LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 16 octobre
M.P.S.I.2

2023 2024

TD06

◦0◦ Calculez $\int_0^{1/5} \tan(3.Arctan(x)).dx$ (on change de variable ? même pas !).

◦1◦ ♡ Pourquoi la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^2+3.X+4}{X^2-3.X+2}$ n'est elle pas $\dfrac{8}{1-X}+\dfrac{14}{X-2}$.
Quelle sera la décomposition de $\dfrac{X^3-2.X^2+5.X+4}{X^2-3.X+2}$?

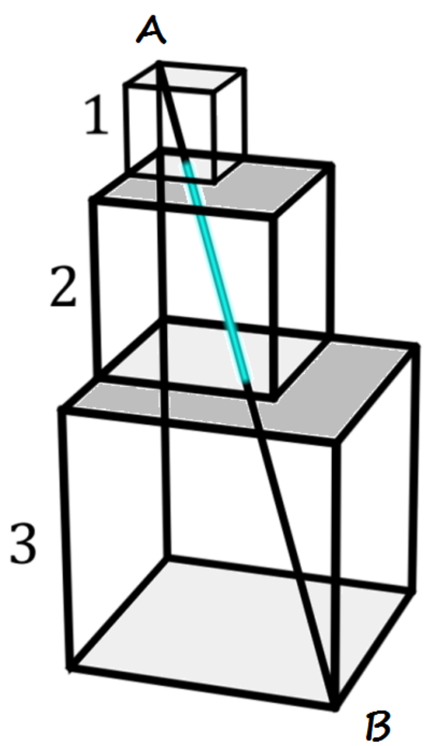
◦2◦ ♡ On pose $f = x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-2.x.\cos(\theta)+1}$. Calculez $f^{(4)}(0)$ *(indication : décomposez en éléments simples sur $\mathbb{C}$ avant de dériver, et souvenez vous que je vous interdit strictement de dériver $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-a)^2}$ en $x \longmapsto -\dfrac{2.(x-a)}{(x-a)^4}$: ; travaillez avec des exposants négatifs ou retournez au collège).*

◦3◦ Combien des racines sixièmes de $1+i$ ont une partie réelle positive ?

◦4◦ ♡ Calculez $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{3^k+4^k}{5^k}$.

◦5◦ Montrez que les trois racines du polynôme $X^3+(7.i-7).X^2+(35-14.i).X+25.i-65$ sont alignées dans le plan complexe.

◦6◦



Quelle est la longueur de la grande diagonale $[A, B]$. Quelle est la longueur de sa partie « en bleu » dans le cube du milieu ?

Calculez $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}.dx$ et $\int_0^2 \sqrt{4-2^x}.dx$.
L'une vaudra $2.\dfrac{\ln(2+\sqrt{3})-\ln(2-\sqrt{3})-\sqrt{3}}{\ln(2)}$ et l'autre π.

Résolvez le système $\log_x(y)+\log_y(x) = \dfrac{50}{7}$ et $x.y = 256$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$ *(rappel $y=\log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$).*

Donnez moi un entier ayant exactement 15 diviseurs.

On est dans $rang(53)$ pour l'addition et la multiplication modulo 53. L'équation $x^2+2.x+2=0$ a pour discriminant -4. L'élève dit « Δ est négatif, elle n'a donc pas de solution ». Il n'a rien compris ! Δ a une racine carrée assez évidente ! Résolvez l'équation.

◦7◦ Complétez les étapes qui manquent.
Supposons l'existence d'une solution (a, b, c) à l'équation $a^4+b^4=c^2$ et montrons qu'il en existe une autre, (x, y, z), telle que $z<c$. La méthode de descente infinie permet alors de conclure.

Puisque (a^2, b^2, c) est alors un triplet pythagoricien primitif et que (quitte à intervertir a et b si nécessaire) a est impair, il existe un couple (p, q) d'entiers strictement positifs et premiers entre eux tel que $a^2 = p^2 - q^2$, $b^2 = 2.p.q$ et $c = p^2 + q^2$.
De même, puisque $(a,\ q,\ p)$ est un triplet pythagoricien primitif, il existe un couple $(m,\ n)$ d'entiers strictement positifs et premiers entre eux tel que $a = m^2 - n^2$, $q = 2.m.n$ et $p = m^2 + n^2$.
Puisque p et $2.q$ sont premiers entre eux et que $2.p.q$ est un carré, p et $2.q$ sont des carrés.
De même, puisque $2.q$ (donc $m.n$) est un carré, m et n sont des carrés.
Donc il existe des entiers strictement positifs x, y et z (premiers entre eux) tels que $m = x^2$, $n = y^2$ et $x^4 + y^4 = z^2$.
Comme $z^2 = p < c^2$, la preuve est établie.

◦8◦ Un élève a écrit sur sa copie « pour k dans $\mathbb{N}^*$: $\begin{array}{ll} \dfrac{2.k+1}{2.k-1} \geqslant 1 & \Leftrightarrow \quad \dfrac{2.k+1}{2.k-1} \geqslant \dfrac{2.k}{2.k} \\ & \Leftrightarrow \quad \dfrac{2.k+1}{2.k} \leqslant \dfrac{2.k}{2.k-1} \end{array}$ ».

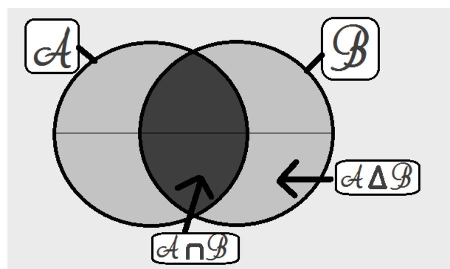
Que doit-on en penser ?

◦9◦ Montrez qu'on n'a évidemment pas $\forall x,\ Arctan(x) = \dfrac{Arcsin(x)}{Arccos(x)}$.

Trouvez quand même (graphiquement ?) le nombre de solutions de $Arctan(x) = \dfrac{Arcsin(x)}{Arccos(x)}$ d'inconnue réelle x (dans quoi ?).

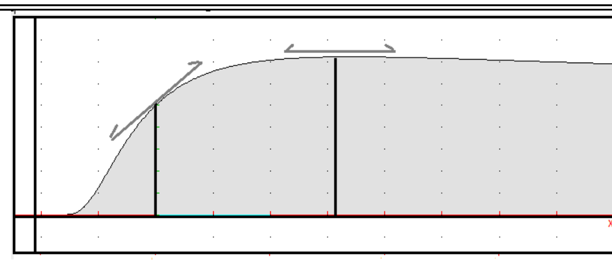
◦10◦

Pour représenter deux ensembles et leur intersection, j'ai tracé deux cercles de même rayon, chacun passant par le centre de l'autre. J'ai noirci l'intersection. J'ai grisé ce qu'on appelle la différence symétrique (celle du *ou exclusif*). Quel est le rapport $\dfrac{\textit{aire en gris}}{\textit{aire en noir}}$.



◦11◦ Pouvez vous confirmer que $x \longmapsto x^{1/x}$ admet bien un maximum en $x = e$?

Sans rapport :
En utilisant le module `random`, simulez un dé dont les six faces ont pour valeur [1, 1, 3, 5, 5, 10].
Simulez l'expérience : lancer ce dé jusqu'à ce que la somme des valeurs obtenues dépasse 100.



◦12◦ Montrez $\displaystyle\int_{t=-1}^{2} \frac{t+7}{t+\sqrt{t+2}-10}.dt = 1 + 12.\ln\left(\frac{18}{25}\right)$ (changez de variable, décomposez en éléments simples, intégrez en logarithmes).

◦13◦ ♡ On pose pour tout n : $a_n = 2^n + 2.(-1)^n$ et $b_n = 2^{n+1} + (-1)^n$. Trouvez M vérifiant $\forall n$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

◦14◦ L'élève Pabokoul-Déba veut décomposer en éléments simples $\dfrac{6.x^4 - 9.x^3 - 22.x - 45}{(x-3).(x^4 + 6.x^2 + 5)}$.

Il écrit $\dfrac{a}{x-3} + \dfrac{b.x+c}{x^2+3} + \dfrac{d.x+e}{x^2+2}$, réduit au dénominateur commun, identifie les numérateurs et obtient le système $\left\{\begin{array}{cccccccc} a & +b & & +d & & = & 6 \\ & -3.b & +c & -3.d & +e & = & -9 \\ 5.a & +2.b & -3.c & +3.d & -3.e & = & 0 \\ & -6.b & +2.c & -9.d & +3.e & = & -22 \\ 6.a & & -6.c & & -9.e & = & -45 \end{array}\right.$. Il résout et trouve $(a, b, c, d, e) = (1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 5)$. Mais il a tout faux. Pourquoi ?

∘15∘ ♡ Calculez les deux intégrales que voici $\int_1^2 \frac{dt}{e^t - e^{-t}}$ et $\int_1^2 \frac{dt}{5^t - 5^{-t}}$.

∘16∘ ♡ Calculez $\sum_{k=3}^{N} \frac{1}{k^2-4}$ en décomposant en éléments simples.

∘17∘ ♡ Calculez $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1).(k+3)}$ puis $\sum_{k=0}^{n} \frac{k+2}{(k+1)^2.(k+3)^2}$. Il faudra décomposer en éléments simples et décaler les indices, télescoper.

∘18∘ ♣ On appelle élément simple tout rationnel de la forme $\frac{a}{p^b}$ avec a entre 0 et $p-1$ et l'exposant b entier naturel. On appelle aussi éléments simples les entier relatifs. On affirme que tout rationnel se décompose en somme d'éléments simples.

Exemples :

$\frac{11}{15} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$	$\frac{22}{15} = \frac{2}{3} + \frac{4}{5}$	$\frac{32}{15} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{5}$	$\frac{13}{25} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2}$

Décomposez en éléments simples

$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{17}{21}$	$\frac{173}{49}$	$\frac{11}{52}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{123}{60}$

∘19∘ Calculez $\int_0^{1/\sqrt{3}} \tan(2.Arctan(t)).dt$ (simplifiez déjà).

∘20∘ Les nombres $\frac{1}{n}$ pour n de 1 à 20 sont écrits au tableau. On en prend deux (au hasard) a et b ; on les efface et on met en fin de liste le nombre $a.b+a+b$ (par exemple, on remplace $\frac{1}{11}$ et $\frac{1}{7}$ par $\frac{19}{77}$). Et on recommence. Jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un nombre, qu'on va appeler S.
Dans quel ordre faut il avoir barré les 20 nombres pour que S soit le plus grand possible ?
Dans quel ordre faut il avoir barré les 20 nombres pour que S soit le plus petit possible ?
Allez, on arrête de tourner autour du pot : combien vaut S ?
Indice : C'est un exercice de théorie des groupes, mine de rien. Commu... et Asso....

∘21∘ Le retour de ALI et BEN *(un menteur, un sincère)*.
a- Quelle question poser pour savoir si c'est ALI qui est en face de vous ?
b- Vous croisez les deux frères. Vous demandez à l'un de demander à l'autre si c'est lui ALI. Que déduisez vous de la réponse ?
c- Vous croisez les deux frères. L'un dit "De nous deux, c'est ALI le menteur" et l'autre ajoute "ALI, c'est moi".

∘22∘ Retrouvez les coefficients : $\frac{2.x^2+2}{x^4+x^2+1} = \frac{a.x+b}{x^2+x+1} + \frac{c.x+d}{x^2-x+1}$.
Complétez : $\int \frac{2.x^2+2}{x^4+x^2+1}.dx = \left[\star.Arctan\left(\frac{x^2-1}{☻.x}\right)\right]$.

∘23∘ Justifiez : $Arcsin(\sqrt{1-x^2}) = Arccos(x)$ pour x dans $[0, 1]$.

∘24∘ Résolvez $Arcsin(x) = Arccos(x)$ d'inconnue réelle x.

∘25∘ Complétez : $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+x} = \ln(1+\sqrt{x}+x) - \star.Arctan\left(\frac{\cdots}{.}\right)$.

∘26∘ ♡ Un polynôme unitaire de degré 4 a pour racines 1, 3, 4 et 6. Calculez sa valeur en 2 et en 5.
♡ Un polynôme de degré 4 a pour racines 1, 3, 4 et 6. Comparez sa valeur en 2 et sa valeur en 5.
♡ Un polynôme de degré 4 a pour racines 1, 2 et 3 *(et une autre)*. Il vaut 1 en 0 et en 5. Retrouvez la dernière racine.
(unitaire : coefficient dominant égal à 1).

∘27∘ ♡ Calculez $\int_0^{\pi} Arctan(\sin(x)).\cos(x).dx$ (changement de variable, mais aussi pensez à parcourir l'intervalle dans les deux sens...).

∘28∘ ♡ Calculez $\int_1^2 x^x.(1+\ln(x)).dx$.

◦29◦ ♣ Calculez (à la main) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^n$ pour n de 0 à 9. Le corps de base est celui des entiers de 0 à 10 pour l'addition et la multiplication modulo 11. Résolvez $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue entière n.

◦30◦ Montrez : $\forall n \in \mathbb{N},\ (10^n + 1 = 0\ [3]) \Rightarrow (10^{n+1} + 1 = 0\ [3])$.
Déduisez vous : $\forall n \in \mathbb{N},\ (10^n + 1 = 0\ [3])$.

◦31◦ Calculez $\sum_{k=0}^{2.n} k^{(2+(-1)^k)}$ avant que ce ne soit Sohel qui le fasse.

◦32◦ Montrez par récurrence sur n plus grand que 5 : $3^n \leqslant \frac{(2.n)!}{(n!)^2} \leqslant 4^n$.

Vous êtes peut-être un mathématicien si...
– Vous ne pouvez pas vous empêcher de lâcher des contre-exemples dès que quelqu'un soutient une impossibilité,
– À 19 ans vos années les plus productives sont déjà derrière vous,
– Votre résultat majeur est nommé d'après le nom de quelqu'un d'autre,
– Vous faites des erreurs... mais ce sont des erreurs très intéressantes,
– Vous vous demandez comment Euler prononçait « Euclide »,
– Vous avez déjà souri pendant 10 secondes à la fin d'une preuve,
– Vous comprenez toutes les mathématiques que Gauss a manipulées... jusqu'à ses 13 ans,
– Votre matière principale était les mathématiques, la seconde la caféine,
– Vous connaissez tout l'alphabet grec, sans connaitre un seul mot de grec,
– La solution à tout problème passe par le décompte de balles dans des boîtes,
– Faire plus d'une chose à la fois est ennuyeux,
– Vous savez compter jusqu'à 32 avec les doigts de la main (en binaire),
– Vous pensez aux mathématiques en tant qu'art, pas (forcément) en tant que science...
– Vous trouvez que les blagues mathématiques sont drôles,
– Vous vous surprenez en train de dire « il existe » au lieu de « il y a »,
– Vous avez déjà eu des débats virulents autour de 0, 999 . . . = 1,
– Ou des débats virulents autour de la différence entre « Deux pièces sont lancées et l'une d'elles tombe sur face » et « Deux pièces sont lancées. Cette pièce donnée tombe sur face »,
– Vous trouvez ça cool, des nouvelles formules dont la somme donne e,
– Vous passez votre temps à faire de l'aide aux devoirs pour des inconnus,
– Vous écrivez des e mails en LATEX, [1]
– Vous prouvez votre innocence lors d'un interrogatoire en commençant par « Supposez en effet que je sois coupable... », point à partir duquel vous êtes arrêté,
– Mélanger un jeu de cartes vous fait penser au groupe symétrique S_n,
– Vous savez que 1+1 ne fait pas toujours 2,
– Vous grimacez chaque fois que vous lisez ou entendez quelqu'un dire « et réciproquement » incorrectement,
– Vous étiez allé voir le film Matrix parce que vous vous attendiez à des mathématiques...

◦33◦ Calculez $\sum_{k=0}^{2021} j^k$ et $\sum_{k=0}^{2021} (1+j)^k$ avec toujours ce même complexe de cube 1 (comme la salsa).

◦34◦ Il y a trois élèves dans cette classe dont les prénoms sont ambigus (on dit « épicènes ») : Claude, Dominique et Camille. Je sais que si Dominique est un garçon, alors Claude est en une fille. Si Camille est un garçon, alors Dominique est une fille. Si Dominique est une fille, alors Camille aussi. Si Camille est de sexe féminin, alors Claude s'appelle Monsieur. Donnez moi le sexe de chacun (euh, non, indiquez le moi, c'est tout).

◦35◦ ♡ Étudiez les variations sur $\mathbb{R}$ de l'application $\theta \longmapsto \theta - \sin(\theta)$. Déduisez pour tout θ réel : $|\sin(\theta)| \leqslant |\theta|$.
Le professeur demande de prouver pour tout θ réel et tout n entier naturel : $|\sin(n.\theta)| \leqslant n.|\sin(\theta)|$. Un élève propose la démonstration suivante : en appliquant le résultat précédent à θ et à $n.\theta$ on a $|\sin(\theta)| \leqslant |\theta|$ et $|\sin(n.\theta)| \leqslant |n.\theta|$, on effectue ensuite le quotient des inégalités et on trouve $\frac{|\sin(n.\theta)|}{|\sin(\theta)|} \leqslant n$ et c'est fini.
Où est l'erreur ? Démontrez quand même le résultat du professeur par récurrence sur n.
A-t-on aussi : $\forall \theta \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{R}^+,\ |\sin(n.\theta)| \leqslant n.|\sin(\theta)|$?
A-t-on aussi : $\forall \theta \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{R}^+,\ |\cos(n.\theta)| \leqslant n.|\cos(\theta)|$?
Montrez aussi : $|sh(x)| \geqslant |x|$ pour tout x réel.

1. *il y en a déjà parmi vous !*

∘36∘ ♣ On pose $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b=\sqrt{2}$. Calculez a^b. On ne sait pas, en l'état d'avancement actuel des mathématiques, si a est rationnel ou irrationnel. Montrez quand même que dans les deux cas, vous pouvez trouver deux irrationnels α et β tels que α^β soit redevenu rationnel.

∘37∘ Calculez $\displaystyle\int_0^{Arctan(1/2)} \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)-\sin(\theta)}.d\theta$ par le changement de variable $t=\tan(\theta)$.

∘38∘ ♡ Montrez que la série de terme général $\dfrac{n+3}{n^3+3.n^2+2.n}$ converge et calculez sa somme.

Série de terme général a_n ça veut dire $A_N=\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n$.

Somme de la série ça veut dire $A_\infty=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n=$.

∘39∘ ♡ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{2.k-1}{\binom{k}{2}^2}$.

∘40∘ Recomposez en éléments compliqués : $5.X-5+\dfrac{7}{X-2}+\dfrac{28}{X+3}$.

Décomposez en éléments simples $\dfrac{(3.X^2+2.X+4).(8.X^2-7.X+7)}{(X^3-2.X^2+X-2).(X^3+3.X^2+X+3)}$.

∘41∘ ♡ Calculez $\displaystyle\int_1^2\frac{dt}{e^t-e^{-t}}$ et $\displaystyle\int_1^2\frac{dt}{5^t-5^{-t}}$ (changez de variable et décomposez).

∘42∘ La suite u vérifie : $u_0=8$, $u_1=-5$ et $u_2=49$, et $u_{n+3}=7.u_{n+1}-6.u_n$ pour tout n. *Hélas, on a tout oublié du cours, alors on innove.*

Calculez u_n pour n de 0 à 7.

On définit l'application $x\longmapsto\dfrac{-7.x^2-5.x+8}{6.x^3-7.x^2+1}$, notée f. Calculez $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$.

On définit : $u=x\longmapsto 6.x^3-7.x^2+1$. Calculez $(f\times u)^{(n)}(0)$ de deux façons.[2]

Déduisez que la suite (u_n) est exactement la suite $\left(\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)$.

Factorisez u.

Vérifiez que f admet pour décomposition en éléments simples $x\longmapsto\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{3}{1-2.x}+\dfrac{4}{1+3.x}$.

Déterminez $\left(x\longmapsto\dfrac{1}{1-a.x}\right)^{(n)}$ pour tout n et $\left(x\longmapsto\dfrac{1}{1-a.x}\right)^{(n)}(0)$.

Trouvez alors la formule générale pour (u_n).

∘43∘ ♡ Le polynôme P de degré 4 a pour racines a, b, c et d (distincts). Décomposez en éléments simples $\dfrac{P'(X)}{P(X)}$.

Et si on a$a=b$ la formule est elle encore valable ?

∘44∘ Une liste de phrases, une liste de permutations. Appariez les :

$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&1&4&3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&1&2\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 4&3&1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 5&4&3&2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&4&1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&1&4&3\end{bmatrix}$

Les philanthropies des ouvriers charpentiers. *Tu me paraissais bien câline.* Le boutre du Sultan coulait au confluent de la Garonne. *Tu danses comme un beau ballot.* Ce cas de Corée me turlupine. *L'aspirant habite Javel.* Le capitaine a enfumé sa cale. *Les mutins ont passé la berge du ravin.*

∘45∘ Pourquoi n'a-t-on pas $\left(x\longmapsto\dfrac{x^3+4.x^2-16.x+5}{x^3-2.x^2-5.x+6}\right)=\left(x\longmapsto\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{3}{x+2}\right)$.

---

2. (r)appel :a formule de Leibniz se démontre par recurrence et dit $(u\times v)^{(n)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.u^{(n-k)}\times v^{(k)}$

Résolvez $\left(x \longmapsto \dfrac{x^3+4.x^2-16.x+5}{x^3-2.x^2-5.x+6}\right)^{(n)} = \left(x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{3}{x+2}\right)^{(n)}$ *(qui est l'inconnue ?)*

◦46◦ La relation $\|$ définie sur $\mathbb{Z}$ par $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2,\ (a\|b) \Leftrightarrow (a|b\ ou\ b|a)$ est elle une relation d'ordre ? d'équivalence ?
La relation $\|$ définie sur $\mathbb{Z}$ par $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2,\ (a\|b) \Leftrightarrow (a|b\ et\ b|a)$ est elle une relation d'ordre ? d'équivalence ?

On ne confondra pas les lois (calcul) et les relations (affirmation).

Lois	Relations
$+, \times, \cup, \cap, \Delta, \wedge, et, ou, \circ,$	$=, \leqslant, \subset, \neq$, divise, $\sim, \equiv, >, \subsetneq$

Avec une loi $*$, on peut calculer $(a*b)*c$.
Avec une relation $\Re$, peut on écrire $(a\Re b)\Re c$? Essayez avec $\neq$ ou avec « divise ».

.	Une relation $\Re$ sur un ensemble est "formellement" une application de $E\times E$ dans $\{Vrai,\ Faux\}$. Pratiquement, on prend deux éléments a et b, et on dit ($a\Re b$) si a est ou non en relation avec b.
Réflexive	Tout élément est en relation avec lui même $\forall a\in E,\ a\Re a$
Transitive	Les flèches se mettent bout à bout. $\forall(a,\ b,\ c)\in E^3,\ (a\Re b\ et\ b\Re c) \Rightarrow (a\Re c)$
Antisymétrique	Il ne peut pas y avoir de flèches dans les deux sens $\forall(a,\ b)\in E^2,\ (a\Re b\ et\ b\Re a) \Rightarrow (a=b)$ Ce n'est pas la négation de "symétrique".
Symétrique	Il y a une flèche à l'aller il y a une flèche au retour $\forall(a,\ b)\in E^2,\ (a\Re b) \Rightarrow (b\Re a)$

Ordre	Relation réflexive, antisymétrique et transitive un ordre peut être total ($\forall(a,b),\ a\ll b\ ou\ b\ll a$) ou partiel ($\exists(a,b),\ a\not\ll b\ et\ b\not\ll a$)
Équivalence	Relation réflexive, symétrique et transitive la classe d'équivalence d'un élément a est l'ensemble des éléments en relation avec a : $Cl(a)=\{\alpha\in E \mid \alpha\Re a\}$
l'égalité $=$	est à la fois relation d'ordre et d'équivalence.

◦47◦ Ces relations sur la MPSI sont elles réflexives, symétriques, anti-symetriques, transitives ?

a	avoir eu une fois la même note en colle de maths que
b	avoir le même prénom que
c	avoir les mêmes initiales que
d	ne pas avoir le même prenom que
e	être amoureux de
f	avoir vote (lors des elections de delegues) pour
g	venir du même departement que

◦48◦ ♡ Vrai ou faux :

- 1 -	$\left(a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)\ et\ b_n=o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n+b_n=o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
- 2 -	$\left(a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)\ et\ b_n=o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n+b_n=O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
- 3 -	$\left(a_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)\ et\ b_n=o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n+b_n=o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
- 4 -	$\left(a_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)\ et\ b_n=o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n.b_n=o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$
- 5 -	$\left(a_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)\ et\ b_n=o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n.b_n=O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$
- 6 -	$\left(a_n=o(n^2)\ et\ b_n=o(n)\right) \Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}=o(n)\right)$

Rappel : $a_n=o(e_n)$ signifie $\dfrac{a_n}{e_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

En particulier, $a_n=o(1)$ signifie que a_n tend vers 0.

$a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ signifie que « même $n.a_n$ tend vers 0, et donc à plus forte raison, a_n tend vers 0 ».

$a_n=O(e_n)$ signifie $\dfrac{a_n}{e_n}$ est bornée.

∘49∘ $a_n = o(e_n)$ signifie $\dfrac{a_n}{e_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La relation « être un petit o de « est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive sur l'ensemble des suites réelles strictement positives ?

∘50∘ Dans cette famille, tous les enfants *(Prof, Atchoum, Dormeur, Nolan, Grincheux, Timide et Joyeux)* sont nés un 7 juillet *(07/07, oui)*. Le jour de l'anniversaire, chacun a un gâteau avec autant de bougies que son âge. Tiens, il y a cinq ans, il y avait autant de gâteux, mais deux fois moins de bougies que cette année. Alors, combien de bougies ?

∘51∘ Trouvez le plus de coefficients du développement asymptotique :

$\sqrt{n^4+n^3}-n^2 = a.n+b+\dfrac{c}{n}+\dfrac{d}{n^2}+o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}$.

(chaque fois que vous en avez un, soustrayez et essayez d'obtenir un équivalent du reste).

(ou alors partez de l'écriture $\sqrt{n^4+n^3} = n^2+a.n+b+\dfrac{c}{n}+\dfrac{d}{n^2}+o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}$ *et élevez au carré)*

∘52∘ ♡ f est une application de classe C^n. On se donne a et h. On définit :

$F = t \longmapsto f(a+t.h)+(1-t).h.f'(a+t.h)+\dfrac{(1-t)^2}{2}.h^2.f''(a+t.h)+\dfrac{(1-t)^3}{6}.h^3.f^{(3)}(a+t.h)$

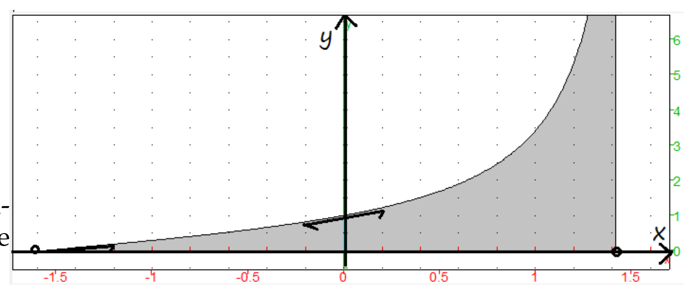
Calculez $F(0)$ et $F(1)$. Simplifiez $F'(t)$ pour tout t.

Que vous rappelle alors la formule $F(1)-F(0) = \displaystyle\int_0^1 F'(t).dt$.

∘53∘ ♡ Sachant $deg(P) = 3$, $P(1)-1 = P'(1)+1 = P''(1)-6 = P^{(3)}(1)+6 = 0$, calculez $P(3)$.
Si vous commencez en écrivant $P(X) = a.X^3+b.X^2+c.X+d$, vous êtes très mal parti, sauf si vous adorez les calculs idiots. Sinon, quelle formule fait intervenir $f'(a)$, $f''(a)$ et autres, et pourquoi le reste est il alors simple ?

∘54∘ Dans ce problème (inspiré d'un sujet de concours PC), on va obtenir de proche en proche (par algorithme dit « boustrophédon ») les coefficients (pas évidents) du développement limité de la tangente en 0 et de $1/\cos$.

I∼0) On pose $I = \Big]\dfrac{-\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\Big[$
et $f = x \longmapsto \dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$.
Déterminez $f^{(n)}$ pour n de 0 à 3.
Justifiez que le graphe de f est celui indiqué ci contre (y compris limite et dérivée en $-\pi/2$).



I∼1) Montrez qu'il existe une suite (P_n) de polynômes vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin(x))}{(\cos(x))^{n+1}}$.

I∼2) Montrez que pour tout n, P_n est unitaire, de degré n, à coefficients dans $\mathbb{N}$.

I∼3) Montrez : pour tout x : $2.f'(x) = 1+(f(x))^2$.

I∼4) Pour tout n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$. Montrez : $2.\alpha_1 = (\alpha_0)^2+1$ et $2.\alpha_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\alpha_k.\alpha_{n-k}$.

On pourra démontrer pour tout couple de fonctions $(u,\ v)$: $(u.v)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.u^{(n-k)}.v^{(k)}$ (ou l'utiliser directement si il a été vu en cours), puis l'appliquer à u et v bien choisies.

I∼5) Écrivez un script `Python` qui prend N en entrée et calcule les α_n pour n de 0 à N.

II∼0) Montrez pour tout n et tout $x$de $I\cap\mathbb{R}^+$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha_n}{n!}.x^n \leqslant f(x)$ (indication : Taylor).

II∼1) Déduisez que pour tout x de $\Big[0,\ \dfrac{\pi}{2}\Big[$ la série de terme général $\frac{\alpha_n}{n!}.x^n$ converge vers une somme qu'on notera

$g(x)$ (c'est à dire $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n$).

Rappel : on appelle série de terme général a_n la suite (A_N) définie par $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$. Ici, croissez et majorez.

II∼2) On admettra que l'on peut (sous des conditions ici validées) dériver $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n$ comme une limite de sommes (alors qu'il s'agit d'une limite de sommes) et permuter les sommes doubles (familles sommables). Montrez $2.g'(x) = 1 + (g(x))^2$.

II∼3) Déduisez $\forall x \in I,\ f(x) = g(x)$.

III∼0) Montrez que la seule application à la fois paire et impaire est $x \longmapsto 0$.
Rappel : fonction paire de $\mathbb{R}$ dans m\R : $\forall x,\ f(-x) = f(x)$ (en : cos, $x \longmapsto x^4 + 1$).
fonction impaire de $\mathbb{R}$ dans m\R : $\forall x,\ f(-x) = -f(x)$ (en : sin, $x \longmapsto x^3 + 4.x$, $x \longmapsto Arctan(x)$).

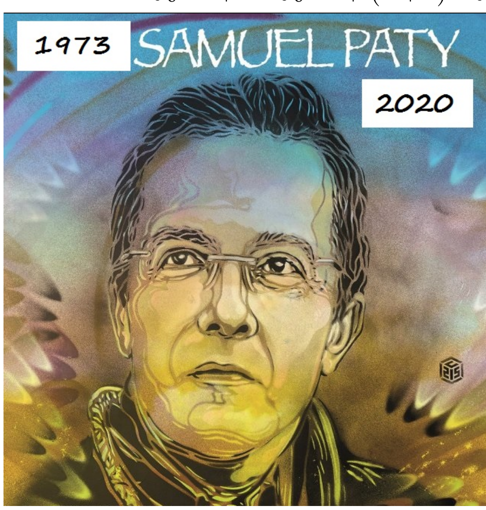
III∼1) Déduisez, par analyse et synthèse, que pour toute application ϕ de I dans $\mathbb{R}$ il existe un unique couple $(p,\ i)$ avec p paire et i impaire vérifiant $\phi = p + i$.
Précisez qui sont p et i dans les cas $\phi = x \longmapsto 3.x^4 + 5.x^3 + 4.x^2 + 2.x - 1$
$\phi = x \longmapsto e^x$
$\phi = x \longmapsto \cos(x - \varphi_0)$ pour φ_0 fixé

III∼2) Montrez aussi : $\tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2.n+1}}{(2.n+1)!}.x^{2.n+1}$ et $\frac{1}{\cos(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.x^{2.n}$.

III∼3) Pour tout entier naturel n, exprimez $\tan^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

III∼4) Exprimez $\tan'$ à l'aide de tan. Déduisez $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_{2.n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2.n}{2.k-1}.\alpha_{2.k-1}.\alpha_{2.n-2.k+1}$.

∘55∘ ♡ Calculez $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$, $\int_0^1 \frac{dt}{1+(1+t)^2}$, $\int_0^1 \frac{dt}{1+(2+t)^2}$, $\int_0^1 \frac{dt}{t^2+6.t+10}$.



Dans notre République, être libre, c'est avoir le droit de dire ce que l'on pense, le droit de partager ses connaissances, d'écouter, de débattre, de dessiner, de chanter.

Tout cela fait partie de ce que nous appelons la liberté d'expression, qui est une de nos libertés les plus importantes.

La liberté d'expression signifie aussi que personne n'a le droit de forcer les autres à penser comme lui, à faire comme lui ou à dire la même chose que lui.

Cette liberté d'expression n'est pas sans limites. On peut ne pas être d'accord avec les idées des autres, et on peut en rire, on peut même s'en moquer, mais on n'a pas le droit d'inciter à la violence ou à la haine contre qui que ce soit.

∘56∘ ♡ Résolvez $Arctan'(e^x) = \frac{1}{1+e^{2.x}}$. d'inconnue réelle x.

∘57∘ Pouvez vous mettre $x \longmapsto \cos(x) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ sous la forme $x \longmapsto A.\cos(x - \varphi)$?
(normalement, la reponse est « oui, je peux », suivie d'un argument)

∘58∘ ♡(*si* !) Montrez : $\int \frac{6}{1+(x-1)^3}.dx = \sqrt{12}.Arctan\left(\frac{2.x-3}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{x^2}{x^2-3.x+3}\right)$.