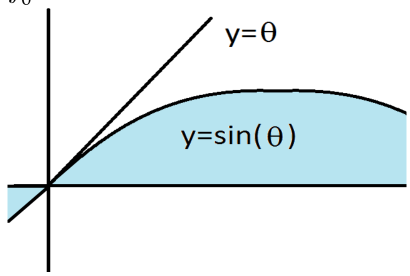
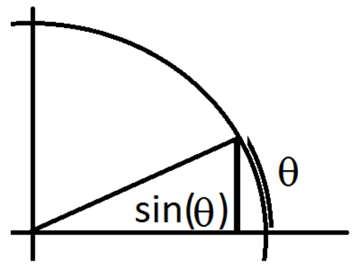
Bref, on est arrivé à $\Big|\sum_{k=0}^{n-1} e^{i.k.\pi/n}\Big| = \frac{1}{\sin\Big(\frac{\pi}{2.n}\Big)}$ et $\frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{2.n-1}|z_k| = \frac{2.n}{\pi}$. Ce serait idiot de ne pas voir un air de famille !

On doit prouver $\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2.n}\right)} \geqslant \dfrac{2.n}{\pi}$, ce qui se ramène à $\sin\left(\dfrac{\pi}{2.n}\right) \leqslant \dfrac{\pi}{2.n}$ car tout est positif.

Le physicien dira que pour n petit, on a $\sin(\theta) \simeq \theta$. mais le mathématicien ne s'en contentera jamais. D'autant qu'un symbole $\simeq$ ne devient un $\leqslant$ que par tricherie doublée de nécessité de "je veux conclure" du mauvais élève qui est prêt à tout pour aboutir à ce qu'on lui demande.

On doit montrer $\boxed{\sin(\theta) \leqslant \theta \text{ pour } \theta \text{ entre } 0 \text{ et } \pi/2}$

C'est du classique qu'on obtient de multiples façons.

Variation de fonction :	Intégrale :	Géométrie :
l'application $\theta \longmapsto \theta - \sin(\theta)$ a une dérivée positive ($1 - \cos$ *avec* $\cos$ *entre* -1 *et* 1), elle est donc croissante. Et comme elle est nulle en 0, elle est positive après 0.	$\sin(\theta) = \int_0^\theta \cos(\alpha).d\alpha \leqslant \int_0^\theta 1.d\alpha = \theta$. 	le sinus est un trait vertical, l'angle est la mesure d'un arc de cercle "un peu plus long". 

Toute preuve à la physicienne avec un développement limité ou autre sera une arnaque.

Si on met tout bout à bout, on a bien $\left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{i.k.\pi/n}\right| = \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2.n}\right)} \geqslant = \dfrac{2.n}{\pi} = \dfrac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{2.n-1} |z_k|$.

Une question où il suffit/faut d'être méthodique. Et qui prend plusieurs arguments les uns après les autres.

---

a est un réel négatif et b un réel positif. On doit prouver $|a| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$ ou $|b| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$.

On peut traiter différents cas suivant qui de a et b est le plus grand en valeur absolue.
Mais le mieux est de faire des maths, en raisonnant par l'absurde, avec les et et les ou.

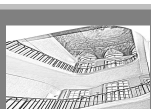
Si on n'avait pas "$|a| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$ <u>ou</u> $|b| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$", on aurait "$|a| < \dfrac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$ <u>et</u> $|b| < \dfrac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$".
En additionnant les deux, on aurait alors $|a|+|b| \leqslant \dfrac{1}{\pi}(|a|+|b|)$. En simplifiant car la somme $|a|+|b|$ est non nulle, on aurait $\pi < 1$, ce qui est faux. Fin du raisonnement par l'absurde, qui ne dit évidemment pas qui de $|a| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$ ou $|b| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$ est vraie *(il est d'ailleurs possible que les deux le soient...)*.

On notera qu'on a prouvé ici notre résultat dans le cas où on a deux complexes particuliers du plan : un réel négatif et un réel positif, appelés ici a et b au lieu de z_0 et z_1. Quoi qu'il en soit, en les appelant z_0 et z_1 au lieu de a et b, on a prouvé qu'une des deux sommes $|z_0|$ ou $|z_1|$ dépasse $\dfrac{1}{\pi}.(|z_0|+|z_1|)$. On va généraliser à plusieurs termes.
Il est bon quand on traite un problème de comprendre un peu où on va et de ne pas se contenter de croire qu'on traite une série d'exercices comme dans un sujet du bac.

Les z_k sont n réels classés par ordre croissant. Il y a donc un moment où on bascule du négatif au positif. On note p cet indice *(le plus petit indice k tel que z_k soit un élément de $\mathbb{R}^+$)* : $z_0 \leqslant z_1 \leqslant \ldots \leqslant z_{p-1} < 0 < z_p \leqslant \ldots \leqslant z_{n-1}$.
On va alors poser "tout naturellement" : $a = z_0 + z_1 + \ldots + z_{p-1}$ et $b = z_p + z_{p+1} + \ldots + z_{n-1}$. On a bien $a \leqslant 0 \leqslant b$ *(inégalités larges, car a est peut être nul, si il n'y a aucun réel négatif en début de liste)*.
Par la question précédente, on a donc $|a| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$ ou $|b| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$.
Et qui est $|a|+|b|$?
Comme a est négatif, on a $|a| = -z_0 - z_1 - \ldots - z_{p-1}$. Comme chaque z_i de cette formule est négatif, on a $|a| = |z_0| + |z_1| + \ldots + |z_{p-1}|$.
Comme b est négatif, on a $|b| = z_p + z_{p+1} + \ldots + z_{n-1}$. Comme chaque z_j de cette formule est positif, on a $|b| = |z_p| + |z_{p+1}| + \ldots + |z_{n-1}|$.
Le membre de droite $\dfrac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$ devient donc $\dfrac{1}{\pi}.(|z_0| + \ldots + |z_p| + \ldots + |z_{n-1}|)$.
L'assertion $|a| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$ ou $|b| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$ devient donc

$\left|\sum_{k=0}^{p-1} z_k\right| \geqslant \frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{n-1}|z_k|$ ou $\left|\sum_{k=p}^{n-1} z_k\right| \geqslant \frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{n-1}|z_k|$ comme attendu.

On a donc répondu à la question $\left|\sum_{i\in P} z_i\right| \geqslant \frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{n-1}|z_k|$ en prenant comme partie P les premiers indices de la liste ou les derniers *(en séparant en fait les réels z_i selon leur signe)*. On note qu'un facteur $\frac{1}{2}$ ferait l'affaire ici à la place du facteur $\frac{1}{\pi}$.Mais on est sur $\mathbb{R}$ et pas sur $\mathbb{C}$.



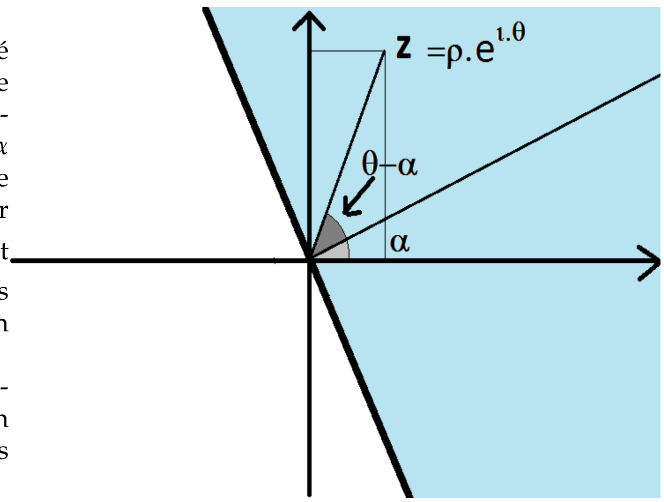
Exemple avec quelques points dans le plan complexe. TD05

On trace un dessin pour localiser les points de l'énoncé. Et on calcule les normes demandées pour les sommer :

$z_0 = 2$	$z_1 = 1+i$	$z_2 = i$	$z_3 = -2+3.i$	$z_4 = -5$	$z_5 = -3-4.i$
$\lvert z_0\rvert = 2$	$\lvert z_1\rvert = \sqrt{2}$	$\lvert z_2\rvert = 1$	$\lvert z_3\rvert = \sqrt{13}$	$\lvert z_4\rvert = 5$	$\lvert z_0\rvert = 5$

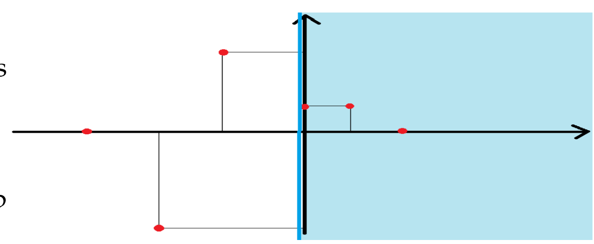
La somme des modules est laide, elle vaut $13+\sqrt{2}+\sqrt{13}$ et ne se simplifie.
Et la somme des complexes vaut $-7+i$, même si ça ne sert à rien.

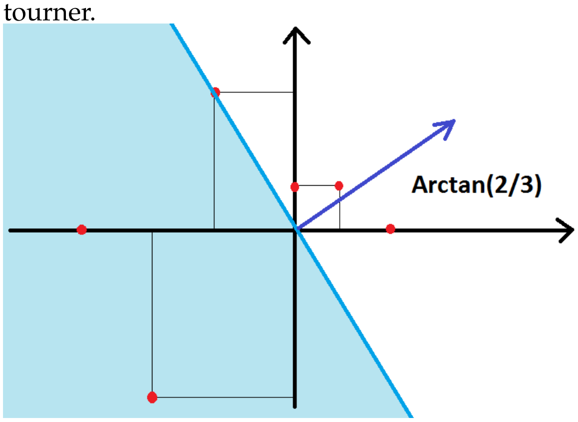
Un ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |Arg(z.e^{-i.\alpha})| \leqslant \pi/2\}$ est formé de complexes obéissant effectivement à une contrainte d'angle. Écrivons $z = \rho.e^{i.\theta}$ comme souvent. La condition porte sur $Arg(\rho.e\hat{\imath}.(\theta-\alpha)$. Cet argument vaut $\theta-\alpha$ (après réduction si nécessaire). On demande donc que $\theta-\alpha$ soit entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, ce qui revient à bloquer θ entre $\alpha-\frac{\pi}{2}$ et $\alpha+\frac{\pi}{2}$. Les deux valeurs extrêmes sont distantes de π, la limite est faite de deux demi droites alignées, c'est une droite. Et on est dans le demi plan "du côté de α".
Il fallait encore une fois travailler en polaires. Quels professeurs de Terminale vous ont fait croire que le plan complexe était fait d'éléments de la forme $x+i.y$ et pas d'éléments de la forme $\rho.e^{i.\theta}$?



La fonction f va donc compter des sommes comme $|z_1+z_2+z_3|$ si z_1, z_2 et z_3 sont dans le demi plan A_α. On va donc faire une étude à la main *(il ne faut pas espérer des formules toutes prêtes, il faut mettre les mains dans le cambouis, et accepter de travailler avec des définition)*.

Le premier demi plan (pour α nul) est l'Est de la carte, avec les arguments entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.
On prend trois des complexes : $z_0 = 2$, $z_1 = 1+i$ et $z_2 = i$.
La somme vaut $3+2.i$ et a pour module $\sqrt{13}$: $f(0) = \sqrt{13}$.
On va rester avec cette valeur tant que le plan ne va pas trop tourner.



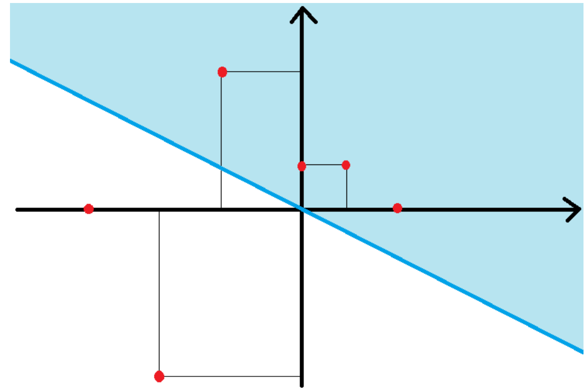


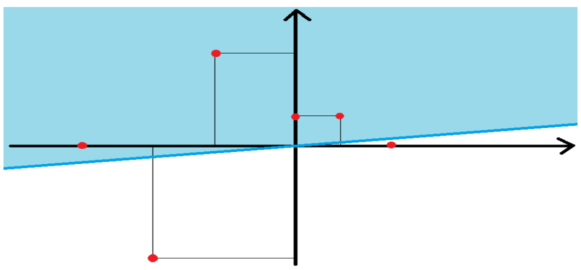
Le premier changement va se faire quand la demi droite va contenir le point z_3.
« A cet instant », le point z_3 s'ajoute à la somme :
$z_0+z_1+z_2+z_3 = 2+(1+i)+i+(-2+3.i) = 1+5.i$.
Le module vaut $\sqrt{26}$.
On déduit donc que de 0 à $Arctan(2/3)$, f vaut $\sqrt{13}$.
En $Arctan(2/3)$, la fonction saute à la valeur $\sqrt{26}$ (elle augmente).
Pourquoi $Arctan(2/3)$? C'est la direction orthogonale à cette droite.

On va pouvoir continuer, jusqu'à ce que le demi plan gagne un nouveau point.
Ou en perde un.

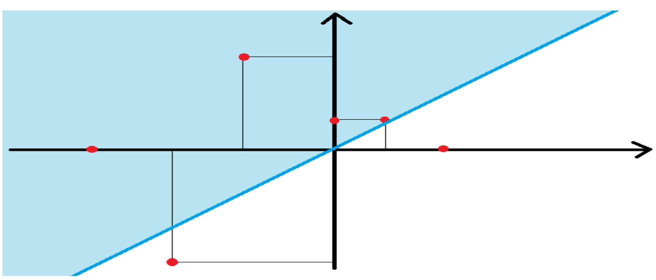
Quand α va atteindre la valeur $\pi/2$, l'axe de découpe sera horizontal. La somme complexe sera faite de z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4. Elle vaudra $-4+5.i$. $f(\pi/2)$ vaut alors $\sqrt{41}$.

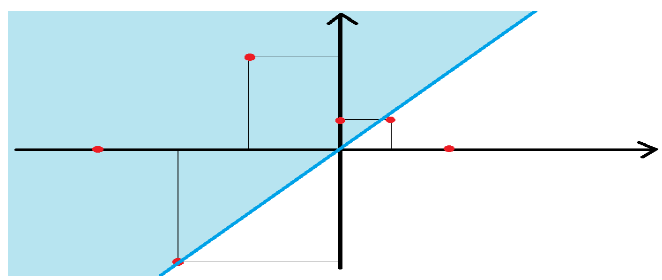
Mais ça ne dure pas. Dès que α augmente, on perd le point z_0.





Maintenant, la somme vaut
$(1+i)+i+(-2+3.i)-5$, et la fonction vaut $\sqrt{61}$.
Elle reste constante égale à cette valeur. Le prochain changement va se faire quand on va perdre z_1 (égal à $1+i$). On aura alors pour somme complexe $i+(-2+3.i)-5$ puis pour module $\sqrt{65}$.
L'étape suivante sera l'arrivée de z_5 (égal à $-3-4.i$) dans la somme.

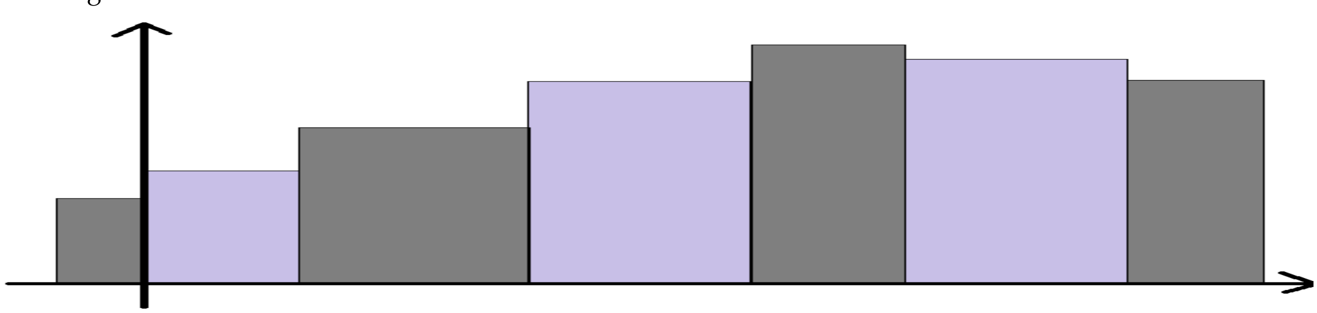




On se dit que pour avoir les valeurs prises par la fonction en escalier, il va falloir dresser un tableau. Comme les z_k sont classés par ordre croissant d'argument, les familles de points dans les demi plans A_α seront faites d'indices consécutifs.

angle α	avant 0	0	$Arctan(2/3)$	$\pi/2$		$3.\pi/4$		après π
z_0	2	2	2	2				
z_1	$1+i$	$1+i$	$1+i$	$1+i$	$1+i$			
z_2		i	i	i	i	i	i	
z_3			$-2+3.i$	$-2+3.i$	$-2+3.i$	$-2+3.i$	$-2+3.i$	$-2+3.i$
z_4				-5	-5	-5	-5	-5
z_5							$-3-4.i$	$-3-4.i$
somme	$3+i$	$3+2.i$	$1+5.i$	$-4+5.i$	$-6+5.i$	$-7+4.i$	-10	$-10-i$
$f(\alpha)$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{41}$	$\sqrt{61}$	$\sqrt{65}$	10	$\sqrt{101}$

C'est long et laborieux.



Pour le calcul de l'intégrale, on additionne des aires de rectangles comme $\sqrt{26}.\left(\frac{\pi}{2}-Arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right)$.

◦11◦

Dans l'ensemble des entiers de 0 à 20 pour l'addition et la multiplication modulo 21, montrez que toute suite arithmétique est périodique.
Déterminez la période de la suite $u_{n+1}=16.u_n+1$.

Si la suite est arithmétique de raison r, alors pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$.
Mais de plus, $u_{n+21} = u_n + 21.r = u_n$. C'est tout.
Une période est 21, et il y a peut être plus petit.

N'ayant pas de belle idée, on regarde
$u_1 = 16.u_0 + 1$ puis $u_2 = 16.(16.u_0 + 1) + 1 = 4.u_0 + 17$
et enfin $u_2 = 16.(4.u_0 + 17) + 1 = u_0 + 0$.
La suite est périodique de période 3.

∘12∘ Qui est le rationnel d'écriture décimale $3,\overline{14159}14159...$?

On le note $a = 3,\overline{14159}1415914159....$
On calcule $10^5.a = 3\overline{14159},1415914159....$
On soustrait : $10^5.a - a = 314159 - 3$ et tout le reste s'en va.
$a = \dfrac{314\,156}{99\,999}$

Sinon, pour information
$\pi \simeq \dfrac{22}{7}$, $\pi \simeq \dfrac{333}{106}$, $\pi \simeq \dfrac{355}{113}$ et $\pi \simeq \dfrac{103\,993}{33\,102}$

A chaque fois, ce sont des réduites de π, c'est à dire des approximations optimales « à dénominateur imposé/majoré ».

Par exemple, de tous les rationnels de la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $q \leqslant 113$, celui qui est le plus proche de π est $\dfrac{355}{113}$.

$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}$ et $\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{\dots}}}}$ et $\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \dots}}}}$

∘13∘ La division est elle une loi de composition interne sur l'ensemble des entiers ?
Pour quels entiers n la multiplication est elle une loi interne sur l'ensemble des diviseurs de $n!$?
Comment s'appelle une relation qui vérifie $\forall(a, b),\ (a\Re b \text{ et } b\Re a) \Leftrightarrow a = b$.
Comment s'appelle une relation qui vérifie $\forall(a, b),\ (a\Re b \text{ et } a\Re c) \Leftrightarrow b\Re c$.

La division n'est pas interne sur $\mathbb{Z}$ évidemment. Et d'ailleurs, est ce une loi dans la mesure où on ne peut pas diviser par 0.

L'ensemble des diviseurs de $n!$ est un ensemble assez étrange

n	0	1	2	3	4	5
diviseurs de$n!$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3,6\}$	$\{1,2,3,4,6,1,4\}$	

On note que $\{1\}$ est stable par multiplication.
Mais sinon, l'entier $n!$ est dans la liste des diviseurs, on le multiplie par lui même : $(n!)$ n'est plus dans la liste des diviseurs.
Les seules n valables sont 0 et 1.

L'implication $\forall(a, b),\ (a\Re b \text{ et } b\Re a) \Rightarrow a = b$ se lit « antisymétrique ».
L'implication $\forall(a, b),\ (a\Re b \text{ et } b\Re a) \Leftarrow a = b$ se lit « réflexive ».
Bon, mais il manque « transitive » pour une relation d'ordre.

L'implication $\forall(a, b),\ (a\Re b \text{ et } a\Re c) \Rightarrow b\Re c$ c'est presque « transitive ».
Mais équivalence ?
Dès qu'on a $b\Re c$ quelquepart entre deux éléments, alors on a $a\Re b$ et $a\Re c$. Pour tout a !

Il y a une relation simple qui vérifie cela : la relation vide . Chaque élément est dans son coin, personne n'est en relation avec personne. Et toute l'équivalence est sur le modèle « faux équivalent à faux » (et ça c'est vrai).

Une autre est la relation pleine. Tout le monde est en relation avec tout le monde. L'équivalence est alors de la forme « vrai équivalent à vrai » (et ça aussi c'est vrai).

En existe-t-il d'autres ?

Supposons que la relation n'est pas vide. Alors il existe au moins un couple $(\alpha,\ \beta)$ vérifiant $\alpha\Re\beta$ (et on peut avoir $\alpha = \beta$, rien ne nous bloque là dessus).
Alors, en utilisant le sens « indirect » de l'équivalence $(\alpha\Re\beta) \Rightarrow (a\Re\alpha \text{ et } a\Re\beta)$, on obtient $a\Re\alpha$ et $a\Re\beta$ pour tout a.
Ça commence à faire pas mal de flèches qui arrivent toutes sur α et β.
Mais alors en prenant a quelconque et α, on a $a\Re\alpha$. l'implication $(a\Re\beta) \Rightarrow (x\Re a \text{ et } c\Re\beta)$ (vraie pour tout x) donne « tous les x sont en relation avec tous les a ».
Bref, $\Re$est la relation pleine (si elle n'était pas la relation vide).

◦14◦

♡ On pose $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et on demande de calculer le produit des trois matrices ? Mais quel produit $A.B.C$? Ou $A.C.B$? Ou $B.A.C$? D'ailleurs, il y en a combien ? Et quelle est la somme de tous ces produits ?

On a trois lettres et il faut créer tous les mots utilisant chacune des trois une fois et une seule. C'est du dénombrement classique : 3!.

$A.B.C$	$A.C.B$	$B.A.C$	$B.C.A$	$C.A.B$	$C.B.A$
$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Finalement, il n'y en a pas tant que ça. Nos matrices commutent deux à deux, mais ça ne se voyait pas...
Et la somme vaut $\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$.

◦15◦

Montrez qu'il existe un angle φ entre 0 et $\pi/2$ vérifiant $\tan(\varphi) = 12/5$. Calculez alors $\cos(\varphi)$ et $\sin(\varphi)$.
Complétez : $\forall x \in \mathbb{R},\ 12.\cos(x) + 5.\sin(x) =$ $\sin(x + \varphi)$.
Vérifiez alors $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{12.\cos(\theta) + 5.\sin(\theta)} = \frac{\ln(15/2)}{13}$.

Quand θ décrit $[0,\ \pi/2[$, sa tangente décrit continument tout $[0,\ +\infty[$, en croissant strictement. Elle passe alors une fois par toute valeur fixée à l'avance y compris 12/5. On pourrait même préciser : $\alpha = Arctan(2/5)$.
On a donc $\tan(\alpha) = 12/5$. On élève au carré :

$$1 + \tan^2(\alpha) = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25}$$

Par la relation de Pythagore $\dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$, on déduit $\cos^2(\alpha) = \dfrac{25}{169}$ et par positivité du cosinus entre 0 et $\pi/2$: $\cos(\alpha) = \dfrac{5}{13}$. Par simple produit en croix, on récupère : $\sin(\alpha) = \dfrac{12}{13}$.

Pour tout x, on a alors

$$12.\cos(x) + 5.\sin(x) = 13.(\sin(\alpha).\cos(x) + \cos(\alpha).\sin(x)) = 13.\sin(x + \alpha)$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{12.\cos(\theta) + 5.\sin(\theta)}$ existe alors *(ce qui est au dénominateur est continu et ne s'annule jamais)*, et se remplace par $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{12.\sin(\theta + \alpha)}$.
On identifie une forme en $\displaystyle\int \frac{dt}{\sin(t)}$ que l'on sait intégrer d'après le cours (logarithme de la tangente de l'arc moitié). Il suffit ici de translater :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{12.\sin(\theta + \alpha)} = \frac{1}{12}.\Big[\ln(\tan(t/2))\Big]_{t=\alpha}^{t=\alpha+\pi/2}$$

Il faut quand même calculer alors $\tan(\alpha/2)$ par exemple.
On utilise encore une formule du cours : $\tan(\alpha/2) = \dfrac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} = \dfrac{12/13}{1 + 5/13} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$. De même,

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(\alpha/2) + \tan(\pi/4)}{1 - \tan(\alpha/2).\tan(\pi/4)} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 5$$

On a bien $\ln(\tan(\alpha/2 + \pi/4)) - \ln(\tan(\alpha/2)) = \ln\left(\dfrac{15}{2}\right)$.

∘16∘

Montrez que les hauteurs du triangle de côtés 580, 609 et 841 sont entières. (ce triangle a une particularité, et ensuite, calculez son aire de plusieurs façons).

Déjà, ce triangle est rectangle. C'est le triangle $(20,\ 21,\ 29)$ ayant subi une homothétie de rapport 29.
Deux de ses côtés sont des hauteurs.
On calcule son aire de deux façons : hypoténuse fois hauteur inconnue, ou produit des deux c^tés adjacents.
La hauteur issue de l'hypoténuse vaut donc $\dfrac{2.aire}{hyptenuse} = \dfrac{a.b}{c}$. On trouve 420.

∘17∘

Sachant $\tan(\pi/5) = \sqrt{5-2.\sqrt{5}}$, calculez $\tan(n.\pi/5)$ pour tout n.

On profitera de la périodicité de la tangente.

n modulo 5	0	1	2	3	4
$\tan\left(\frac{n.\pi}{5}\right)$	0	$\sqrt{5-2.\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2.\sqrt{5}}$	$-\sqrt{5+2.\sqrt{5}}$	$-\sqrt{5-2.\sqrt{5}}$

On a calculé et simplifié $\dfrac{2.\sqrt{5-2.\sqrt{5}}}{1-(5-2.\sqrt{5})}$ en faisant appel à la quantité conjuguée.
On a aussi relié $\tan(\theta)$ et $\tan(\pi-\theta)$.

∘18∘

Un classique du domaine de l'astuce mathématique :
On prend treize réels x_k ; montrez qu'il existe au moins deux indices distincts i et j vérifiant $0 \leqslant \dfrac{x_i - x_j}{1+x_i.x_j} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
(indication : se ramener sur $]-\pi/2,\ \pi/2[$, découper en 12 segments).

Partant des treize réels a_k, on définit treize angles entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$: $\alpha_k = Arctan(a_k)$.

Maintenant, on découpe $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ en douze intervalles de longueur $\dfrac{\pi}{12}$ (les $\left[\dfrac{p.\pi}{12,}, \dfrac{(p+1).\pi}{12}\right]$ pour p de -6 à 5).

On a treize angles, pour douze intervalles.
Par le principe du pigeonnier ou des tiroirs, un des segments contient au moins deux des réels α_i et α_j.

Comme chaque intervalle est de longueur $\dfrac{\pi}{12}$, c'est donc que la distance qui les sépare est plus petite que $\dfrac{\pi}{2}$.

Précisément, on peut écrire $\dfrac{p.\pi}{12,} \leqslant \alpha_i \leqslant \alpha_j \leqslant \dfrac{(p+1).\pi}{12}$ pour ce coupe d'indices $(i,\ j)$ et ce p entre -6 et 5.

On a donc $0 \leqslant \alpha_j - \alpha_i \leqslant \dfrac{\pi}{12}$.

On passe à la tangente, croissante : $0 \leqslant \tan(\alpha_j - \alpha_i) \leqslant \tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

On remplace le terme du milieu par $\dfrac{\tan(\alpha_j)-\tan(\alpha_i)}{1+\tan(\alpha_i).\tan(\alpha_j)}$, et on a l'encadrement demandé.

Pardon ? On a encore mieux, puisque $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ c'est plus petit que $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

∘19∘

♡ Montrez : $\cos(2.\pi/5) + \cos(3.\pi/5) = 0$.
Montrez : $\forall\theta,\ \cos(3.\theta) + \cos(\theta) = 2.\cos(\theta).\cos(2.\theta)$ puis $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$.
Déduisez que $\cos(\pi/5)$ est racine de l'équation $4.X^3 + 2.X^2 - 3.X - 1 = 0$ d'inconnue réelle X.
Résolvez l'équation ci dessus. Déduisez la valeur de $\cos(\pi/5)$.

Les angles $\dfrac{2.\pi}{5}$ et $3.\frac{\pi}{5}$ sont complémentaires (leur somme vaut π). La somme de leurs sinus vaut 0.
On utilise la formule $\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$.

On développe $\begin{array}{rclcll} \cos(3.\theta) & = & \cos(2.\theta+\theta) & = & \cos(2.\theta).\cos(\theta) & -\sin(2.\theta).\sin(\theta) \\ \cos(\theta) & = & \cos(2.\theta-\theta) & = & \cos(2.\theta).\cos(\theta) & +\sin(2.\theta).\sin(\theta) \end{array}$.
On somme les deux formules et on a bien $\cos(3.\theta) + \cos(\theta) = 2.\cos(\theta).\cos(2.\theta)$.

On remplace $\cos(2.\theta)$ par $2.\cos^2(\theta) - 1$ et on fait passer $\cos(\theta)$ de l'autre côté. On a cette fois $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$.

On peut la retrouver par d'autres voies.

On applique nos formules de trigonométrie à $\cos(2.\pi/5)+\cos(3.\pi/5)=0$:

$$4.\cos^3\left(\frac{\pi}{5}\right)-3.\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+2.\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-1=0$$

C'est la définition de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est racine de $4.X^3-3.X+2.X^2-1$.

Cette équation a pour racine évidente -1 (c'est $\cos(\pi)$ avec $\cos(3.\pi)+\cos(2.\pi)=0$). On factorise :

$$(X+1).(4.X^2-2.X-1)$$

Comme $\cos(\pi/5)$ est racine de cette équation, il vaut -1, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Mais comme il est positif, on élimine -1 et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Il ne reste que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

◦20◦

Un élève écrit pour tout x réel :

$$Arctan(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\frac{dt}{(1+i.t).(1-i.t)}=\frac{1}{2}.\int_0^x\left(\frac{1}{1+i.t}+\frac{1}{1-i.t}\right).dt=$$

$$.\qquad=\frac{1}{2.i}.\Big[\ln(1+i.t)-\ln(1-i.t)\Big]_{t=0}^{t=x}=\frac{1}{2.i}.\ln\left(\frac{1+i.t}{1-i.t}\right)$$

Qu'en pensez vous ?

Et s'il se justifie en disant : « pose $\theta=\frac{1}{2.i}.\ln\left(\frac{1+i.t}{1-i.t}\right)$ et calcule $\frac{e^{i.\theta}-e^{-i.\theta}}{i.(e^{i.\theta}+e^{-i.\theta})}$ et dis moi ce que tu en penses... »

Étonnant, non ?
Ça semble absurde, mais en même temps ça semble marcher.
Mais les logarithmes complexes c'est soit de l'arnaque, soit de la haute voltige, avec des modulo $2.i.\pi$ à glisser.

En effet, $\ln(z)$ n'a pas de sens pour z complexe. Ou alors vous perdez des propriétés du logarithme.
Si vous posez par exemple $\ln(i)=i.\frac{\pi}{2}$ en affirmant que c'est logique : $e^{i.\pi/4}=i$!
alors vous avez un problème avec $4.\ln(i)=\ln(i^4)=\ln(1)=0$.

◦21◦

Calculez $\int_0^1 t^2.2^t.dt$.

L'application est continue, l'intégrale existe. On écrit en fait $t^2.e^{t.\ln(t)}$, et on intègre deux fois par parties.
Ou alors par méthode a priori [2]

.
- on pose une primitive sous la forme prévisible : $t\longmapsto(a.t^2+b.t+c).e^{t.\ln(2)}$
- on la dérive : $t\longmapsto(2.a.t+b).2^t+(a.t^2+b.t+c).\ln(2).2^t$.
- on lui demande de valoir $t\longmapsto t^2.2^t$: $a.\ln(2)=1$, $2.a+\ln(2).b=0$, $b+c.\ln(2)=0$
- on trouve a, b et c,
- pour être rigoureux, on propose/on vérifie $t\longmapsto\left(\frac{t^2}{\ln(t)}-\frac{2.t}{(\ln(2))^2}+\frac{2}{(\ln(2))^3}\right).2^t$
  mais tout a été fait pour ça

On trouve $\boxed{\frac{2}{\ln(2)}-\frac{4}{(\ln(2))^2}+\frac{2}{(\ln(2))^3}}$

◦22◦

A-t-on vraiment $Arctan(2)+Arctan(2+\sqrt{2})+Arctan(2-\sqrt{2})=Arctan(-2/9)$? Sinon, rectifiez.

Le premier membre a pour tangente $\frac{2-4}{1-2.(-4)}=\frac{-2}{9}$ (en ayant déjà $\frac{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{1-(2+\sqrt{2}).(2-\sqrt{2})}=-4$.

---

2. là où elle vous déroute par rapport à la terminale, c'est que ce n'est pas « résoudre « ou « calculer », mais « »prendre l'initiative de tenter une primitive de cette forme »... putain, que c'est nouveau et original...

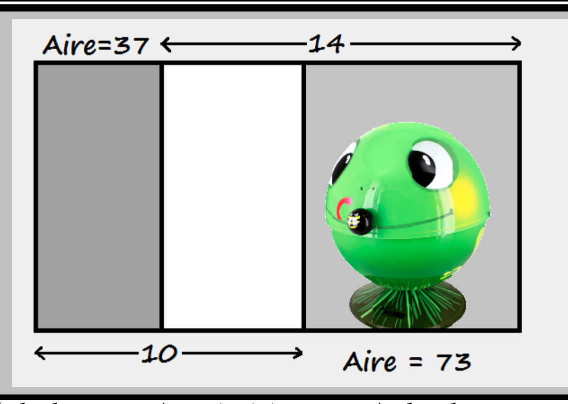
Le second aussi.

Mais le premier est positif.
Et le second négatif.

On a en fait $Arctan(2) + Arctan(2+\sqrt{2}) + Arctan(2-\sqrt{2}) = Arctan(-2/9) - \pi$.

∘23∘

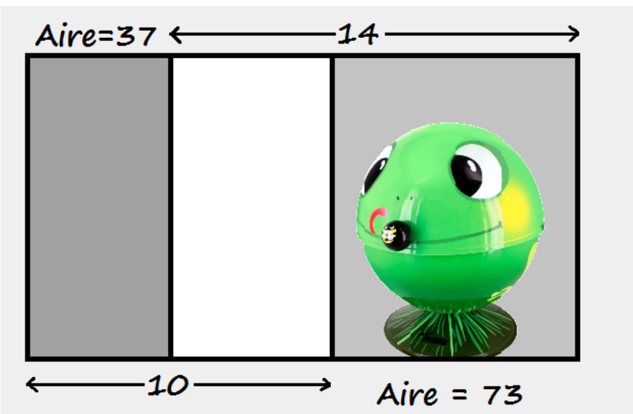
Sur le drapeau de SucriLand, les aires des deux parties grisées sont respectivement de 37 cm^2 et 73 cm^2 (la plus grande pour la tête de Sucri).
Deux longueurs sont connues (10 cm et 14 cm). Donnez l'aire de la partie blanche au milieu.



Donnez le p.g.c.d. de $100^2 - 33^2$ et $99^2 - 32^2$.

---

a est un réel donné. On définit $f = \cos + a.\sin$ et $g = \cos^2 + a.\sin^2$.
Indiquez suivant la valeur de a qui de f et g a le plus grand maximum sur $\mathbb{R}$. Même question avec minimum..



Notons h la hauteur (a priori inconnue) du drapeau, ainsi que a, x et b les largeurs des trois bandes, dans l'ordre.
On a alors rapidement un système, en étudiant les longueurs : $\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & x & = & 10 \\ b & + & x & = & 14 \end{array}\right|$ et les aires : $\left\{\begin{array}{ccccc} a & \times & h & = & 37 \\ b & \times & h & = & 73 \end{array}\right|$.
Et ce qu'on cherche, c'est $x.h$. On a quatre équations pour quatre inconnues, c'est bon, normalement !

On récupère déjà par soustraction : (1) : $b - a = 4$ et (2) : $(b-a).h = 36$.
On divise : $h = 9$ (ou plutôt : $h = 9\ cm$).

On multiplie (1) par h puis on somme $\left\{\begin{array}{ccccc} a.h & + & x.h & = & 10.h \\ b.h & + & x.h & = & 14.h \end{array}\right|$: $a.h + b.h + 2.x.h = 24.h$.

Or, le système 2 donnait $a.h + b.h = 110$. Il reste $2.x.h = 24.9 - 110$ et après division : $\boxed{x.h = 53\ cm^2}$

On ne va quand même pas calculer $100^2 - 33^2$?
Si ! C'est $(100+33).(100-33)$. On peut factoriser : $133.67 = 7.19.67$.

De même, $99^2 - 32^2 = (99+32).(99-32) = 131.67$.
On a deux décompositions en produit de facteurs premiers. Et le facteur commun. Le p.g.c.d. vaut 67.

L'application $\cos + a.\sin$ se met sous la forme $t \longmapsto \sqrt{1+a^2}.\cos(t-\varphi)$ pour φ bien choisi. Son maximum vaut $\sqrt{1+a^2}$ et son minimum $-\sqrt{1+a^2}$..

Qu'en est il de $\cos^2 + a.\sin^2$? Elle s'écrit $\cos^2 + a.(1-\cos^2)$ soit encore $a + (1-a).\cos^2$.
Elle varie donc entre $a + (1-a)$ (atteint en 0) et a (atteint en $\pi/2$).
Mais qui est le maximum pour elle ? Attention, en effet, $1-a$ a un signe !

Tout dépend de a.

Pour a plus grand que 1 :	Maximum = a	Minimum = 1
Pour a plus petit que 1 :	Maximum = 1	Minimum = a

et pour a égal à 1, l'application est constante, égale à 1, pas de surprise.

On résume :

f	Pour tout a :	Maximum $\sqrt{1+a^2}$	Minimum $-\sqrt{1+a^2}$
g	Pour a plus grand que 1 :	Maximum = a	Minimum = 1
	Pour a plus petit que 1 :	Maximum = 1	Minimum = a

◦24◦ Résolvez : $\left\{\begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & 3 \\ a & + & b & = & 2 \end{array}\right|$ d'inconnues a et b dans $\mathbb{R}$.
Résolvez : $\left\{\begin{array}{ccccc} 2^a & + & 2^b & = & 2^3 \\ a & + & b & = & 2 \end{array}\right|$ d'inconnues a et b dans $\mathbb{R}$.

Pour le premier *(de type classique)*, on raisonne par équivalences avec les formules de Viète :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & 3 \\ a & + & b & = & 2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & 3 \\ (a & + & b)^2 & = & 4 \\ a & + & b & = & 2 \end{array}\right|$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & 3 \\ a & + & b & = & 2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} a^2 & + & b^2 & & = & 3 \\ a^2 & + & b^2 & +2.a.b & = & 4 \\ a & + & b & & = & 2 \end{array}\right|$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & 3 \\ a & + & b & = & 2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & 3 \\ a & \times & b & = & 1/2 \\ a & + & b & = & 2 \end{array}\right|$$

a et b sont les deux racines de $X^2 - 2.X + \frac{1}{2}$.

On trouve $\boxed{S_{(a,b)} = \left\{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}}$ *(deux couples de solutions)*.

L'autre système fera appel à des substitutions

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2^a & + & 2^b & = & 2^3 \\ a & + & b & = & 2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 2^a & + & 2^{2-a} & = & 8 \\ a & + & b & = & 2 \end{array}\right|$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2^a & + & 2^b & = & 2^3 \\ a & + & b & = & 2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} & & p & = & 2^a \\ p & + & \frac{4}{p} & = & 8 \\ a & + & b & = & 2 \end{array}\right|$$

On résout l'équation du milieu : $p^2 - 8.p + 4 = 0$, et on trouve deux solutions : $4 - \sqrt{12}$ et $4 + \sqrt{12}$.
Ce sont deux nombres positifs dont on peut prendre le logarithme de base 2, et on trouve a puis b *(avec des rôles symétriques quand même mine de rien)* :

$$\boxed{S_{(a,b)} = \left\{\left(\frac{\ln(4-\sqrt{12})}{\ln(2)},\ 2 - \frac{\ln(4-\sqrt{12})}{\ln(2)}\right),\ \left(\frac{\ln(4+\sqrt{12})}{\ln(2)},\ 2 - \frac{\ln(4+\sqrt{12})}{\ln(2)}\right)\right\}}$$

Remarque : *On notera que les rôles sont bien symétriques, puisque* $2 - \frac{\ln(4-\sqrt{12})}{\ln(2)} = \frac{\ln(4+\sqrt{12})}{\ln(2)}$.
En effet, $\frac{\ln(4-\sqrt{12})}{\ln(2)} + \frac{\ln(4+\sqrt{12})}{\ln(2)} = \frac{\ln((4-\sqrt{12}).(4+\sqrt{12}))}{\ln(2)} = \frac{\ln(4)}{\ln(2)} = 2$.

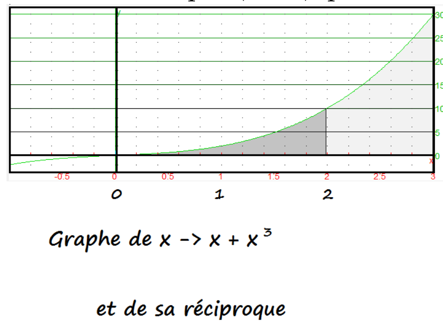
◦25◦ Montrez que $x \longmapsto x^3 + x$ *(notée f)* est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculez $\int_0^{10} f^{-1}(t).dt$ *(raisonnez, ne tentez pas d'exprimer f^{-1}, même si c'est faisable)*.

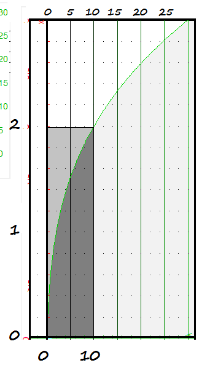
L'application est continue *(elle ne va sauter aucune valeur, par théorème des valeurs intermédiaires)*, strictement croissante à cause de sa dérivée positive *(elle ne passera donc pas deux fois au même endroit)*.
L'application réalise une bijection continue, de réciproque continue, entre son intervalle de départ $]-\infty,\ +\infty[$ vers son intervalle image qui est aussi $]-\infty,\ +\infty[$ *(limites aux bornes)*.

Pour la croissance, on peut passer par $x \leqslant y \Rightarrow x^3 + x \leqslant y^3 + y$.
On calcule en effet la différence $(y^3 + y) - (x^3 + x) = (y - x).(y^2 + x.y + x^2 + 1) = (y - x).\left((y + \frac{x}{2})^2 + \frac{3.x^2}{4} + 1\right)$.
Le signe est bien celui de $y - x$.

Le graphe de f passe par $(0,\ 0)$ et file vers l'infini. Il passera à un moment par $(a,\ 10)$, pour un a convenable.

On le trace, et on trace celui et f^{-1} par symétrie.
L'aire du rectangle de sommets $(0,0)$ et $(a,9)$ est égale à la somme de $\int_0^a f(x).dx$ (sous le graphe de f) et $\int_0^{10} f^{-1}(t).dt$ *(au dessus du graphe de f)*.
Par soustraction : $\int_0^{10} f^{-1}(t).dt = 10.a - \int_0^a (x^3+x).dx$.
On calcule donc $10.a - \frac{a^4}{4} - \frac{a^2}{2}$. Il ne reste qu'à constater que a vaut 2.





◦26◦

Voici, suivant les jours qui ment, et qui est sincère :

jour	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
loir	menteur	sincère	menteur	sincère	sincère	sincère	menteur
chapelier fou	sincère	sincère	sincère	sincère	menteur	menteur	menteur

"Si tu mens, je mens aussi." Qui peut dire cela, et quel jour ?
"Hier je mentais, et demain je mentirai".

On reformule

"Si tu mens, je mens aussi."	en	"Tu est sincère ou je mens aussi."	et en	« Si je suis sincère, alors toi aussi. »

Si un sincère dit ceci, qu'en déduit ont ? Que l'autre est sincère aussi (contraposée). On est dans ce cas un jour où les deux sont sincères (mardi ou jeudi), et on ne sait pas lequel des deux a parlé.

Si un menteur dit ceci, alors on doit avoir $\overline{\textit{Tu est sincère ou je mens aussi}}$, c'est à dire « tu mens et je suis sincère ».
Mais c'est alors faux !
Autre approche : dans l'implication, la conclusion est vraie.
Si l'hypothèse est vraie, l'implication est correcte, et un menteur ne peut l'énoncer.
Si l'hypothèse est fausse, l'implication est vraie. Même histoire.

Bilan : les deux sont sincères, et on est mardi ou jeudi.

Si un sincère dit « Hier je mentais et demain je mentirai », c'est qu'on est dans une structure M S M.
Ce peut être le loir le mardi. Et c'est tout.

Si un menteur dit « Hier je mentais et demain je mentirai », c'est donc que « Hier j'étais sincère ou demain je serai sincère ».
Ceci autorise les trois types

M M S	S M S	S M M

Loir le mercredi.	Loir le dimanche.	Loir le lundi.	Chapelier le vendredi.	Chapelier le dimanche.

◦27◦

Décomposez f en éléments simples et calculez $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n :

$f = x \longmapsto \frac{1}{1-x}$	$f = x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$	$f = x \longmapsto \frac{1}{x^2-3.x+2}$	$f = x \longmapsto \frac{x^2-4.x-14}{x^3+3.x^2-6.x-8}$

Pour la décomposition, certaines sont déjà des éléments simples :

$f = x \longmapsto \frac{1}{1-x}$	$f = x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$	$f = x \longmapsto \frac{1}{x^2-3.x+2}$	$f = x \longmapsto \frac{x^2-4.x-14}{x^3+3.x^2-6.x-8}$
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$	$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$	$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+4}$

(on a trouvé une racine évidente du dernier, puis factorisé).

On calcule ensuite les dérivées successives d'un élément simple de la forme $x \longmapsto \frac{1}{x+a}$. Mais surtout, on l'écrit $x \longmapsto (x+a)^{-1}$.

$x \longmapsto (x+a)^{-1}$	$x \longmapsto -(x+a)^{-2}$	$x \longmapsto 2.(x+a)^{-3}$	$x \longmapsto -6.(x+a)^{-4}$	$x \longmapsto 24.(x+a)^{-5}$

On émet une conjecture

$$\Big(x \longmapsto (x+a)^{-1}\Big)^{(n)} = \Big(x \longmapsto (-1)^n.n!.(x+a)^{-n-1}\Big)$$

avec • clignotant $(-1)^n$
• stalactite de factorielle $n!$
• exposant qui s'éloigne $(x+a)^{-n-1}$
Elle est validée pour les premières valeurs de n.
On la consolide par une hérédité de récurrence.

Pour n donné, on suppose $\Big(x \longmapsto (x+a)^{-1}\Big)^{(n)} = \Big(x \longmapsto (-1)^n.n!.(x+a)^{-n-1}\Big)$ et on redérive :

$$\Big(\Big(x \longmapsto (x+a)^{-1}\Big)^{(n)}\Big)' = \Big(x \longmapsto (-1)^n.n!.(-n-1).(x+a)^{-n-1-1}\Big)$$

$$\Big(\Big(x \longmapsto (x+a)^{-1}\Big)^{(n)}\Big)' = \Big(x \longmapsto (-1)^{n+1}.(n+1)!.(x+a)^{-(n+1)-1}\Big)$$

La formule est validée. Reste à l'appliquer à divers a :

$f = x \longmapsto \frac{1}{1-x}$	$f = x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{2}.\Big(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\Big)$
$\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$	$\frac{n!}{2}.\Big(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\Big)$
$f = x \longmapsto \frac{1}{1-x}$	$f = x \longmapsto \frac{x^2-4.x-14}{x^3+3.x^2-6.x-8}$
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+4}$
$\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$	$(-1)^n.n!.\Big(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x-2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+4)^{n+1}}\Big)$

Il faut savoir jongler entre « je mets $\frac{1}{(x+a)^2}$ sous la forme $(x+a)^{-2}$ plus facile à dériver
je reviens de $(x+a)^{-n}$ à $\frac{1}{(x+a)^n}$ »
Il ne reste plus qu'à calculer en $x=0$.

Attention : N'espérez pas trouver directement une formule pour $f^{(n)}(0)$.
La démarche est « je devine une formule pour $f^{(n)}$
je la démontre par récurrence (avec x qui peut bouger)
j'applique ensuite en $x=0$

∘28∘ ♡ Calculez $\int_0^1 \frac{12.x+18}{(x^3+7.x^2+14.x+8)}.dx$ (factorisez le dénominateur, décomposez en trois éléments simples).

Le dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle, l'application est continue, l'intégrale existe.

Pour que l'exercice soit un exercice de mathématiques, il est bon que le dénominateur ait des racines évidentes (et négatives).
On tente -1 : $-1+7-14+8=0$.
On factorise : $(x^3+7.x^2+14.x+8) = (x+1).(x^2+6.x+8) = (x+1).(x+2).(x+4)$.

On va décomposer $\frac{12.x+18}{(x+1).(x+2).(x+4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+4}$.
On propose l'égalité des numérateurs [3] : $12.x+18 = a.(x+2).(x+4) + b.(x+1).(x+4) + c.(x+1).(x+2)$.
On ne résout pas le système de trois équations à trois inconnues.
On se contente de dire qu'il va avoir une solution.
Et on la trouve par conditions nécessaires :

3. et pas « on identifie » qui donne le sens $\Big(\frac{12.x+18}{(x+1).(x+2).(x+4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+4}\Big) \Rightarrow (a = b\ldots,\ b = \ldots,\ c = \ldots)$, dont on n'a rien à faire puisqu'il part de la réponse cherchée au lieu d'y aboutir

en -1	$-12+18=$	$a.(1).(3)$	$+b.0$	$+c.0$	$a=2$
en -2	$-24+18=$	$a.0$	$+b.(-1).(2)$	$+c.0$	$b=3$
en -4	$-48+18=$	$a.0$	$+b.0$	$+c.(-3).(-2)$	$c=-5$

On notera quand même ici la puissance de raisonnement du matheux face au bourrin calculateur.
Et on notera encore son efficacité rédactionnelle par un simple « on propose/on vérifie » :

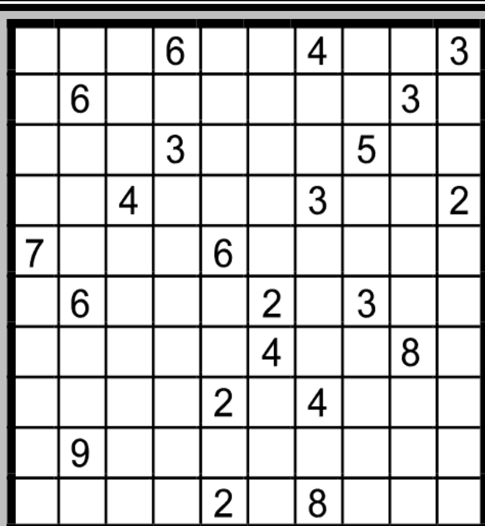
$$\frac{12.x+18}{(x+1).(x+2).(x+4)} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} - \frac{5}{x+4}$$

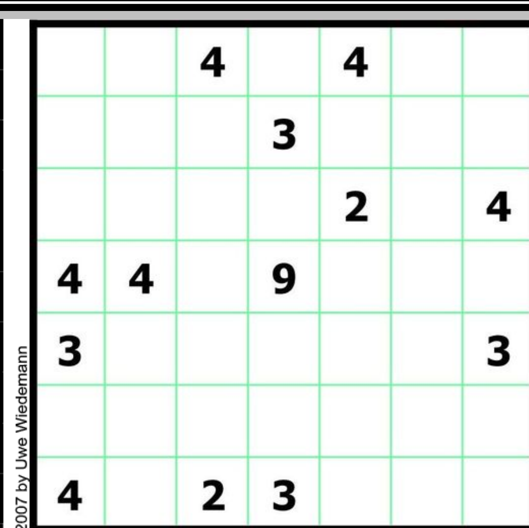
On intègre de 0 à 1 avec trois logarithmes : $2.\ln\left(\frac{1+1}{0+1}\right) + 3.\ln\left(\frac{1+2}{0+2}\right) - 5.\ln\left(\frac{1+4}{0+4}\right)$.

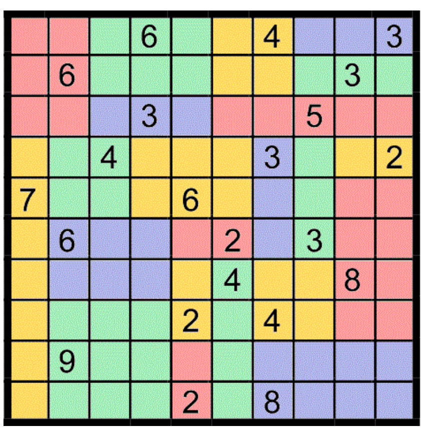
Si on y tient, on termine le calcul (mais la méthode importe plus que le résultat) : $\boxed{\ln\left(\frac{2^9.3^3}{5^5}\right)}$

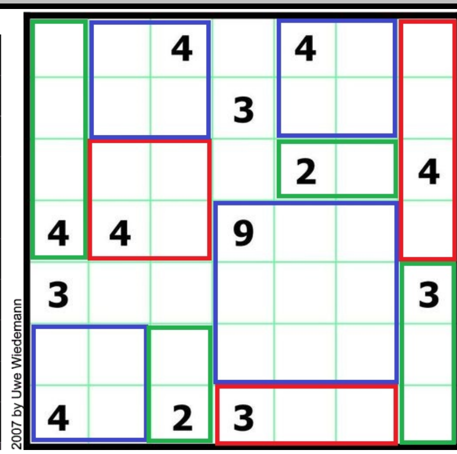
∘29∘

Un shikaku est une grille à découper en rectangles de côtés parallèles aux axes. Dans chacun de ces rectangles, il doit y a voir un nombre et un seul. Et ce nombre indique le nombre de cases du rectangle. Voilà, il n'y a pas plus à savoir.









∘30∘

La relation "*avoir une voyelle en commun avec*" sur l'ensemble des noms de la MPSI2 est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?
Définissez une relation d'équivalence sur les entiers de 1 à 10 dont les classes d'équivalence sont $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$, $\{9, 10\}$.

Réflexive. Chaque nom d'élève est en relation avec lui même.
En effet, chaque nom d'élève a une voyelle en commun avec lui même.
Remarque : | on a la chance d'éviter les noms tchèques ne contenant que des consonnes.

Symétrique. Prenons deux noms A et B. On suppose que A a une voyelle en commun avec B.
Alors B a une voyelle en commun avec A.
On a bien $(A\Re B) \Rightarrow (B\Re A)$.

Transitivité. Prenons trois noms A, B et C.
Supposons $(A\Re B) et (B\Re C)$.

On traduit : une voyelle en commun entre A et B
une voyelle en commun entre B et C

mais de là à ce que ce soit la même...
On cherche un contre-exemple : (par la voyelle A
(par la voyelle I)
Mais on n'a pas .

Pas besoin d'aller chercher un truc avec des congruences tordues.
La relation est « est dans le même ensemble que » (où on désigne par « ensemble » chacun des trois ensembles $\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $\{9,\ 10\}$).

◦31◦ ♡ Déterminez les primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{e^{2.x}+3.e^x+2}$ (éléments simples, changement de variable...).

Le dénominateur est toujours strictement positif, l'application est continue, l'intégrale existe sur tout segment.
On va se débarrasser de ces exponentielles en posant $e^x = t$ (C^1 difféomorphisme) :

$$\int \frac{dx}{e^{2.x}+3.e^x+2} = \int \frac{dt}{t.(t^2+3.t+2)}$$

On décompose évidemment en éléments simples : $\dfrac{1}{t.(t+1).(t+2)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1} + \dfrac{c}{t+2}$.

On détermine a, b et c par la méthode des pôles :
- multiplie par t fais tendre t vers 0 : $a = \dfrac{1}{2}$
- multiplie par $t+1$ fais tendre t vers -1 : $b = -1$
- multiplie par $t+2$ fais tendre t vers -2 : $a = \dfrac{1}{2}$
- vérifie en regardant l'équivalent en $+\infty$

Il ne reste plus qu'à intégrer en $\dfrac{1}{2}.\ln(t) - \ln(t+1) + \dfrac{1}{2}.\ln(t+2)$.
Mais on ne s'arrête surtout pas là, car on a changé de variable. Il faut revenir àx (d'où l'intérêt d'avoir mis en valeur le changement de variable par un cadre adéquat) : une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{e^{2.x}+3.e^x+2}$ est
$\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{2}.\ln\left(\dfrac{e^x.(e^x+2)}{(e^x+1)^2}\right)}$ par exemple.

A retenir : le pas oublier de revenir à la variable initiale.
ne pas écrire « la primitive est » mais bien « une primitive est ».[a]

[a]. J'avais commencé à adorer le serveur sur lequel vous aviez le Q.C.M. de logique booléenne en S.I.I. puis je suis tombé sur « la primitive de ... est .. ; » sur ses Q.C.M. de maths de Terminale, et j'ai failli casser mon ordinateur...

◦32◦ On raisonne avec les entiers modulo 13. Donnez la liste des opposés et des inverses, et des carrés.

entier	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
opposé													
inverse													
carré													

entier	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
opposé	0	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
inverse		1	7	9	10	8	11	2	5	3	4	6	12
carré	0	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1

On note que 8 est à la fois l'opposé de 5 ($8+5=13=0$) et son inverse ($5\times 8 = 40 = 1$).

Bonus qui servira dans cet exercice : liste de multiples de 13 : 0, 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130.

Résolvez les équations et systèmes suivants :

$2.x+1=4$	$x^2+6.x=0$	$x^2+6.x=7$	$\begin{cases} x+7.y=0 \\ 3.x+5.y=0 \end{cases}$
$\begin{cases} x+2.y=5 \\ 3.x+5.y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x+7.y=5 \\ 3.x+5.y=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 4.x+7.y=5 \\ x+5.y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$

$2.x+1=4$	$x^2+6.x=0$	$x^2+6.x=7$	$\left\{\begin{array}{rrcl} x & +7.y & = & 0 \\ 3.x & +5.y & = & 0 \end{array}\right.$
8	0 et 7	1 et 6	(0, 0)
$\left\{\begin{array}{rrcl} x & +2.y & = & 5 \\ 3.x & +5.y & = & 2 \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{rrcl} x & +7.y & = & 5 \\ 3.x & +5.y & = & 3 \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{rrcl} 4.x & +7.y & = & 5 \\ x & +5.y & = & 2 \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{rrcl} x & +y & = & 5 \\ x^2 & +y^2 & = & 2 \end{array}\right.$
(5, 0)	(3, 4)	pas de solution	

On commence simple : $2.x+1=4 \Leftrightarrow 2.x=3 \Leftrightarrow 7.2.x=7.3 \Leftrightarrow x=8$.

Un corps est intègre : $x^2+6.x=0 \Leftrightarrow x.(x+6)=0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ } ou \text{ } x+6=0)$.

$x^2+6.x=7 \Leftrightarrow (x+3)^2-9=7 \Leftrightarrow (x+3)^2=3 \Leftrightarrow (x+3)^2-4^2=0 \Leftrightarrow (x+3+4).(X+3-4)=0$
Et on a deux solutions : $x=-7$ ou $x=1$.
On pouvait aussi dire qu'on avait une racine évidente : 1. Il suffisait de trouver l'autre par la somme des racines.
Sinon, on calculait : $\Delta=6^2-4.(-7)=10+2=12$. C'est un carré parfait : $12=5^2$.
On a donc deux racines : $(-6+5).2^{-1}=-1.7=6$ et $(-6-5).2^{-1}=2.7=1$.

Le système $\left\{\begin{array}{rrcl} x & +7.y & = & 0 \\ 3.x & +5.y & = & 0 \end{array}\right|$ n'aura qu'une solution. Et on la devine tout de suite.
On peut aussi combiner $10.(L1)+1.(L2)$. On a ainsi $13.x+75.y=0$ soit $10.y=0$.
y est nul et x l'est à son tour.

Par substitutions : $\left\{\begin{array}{rrcl} x & +2.y & = & 5 \\ 3.x & +5.y & = & 2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcl} x & =11.y & + & 5 \\ 3.x & +5.y & = & 2 \end{array}\right|$.
La seconde équation donne alors $(33+5).y+15=2$ c'est à dire $12.y=0$. y vaut 0 et on reporte pour x.

Pour $\left\{\begin{array}{rrcl} x & +7.y & = & 5 \\ 3.x & +5.y & = & 3 \end{array}\right|$ on peut encore substituer ou combiner.
Encore avec $10.(L1)+(L2)$ j'élmine x et récupère y.
On peut aussi écrire $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Le cours de Terminale donne l'inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sous la forme $(a.d-b.c)^{-1}.\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
On a donc
$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}=(5-21)^{-1}.\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=(5-21)^{-1}.\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=10^{-1}.\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=4.\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Finalement : $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et on vérifie : $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 39 \\ 26 & 53 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\left\{\begin{array}{rrcl} 4.x & +7.y & = & 5 \\ x & +5.y & = & 2 \end{array}\right|$ est un piège.
Quand on reporte $x=2+8.y$ dans la première, on obtient $39.y+8=5$ ce qui est impossible.
Il n'y a pas de solution.
Matriciellement, $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ a un déterminant nul. Elle n'est pas inversible.
D'ailleurs, si on multiplie la seconde équation par 4, on obtient $4.x+20.y=8$ c'est à dire $4.x+7/.y=8$. C'est impossible.

$\left\{\begin{array}{rrcl} x & +y & = & 5 \\ x^2 & +y^2 & = & 2 \end{array}\right|$ donne $\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & & = & 5 \\ x^2 & +y^2 & +2.x.y & = & 25 \\ x^2 & +y^2 & & = & 2 \end{array}\right|$ puis $\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & & = & 5 \\ x^2 & +y^2 & +2.x.y & = & 12 \\ x^2 & +y^2 & & = & 2 \end{array}\right|$ et même $\left\{\begin{array}{rrr} x & +y & \\ & & 2.x.y \\ x^2 & +y^2 & \end{array}\right.$
On tient la somme et le produit : x et y sont les deux racines de $X^2-5.X+5$.

On l'avait aussi en reportant $y=5-x$ dans la seconde : $x^2+(5-x)^2=2$ devient $2.x^2-10.x+25=2$ puis $2.x^2-10.x+23=0$ et même $2.x^2-10.x+10=0$.
Vous voyez la simplificaton par 2 ?

On écrit $X^2-5.X+5=X^2+8.X+5=X^2+8.X+18=(X+4)^2+2=(X+4)^2-11$.
Mais 11 n'est pas un carré parfait.
Il n'y aura pas de solution.

L'équation $x^2 + 7.x =$  a une racine double. Retrouvez la ainsi que la tache.

On note a le coefficient : $x^2 + 7.x + a = 0$.
Le discriminant vaut $49 - 4.a$ c'est à dire $10 - 4.a$.
Il est nul pour $4.a = 10$. On multiplie par 10 : $a = 9$.

On peut aussi dire que a est le produit des racines, et -7 leur somme.
Mais si la somme vaut 6 (oui, c'est -7), et que la racine est double, c'est qu'elle vaut 3.
Et le produit 3.3 vaut bien 9.

On pouvait aussi mettre sous forme canonique le polynôme : $x^2 + 7.x + a = x^2 - 6.x + a = (x-3)^2 - 9 + a$.
On retrouve $a = 9$ pour qu'il n'y ait qu'une racine double.

Montrez que le système $\left\{ \begin{array}{ccc} 6.x & +2.y & = & 5 \\ 5.x & +6.y & = & 2 \end{array} \right|$ a plusieurs solutions (combien ?).

C'est étrange. On a deux équations dit l'élève.
Non, on n'en a qu'une.
Multipliez la première équation par 3, et vous avez la seconde : $6 \times 3 = 18 = 5$, $2 \times 3 = 6$ et $5 \times 3 = 15 = 2$.

On a donc juste $6.x + 2.y = 5$.
Pour chaque x on a un y : $y = (5 - 6.x).2^{-1} = (5 + 7.x).7 = 35 + 49.x = 9 + 10.x$.
On a donc treize solutions.

Ajustez l'étoile pour que $\left\{ \begin{array}{cccc} 5.x & +y & = & \star \\ x & +8.y & = & 2 \end{array} \right|$ ait plusieurs solutions.

Il faut là encore que les deux équations soient la même (ou plutôt soient proportionnelles).
On passe de la seconde à la première en multipliant par 5 : x donne $5.x$, $8.y$ donne $39.y$ et c'est bien y.
On va donc demander $\star = 5.2 = 10$.

$x^3 + 10.x^2 + 4.x + 11 = 0$ a pour racines a, b et c. Calculez $a^2 + b^2 + c^2$ puis $a^3 + b^3 + c^3$.
Qui est alors l'équation (à coefficients entiers) dont les racines sont a^{-1}, b^{-1} et c^{-1}.

Les formules de Viète sont encore valables.
$a + b + c = -10 = 3$, $a.b + a.c + b.c = 4$ et $a.b.c = -11 = 2$.

Classiquement : $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2.(a.b + a.c + b.c) = 1$.

Ensuite : $a^3 = -10.a^2 - 4.a - 11$. On fait de même pour b et c.
On some et on utilise les résultats précédents.

Le polynôme de racines « les inverses » est juste à renverser : $11.X^3 + 4.X^2 + 10.X + 1$.

Un catcheur, un physicien et un mathématicien sont sujets à une expérience : on les enferme dans une pièce avec chacun une boîte d'épinards, fermée, et sans ouvre-boite. Au bout de 24 heures, on va voir ce qu'il sont devenus.
Le catcheur réussit à ouvrir sa boîte : « Eh bien, j'ai simplement violemment projeté la boîte contre le mur. L'impact a été tel qu'elle s'est ouverte », explique-t-il.
Le physicien réussit également à ouvrir sa boîte : « J'ai observé le solide, et calculé ses points de rupture. J'ai alors effectué une pression de manière à exercer une force maximale sur ceux-ci, et la boîte s'est tout naturellement ouverte. »
Le mathématicien, enfin, est retrouvé prostré dans un coin de la pièce, la sueur ruisselant sur son visage, et sa boîte de conserve, fermée, entre les pieds : « Admettons que la boîte est ouverte... Admettons que... »
Une variante propose : À l'arrivée de l'expérimentateur, la boîte est encore fermée et le mathématicien a disparu. Mais d'étranges bruits proviennent de la boîte... Quand l'expérimentateur l'ouvre, il découvre le mathématicien : « Argh ! Une erreur de signe quelque part ! »
Une dernière alternative : Le physicien se débrouille comme cela a été décrit ci-dessus, et le mathématicien est sauvé à temps. Il est alors mené vers les cellules des autres sujets de l'expérience. Au catcheur il dit alors : « Oh, une méthode vraiment grossière. » Dans la cellule du physicien, il regarde la boîte puis les formules, pointe du doigt un tableau et annonce : « Eh bien, ces limites ne peuvent être interverties, et cette intégrale n'existe pas dans $\mathbb{R}$ ».

∘33∘ ♡ On veut calculer $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.dx$ notée I par changement de variable $u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Exprimez x à l'aide de u. Calculez dx.
Justifiez $I = \int_0^1 \frac{4.u^2}{(1+u^2)^2}.du$ (attention, les bornes sont en u et plus en x, d'accord ?).
Intégrez par parties (en dérivant u). Justifiez : $I = \frac{\pi}{2} - 1$.
Calculez aussi I en changeant de variable : $x = \cos(2.\theta)$. Exprimez dx à l'aide de θ et $d\theta$ et exprimez $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ à l'aide de θ. Retrouvez la valeur de I.

On élève au carré $u^2 = \frac{1-x}{1+x}$ donc $u^2.(1+x) = 1-x$ et finalement $x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.
Quand u va de 0 à 1, x va de 1 à 0 (en décroissant, oui !). Et quand x va de 0 à 1, u va de 1 à 0.
On dérive : $\frac{dx}{du} = \frac{-4.u}{(1+u^2)^2}$ (tiens, un signe moins).
L'intégrale devient $\int_{u=1}^{u=0} u.\frac{-4.u}{(1+u^2)^2}.du$ On remet les bornes dans l'ordre et le signe moins s'en va.

Comme proposé, on intègre par parties

u	$\hookrightarrow$	1
$\frac{4.u}{(1+u^2)^2}$	$\hookleftarrow$	$\frac{-2}{1+u^2}$

On a cette fois $\int_0^1 u.\frac{4.u}{(1+u^2)^2}.du = \Big[\frac{-2.u}{1+u^2}\Big]_0^1 + 2.\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}$.
Le terme de compensation s'intègre en Arctangente. On a le résultat demandé.

Reprenons $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.dx$ en posant $x = \cos(2.\theta)$ ou plutôt $\theta = \frac{Arccos(x)}{2}$.
On a $dx = -2.\sin(2.\theta).d\theta$. Les bornes deviennent $\pi/4$ et 0.
Et $\frac{1-\cos(2.\theta)}{1+\cos(2.\theta)} = \frac{2.\sin^2(\theta)}{2.\cos^2(\theta)}$ (trigonométrie).
L'intégrale devient $\int_{\pi/4}^{0} \sqrt{\tan^2(\theta)}.(-2.\sin(2.\theta)).d\theta$. Bien parti.
On efface toute valeur absolue car l'intervalle est bien choisi $\int_{\pi/4}^{0} \tan(\theta).(-2.\sin(2.\theta)).d\theta$.
On retape les bornes $2.\int_0^{\pi/4} \tan(\theta).\sin(2.\theta).d\theta$.
On remplace $\sin(2.\theta)$ par $2.\sin(\theta).\cos(\theta)$. On a maintenant $4.\int_0^{\pi/4} \sin^2(\theta).d\theta$.
On linéarise : $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2.\theta)}{2}$ et on peut intégrer en $\Big[2.\theta - \sin(2.\theta)\Big]_0^{\pi/4}$.

∘34∘ ♡ Calculez $\int_0^{5.\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta$. (gare au piège).

Ce n'est pas $\int_0^{5.\pi} \theta.d\theta$. En effet, $Arccos(\cos(\theta))$ ne se simplifie pas.
L'application $\theta \longmapsto Arccos(\cos(\theta))$ est $2.\pi$ périodique (merci le cosinus).
Il suffit de calculer donc $\int_0^{\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta + \int_{\pi}^{3.\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta + \int_{3.\pi}^{5.\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta$ par relation de Chasles.
Et $\int_{\pi}^{3.\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta$ est égal à $\int_{-\pi}^{\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta$. De même pour $\int_{3.\pi}^{5.\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta$.
On a donc $\int_0^{5.\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta = \int_0^{\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta + 2.\int_{-\pi}^{\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta$.
Mais l'application $\theta \longmapsto Arccos(\cos(\theta))$ est paire. On a donc $\int_{-\pi}^{\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta = 2.\int_0^{\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta$.
Il vient $\int_0^{5.\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta = 5.\int_0^{\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta$.
Et maintenant, on est sur l'intervalle « de bijectivité » : $\int_0^{\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta = \int_0^{\pi} \theta.d\theta$.

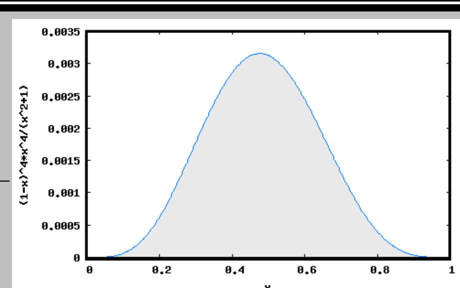
Conclusion : $\boxed{\int_0^{5.\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta = \dfrac{5.\pi^2}{2}}$

Graphiquement, avec la fonction en dents de scie, tout devient évident.

∘35∘

♠ On se propose de résoudre l'équation $x^4 + 11.x^3 - 92.x + 80 = 0$ d'inconnue complexe x, sans passer par la recherche de racines évidentes.
Dérivez deux fois, déduisez ses variations. déduisez que l'équation admet quatre racines réelles que l'on peut ordonner : $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$. Précisez le signe de chacune.
Calculez $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$, calculez $r_1.r_2.r_3.r_4$, calculez $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} + \dfrac{1}{r_4}$.
Prouvez $(r_1)^2 + (r_2)^2 + (r_3)^2 + (r_4)^2 = 121$.
On pose alors : $s_1 = r_1.r_2 + r_3.r_4$, $s_2 = r_1.r_3 + r_2.r_4$ et $s_3 = r_1.r_4 + r_2.r_3$.
Calculez $s_1 + s_2 + s_3$. Montrez : $s_1.s_2 + s_1.s_3 + s_2.s_3 = -1332$ et aussi $s_1.s_2.s_3 = 18144$.
Donnez l'équation de racines s_1, s_2 et s_3 sous la forme $z^3 = p.z + q$ chère à Tartaglia.
Appliquez les formules de Cardan pour trouver que s_1, s_2 et s_3 valent 42, -18 et -24.
Justifiez que c'est s_1 *(c'est à dire $r_1.r_2 + r_3.r_4$)* qui vaut 42. Que vaut alors $r_1.r_2.r_3.r_4$?
Trouvez alors $r_1.r_2$ et $r_3.r_4$.
On pose à présent : $y = r_1 + r_2 - r_3 - r_4$. Montrez : $y^2 = 289$. Trouvez alors y (attention au signe).
Déduisez : $r_1 + r_2 = -14$ et $r_3 + r_4 = 3$.
Trouvez alors les valeurs de r_1, r_2,r_3 et r_4. Enfin, félicitez LUDOVICO FERRARI.

∘36∘



Calculez le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^4.(1-X)^4$ par $1 + X^2$.
Déduisez : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4.(1-x)^4}{1+x^2}.dx = \frac{22}{7} - \pi$.
Donnez le maximum de $x.(1-x)$ quand x décrit $[0,\ 1]$. Majorez l'erreur commise quand on remplace π par $22/7$.

On divise

$$\begin{array}{cccccccc|ccccc}
X^8 & -4.X^7 & +6.X^6 & -4.X^5 & +X^4 & & & & X^2 & + & 1 & & \\
-(X^8 & & +X^6) & & & & & & - & - & - & - & - \\
 & -4.X^7 & +5.X^6 & -4.X^5 & +X^4 & & & & X^6 & -4.X^5 & +5.X^4 & -4.X^2 & +4 \\
 & -(-4.X^7 & & -4.X^5) & & & & & & & & & \\
 & & 5.X^6 & & +X^4 & & & & & & & & \\
 & & -(5.X^6 & & +5.X^4) & & & & & & & & \\
 & & & & -4.X^4 & & & & & & & & \\
 & & & & -(-4.X^4 & -4.X^2) & & & & & & & \\
 & & & & & 4.X^2 & & & & & & & \\
 & & & & & -(4.X^2 & +4) & & & & & & \\
 & & & & & & -4 & & & & & &
\end{array}$$

Le quotient vaut $X^6 - 4.X^5 + 5.X^4 - 4.X^2 + 4)$ et le reste -4.

On décompose et on intègre :

$$\int_0^1 \frac{x^4.(1-x)^4}{x^2+1}.dx = \left[\frac{x^7}{7} - 4.\frac{x^6}{6} + 5.\frac{x^5}{5} - 4.\frac{x^3}{3} + x - 4.Arctan(x)\right]_{x=0}^{A}$$

Tous calculs faits : $\boxed{\dfrac{22}{7} - \pi}$

Et vous savez quoi ? A l'élémentaire, on vous donne l'approximation $\pi \simeq \frac{22}{7}$ à ... oui, à quoi près ?
Beh justement, $0 \leqslant x.(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$ sur $[0,\ 1]$ (le maximum est au milieu, en $\dfrac{1}{2}$, sommet de la parabole, moyenne des racines).
On élève à la puissance 4, on divise par $1 + x^2$ qui ne fait que varier entre 1 et 2 : $0 \leqslant \dfrac{x^4.(a-x)^4}{1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{2^8}$.
L'erreur se majore par 2^{-8}. On montre qu'elle st en fait de l'ordre de 2^{-10} même. Mais pas ici.

La valeur $\frac{22}{7}$ de l'école élémentaire est en fait la deuxième fraction continuée de π :

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1+}}}}}$$

∘37∘

Oui, ce sont des exposants : $1^{\left(\sum\limits_{k=0}^{2018} k\right)} + j^{\left(\sum\limits_{k=0}^{2018} k^2\right)} + (j^2)^{\left(\sum\limits_{k=0}^{2018} k^3\right)}$.

La somme $\sum\limits_{k=0}^{2018} k$ vaut $\frac{2018.2019}{2}$. Il y a un facteur 3 au numérateur dans 2019, et aucun au dénominateur.
$\sum\limits_{k=0}^{2018} k$ est un multiple de 3. Le premier terme vaut 1, mais bon, on le savait déjà : $1^N = 1$.

Passons à $\sum\limits_{k=0}^{2018} k^2$, là encore modulo 3 puisque cet entier est juste un exposant de j.
On regroupe trois par trois : $(0^2 + 1^2 + 2^2) + (3^2 + 4^2 + 5^2) + \ldots + (2016^2 + 2017^2 + 2018^2)$.
Proprement : $\sum\limits_{p=0}^{672} ((3.k)^2 + (3.k+1)^2 + (3.k+2)^2)$.
Mais pour chaque groupe : $(3.k)^2 + (3.k+1)^2 + (3.k+2)^2 = 27.k^2 + 18.k + 5 = 2\ [3]$.
On somme 673 termes congrus à 2 : La somme est congrue à 2 modulo 3.
Le terme du milieu est donc j^2.

On pouvait aussi écrire $\sum\limits_{k=0}^{2018} k^2 = \frac{2018.2019.(2.2018+1)}{6}$ et réduire ensuite modulo 3.

On réduit aussi modulo 3 : $\sum\limits_{k=0}^{2018} k^3 = \sum\limits_{p=0}^{672} ((3.k)^3 + (3.k+1)^3 + (3.k+2)^3)$.
Encore une fois : $(3.k)^3 + (3.k+1)^3 + (3.k+2)^3 = 0\ [3]$.
Qu'importe le nombre de termes, la somme vaut 0 modulo 3.
Le terme $(j^2)^{\left(\sum\limits_{k=0}^{2018} k^3\right)}$ vaut 1.

La grande somme vaut $1 + j^2 + 1$. On se contentera de $-j + 1$.

∘38∘

♡ On définit $f = (x, y) \longmapsto (3.x + 2.y,\ 4.x + 5.y)$. Montrez qu'elle n'est pas une bijection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans lui même.
On pose $E = \{0, 1, 2, \ldots 18\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 19. Montrez que f est une bijection de $E \times E$ dans lui même.
On pose $E = \{0, 1, 2, \ldots 20\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 21. Montrez que f n'est pas une bijection de $E \times E$ dans lui même.
On pose $E = \{0, 1, 2, \ldots 19\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 20. f est elle une bijection de $E \times E$ dans lui même.
(pour la bijectivité, la bonne démarche sera de trouver la bijection réciproque).

On vérifie déjà que f va bien de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans lui même : si a et b sont deux entiers relatifs, alors $3.a + 2.b$ et $4.a + 5.b$ sont bien deux entiers aussi.

Le défaut serait il un défaut d'injectivité ?
Est il possible que deux couples différents $(x,\ y)$ et $(a,\ b)$aient la même image ?
On suppose $\begin{array}{rrcrr} 3.a & +2.b & = & 3.x & +2.y \\ 4.a & +5.b & = & 4.x & +5.y \end{array}$. On combine $\begin{array}{rrcrr} 12.a & +8.b & = & 12.x & +8.y \\ 12.a & +15.b & = & 12.x & +15.y \end{array}$

on soustrait : $\begin{array}{cccc} 12.a & +8.b & = & 12.x & +8.y \\ & 7.b & = & & 7.y \end{array}$.
On aboutit à $b = y$ puis $x = a$, d'où $(a,\ b) = (x,\ y)$.
L'application est injective.

C'est donc un défaut de surjectivité qu'on doit détecter.
Existe-t-il des éléments de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui n'ont pas d'antécédent ?
Par exemple $(0,\ 0)$ en a un et c'est $(0,\ 0)$.
$(5,\ 9)$ a un antécédent et c'est $(1,\ 1)$
Mais $(1,\ 0)$ a-til un antécédent ? Pourquoi lui, pourquoi pas...
On doit résoudre $\begin{array}{cccc} 3.a & +2.b & = & 1 \\ 4.a & +5.b & = & 0 \end{array}$. On trouve $a = \dfrac{5}{7}$ et $b = \dfrac{-4}{7}$ (unique antécédent possible d'ailleurs).
Mais cet antécédent n'est pas dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, c'est donc foutu.

Plus généralement, $(\alpha,\ \beta)$ a pour unique antécédent $\left(\dfrac{5.\alpha - 2.\beta}{7},\ \dfrac{3.\beta - 4.\alpha}{7}\right)$ (résolution de système).
Et il y a bien des cas où ce seul antécédent posisible n'est pas dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Remarque	de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ elle était bijective, avec pour bijection réciproque $(\alpha,\ \beta) \longmapsto \left(\dfrac{5.\alpha - 2.\beta}{7},\ \dfrac{3.\beta - 4.\alpha}{7}\right)$.

A traiter pour les opérations modulo 19, en trouvant l'expression de la bijection réciproque.

Si on calcule bien :

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix} 3.x + 2.y \\ 4.x + 5.y \end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix} 17.(3.x + 2.y) + 16.(4.x + 5.y) \\ 13.(3.x + 2.y) + 14.(4.x + 5.y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
	f		f^{-1}	

dansles deux sens :

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix} 17.a + 16.b \\ 13.x + 14.y \end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix} 3.(17.a + 16.b) + 2.(13.x + 14.y) \\ 4.(17.a + 16.b) + 5.(13.x + 14.y) \end{pmatrix}$
	f^{-1}		f	

En revanche, modulo 21, on détecte un défaut d'injectivité : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ par exemple ont la même image (c'est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Et par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'a pas d'antécédent.

◦39◦

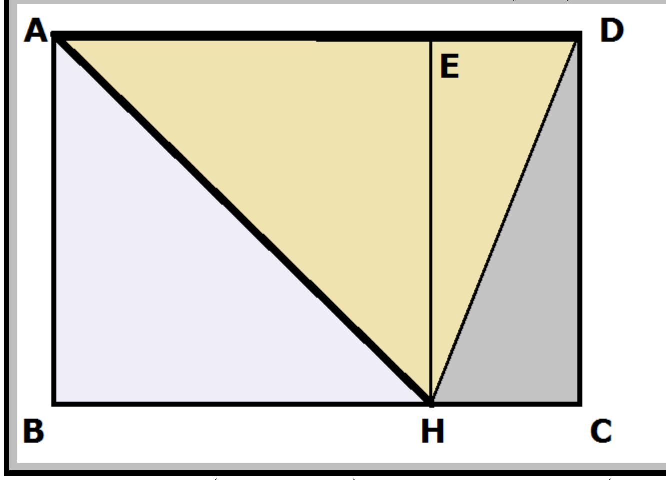
On veut résoudre $160.X^3 - 240.X + 90.X - 9 = 0$ d'inconnue réelle X.
En étudiant les variations de l'application $x \longmapsto 160.x^3 - 240.x + 90.x - 9$, montrez que les trois solutions sont réelles. calculez leur somme, la somme de leurs carrés et la somme de leurs inverses.
Montrez que par une translation de $1/2$, l'équation devient $160.Y^3 - 30.Y - 4 = 0$ d'inconnue Y.
Posez alors $Y = \alpha.\cos(\theta)$ et ajustez α pour que l'équation prenne la forme $4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta) =$ .
Déterminez alors $3.\theta$ *(modulo $2.\pi$)* et déduisez les valeurs de θ *(modulo $2.\pi/3$)* puis les trois valeurs de $\cos(\theta)$.
Indiquez la forme des trois solutions réelles de l'équation initiale.

◦40◦

Résolvez $x^2 - x + 1 = 7$ dans $\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}}$ (entiers de 0 à 6 pour les lois modulo 7).

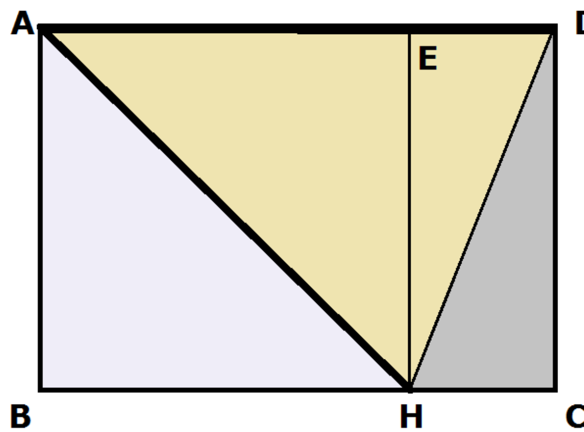
On peut tester les sept nombres.
Sinon $\Delta = 1 - 4 = -3 = 4 = 2^2$.
Les deux racines se calculent $(1 + 2).2^{-1} = 3.4 = 12 = 5$
$(1 - 2).2^{-1} = -1.4 = -4 = 3$
On vérifie si nécessaire : $\boxed{S = \{3,\ 5\}}$

◦41◦ On a donné dans le cours la valeur de $\tan(\pi/8)$. Justifiez la grâce au schéma ci-contre.



On a un rectangle (A, B, C, D) mais aussi un carré (A, B, H, E) *(citer en tournant dans le sens trigonométrique)*.

On va décider que la longueur du carré vaut 1. Sa diagonale mesure $\sqrt{2}$. Ceci nous conduit à penser que AD vaut aussi $\sqrt{2}$.
Il reste par soustraction : $ED = \sqrt{2} - 1$. Par les formules dans le triangle rectangle (D, E, H) : $\tan(\widehat{DHE}) = \dfrac{\sqrt{2}-1}{1}$.
Il reste à se convaincre que l'angle $\widehat{DHE}$ a pour mesure $\pi/8$.
En A, la bissectrice $(A\ H)$ crée deux angles de mesure $\pi/4$. De même, on a $\widehat{EHA} = \pi/4$.
Le triangle isocèle (D, A, H) a donc un angle $\pi/4$ et deux angles $3.\pi/8$ *(pour que la somme vaille π)*.



Par soustraction, l'angle $\widehat{DHE}$ vaut $\widehat{DHA} - \widehat{EHA}$. C'est $\dfrac{3.\pi}{8} - \dfrac{\pi}{4}$. Gagné.

Sinon, on écrit $\dfrac{2.\tan(\pi/8)}{1-\tan^2(\pi/8)} = \tan(\pi/4) = 1$ *et on ne garde que la racine pertinente.*

Ou alors $\tan(\pi/8) = \dfrac{1-\cos(\pi/4)}{\sin(\pi/4)}$.

◦42◦ ♡♣ Le polynôme $X^n - n.X^{n-1} + \ldots + (-1)^n$ admet n racines réelles positives. Trouvez les.
A priori, il manque plein de coefficients, donc on ne peut pas conclure. Mais rappelez l'inégalité de convexité $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + \ldots a_n}{n}$ et indiquez quand il y a égalité.

Tout va très vite : on note a_1 à a_n les racines.
Les formules de Viète nous donnent la somme des racines : $a_1 + \ldots + a_n = n$.
Et leur produit : $a_1 \ldots a_n = (-1)^n.(-1)^n$.

On passe à la racine n^{ieme} : $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = 1 = \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$.
Les réels positifs sont tels que leur moyenne géométrique est égale à leur moyenne arithmétique.
Or, on connaît déjà bien $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ issue d'une inégalité de convexité (en fait de concavité du logarithme).
Et comme le logarithme est strictement concave, la seule possibilité pour qu'il y ait égalité est que les $a_k$soient tous égaux (sinon, dans la formule, il y a une position strictement au dessus d'une corde).
L'égalité des moyennes force donc la main : tous les $a_i$sont égaux entre eux.

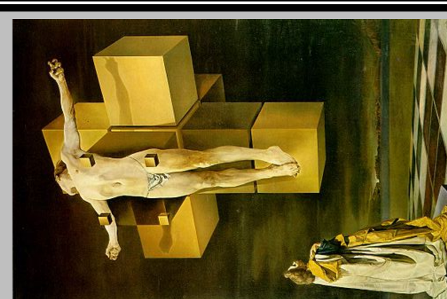
Comme de plus leur somme vaut n, ils valent tous 1.
Et le polynôme est $\boxed{(X-1)^n}$ dont les coefficients sont des binomiaux, comme ce n et ce $(-1)^n$.

◦43◦ ♣ Le polynôme $X^3 + *.X^2 + \sharp.X - 1$ a pour racines $\cos(a)$, $\cos(b)$ et $\cos(c)$. Calculez $\sin(a+b+c)$.

C'est tordu, mais rigolo
Le produit des racines vaut 1.
Et c'est donc le produit de trois cosinus.
Mais quand on multiplie des termes strictement entre -1 et 1, on obtient un produit strictement entre -1 et 1.
La seule possibilité est donc que les trois réels $\cos(a)$, $\cos(b)$ et $\cos(c)$ vaillent 1 ou -1.
En fait, les trois valent 1, ou alors deux valent -1 et le dernier vaut 1.

Les angles sont donc tous trois des multiples de π (pairs ? impairs ? on doit pouvoir être précis mais qu'importe).
Leur somme est un multiple de π et le sinus est nul.

◦44◦ Soit $*$ une loi associative sur un ensemble E
$(\forall(a,b,c),\ (a*b)*c = a*(b*c))$.
Passez de $((a*b)*c)*(d*e)$ à $(a*(b*(c*d)))*e$
(combien d'étapes ?).
Soit $*$ une loi associative et commutative.
Passez de $((a*b)*c)*d$ à $(d*(c*(b*a)))$.
Passez de $((a*b)*c)*d$ à $((d*c)*b)*a$.



Corpus hypercubus (Salvador Dali 1954)

$\Big((a*b)*c\Big)*(d*e)$		$\Big((a*b)*c)*d\Big)*(e)$
		$\Big((a*b)*\Big(c*d\Big)\Big)*(e)$
$\Big((a)*\Big(b*(c*d)\Big)*(e)$		

◦45◦ Le polynôme $X^4 + a.X^3 + b.X^2 + c.X + d$ a pour racines r_1 à r_4. Combien de valeurs peut prendre $(r_1-r_2).(r_1-r_3).(r_1-r_4).(r_2-r_3).(r_2-r_4).(r_3-r_4)$ sous l'action des 4! permutations de la liste d'indices $[1,\ 2,\ 3,\ 4]$? Combien de valeurs peut prendre $r_1 + 2.r_2 + 3.r_3 + 4.r_4$ sous l'action des 4! permutations de la liste d'indices $[1,\ 2,\ 3,\ 4]$? Même question avec $r_1 + 2.r_2 + 3.r_3$.

$(r_1-r_2).(r_1-r_3).(r_1-r_4).(r_2-r_3).(r_2-r_4).(r_3-r_4)$ et son opposé $-(r_1-r_2).(r_1-r_3).(r_1-r_4).(r_2-r_3).(r_2-r_4).(r_3-r_4)$

obtenue par exemple avec $\overrightarrow{(1\ 2)}$ $(r_1-r_2).(r_1-r_3).(r_1-r_4).(r_2-r_3).(r_2-r_4).(r_3-r_4)$ devient
$(r_2-r_1).(r_2-r_3).(r_2-r_4).(r_1-r_3).(r_1-r_4).(r_3-r_4)$ (trois signes moins)

$r_1+2.r_2+3.r_3+4.r_4$	$r_2+2.r_1+3.r_3+4.r_4$	$r_3+2.r_2+3.r_1+4.r_4$	$r_4+2.r_2+3.r_3+4.r_1$
$r_1+2.r_2+3.r_4+4.r_3$	$r_2+2.r_1+3.r_4+4.r_3$	$r_3+2.r_2+3.r_4+4.r_1$	$r_4+2.r_2+3.r_1+4.r_3$
$r_1+2.r_3+3.r_2+4.r_4$	$r_2+2.r_3+3.r_1+4.r_4$	$r_3+2.r_1+3.r_1+4.r_4$	$r_4+2.r_2+3.r_3+4.r_1$
$r_1+2.r_4+3.r_3+4.r_2$	$r_2+2.r_4+3.r_3+4.r_1$	$r_3+2.r_4+3.r_1+4.r_2$	$r_4+2.r_1+3.r_3+4.r_2$
$r_1+2.r_3+3.r_4+4.r_2$	$r_2+2.r_3+3.r_4+4.r_1$	$r_3+2.r_1+3.r_4+4.r_2$	$r_4+2.r_3+3.r_1+4.r_2$
$r_1+2.r_4+3.r_2+4.r_3$	$r_2+2.r_4+3.r_1+4.r_3$	$r_3+2.r_4+3.r_2+4.r_1$	$r_4+2.r_1+3.r_2+4.r_3$
24 valeurs			

On évitera de se prendre la tête avec des questions du type
« serait il possible de choisir a_1 à a_4 pour avoir $r_1+2.r_3+3.r_4+4.r_2 = r_2+2.r_3+3.r_4+4.r_1$ par exemple ».
C'est peut être jouable avec des cas particuliers.
De même d'ailleurs si « par hasard », les quatre r_k sont égaux.

Ensuite, avec $a_1 + 2.a_2 + 3.a_3$ on peut se dire qu'il y a moins de possibilités puisque a_4 n'est pas là.
Mais justement, en écrivant $a_1 + 2.a_2 + 3.a_3 + 0.a_4$ on voit qu'on peut jouer sur « qui sont les trois éléments présents ».
Et on peut reprendre le tableau précédent et voir qu'on a 24 valeurs là encore.

$r_1+2.r_2+3.r_3$	$r_2+2.r_1+3.r_3$	$r_3+2.r_2+3.r_1$	$r_4+2.r_2+3.r_3$
$r_1+2.r_2+3.r_4$	$r_2+2.r_1+3.r_4$	$r_3+2.r_2+3.r_4$	$r_4+2.r_2+3.r_1$
$r_1+2.r_3+3.r_2$	$r_2+2.r_3+3.r_1$	$r_3+2.r_1+3.r_1$	$r_4+2.r_2+3.r_3$
$r_1+2.r_4+3.r_3$	$r_2+2.r_4+3.r_3$	$r_3+2.r_4+3.r_1$	$r_4+2.r_1+3.r_3$
$r_1+2.r_3+3.r_4$	$r_2+2.r_3+3.r_4$	$r_3+2.r_1+3.r_4$	$r_4+2.r_3+3.r_1$
$r_1+2.r_4+3.r_2$	$r_2+2.r_4+3.r_1$	$r_3+2.r_4+3.r_2$	$r_4+2.r_1+3.r_2$
24 valeurs			

∘46∘

On veut résoudre $64.X^3+96.X^2+36.X+3=0$ d'inconnue réelle X, notée (E). Trouvez les réels qui manquent $(E)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cccc} X & = & Y & +a \\ 64.Y^3 & +c.Y & +d & =0\end{array}\right|$ puis $(E)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cccc} X & = & Y & +a \\ Y & = & \alpha.T & \\ 4.T^3 & -3.T & +e & =0\end{array}\right|$. Résolvez l'équation en T puis celle en X.

On ne connaît pas a (translation), on va le trouver par condition nécessaire dont on vérifiera la suffisance.

$64.X^3+96.X^2+36.X+3=64.(Y-a)^3+96.(Y-a)^2+36.(Y-a)+3$

$$64.X^3+96.X^2+36.X+3=\begin{array}{cccc} 64.Y^3 & -192.a.Y^2 & +192.a^2.Y & -64.a^3 \\ & +96.Y^2 & -192.a.Y & +64.a^2 \\ & & +36.Y & -36.a \\ & & & +3\end{array}$$

Posons naturellement $a=\dfrac{1}{2}$ pour annuler la colonne des Y^2.

Il reste $64.Y^3-12.Y+1$.

$(E)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cccc} X & = & Y & +\frac{1}{2} \\ 64.Y^3 & -12.Y & +1 & =0\end{array}\right|$

A présent, on fait un changement d'échelle : $Y=\alpha.T$.

L'équation devient $64.\alpha^3.T^3-12.\alpha.T+1=0$.

On ne peut pas poser à la fois $64.\alpha^3=4$ et $12.\alpha=3$.

C'est donc impossible ?

Non, car on peut avoir des équations proportionnelles. Ce qu'on veut en fait c'est que $64.\alpha^3$ soit à 4 ce que $12.\alpha$ soit à 3.

On va donc imposer : $\dfrac{64.\alpha^3}{4}=\dfrac{12.\alpha}{3}$. On trouve $\alpha=\dfrac{1}{2}$ (ou son opposé).

L'équation devient $8.T^3-6.T+1=0$.

$(E)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cccc} X & = & Y & +\frac{1}{2} \\ Y & = & \frac{1}{2}.T & \\ 4.T^3 & -3.T & +\frac{1}{2} & =0\end{array}\right|$.

Mais en quoi est elle si simple $4.t^3-3.t=\dfrac{-1}{2}$?

Tout dépend de notre niveau en trigonométrie.

Si on connaît la formule $\cos(3.\theta)=4.\cos^3(\theta)-3.\cos(\theta)$, on sent le bout du chemin...

On pose $T=\cos(\theta)$.

L'équation devient $4.\cos^3(\theta)-3.\cos(\theta)=\dfrac{-1}{2}$ c'est à dire $\cos(3.\theta)=-\dfrac{1}{2}$.

Remarque : Un prof rigoureux vous dire « non, on ne pose pas $T=\cos(\theta)$ ». Les grandes lettres formelles comme X ne sont pas des réels.
Depuis le début, on dit qu'on résout $64.x^3+96.x^2+36.x+3=0$ d'inconnue réelle x.
On pose alors $y=x+\dfrac{1}{2}$ et $t=2.y$ puis $\theta=Arccos(t)$.

On trouve les solutions en $3.\theta$: $3.\theta=\pm\dfrac{2.\pi}{3}\ [2.\pi]$.

On trouve les solutions en θ : $\theta=\pm\dfrac{2.\pi}{9}\ \left[\dfrac{2.\pi}{3}\right]$.

On écrit les solutions en θ : $\theta=\pm\dfrac{2.\pi}{9}+\dfrac{2.k.\pi}{3}$ avec k dans $\mathbb{Z}$.

On trouve les solutions en t : $t=\cos\left(\pm\dfrac{2.\pi}{9}+\dfrac{2.k.\pi}{3}\right)$ avec k dans $\mathbb{Z}$.

On trouve les solutions en t : $t=\cos\left(\dfrac{2.\pi}{9}+\dfrac{2.k.\pi}{3}\right)$ avec k dans $\{0,\ 1,\ 2\}$ car le consinus est pair et périodique.

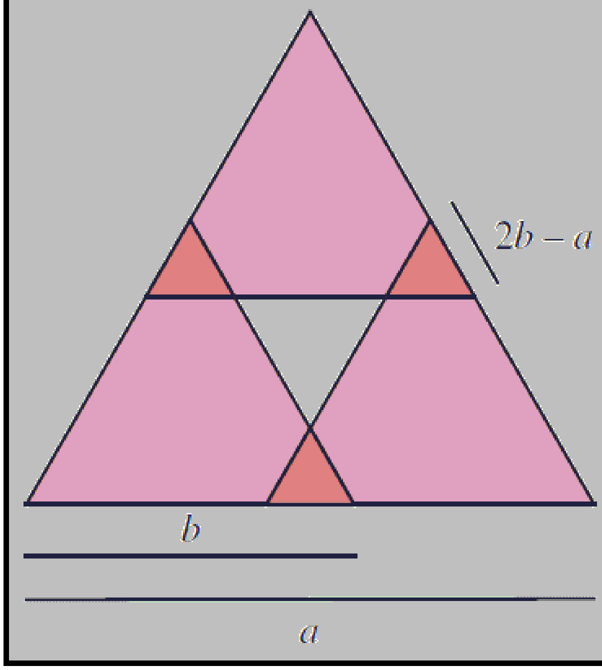
On trouve les solutions en y : $y=\dfrac{1}{2}.\cos\left(\dfrac{2.\pi}{9}+\dfrac{2.k.\pi}{3}\right)$ avec k dans $\{0,\ 1,\ 2\}$.

On trouve les solutions en x : $x=\dfrac{1}{2}.\cos\left(\dfrac{2.\pi}{9}+\dfrac{2.k.\pi}{3}\right)-\dfrac{1}{2}$ avec k dans $\{0,\ 1,\ 2\}$.

Bilan : trois solutions $\boxed{S_x=\left\{\dfrac{1}{2}.\cos\left(\dfrac{2.\pi}{9}\right)-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}.\cos\left(\dfrac{8.\pi}{9}\right)-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}.\cos\left(\dfrac{14.\pi}{9}\right)-\dfrac{1}{2}\right\}}$

∘47∘

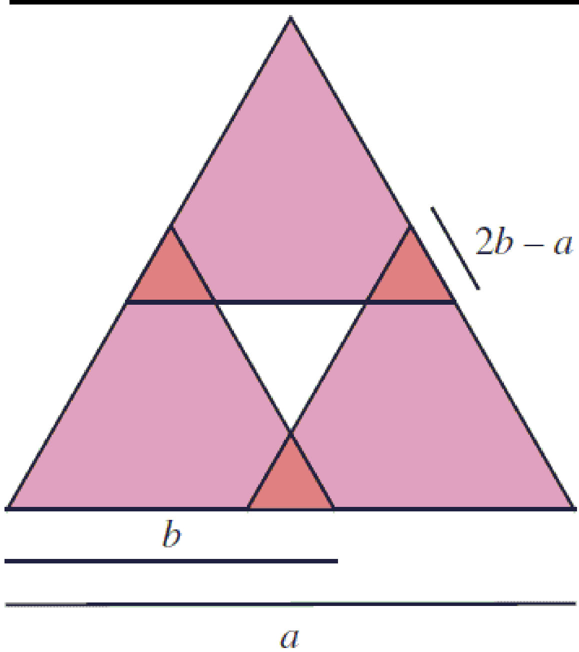
J'ai croisé la preuve suivante de l'irrationalité de $\sqrt{3}$; hélas, elle est en anglais. Help me.



Assuming $a^2 = 3.b^2$ and that the sides of the triangles are as shown in the diagram, that of the triangle in the center equals $2a - 3b$ so that Carpets Theorem implies $(2.a - 3.b)^2 = 3.(2.b - a)^2$, implying the possibility of the infinite descent.

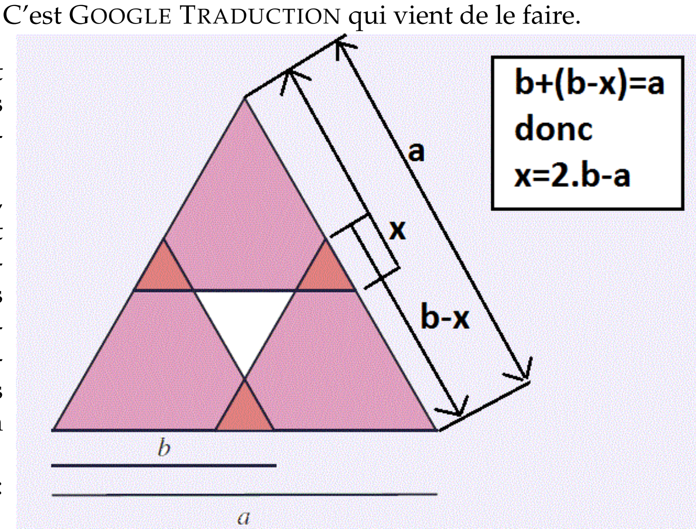
Ah, le théorème des tapis (you may use it or not, as you like), c'est "If two carpets of equal area overlap, then, the overlap aside, their remaining parts have equal areas".

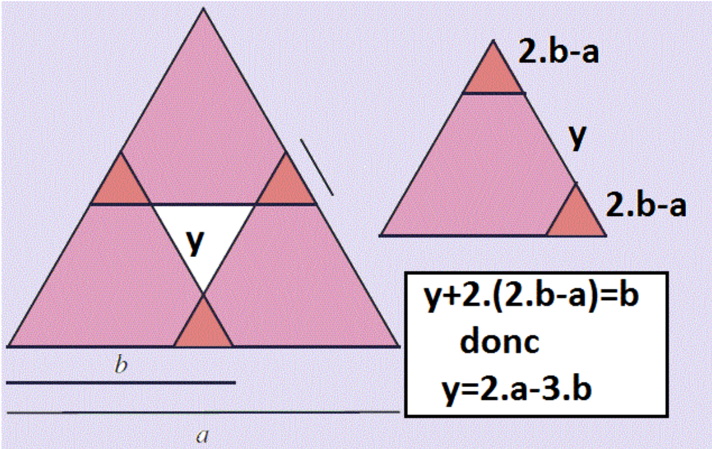
Mettez tout ça en forme et en français. Bref, rédigez la preuve.



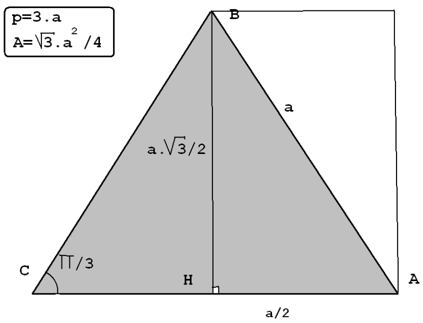
En supposant que $a^2 = 3.b^2$ et que les côtés des triangles sont comme dans le diagramme, celui du triangle au centre est égal à $2.a - 3.b$, de sorte que le théorème des tapis implique $(2.a - 3.b)^2 = 3.(2.ba)^2$, impliquant la possibilité d'une descente infinie.
Ah, le théorème des tapis, c'est "Si deux tapis d'égale surface se chevauchent, alors, le chevauchement de côté, leurs parties restantes ont des surfaces égales".
Mettez tout ça en forme et en français.
C'est Google Traduction qui vient de le faire.

On suppose $a^2 = 3.b^2$. On va faire un raisonnement par l'absurde, avec descente infinie de Fermat. ais pour l'instant, rien n'indique que a et b soient entiers.
On note a le grand côté du triangle équilatéral, avec découpage de longueur b. Déjà, comme b est plus petit que a, on peut découper les petits triangles équilatéraux. Comme b est néanmoins plus grand que $a/2$ (sinon $a^2 \geqslant 4.b^2$), alors on a le chevauchement indiqué plus haut en plus foncé. Sachant $2.b > a$, le recouvrement précis de deux côtés de longueur b sur un côté de longueur a est bien $2.b - a$.
Il reste un triangle au centre. On mesure son côté : $2.a - 3.b$.





On note que $2.a - 3.b$ est positif car sinon on aurait $a \leqslant \frac{3}{2}.b$ puis $a^2 \leqslant \frac{9}{4}.b^2 < 3.b^2$.
On va mesurer ensuite des aires, pour certaines plusieurs fois, car des parties se recouvrent.
On rappelle que l'aire d'un triangle équilatéral est proportionnelle au carré de son côté. Plus précisément, un triangle équilatéral de côté a a pour aire $\sqrt{3}.a^2/2$. Mais même sans connaitre cette constante, il suffit de dire qu'il existe une constante C vérifiant *aire du triangle* $= C.a^2$ pour de simples raisons d'homogénéité ou d'équation aux dimension.



On les appelle

grand triangle	triangle moyen	petit triangle	triangle au centre
côté a	côté b	côté $2.b - a$	côté $2.a - 3.b$
$C.a^2$	$C.b^2$	$C.(2.b - a)^2$	$C.(2.a - 3.b)^2$

et on a aussi trois pentagones irréguliers obtenus en coupant les triangles moyens par les petits :
$C.b^2 - 2.C.(2.b - a)^2$.

On mesure l'aire totale :
un grand est égal à trois moyens, moins trois petits (car comptés deux fois) et un au centre.
On a donc $C.a^2 = 3.b^2 - 3.(2.b - a)^2 + C.(2.a - 3.b)^2$.
On simplifie par C. Et surtout, on rappelle l'hypothèse $a^2 = 3.b^2$.
Il reste bien $3.(2.b - a)^2 = (2.a - 3.b)^2$ comme demandé.

Quel fut le rôle du théorème des tapis : dans le $-3.(2.b - a)^2$. *On a compté deux fois chaque petit triangle à cause du chevauchement.*
Ce serait donc encore $Card(A \cup B) + Card(A \cap B) = Card(A) + Card(B)$
ou même $Aire(A \cup B) + Aire(A \cap B) = Aire(A) + Aire(B)$.

On résume : on est parti de $a^2 = 3.b^2$ et on a obtenu $3.(2.b - a)^2 = (2.a - 3.b)^2$.

Passons à la phase "par l"absurde". S'il existe un couple d'entiers $(a,\ b)$ vérifiant $a^2 = 3.b^2$, alors il existe un nouveau couple $(2.a - 3.b,\ 2.b - a)$ vérifiant $(2.a - 3.b)^2 = 3.(2.b - a)^2$ (vérifiable aussi sans géométrie : $((4.a^2 - 12.a.b + 9.b^2) = 3.(4.b^2 - 4.a.b + a^2))$.
Les deux nombres $2.a - 3.b$ et $2.b - a$ sont encore entiers, par structure d'anneau $(\mathbb{Z}, +, .)$.
Ils sont positifs par constatation déjà faite.
Ils sont plus petits que a et b par construction géométrique.
On a donc un nouveau couple solution, plus petit que le précédent.
Par mise en boucle, on a une suite strictement décroissante d'entiers (ou ici de couples d'entiers). Ceci vient contredire le principe de Fermat.
Ou alors, on fait un raisonnement plus direct.
On suppose qu'on a une solution $(a,\ b)$ vérifiant $a^2 = 3.b^2$ avec a et b entiers et $a + b$ le plus petit possible (non nul).
Et on a alors une nouvelle solution $(2.a - 3.b,\ 2.b - a)$ avec $(2.a - 3.b) - (2.b - a)$ qui a diminué. Ceci contredit la minimalité.

Conclusion : il n'existe pas de couple d'entiers non nuls vérifiant $a^2 = 3.b^2$. $\sqrt{3}$ est irrationnel.

∘48∘ ♡ On définit sur $\mathbb{N}$ la relation $\Re$ par $a\Re b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix}$ *est impair*. cette relation est elle symétrique, réflexive, antisymétrique, transitive ? Qui sont les éléments en relation avec 0 ? Qui sont les éléments en relation avec 1 ?
♯ Quelle est la prochaine année n à venir vérifiant $n\Re(n+1)$? (Python autorisé)

Réflexive. On se donne a, on se demande si on a $\begin{pmatrix} a+a \\ a \end{pmatrix}$ est impair. C'est déjà raté pour a égal à 1.

Symétrique. On se donne a et b. On suppose que $\binom{a+b}{b}$ est impair. Mais par symétrie sur la ligne du triangle, ce nombre vaut aussi $\binom{a+b}{a}$, qui est donc aussi impair.

Transitive. on se donne a, b et c. On suppose que $\binom{a+b}{b}$ et $\binom{b+c}{c}$ sont impairs. Et on se demande si ça a un rapport avec $\binom{a+c}{c}$.
Même en écrivant les binomiaux sous forme de factorielles, on ne voit pas de raison.
On cherche donc un contre-exemple.
$1\Re 0$ car $\binom{1}{0}$ est impair
$0\Re 1$ car $\binom{1}{0}$ est impair (il n'a pas changé)
mais on n'a pas $1\Re 1$ puisque $\binom{2}{1}$ est pair.

Être en relation avec 0 c'est vérifier $\binom{a+0}{0}$ est impair. mais ce coefficient vaut 1. C'est donc toujours vrai.
$\forall a,\ a\Re 0$.

Et pour être en relation avec 1 : on calcule $\binom{a+1}{1} = a+1$. Cet entier est impair si et seulement si a est pair.
$\forall a \in \mathbb{N},\ a\Re 1 \Leftrightarrow a \in 2.\mathbb{N}$.

On veut ensuite $\binom{2.n+1}{n}$ impair (et n plus grand que le millésime de l'année en cours).
On lance une recherche avec Python.

```
def Binomial(n, k) :
....B = 1
....for i in range(k) :
........B = B*(n-i)
........B = B//(i+1)
....return(B)
```

```
n = 2020
while Binomial(2*n+1,n)%2==0 :
....n +=1
```

Et la réponse est 2047. Et elle restera valable un paquet d'années...

Ne soyez pas surpris par la contruction du binomial par

```
....B = 1
....for i in range(k) :
........B = B*(n-i)
........B = B//(i+1)
```

Elle vient de la formule $\binom{n}{k} = \frac{n.(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k}$ avec k termes en haut comme en bas.
La vraie définition et formule pour calculer des binomiaux. Par exemple $\binom{17}{4} = \frac{17.16.15.14}{1.2.3.4}$.
Si vous persistez à utiliser $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$ pour les calculs, vous ne dépasserez jamais le niveau Bac. Désolé de vous le dire pour la dix neuvième fois.
Les méthodes qui vous ont permis d'avoir le bac et de briller en Terminale ne sont pas forcément les meilleures pour continuer au delà.
Vous devez accepter de vous remettre en cause et de ne pas vous contenter de « mais ça marchait jsuq'à présent ».
Pour certains élèves, c'est la chose la plus difficile à faire en Prépas, accepter de casser ses certitudes qui le faisaient réussir face à des camarades nuls en sciences et à des épreuves de bac presque aussi nulles que ces camarades là.

On reconnaît donc le programmeur à « fais moi une fonction `binomial` » :

informaticien	« matheux » de Terminale	physicien

`def Binomial(n, k) :`
`....B = 1`
`....for i in range(k) :`
`........B = B*(n-i)`
`........B = B//(i+1)`
`....return(B)`
	`def Facto(n) :`
	`....P = 1`
	`....for k in range(1, n+1) :#attention`
	`........P *= k`
	`....return(P)`
	
	`def Binomial(n, k) :`
	`....Numer = Facto(n)`
	`....Denom = Facto(k)*Facto(n-k)`
	`....return(Numer//Denom)`
		`from math import *`

La colonne du milieu n'est pas fausse. Mais elle est déplorable.
Sincèrement, vous trouvez intelligent de demander à l'ordinateur de calculer

$$\frac{(1.2.3.45.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17)}{(1.2.3.4).(1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13)}$$

à la place de $\frac{17.16.15.14}{1.2.3.4}$?

∘49∘ Calculez ces variations sur le binôme

$A=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^k$	$B=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^n$
$C=\sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{i}.a^i$	$D=\sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}.a^i$

Attention aux variables de sommation, et surveillez les sommes doubles.

$A=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^k$	$A=(1+a)^n$	binome
$B=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^n$	$B=2^n.a^n$	binome mais a^n sort
$C=\sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{i}.a^i$	$C=\frac{(1+a)^{n+1}-1}{a}$	binome puis géométrique
$D=\sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}.a^i$	$D=\frac{2^n-a.(1+a)^n}{1-a}$	géométrique qui binome

$$C=\sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{i}.a^i=\sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}.a^i\Big)=\sum_{k=0}^{n}(1+a)^k=\frac{1-(1+a)^{n+1}}{1-(1+a)}$$

On traitera à part le cas $a=0$ pour lequel la raison de la suite vaut 1.

$$D=\sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}.a^i=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big(\sum_{i=0}^{k}a^i\Big)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\frac{1-a^{k+1}}{1-a}$$

$$D=\frac{1}{1-a}.\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-a.\sum\binom{n}{k}.a^k\Big)=\frac{2^n-a.(1+a)^n}{1-a}$$

∘50∘ Un polynôme P de degré 6 a six racines r_1 à r_6. On pose $D=r_1.r_2+r_3.r_4+r_5.r_6$. Combien de valeurs peut prendre D sous l'action des permutations σ de la liste $[1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6]$? C'est à dire, si on décide de poser $D_\sigma=r_{\sigma(1)}.r_{\sigma(2)}+r_{\sigma(3)}.r_{\sigma(4)}+r_{\sigma(5)}.r_{\sigma(6)}$, que est le cardinal de $\{D_\sigma\mid\sigma\in\mathbb{S}_6\}$.
Montrez que $\{\sigma\in\mathbb{S}_6\mid D=D_\sigma\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{S}_6,\circ)$. Quel est son cardinal ? Est il commutatif ?

On ne va pas lister les 6! permutations.
On va se dire que r_1 est présente dans un des trois propduits. On va le mettre dans le premier.
On a cinq choix pour dire avec qui elle va : $r_1.r_2$, $r_1.r_3$, $r_1.r_4$, $r_1.r_5$, $r_1.r_6$.
Ensuite, il reste quatre éléments à regrouper en deux groupes de deux : $r_i.r_j+r_p.r_q$.

Il faut choisir le couple $(i,\ j)$ parmi les quatre indices qui restent : $\binom{4}{2}$ choix.

Mais en fait deux fois moins, car le regroupement $r_i.r_j + r_p.r_q$ donne le même groupement « complémentaire » $r_p.r_q + r_i.r_j$.
Total : 5×3 formules possibles.

$r_1.r_2$		$r_1.r_2 + r_3.r_4 + r_5.r_6$	$r_1.r_2 + r_3.r_5 + r_4.r_6$	$r_1.r_2 + r_3.r_6 + r_5.r_4$
$r_1.r_3$		$r_1.r_3 + r_2.r_4 + r_5.r_6$	$r_1.r_3 + r_2.r_5 + r_4.r_6$	$r_1.r_3 + r_2.r_6 + r_5.r_4$
$r_1.r_4$		$r_1.r_4 + r_2.r_3 + r_5.r_6$	$r_1.r_4 + r_2.r_5 + r_3.r_6$	$r_1.r_4 + r_2.r_6 + r_5.r_3$
$r_1.r_5$		$r_1.r_5 + r_2.r_3 + r_4.r_6$	$r_1.r_5 + r_2.r_4 + r_3.r_6$	$r_1.r_5 + r_2.r_6 + r_4.r_3$
$r_1.r_6$		$r_1.r_6 + r_2.r_3 + r_4.r_5$	$r_1.r_6 + r_2.r_4 + r_3.r_5$	$r_1.r_6 + r_2.r_5 + r_4.r_3$

∘51∘ On constate : $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$, $371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$, $370 = 3^3 + 7^0 + 0^3$. Écrivez un programme Python qui cherche les nombres à trois chiffres égaux à la somme des cubes de leurs chiffres.

Autant prendre des entiers de 0 à 9 a, b et c, construire $\overline{abc}$ et comparer à $a^3 + b^3 + c^3$.

```
for a in range(10) :
....for b in range(10) :
.......for c in range(10) :
...........sc = a**3+b**3+c**3
...........n = 100*a+10*b+c
...........if n == sc :
...............print(n)
```

0
1
153
370
371
407

∘52∘ Calculez $\int_a^b x^k.dx$ pour a et b strictement positifs et k réel, par le changement de variable $x = e^t$.

Puisqu'on nous le demande ainsi :

$$\int_{x=a}^{x=b} x^k.dx = \int_{t=\ln(a)}^{t=\ln(b)} e^{t.k}.(e^t.dt) = \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} e^{t.(k+1)}.dt = \left[\frac{e^{t.(k+1)}}{k+1}\right]_{\ln(a)}^{\ln(b)}$$

Et on arrive bien à $\dfrac{b^{k+1}}{k+1} - \dfrac{a^{k+1}}{k+1}$.

Et on confirme la validité même si k est juste réel et pas entier.
Et même complexe ?
Et on traite à part le cas $k = -1$.

∘53∘ ♡ Retrouvez a et b sachant que la maximum de $x \longmapsto a.\cos(x) + b.\sin(x)$ vaut 6, atteint en $\dfrac{\pi}{6}$.

On vaut q'en $\pi/6$ la dérivée s'annule et passe du positif au négatif.
On impose aussi la valeur en $\pi/6$.
On a un système $\left\{\begin{array}{ccccc} a.\frac{\sqrt{3}}{2} & + & b.\frac{1}{2} & = & 6 \\ -a.\frac{1}{2} & + & b.\frac{\sqrt{3}}{2} & = & 0 \end{array}\right|$.
On résout et on obtient la fonction $x \longmapsto 3.\sqrt{3}.\cos(x) + 3.\sin(x)$.

On peut aussi dire qu'elle s'écrit $x \longmapsto A.\cos(x - \varphi)$.
Pour que le maximum soit en $\dfrac{\pi}{6}$, on impose $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.
Pour que le maximum vaille 6, on impose $A = 6$.
On a donc $x \longmapsto 6.\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.
On la remet sur la base en cosinus et sinus, et c'est fini.

C'est ici une preuve de physicien. Bien plus esthétique et agréable que la résolution de système au dessus. Et très logique.

∘54∘ ♡ On sait : $\dfrac{X^2 + a.X + b}{(X-1).(X-2).(X+3)} = \dfrac{2}{X-1} + \dfrac{1}{X-2} + \dfrac{\alpha}{X+\beta}$. Trouvez α et β. (décomposition en simples éléments ?)

Ceci est un exercice élémentaire sur la décomposition en éléments simples, mais autre que le sempiternel « décomposez ceci en éléments simples ». Puisse-t-il vous aider à comprendre (avant d'apprendre).

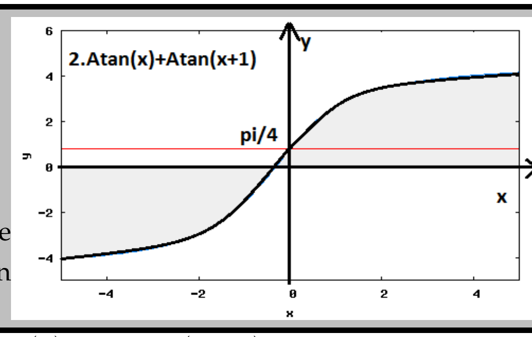
Pour que le membre de droite donne après réduction au dénominateur commun celui de gauche, il faut que β soit égal à 3.

On réduit ensuite effectivement $\dfrac{2}{X-1}+\dfrac{1}{X-2}+\dfrac{\alpha}{X+3}=\dfrac{(3+c).X^2+(4-3.c).X+2.c-15}{(X-1).(X-2).(X+3)}$.

c vaut donc -2 et on a même $\boxed{\dfrac{X^2+10.X-19}{(X-1).(X-2).(X+3)}=\dfrac{2}{X-1}+\dfrac{1}{X-2}-\dfrac{2}{X+3}}$

◦55◦

On demande de résoudre l'équation
$2.Arctan(x)+Arctan(x+1)=\dfrac{\pi}{4}$.
Un élève passe à la tangente dans l'équation
$2.Arctan(x)+Arctan(x+1)=\dfrac{\pi}{4}$ et trouve une équation de degré 3 dont il donne les trois racines. Résolvez son équation quand même, mais dites aussi pourquoi il a tort.



Le domaine est $\mathbb{R}$ (pas de condition sur x pour qu'existe $Arctan(x)$ et $Arctan(x+1)$).

On passe à la tangente : $\tan(2.Arctan(x)+Arctan(x+1))=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

On obtient $\dfrac{\dfrac{2.x}{1-x^2}+(x+1)}{1-\dfrac{2.x}{1-x^2}.(x+1)}=1$ (condition momentanée : x ne vaut pas 1 ni -1, mais 1 n'est pas solution).

On simplifie : $\dfrac{x^3+x^2-3.x-1}{3.x^2+2.x-1}=1$. On sent venir le degré 3.
On fait un produit en croix et on regroupe : $x^3-2.x^2-5.x=0$.

On a tout de suite une racine nulle $x^3-2.x^2-5.x=x.(x^2-2.x-5)=x.(x-1-\sqrt{6}).(x-1+\sqrt{6})$.

Peut on conclure $\boxed{S=\{0,\ 1+\sqrt{6},\ 1-\sqrt{6}\}}$?

Le graphique plus haut donne envie de dire « non ».

Et on le prouve. L'application $x\longmapsto Arctan(x)+Arctan(x+1)$ est strictement croissante, donc injective.
L'équation ne peut pas avoir plus d'une racine.

Pour la croissance, s'il vous plait, faites des maths, pas du calcul.
On a la somme de deux applications croissantes.
Qui a perdu du temps à dériver ?

Alors laquelle des trois est racine ?

Testons 0.
On a $2.Arctan(0)+Arctan(0+1)=\dfrac{\pi}{4}$. C'est bon pour elle.

Testons quand même $1-\sqrt{6}$:
$2.Arctan(1-\sqrt{6})+Arctan(2-\sqrt{6})$ est négatif. Chacun des deux nombres dans la fonction $Arctan$ l'est.
De fait, ce réel vaut $-\dfrac{3.\pi}{4}$.

Testons enfin $1+\sqrt{6}$.
Déjà $Arctan(1+\sqrt{6})$ dépasse $\dfrac{\pi}{4}$. Multiplions par 2, ajoutons un terme positif. Tout déborde.
Si vous voulez, j'ai $2.Arctan(1+\sqrt{6})+Arctan(2+\sqrt{6})=\dfrac{5.\pi}{4}$.

Pouvait on prévoir ces erreurs ?

Oui, en passant à la tangente, on n'a pas raisonné par équivalences,mais juste par implications : $\boxed{S \subset \{0,\ 1+\sqrt{6},\ 1-\sqrt{6}\}}$

Il aurait fallul garder $-\pi/2 \leqslant 2.Arctan(x) + Arctan(1+x) \leqslant \pi/2$ pour pouvoir identifier et remonter.

Extraits de « How to solve it »
de George Pólya (1887 - 1985)

Comprendre le problème

— En premier lieu, il faut comprendre le problème et son énoncé.

— Quelle est l'inconnue ?

— Quelles sont les données ?

— Quelle est la condition ?

— Est-il possible de satisfaire à la condition ?

— La condition est-elle suffisante pour déterminer l'inconnue.
Est-elle insuffisante ?
Redondante ?
Contradictoire ?

— Dessinez une figure.

— Introduisez la notation appropriée.

— Distinguez les diverses parties de la condition.

— Pouvez-vous les formuler ?

Concevoir un plan

— Avez-vous déjà rencontré ce problème ?

— Ou bien avez-vous rencontré le même problème sous une forme légèrement différente ?

— Connaissez-vous un problème qui s'y rattache ?

— Connaissez-vous un théorème qui puisse être utile ?

— Regardez bien l'inconnue et essayez de penser à un problème qui vous soit familier et qui ait la même inconnue ou une inconnue similaire.

— Voici un problème qui se rattache au vôtre et que vous avez déjà résolu.

— Pourriez-vous vous en servir ?

— Pourriez-vous vous servir de son résultat ?

— Pourriez-vous vous servir de sa méthode ?

— Pourriez-vous énoncer le problème différemment ?

— Reportez-vous aux définitions.

— Pourriez-vous imaginer un problème qui s'y rattache et qui soit plus accessible ?
Un problème plus général ?
Un problème plus particulier ?
Un problème analogue ?

— Pourriez-vous résoudre une partie du problème ?
Ne gardez qu'une partie de la condition, négligez l'autre partie ; dans quelle mesure l'inconnue est-elle alors déterminée, comment peut-elle varier ?

— Pourriez-vous tirer des données un élément utile ?

— Pourriez-vous penser à d'autres données qui pourraient vous permettre de déterminer l'inconnue ?

— Vous êtes-vous servi de toutes les données ?

— Vous êtes-vous servi de la condition toute entière ?

— Avez-vous tenu compte de toutes les notions essentielles que comportait le problème ?

Mettre le plan à exécution

— Il faut donc savoir faire preuve de patience, ne pas se décourager et si vraiment cela est nécessaire, changer de méthode.

— En mettant votre plan à exécution, vérifiez-en chaque détail l'un après l'autre.

— Pouvez-vous voir clairement si ce détail est correct ?

— Pouvez-vous démontrer qu'il est correct ?

— N'oubliez pas d'écrire clairement la réponse à la question posée !

— Mettez-la bien en évidence.

— Revenir sur sa solution

— Pouvez-vous vérifier le résultat ?

— Pouvez-vous vérifier le raisonnement ?

— Pouvez-vous obtenir le résultat différemment ?

— Pouvez-vous le voir d'un coup d'œil ?

— Pouvez-vous vous servir du résultat ou de la méthode pour quelque autre problème ?