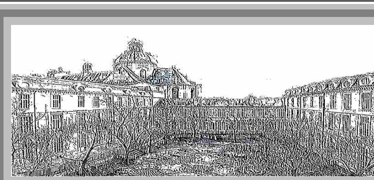
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 16 octobre
M.P.S.I.2



2023 2024

TD06

∘0∘ Calculez $\int_0^{1/5} \tan(3.Arctan(x)).dx$ (on change de variable ? même pas !).

L'existence ne pose pas de problème, $Arctan(x)$ ne passe pas sur la valeur $\frac{\pi}{6}$ (pourquoi $\frac{\pi}{6}$ mais parce que $3.\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ et là, la tangente « explose »).

En effet, pour qu'il mette le pied sur $\frac{\pi}{6}$, il aurait fallu atteindre $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et ici on s'arrête en $\frac{1}{5}$ égal à $\frac{1}{\sqrt{25}}$.

On développe ensuite $\tan(3.\theta) = \dfrac{\dfrac{2.t}{1-t^2} + t}{1 - \dfrac{2.t}{1-t^2}.t}$ avec des notations naturelles.

Ici, tout se « simplifie » et l'intégrale vaut $\int_0^{1/2} \frac{t^3 - 3.t}{3.t^2 - 1}.dt$ (et si ça vous rappelle $t^3 \quad +3.i.t^2 \quad -3.t \quad -i$, vous avez raison).

On décompose en éléments simples en commençant par une « partie entière » (c'est à dire un polynôme) :

$$\frac{t^3 - 3.t}{3.t^2 - 1} = \frac{\left(\frac{t}{3}\right)(3.t^2 - 1)}{3.t^2 - 1} - \frac{\frac{8}{3}}{3.t^2 - 1}$$

$$\frac{t^3 - 3.t}{3.t^2 - 1} = \frac{t}{3} - \frac{4}{3.(3.t + \sqrt{3})} - \frac{4}{3.(3.t - \sqrt{3})}$$

il ne fallait pas oublier le $\frac{t}{3}$ qui correspond d'ailleurs au comportement vers $+\infty$ (équivalent).

On intègre en $\frac{t^2}{6} - \frac{4}{9}.\ln(1 - 3.t^2)$ et on trouve $\boxed{\frac{1}{150} - \frac{4.\ln(22/25)}{9}}$

∘1∘ ♡ Pourquoi la décomposition en éléments simples de $\frac{X^2 + 3.X + 4}{X^2 - 3.X + 2}$ n'est elle pas $\frac{8}{1-X} + \frac{14}{X-2}$.
Quelle sera la décomposition de $\frac{X^3 - 2.X^2 + 5.X + 4}{X^2 - 3.X + 2}$?

On propose, on tente de vérifier : $\frac{8}{1-X} + \frac{14}{X-2} = \frac{6.X + 2}{X^2 - 3.X + 2}$.
Le dénominateur est le bon, mais pas le numérateur.
D'ailleurs, on aura beau faire, $\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}$ ne pourra faire que des choses en $\frac{\alpha.X + \beta}{X^2 - 3.X + 2}$.
Il nous manque le degré 2.

D'ailleurs, vers $+\infty$, $x \longmapsto \frac{x^2 + 3.x + 4}{x^2 - 3.x + 2}$ tend vers 1
$x \longmapsto \frac{8}{1-x} + \frac{14}{x-2}$ tend vers 0
Ajoutons ce 1 qui manque : $1 + \frac{8}{1-X} + \frac{14}{X-2} = \frac{X^2 + 3.X + 4}{X^2 - 3.X + 2}$
On note que les coefficients qu'on auraot obtenu par la méthode des pôles sur la formule erronée

$$\frac{X^2 + 3.X + 4}{X^2 - 3.X + 2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}$$

sont quand même les bons.

$$\frac{X^3 - 2.X^2 + 5.X + 4}{X^2 - 3.X + 2} = X + 1 - \frac{8}{X-1} + \frac{14}{X-2}$$

Comprenez vous pourquoi ?

◦2◦ ♡ On pose $f = x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1}$. Calculez $f^{(4)}(0)$ *(indication : décomposez en éléments simples sur $\mathbb{C}$ avant de dériver, et souvenez vous que je vous interdit strictement de dériver $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-a)^2}$ en $x \longmapsto -\dfrac{2.(x-a)}{(x-a)^4}$: ; travaillez avec des exposants négatifs ou retournez au collège).*

Pour décomposer en éléments simples, il vaut mieux d'abord factoriser le dénominateur $X - .X.\cos(\theta) + 1 = (X - e^{i.\theta}).(X - e^{-i.\theta})$ (factorisation classique à connaître).

On a alors deux complexes à trouver a et b vérifiant $\dfrac{1}{x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1} = \dfrac{a}{x - e^{i.\theta}} + \dfrac{b}{x - e^{-i.\theta}}$.

On réduit au dénominateur commun, on simplifie par le dénominateur : $1 = a.(x - e^{-i.\theta}) + b.(x - e^{i.\theta})$.
On prend des x particuliers : $1 = a.(e^{-i.\theta} - e^{i.\theta}) + b.0$ et $1 = a.0 + b.(e^{i.\theta} - e^{-i.\theta})$.
On fait appel aux formules de Moivre et Euler, et on trouve

$$\frac{1}{x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1} = \frac{1}{2.i.\sin(\theta)}.\Big(\frac{1}{x - e^{i.\theta}} - \frac{1}{x - e^{-i.\theta}}\Big)$$

qu'on pouvait proposer et vérifier.

Sous cette forme, il devient aisé de dériver une fois, deux fois, trois fois, quatre fois.
Mais c'est la forme $\dfrac{1}{x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1} = \dfrac{1}{2.i.\sin(\theta)}.\Big((x - e^{i.\theta})^{-1} - (x - e^{-i.\theta})^{-1}\Big)$ qui est la plus pratique :

$$\begin{array}{llclll}
n = 0 & f(x) & = & \frac{1}{2.i.\sin(\theta)}. & \Big((x - e^{i.\theta})^{-1} & -(x - e^{-i.\theta})^{-1}\Big) \\
n = 1 & f'(x) & = & \frac{1}{2.i.\sin(\theta)}. & \Big(-(x - e^{i.\theta})^{-2} & +(x - e^{-i.\theta})^{-2}\Big) \\
n = 2 & f''(x) & = & \frac{1}{2.i.\sin(\theta)}. & \Big(2.(x - e^{i.\theta})^{-3} & -2.(x - e^{-i.\theta})^{-3}\Big) \\
n = 3 & f^{(3)}(x) & = & \frac{1}{2.i.\sin(\theta)}. & \Big(-6.(x - e^{i.\theta})^{-4} & +6.(x - e^{-i.\theta})^{-4}\Big) \\
n = 4 & f^{(4)}(x) & = & \frac{1}{2.i.\sin(\theta)}. & \Big(24.(x - e^{i.\theta})^{-5} & -24.(x - e^{-i.\theta})^{-5}\Big)
\end{array}$$

Je vous laisse conjecturer la formule générale.

On calcule en 0 : $f^{(4)}(0) = \dfrac{24}{2.i.\sin(\theta)}.\Big(-e^{5.i.\theta} + e^{-5.i.\theta}\Big)$

Le sinus revient par miracle, avec un $2.i$, mais avec $5.\theta$: $f^{(4)}(0) = 24.\frac{\sin(5.\theta)}{\sin(\theta)}$ (généralisez à n)

Je n'ose imaginer que des élèves auront commis l'erreur incroyable : $f(0) = \dfrac{1}{1}$ donc en dérivant : $f^{(4)}(0) = 0$!
Cette idiotie vous ramène au rang de... de qui ? Je ne sais pas. Elle veut dire que vous ne savez pas ce qu'est une fonction, une dérivée, un calcul, un cerveau, un être humain...

◦3◦ Combien des racines sixièmes de $1 + i$ ont une partie réelle positive ?

Ce complexe s écrit $\sqrt{2}.e^{i.\pi/4}$.

Une de ses racines sixièmes est $2^{1/12}.e^{i.\pi/24}$. Elle a une partie réelle positive.

Les autres sont les $2^{1/12}.e^{\frac{i.\pi}{24} + i.\frac{k.\pi}{3}}$. Il y en a six.

On doit regarder les parties réelles :

$\cos(\pi/24)$	$\cos(3.\pi/8)$	$\cos(17.\pi/24)$	$\cos(25.\pi/24)$	$\cos(11.\pi/8)$	$\cos(41.\pi/24)$
oui	oui				oui

Un dessin sur le cercle trigonométrique devrait suffire.

◦4◦ ♡ Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k + 4^k}{5^k}$.

Une série géométrique de premier terme 1, de raison $\dfrac{3}{5}$ et de terme à venir $\Big(\dfrac{3}{5}\Big)^{n+1}$.

Une série géométrique de premier terme 1, de raison $\frac{4}{5}$ et de terme à venir $\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$.éventuels

La somme vaut $\boxed{\frac{15}{2} - \frac{3^{n+1}}{5^n.2} - \frac{4^{n+1}}{5^n}}$

∘5∘

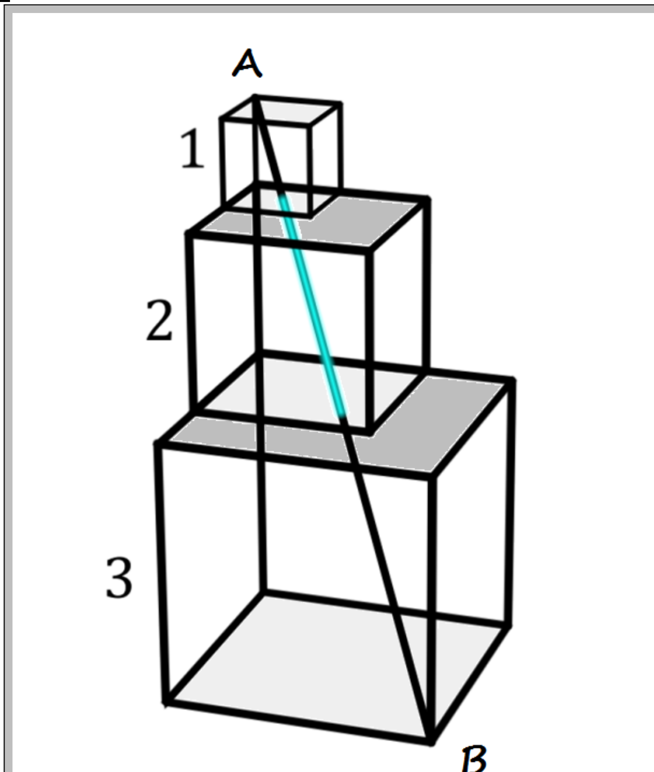
Montrez que les trois racines du polynôme $X^3 + (7.i - 7).X^2 + (35 - 14.i).X + 25.i - 65$ sont alignées dans le plan complexe.

Peut on trouver les trois racines ? Ou, en les notant a, b et c (affixes de A, B et C), faut il prouver que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ?
J'ai une solution où je triche en trouvant les trois racines (merci Xcas) : $4 - 9.i$, $2 - i$ et $1 + 3.i$.

On décide que ce sont les affixes a, b et c de trois points A, B et C.
On calcule les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $-2 + 8.i$ et $-3 + 12.i$.
On reconnaît des multiples de $1 - 4.i$. C'est bon.

Mais comment obtenir ce résultat d'alignement sans résoudre l'équation ?

∘6∘



Quelle est la longueur de la grande diagonale $[A,\ B]$. Quelle est la longueur de sa partie « en bleu » dans le cube du milieu ?

Calculez $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}.dx$ et $\int_0^2 \sqrt{4 - 2^x}.dx$.
L'une vaudra $2.\frac{\ln(2+\sqrt{3}) - \ln(2-\sqrt{3}) - \sqrt{3}}{\ln(2)}$ *et l'autre* π.

Résolvez le système $\log_x(y) + \log_y(x) = \frac{50}{7}$ et $x.y = 256$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$ *(rappel* $y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$*)*.

Donnez moi un entier ayant exactement 15 diviseurs.

On est dans $rang(53)$ pour l'addition et la multiplication modulo 53. L'équation $x^2 + 2.x + 2 = 0$ a pour discriminant -4. L'élève dit « Δ est négatif, elle n'a donc pas de solution ». Il n'a rien compris ! Δ a une racine carrée assez évidente ! Résolvez l'équation.

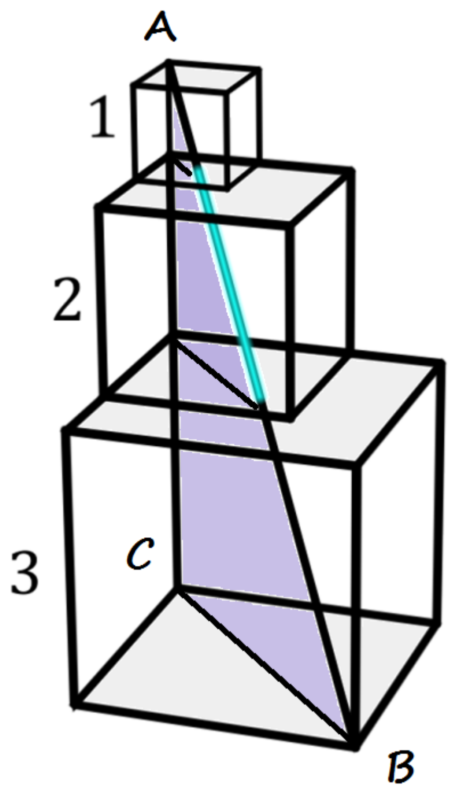
Un entier tel que $\boxed{2^{14}}$ a quinze diviseurs : les 2^p pour p allant de 0 à 14 lui même.
[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384]

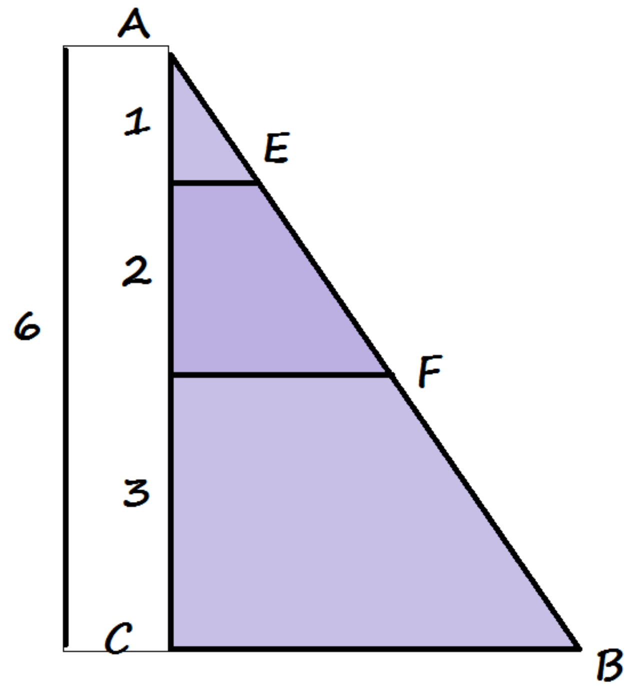
Sinon, il y a 144. [1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144] .
On explique : $\boxed{144 = 2^4.3^2}$
Des diviseurs sont les $2^a.3^b$ avec $a \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ et $b \in \{0,\ 1,\ 2\}$.
Cinq choix pour l'un, et trois pour l'autre. Total (ou produit) : 15.

Le carré qui supporte l'ensemble a pour côté 3 et donc pour diagonale $3.\sqrt{2}$.
On coupe l'empilement de cubes suivant le plan de coupe matérialisé.
On obtient un triangle. Rectangle en un point qu'on va appeler C.

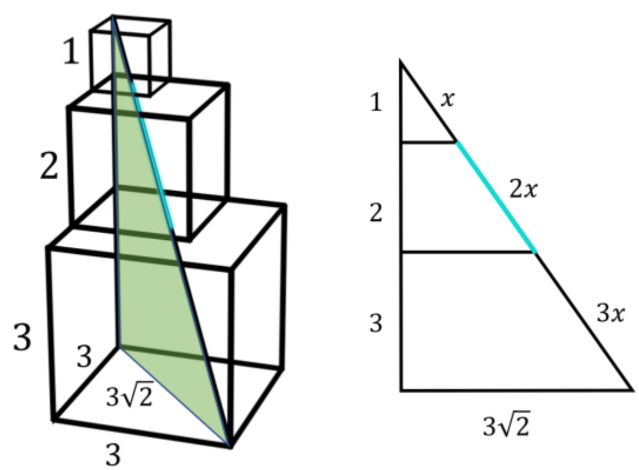
La hauteur totale des trois cubes est 6. On a donc $AC = 6$.
On l'a dit au début : $BC = 3.\sqrt{2}$.

Par théorème de Pythagore : $AB = \sqrt{6^2 + (3.\sqrt{2})^2} = \sqrt{54}$. Simplifiable si on veut.





On va conclure par théorème de Thalès. La section que l'on cherche est à 2 (hauteur du cube du milieu)
ce que $\sqrt{54}$ (grande diagonale)
est à 6 (hauteur totale).



On a donc $\dfrac{EF}{2} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{54}}{6}$.

La longueur cherchée vaut $\dfrac{\sqrt{54}}{3}$ ce qui fait $\sqrt{6}$.

Sinon, il y a aussi ça (source : Mind Your Decisions) :

Mind Your Decisions Videos by Presh Talwalkar

On rappelle
$$\begin{aligned} y = \log_a(x) &\Leftrightarrow a^y = x \\ &\Leftrightarrow e^{y.\ln(a)} = x \\ &\Leftrightarrow y.\ln(a) = \ln(x) \\ &\Leftrightarrow y = \tfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$
(et pour $a = e$, on a le logarithme naturel).

L'équation $\log_x(y) + \log_y(x) = \dfrac{50}{7}$ donne $\dfrac{(\ln(x))^2 + (\ln(y))^2}{\ln(x).\ln(y)} = \dfrac{50}{7}$.

et $x.y = 256$ donne $\ln(x) + \ln(y) = 8\ln(2)$.

On note a et b les deux « vraies inconnues » : $a = \ln(x)$ et $b = \ln(y)$: $7.(a^2 + b^2) = 50.a.b$
$a + b = 8.\ln(2)$

La première équation dit $7.(a+b)^2 = 64.a.b$. En y reportant la seconde (et en divisant par 64) : $a.b = 7.(\ln(2))^2$.

a et b sont les deux racines de $X^2 - 8.\ln(2).X + 7.(\ln(2))^2$ de discriminant $25.(\ln(2))^2$ et de racines $7.\ln(2)$ et $\ln(2)$.
On a donc $\{a,\ b\} = \{\ln(2),\ 7.\ln(2)\}$ puis $\{x,\ y\} = \{2,\ 128\}$.
On encadre $\boxed{S_{x,y} = \{(2,\ 128),\ (128,\ 2)\}}$ et on vérifie : $\log_2(128) + \log_{128}(2) = 7 + \frac{1}{7}$.

Résolvons $x^2 + 2.x + 2 = 0$ (et c'est $(x+1)^2 + 1 = 0$).
Son discriminant vaut -4. Mais ne dites pas que ce nombre est négatif et n'a donc pas de racine carrée...
La notion de signe n'a pas de sens dans $(\mathbb{F}_{53}, +, .)$. Rappelons que -1 c'est aussi 52. Alors...

La vraie question, dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$ et partout n'est pas « quel est le signe de Δ
elle est Δ est il le carré de quelqu'un.

Et ici, $7^2 = 49 = -4$.
On a de la chance, on n'a pas eu à chercher trop loin...
Sinon, il fallait étudier $d^2 = -4 + p.53$ avec p et d dans $\mathbb{Z}$.
On pose donc $\delta = 7$ (et on fout à la poubelle les cours de Terminale avec $\sqrt{\Delta}$,on est d'accord !).
On a donc deux racines : $(-2+\delta).2^{-1}$ et $(-2-\delta).2^{-1}$.
Mais qui est -2 ? C'est 51.
Et qui est 2^{-1} ? C'est 27 car $2 \times 27 = 54$.

Plein de vos réflexes acquis au collège et lycée sont à étendre.
$-x$ est l'opposé de x. Et ici, c'est modulo 53.
Une division par 2, c'est une multiplication par l'inverse de 2.
Une extraction de racine, c'est une question « de qui est ce le carré ? ».

On trouve $\boxed{S = \{22,\ 29\}}$
Et on vérifie : somme = $22 + 29 = 51 = -2$
produit : $22 \times 29 = 638 = 2$ car 636 est multiple de 53

Les deux intégrales existentent par continuité des fonctions sous le signe somme (tant 2^x que x^2 restent plus petits que 4).
Dans $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}.dx$ on reconnaît une portion de disque. En effet, $y = \sqrt{4-x^2}$ est l'équation de la moitié supérieure du disque de centre $(0,\ 0)$ et de rayon 2 ($x^2 + y^2 = 4$). Le grand disque a pour aire $4.\pi$. Son quart de disque donne π.
Sinon, on pouvait poser $x = 2.\sin(t)$ (et en fait $t = Arcsin(x/2)$ pour faire un choix), avec élément différentiel $dx = 2.\cos(t).dt$.
L'intégrale devenait $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}.2.\cos(t).dt$. De par l'intervalle choisi pas de valeur absolue $\int_0^{\pi/2} 2.\cos^2(t).dt$.
On linéarise $2.\cos^2(t) = 1 + \cos(2.t)$.
On intègre et on (re)trouve $\Big[t + \frac{\sin(2.t)}{2}\Big]_0^{\pi/2}$.

Pour $\int_0^2 \sqrt{4-2^x}.dx$, on va déjà poser $2^x = t$ et donc $t = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ et $dt = \frac{dx}{x.\ln(2)}$.
L'intégrale devient $\frac{1}{\ln(2)}.\int_1^4 \frac{\sqrt{4-t}}{t}.dt$ (t au dénominateur, mais on ne passe pas par 0).
On pose cette fois $u = \sqrt{4-t}$ (et donc $t = 4 - u^2$ et $dt = -2.u.du$) : $\frac{1}{\ln(2)}.\int_{\sqrt{3}}^0 \frac{-2.u^2.du}{4-u^2}$.

On est sur la bonne piste, on a $\sqrt{3}$.

On remet les bornes dans l'ordre et on décompose en éléments simples :

$$\frac{u^2}{4-u^2} = \frac{u^2-4+4}{4-u^2} = -1 + \frac{4}{4-u^2} = -1 + \frac{1}{2+u} + \frac{1}{2-u}$$

On en est à $\frac{-2}{\ln(2)}.\int_{\sqrt{3}}^0 \Big(-1 + \frac{1}{2+u} + \frac{1}{2-u}\Big).du$.

Remarque : | C'est bon signe, on voir venir les logarithmes.

On intègre en logarithmes : $\frac{1}{\ln(2)}.\Big[-t+\ln(2+u)-\ln(2-u)\Big]_0^{\sqrt{3}}$.

On trouve bien $\boxed{2.\frac{\ln(2+\sqrt{3})-\ln(2-\sqrt{3})-\sqrt{3}}{\ln(2)}}$

∘7∘

Complétez les étapes qui manquent.
Supposons l'existence d'une solution $(a,\ b,\ c)$ à l'équation $a^4+b^4=c^2$ et montrons qu'il en existe une autre, $(x,\ y,\ z)$, telle que $z<c$. La méthode de descente infinie permet alors de conclure.

Puisque (a^2,b^2,c) est alors un triplet pythagoricien primitif et que (quitte à intervertir a et b si nécessaire) a est impair, il existe un couple (p, q) d'entiers strictement positifs et premiers entre eux tel que $a^2=p^2-q^2$, $b^2=2.p.q$ et $c=p^2+q^2$.
De même, puisque $(a,\ q,\ p)$ est un triplet pythagoricien primitif, il existe un couple $(m,\ n)$ d'entiers strictement positifs et premiers entre eux tel que $a=m^2-n^2$, $q=2.m.n$ et $p=m^2+n^2$.
Puisque p et $2.q$ sont premiers entre eux et que $2.p.q$ est un carré, p et $2.q$ sont des carrés.
De même, puisque $2.q$ (donc $m.n$) est un carré, m et n sont des carrés.
Donc il existe des entiers strictement positifs x, y et z (premiers entre eux) tels que $m=x^2$, $n=y^2$ et $x^4+y^4=z^2$.
Comme $z^2=p<c^2$, la preuve est établie.

On part de $a^4+b^4=c^2$; on suppose que a et b n'ont pas de diviseur commun.

En effet, sinon, on écrirait $a=d.a'$ et $b=d.b'$ avec d un facteur commun premier.
L'équation devient $d^4.(a'^4+b'^4)=c^2$.
c^2 est divisible par d^4, donc c est un multiple de d^2 (car d est premier).
On écrit $c=d.c'$ et on reporte : $d^4.(a'^4+b'^4)=d^4.c'^2$.
On simplifie, on a une solution plus petite.
Et on recommence avec tous les fecteurs premiers communs à a et b.
Au final, a et b sont premiers entre eux.

On repart de $a^4+b^4=c^2$qu'on écrit $(a^2)^2+(b^2)^2=c^2$.
C'est un triplet pythagoricien.
On a donc un couple $(p,\ q)$ (issu d'une tangente q/p d'écriture irréductible) vérifiant $a^2=p^2-q^2$ et $b^2=2.p.q$ (et $c=p^2+q^2$).

b est pair, donc a est celui qui est impair, pour qu'ils n'aient pas de facteur commun.

On repart de $a^2+q^2=p^2$.
a et q sont premiers entre eux, sinon le facteur commun diviserait a puis b (par $b=2.p.q$), ce qui contredirait « premiers entre eux ».

Il existe donc deux entiers qui l'engendrent : m et n (premiers entre eux).
Pour ce couple : $a=n^2-m^2$ et $q=2.m.n$ (a ne peut pas être celui en $2.m.n$ puisqu'il est impair) et $p=m^2+n^2$.

Regardons quand même $b^2=2.p.q$.
Le produit $2.p.q$ est donc un carré parfait : $2^{2.\alpha}.3^{2.\beta}.5^{3.\gamma}\dots$ (issu de la décomposition de b sous la forme $b=2^{\alpha}.3^{\beta}.5^{\gamma}\dots$).
Mais comme p et q sont premiers entre eux, l'exposant $2.\beta$ par exemple ne peut venir que de p ou de q, mais ce ne peut être « un facteur 3 vient de p et un autre de q.
C'est donc que (au facteur 2 près), p et q sont déjà des carrés parfaits.

Lequel prend le facteur 2 ? Il faut que je trouve un argument.

On écrit donc $q=2.d^2$ où d est un entier et $p=z^2$ pour un entier z.

Mais reprenons la formule $2.m.n=q$; elle donne $m.n=d^2$.
L'entier $m.n$ est à son tour un carré parfait.

C'est donc que (et sans facteur 2 voyageur) : n et m sont des carrés parfaits.

On écrit donc $m = x^2$ et $n = y^2$. Et toujours $p = z^2$ obtrenu plus haut.

Mais on avait obtenu aussi au deuxième triplet pythagorien :
$a = n^2 - m^2$ et $q = 2.m.n$ et $p = m^2 + n^2$.
C'est le dernier qui nous intéresse : $z^2 = (x^2)^2 + (y^2)^2$.
On a un nouveau triplet du problème de degré 4.

Et les entiers sont plus petits que les précédents $a^4 + b^4 = c^2$ puisqu'on est passé aux racines carrées en gros).

On a prouvé que l'existence d'une solution entraînait l'existence d'une nouvelle solution, contredisant le caractère minimal de la première.

C'était la géniale preuve de Fermat de $x^4 + y^4 = z^4$ n'a pas de solutions dans $(\mathbb{N}^*)^3$.
Par « descente infinie ».

∘8∘

Un élève a écrit sur sa copie « pour k dans $\mathbb{N}^*$: $\begin{array}{rl} \dfrac{2.k+1}{2.k-1} \geqslant 1 & \Leftrightarrow \quad \dfrac{2.k+1}{2.k-1} \geqslant \dfrac{2.k}{2.k} \\ & \Leftrightarrow \quad \dfrac{2.k+1}{2.k} \leqslant \dfrac{2.k}{2.k-1} \end{array}$ ».

Que doit-on en penser ?

$\dfrac{2.k+1}{2.k-1} \geqslant 1$ est vrai pour tout k *(le numérateur est plus grand que le dénominateur, avec des entiers positifs)*.
$\dfrac{2.k+1}{2.k-1} \geqslant \dfrac{2.k}{2.k}$ est vrai aussi *(c'est la même)*.
$\dfrac{2.k+1}{2.k} \leqslant \dfrac{2.k}{2.k-1}$ est vrai aussi *(par produit en croix)*.

On a donc un schéma $\begin{array}{rl} Vrai & \Leftrightarrow \quad Vrai \\ & \Leftrightarrow \quad Vrai \end{array}$. C'est parfait. Et vrai.

En revanche, on ne voit pas de rapport entre $\dfrac{2.k+1}{2.k-1} \geqslant \dfrac{2.k}{2.k}$ et $\dfrac{2.k+1}{2.k} \leqslant \dfrac{2.k}{2.k-1}$ *(produit en croix raté ?)*.
Mais en termes de pure logique, pas de problème...

∘9∘

Montrez qu'on n'a évidemment pas $\forall x,\ Arctan(x) = \dfrac{Arcsin(x)}{Arccos(x)}$.

Trouvez quand même (graphiquement ?) le nombre de solutions de $Arctan(x) = \dfrac{Arcsin(x)}{Arccos(x)}$ d'inconnue réelle x (dans quoi ?).

Déjà effectivement, ce n'est pas parce qu'on a $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ qu'il faut prétendre $Arctan = \dfrac{Arcsin}{Arccos}$. C'est quoi cette invention purement formelle, juste parce que « sur le papier ça sonne bien » alors qu'on n'a aucun argument.

> *Il s'est quand même trouvé des élèves pour inventer ça, des colleurs me l'ont dit.*
> *t même :* $\dfrac{Arcsin}{Arccos} = \dfrac{sin}{cos} = \tan$ *en simplifiant par Arc.*

Déjà, les deux fonctions $x \longmapsto Arctan(a)$ et $x \longmapsto \dfrac{Arcsin}{Arccos}$ n'ont pas le même domaine.
La première prend la longueur x entre $-\infty$ et $+\infty$.
La seconde la prend entre -1 et 1 .

> *Rappelons que x est une longueur dans $Arctan(x)$. N'allez pas me raconter des choses sur « x modulo π" ou autres, juste parce que vous avez aperçu le mot tangente.*

Tenez, même en 1, c'est absurde : $Arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{Arcsin(1)}{Arccos(1)} = +\infty$ si j'ose dire ou écrire.

> *Celà dit, en 0 on a* $Arctan(0) = \dfrac{Arcins(0)}{Arccos(0)}$.

Maintenant, comment trouver des x pour lesquels c'est vrai ? A part $x = 0$. On sait qu'on devra les chercher entre -1 et 1 pour que tout ait un sens.

Premier réflexe : tracer deux graphes : $Arctan$ et $\dfrac{Arcsin}{Arccos}$. A la calculatrice pour le second, car on devine que sa dérivée sera laide.
Et même les deux graphes sur un même dessin.
Et pourquoi pas le graphe de la différence.

On devine deux racines, dont une connue. Pour l'autre, entre 0 et 1, on ne devine pas sa valeur exacte.

On teste les valeurs pour lesquelles on a des informations ? Mais pour $Arctan$, il y a 0, 1, $\sqrt{3}$ et $1/\sqrt{3}$. Et sueles 0, 1, -1 sont agréables pour $Arcsin$ et $Arccos$.

Fait on ensuite uen étude de la fonction différence $x \longmapsto Arctan(x) - \dfrac{Arcsin(x)}{Arccos(x)}$?

On devinie une dérivée très laide.

Déjà, au lieu d'étudier l'équation $Arctan(x) = \dfrac{Arcsin(x)}{Arccos(x)}$ on va étudier $Arctan(x).Arccos(x) - Arcsin(x) = 0$.
La fonction auxilliaire $x \longmapsto Arctan(x).Arccos(x) - Arcsin(x)$ sera moins lourde.

Ensuite, on se souvient que l'on a $Arcsin + Arccos = \dfrac{\pi}{2}$. (c'est du cours et ça vient de $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$.

On va donc résoudre $x \longmapsto Arctan(x).Arccos(x) + Arccos(x) - \dfrac{\pi}{2}$.

Cette fonction sera plus légère à étudier et dériver.

Mais qui est finalement l'inconnue ? C'est x. Mais si on la remplaçait par $Arccos(x)$?

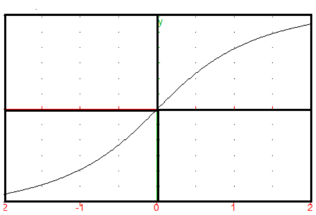
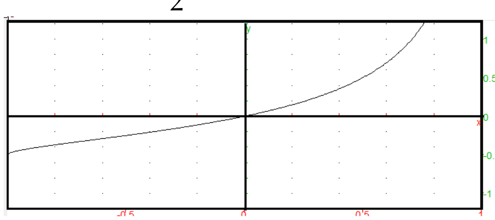
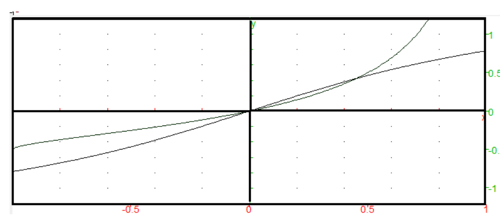
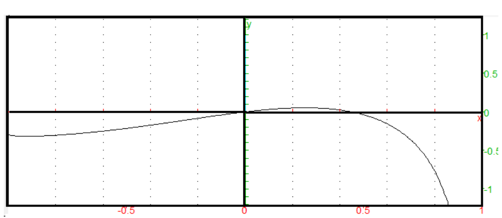
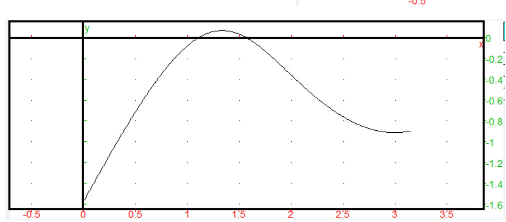
Rappel capital : x est une longueur et $Arccos(x)$ est un angle. Ayez toujours cette approche homogène et physique à l'esprit.

On pose donc $\theta = Arccos(x)$ entre 0 et π (et par là même $x = \cos(\theta)$).
L'équation devient $Arctan(\cos(\theta)).\theta + \theta = \dfrac{\pi}{2}$.

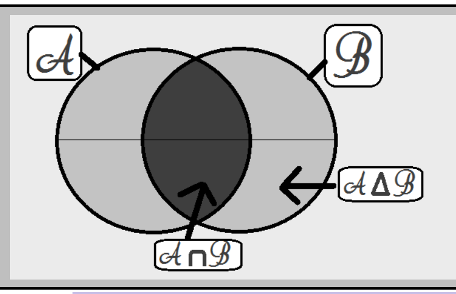
Attention, on a des formules pour $\cos(Arctan(x))$ mais rien pour $Arctan(\cos(\theta))$.

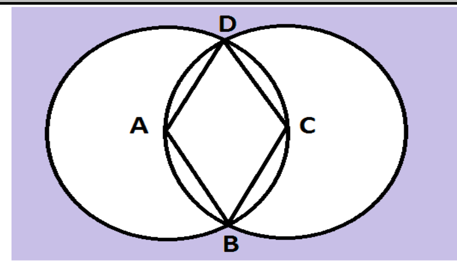
On va donc créer $f = \theta \longmapsto \theta.Atctan(\cos(\theta)) + \theta - \dfrac{\pi}{2}$ et l'étudier sommairement pour lui appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et voir l'unicité des racines sur certains intervalles de stricte monotonie.

On lui connaît une racine évidente : $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (c'est $x = 0$ dans l'équation initiale).

Pour représenter deux ensembles et leur intersection, j'ai tracé deux cercles de même rayon, chacun passant par le centre de l'autre. J'ai noirci l'intersection. J'ai grisé ce qu'on appelle la différence symétrique (celle du *ou exclusif*). Quel est le rapport $\dfrac{\textit{aire en gris}}{\textit{aire en noir}}$.

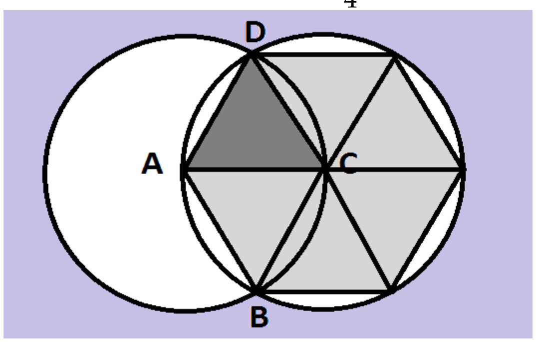


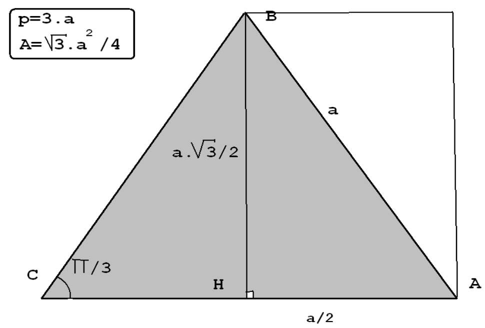


Comme il s'agit d'un rapport de mesures d'aires, on va prendre un rayon commun pour les deux cercles noté a.
Chacun des deux disques a pour aire $\pi.a^2$. Et il faut mesurer au moins la partie commune $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$.

Cette partie est faite d'un losange (A, B, C, D) et de "quatre rognures d'ongles".
Pour le losange, c'est facile, il est fait de deux triangles équilatéraux de côté R.

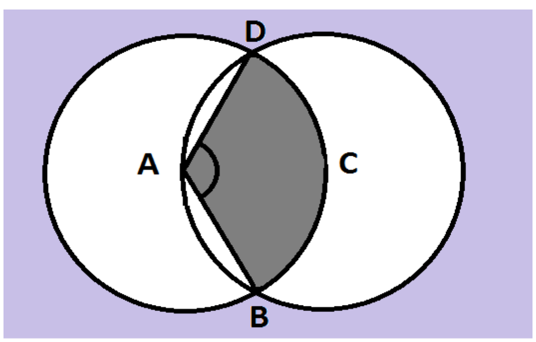
Un tel triangle a pour aire $\dfrac{\sqrt{3}.a^2}{4}$; le losange a pour aire $\dfrac{\sqrt{3}.a^2}{2}$.

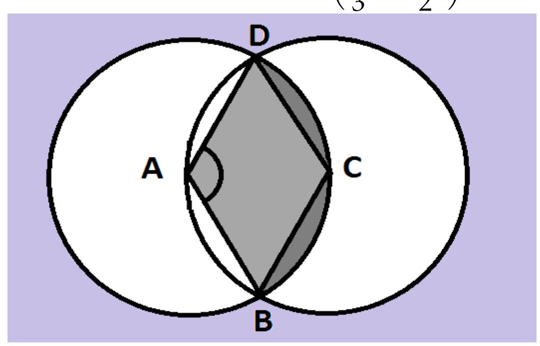




Mais on pouvait aussi mesurer l'aire d'une "part de tarte" autour de A. C'est un tiers de disque : $\dfrac{\pi.a^2}{3}$.

Par soustraction entre losange et section de disque, on a l'aire de deux petites lunes : $\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).a^2$.





Avec une part de tarte et deux lunes, on a l'aire de ce qui est appelé $\boxed{\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}\ :\ \left(\dfrac{2.\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).a^2}$

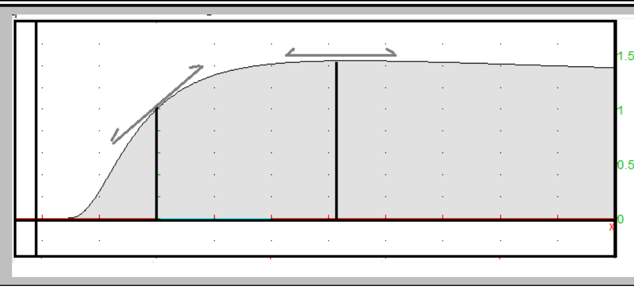
Par soustraction à l'aire de $\mathfrak{A}$ on a l'aire de $\boxed{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\ :\ \pi.a^2-\left(\dfrac{2.\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).a^2}$

On fait de même du côté de $\mathfrak{B}$, et on somme. On a l'aire de $\boxed{\mathfrak{A}\Delta\mathfrak{B}\ :2.\pi.a^2-\left(\dfrac{4.\pi}{3}-\sqrt{3}\right).a^2}$

Le rapport des aires est alors $\dfrac{2.\pi-\dfrac{4.\pi}{3}+\sqrt{3}}{\dfrac{2.\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ de l'ordre de $3,1$.

◦11◦ Pouvez vous confirmer que $x \longmapsto x^{1/x}$ admet bien un maximum en $x = e$?

En utilisant le module **random**, simulez un dé dont les six faces ont pour valeur [1, 1, 3, 5, 5, 10].
Simulez l'expérience : lancer ce dé jusqu'à ce que la somme des valeurs obtenues dépasse 100.



Pour ce qui est du maximum, on sait que $x \longmapsto x^{1/x}$a le même sens de variation que son logarithme (composition par exp et ln).

On va donc juste dériver $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. On trouve $x \longmapsto \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.
La dérivée s'annule et change de signe en $x = e$. On confirme.

Pour les très mauvais élèves : $x \longmapsto x^{1/x}$ ne se dérive pas facilement.
Pour les élèves normaux : $x \longmapsto x^{1/x}$ se dérive en passant au logarithme.
Pour les élèves efficaces : pour le sens de variation de $x \longmapsto Arctan(u(x))$ ou $x \longmapsto e^{u(x)}$, ou $x \longmapsto \ln(u(x))$: inutile de dériver cette chose, dites juste que cette chose a le même sens de variations que u et donc dérivez juste u.

J'adore simuler.

```
from random import randrange
L = [1, 1, 3, 5, 5, 10]
```

```
def lancer() :
....return(L[randrange(6)])
```

Ou même `return(choice(L))`.

```
def jusquacent() :
....S, n = 0, 0
....while S < 100 :
........S += lancer()
........n += 1
....return(n)
```

◦12◦ Montrez $\displaystyle\int_{t=-1}^{2} \frac{t+7}{t+\sqrt{t+2}-10}.dt = 1 + 12.\ln\left(\frac{18}{25}\right)$ (changez de variable, décomposez en éléments simples, intégrez en logarithmes).

$\displaystyle\int_{t=-1}^{2} \frac{t+7}{t+\sqrt{t+2}-10}.dt$ existe par continuité *($t+2$ reste positif, et pour annuler $t - 10 + \sqrt{t+2}$, il faudrait avoir $t^2 - 20.t + 100 = t+2$, ce qui n'a lieu qu'en 7 et 14).*

On pose $u = \sqrt{t+2}$ et donc $t = u^2 - 2$. On différentie : $dt = 2.u.du$.
L'intégrale devient $\displaystyle\int_{u=1}^{u=2} \frac{u^2+5}{u^2-2+u-10}.2.u.du$.

On factorise le dénominateur : $\dfrac{2.u^3+10.u}{(u+4).(u-3)}$ et on décompose en éléments simples.
La méthode des pôles donnerait : $\dfrac{12}{u-3} + \dfrac{24}{u-4}$ et même $\dfrac{12}{u-3} + \dfrac{24}{u+4}$.
Mais la réduction au dénominateur commun n'est pas valable :

$$\frac{12}{u-3} + \frac{24}{u+4} = \frac{36.u-24}{(u-3).(u-4)}$$

Il manque tout une partie polynomiale :

$$\frac{2.u^3+10.u}{(u+4).(u-3)} = \frac{(2.u-2).(u^2+u-12)+36.u-24}{(u-3).(u+4)}$$

Finalement $\boxed{\dfrac{2.u^3+10.u}{(u+4).(u-3)} = (2.u-2) + \dfrac{12}{u-3} + \dfrac{24}{u+4}}$

Il ne reste qu'à intégrer entre 1 et 2 : $\Big[u^2-2\Big]_1^2 = 1$ et les autres termes donnent un logarithme.

$$\int_{t=-1}^{2} \frac{t+7}{t+\sqrt{t+2}-10}.dt = 1 + 24.\ln(3) + 12.\ln(2) - 24.\ln(5)$$

Et on a bien $1 + 12.\ln\left(\dfrac{18}{25}\right)$ *(résultat négatif, mais la fonction intégrée l'est).*

∘13∘ ♡ On pose pour tout n : $a_n = 2^n + 2.(-1)^n$ et $b_n = 2^{n+1} + (-1)^n$. Trouvez M vérifiant $\forall n$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

La matrice M ne peut pas dépendre de n, c'est l'ordre des quantificateurs qui le dit.

On veut donc pour tout n : $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2^n & +2.(-1)^n \\ 2^{n+1} & +(-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & +2.(-1)^{n+1} \\ 2^{n+2} & +(-1)^{n+1} \end{pmatrix}$.

Première ligne : $2^{n+1} + 2.(-1)^{n+1} = \alpha.2^n + \beta.2^{n+1} + 2.\alpha.(-1)^n + \beta.(-1)^n$

$2.2^n - 2.(-1)^n = (\alpha. + 2.\beta).2^n + (2.\alpha. + \beta).(-1)^n$

Exigeons simplement : $\alpha + 2.\beta = 2$ et $2.\alpha + \beta = -2$ [1]

Deuxième ligne : $2^{n+2} + (-1)^{n+1} = \gamma.2^n + \delta.2^{n+1} + 2.\gamma.(-1)^n + \delta.(-1)^n$

$4.2^n - 1.(-1)^n = (\alpha. + 2.\beta).2^n + (2.\alpha. + \beta).(-1)^n$

Exigeons simplement : $\gamma + 2.\delta = 4$ et $2.\gamma + \delta = -1$

On trouve après résolution : $\boxed{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}$

Mais j'ai un chemin plus judicieux, et si vous le comprenez, vous avez tout compris de la diagonalisation en un exemple.

Posons donc $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & +2.(-1)^n \\ 2^{n+1} & +(-1)^n \end{pmatrix}$.

On a immédiatement $U_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2^n \\ (-1)^n \end{pmatrix}$.

Mais aussi $U_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2^n \\ (-1)^n \end{pmatrix}$.

Et donc sans effort : $U_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.U_n$.

La matrice cherchée est donc $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}$ C'est la même, mais c'est plus intelligent et éclairant.

L'attitude à ne pas avoir, à ne plus avoir
« j'ai trouvé une méthode, je la garde, elle me conduit de toutes façons au résultat » (ça marche encore un peu en Terminale, et encore...)
Il faut profiter de tout ce que vous découvrez de nouveau, et ne pas vous en tenir au premier truc croisé dans le cours.
Certes, au « lycée facile », c'était un savoir vertical « apprend ça par cœur,
on le démontrera après
on fera trente exos là dessus
tu auras une évaluation dessus
puis on passera au chapitre suivant.
Quelle pédagogie déplorable pour faire des ingénieurs... on apprend et comprend par couches successives.

---

1. ce n'est pas une identification, c'est une condition suffisante, sachez raisonner dans le bon sens et ne pas sortir des réflexes de rédaction issus de cours de lycée mal assimilés

∘14∘

L'élève Pabokoul-Déba veut décomposer en éléments simples $\dfrac{6.x^4-9.x^3-22.x-45}{(x-3).(x^4+6.x^2+5)}$.

Il écrit $\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b.x+c}{x^2+3}+\dfrac{d.x+e}{x^2+2}$, réduit au dénominateur commun, identifie les numérateurs et obtient le système

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} a & +b & & +d & & = & 6 \\ & -3.b & +c & -3.d & +e & = & -9 \\ 5.a & +2.b & -3.c & +3.d & -3.e & = & 0 \\ & -6.b & +2.c & -9.d & +3.e & = & -22 \\ 6.a & & -6.c & & -9.e & = & -45 \end{array}\right|$$

. Il résout et trouve $(a, b, c, d, e) = (1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 5)$. Mais il a tout faux.

Pourquoi ?

La résolution du système est la bonne.
Mais le dénominateur n'est pas le bon !
Quel con ce Pabokoul !

∘15∘

♡ Calculez les deux intégrales que voici $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t-e^{-t}}$ et $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{5^t-5^{-t}}$.

Idée naturelle : changer de variable (non sans avoir vérifie que l'intégrale existe car la fonction est continue, son dénominateur ne s'annulant pas).

On pose $e^t = u$, et on doit calculer $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{du}{u.\left(u-\frac{1}{u}\right)}$.

On décompose ce $\dfrac{1}{u^2-1}$ en éléments simples : $\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{1}{u-1}-\dfrac{1}{u+1}\right)$.

On intègre en logarithmes, et on trouve $\dfrac{1}{2}.\Big(\ln(e^2-1)-\ln(e-1)-\ln(e^2+1)+\ln(e+1)\Big)$

Et on pourra simplifier $\ln(e^2-1)-\ln(e-1)$ en $\ln(e+1)$.

L'autre intégrale est sur le même modèle : $5^t = u$ donc $t = \dfrac{\ln(u)}{\ln(5)}$ et $dt = \dfrac{du}{\ln(5).u}$.

On effectuera la même décomposition en éléments simples et le même calcul d'intégrale.

$\dfrac{\ln(18)-\ln(13)}{.\ln(5)}$ et on ne peut guère simplifier plus.

∘16∘

♡ Calculez $\displaystyle\sum_{k=3}^{N} \frac{1}{k^2-4}$ en décomposant en éléments simples.

$\dfrac{1}{k^2-4} = \dfrac{1}{(k-2).(k+2)} = \dfrac{1}{4}.\left(\dfrac{1}{k-2}-\dfrac{1}{k+2}\right)$.

On laisse de côté pour l'instant le facteur 4.

On somme

$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	...	$k=n-2$	$k=n-1$	$k=n$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{n-4}$	$\frac{1}{n-3}$	$\frac{1}{n-2}$
$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{9}$		$-\frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n+1}$	$-\frac{1}{n+2}$

On décale

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$				$\frac{1}{n-2}$				
				$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{7}$		$-\frac{1}{n-2}$	$-\frac{1}{n-1}$	$-\frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n+1}$	$-\frac{1}{n+2}$

On simplifie ce qui doit se simplifier.

Il ne reste « que » huit termes.

$$\boxed{\sum_{k=3}^{N} \frac{1}{k^2-4} = \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)}$$

On pouvait le deviner (ou le trouver dans un livre) et le démontrer ensuite par récurrence sur n. mais ce serait rester niveau Terminale.

∘17∘ ♡ Calculez $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1).(k+3)}$ puis $\sum_{k=0}^{n}\frac{k+2}{(k+1)^2.(k+3)^2}$. Il faudra décomposer en éléments simples et décaler les indices, télescoper.

Éléments simples : $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1).(k+3)} = \frac{1}{2}.\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)} - \frac{1}{(k+3)}$

$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1).(k+3)} = \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}.\sum_{k=3}^{n+3}\frac{1}{k}$

$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1).(k+3)} = \frac{1}{2}.\Big(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\Big)$

Forme attendue : $\frac{k+2}{(k+1)^2.(k+3)^2} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{(k+1)^2} + \frac{c}{k+3} + \frac{d}{(k+3)^2}$

En fait, on a de la chance : a et c sont nuls : $\frac{k+2}{(k+1)^2.(k+3)^2} = \frac{1}{4}.\Big(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+3)^2}\Big)$.

On somme et télescope, avec un décalage de 2 :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k+2}{(k+1)^2.(k+3)^2} = \frac{1}{4}.\Big(\frac{1}{(1)^2}+\frac{1}{(2)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{1}{(n+3)^2}\Big)$$

∘18∘ ♣ On appelle élément simple tout rationnel de la forme $\frac{a}{p^b}$ avec a entre 0 et $p-1$ et l'exposant b entier naturel. On appelle aussi éléments simples les entier relatifs. On affirme que tout rationnel se décompose en somme d'éléments simples.

Exemples :

$\frac{11}{15} = \frac{1}{3}+\frac{2}{5}$	$\frac{22}{15} = \frac{2}{3}+\frac{4}{5}$	$\frac{32}{15} = 1+\frac{1}{3}+\frac{4}{5}$	$\frac{13}{25} = \frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}$

Décomposez en éléments simples

$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{17}{21}$	$\frac{173}{49}$	$\frac{11}{52}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{123}{60}$

$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{17}{21}$	$\frac{173}{49}$	$\frac{11}{52}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{123}{60}$
$\frac{5}{7}$	$1+\frac{5}{7}$	$-2+\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}+\frac{2}{3}$	$3+\frac{3}{7}+\frac{5}{49}$	$-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{6}{13}$	$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$	

Le premier est déjà un élément simple.

Le second déborde un peu au dessus d'un entier. On prend sa partie entière plus un élément simple.

Pour le troisième, il faut se méfier : la partie entière de $\frac{-12}{7}$ est bien -3.

Pour le quatrième, on décompose le dénominateur, et on cherche a et b pour avoir $\frac{a}{7}+\frac{b}{3} = \frac{17}{21}$. $3.a+7.b = 17$, qu'est ce que Bézout en pense ?

Pour $\frac{173}{7^2}$, on décompose : $173 = 3\times 49 + 3\times 7 + 5$. C'est « basique ».

Sachant $52 = 2^2\times 13$, on pose a priori $\frac{11}{52} = \frac{a}{4}+\frac{b}{13}$, .

on trouve $\frac{11}{52} = \frac{3}{4}-\frac{7}{13}$

et on avance pas à pas en redecomposant $\frac{11}{52} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{7}{13}$

enfin, on efface le signe moins $\frac{11}{52} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}-1+\frac{6}{13}$

De même $\frac{11}{12} = \frac{1}{4}+\frac{2}{3}$ car $11 = 1.3 + .4$.

∘19∘ Calculez $\int_0^{1/\sqrt{3}} \tan(2.Arctan(t)).dt$ (simplifiez déjà).

L'application est continue ($Arctan(t)$) ne va pas jusqu'à $\pi/4$), l'intégrale existe.

Et on explicite : $\tan(2.Arctan(t)) = \frac{2.t}{1-t^2}$.

On décompose en éléments simples : $\dfrac{2.t}{(1-t).(1+t)} = \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{1}{1+t}$. Il ne reste qu'à intégrer en logarithme :

$$\boxed{\int_0^{1/\sqrt{3}} \tan(2.Arctan(t)).dt = \ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

en utilisant toutes les quantités conjuguées possibles pour virer les $\sqrt{3}$.

Remarque : on a même directement une forme en $\dfrac{u'}{u}$ si on veut.

∘20∘ Les nombres $\dfrac{1}{n}$ pour n de 1 à 20 sont écrits au tableau. On en prend deux (au hasard) a et b ; on les efface et on met en fin de liste le nombre $a.b + a + b$ (par exemple, on remplace $\dfrac{1}{11}$ et $\frac{1}{7}$ par $\dfrac{19}{77}$). Et on recommence. Jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un nombre, qu'on va appeler S.
Dans quel ordre faut il avoir barré les 20 nombres pour que S soit le plus grand possible ?
Dans quel ordre faut il avoir barré les 20 nombres pour que S soit le plus petit possible ?
Allez, on arrête de tourner autour du pot : combien vaut S ?
Indice : C'est un exercice de théorie des groupes, mine de rien. Commu... et Asso....

En fait, l'ordre dans lequel on fait les opérations n'a aucune importance.
On pose $a * b = a + b + a.b$.
On calcule $(a * b) * c$ et $a * (b * c)$ (et aussi $(a * c) * b$, $(b * c) * a$ et ainsi de suite). On trouve la même chose.

Donc, finalement peu importe l'ordre, ce sera toujours le même résultat...

Alors, on calcule $1 * \dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{3} * \dfrac{1}{4} * \ldots * \dfrac{1}{20}$

1	$*\frac{1}{2}$	$*\frac{1}{3}$	$*\frac{1}{4}$	$*\frac{1}{5}$	$\ldots$	$*\frac{1}{20}$
2		$*\frac{1}{3}$	$*\frac{1}{4}$	$*\frac{1}{5}$	$\ldots$	$*\frac{1}{20}$
3			$*\frac{1}{4}$	$*\frac{1}{5}$	$\ldots$	$*\frac{1}{20}$
4				$*\frac{1}{5}$	$\ldots$	$*\frac{1}{20}$
5					$\ldots$	$*\frac{1}{20}$
20						

S vaudra toujours 21.
En fait, $1 + (a * b) = (1 + a).(1 + b)$.

Il suffit donc de

tout décaler de 1	*on a des* $\dfrac{k+1}{k}$
tout multiplier pour faire des $*$	*il reste* $\dfrac{21}{1}$
soustraire 1 pour revenir	20

∘21∘ Le retour de ALI et BEN *(un menteur, un sincère)*.
a- Quelle question poser pour savoir si c'est ALI qui est en face de vous ?
b- Vous croisez les deux frères. Vous demandez à l'un de demander à l'autre si c'est lui ALI. Que déduisez vous de la réponse ?
c- Vous croisez les deux frères. L'un dit "De nous deux, c'est ALI le menteur" et l'autre ajoute "ALI, c'est moi".

a- Euh... « Tu es Ali ? » n'est pas la bonne question.

Ali est en face de vous	Ali ment et Ben est sincère	Non
	Ali est sincère et Ben ment	Oui
Ben est en face de vous	Ali ment et Ben est sincère	Non
	Ali est sincère et Ben ment	Oui

Il aurait fallu avoir la même éponse pour les deux premières lignes, et l'autre réponse pour les deux dernières.

On essaye avec « Ali ment il ? »

Ali est en face de vous	Ali ment et Ben est sincère	Non	(un menteur ne dira jamais qu'il ment)
	Ali est sincère et Ben ment	Non	
Ben est en face de vous	Ali ment et Ben est sincère	Oui	
	Ali est sincère et Ben ment	Oui	

C'est la bonne question. Si on vous dit « non », vous savez que c'est Ali. Mais vous ne savez pas si il est sincère ou menteur d'ailleurs...
Si on vous dit « oui », vous savez que c'est Ben.

b- Vous saurez (en fonction de la réponse de l'autre frère) qui est en face de vous.

Ali est en face de vous	Ali ment et Ben est sincère	Il demande à l'autre s'il est Ben	Ben dit « oui »
	Ali est sincère et Ben ment	Il demande à l'autre s'il est Ali	Ben dit « oui »
Ben est en face de vous	Ali ment et Ben est sincère	Il demande à l'autre s'il est Ali	Ali dit « non »
	Ali est sincère et Ben ment	Il demande à l'autre s'il est Ben	Ali dit « non »

c- A compléter.

∘22∘ Retrouvez les coefficients : $\dfrac{2.x^2+2}{x^4+x^2+1} = \dfrac{a.x+b}{x^2+x+1} + \dfrac{c.x+d}{x^2-x+1}$.
Complétez : $\displaystyle\int \dfrac{2.x^2+2}{x^4+x^2+1}.dx = \Big[\star.Arctan\Big(\dfrac{x^2-1}{☻.x}\Big)\Big]$.

$$\frac{2.x^2+2}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}$$

$$\int \frac{2.x^2+2}{x^4+x^2+1}.dx = \Big[\frac{2.\sqrt{3}}{3}..Arctan\Big(\frac{x^2-1}{\sqrt{3}.x}\Big)\Big]$$

∘23∘ Justifiez : $Arcsin(\sqrt{1-x^2}) = Arccos(x)$ pour x dans $[0,\ 1]$.

Solution du physicien :	je dérive les deux fonction, elles ont la même dérivée, elles diffèrent donc d'une constante, je calcule cette constante en 0
Solution du matheux :	je nomme f leur différence, je dérive f : f' est nulle je trouve $f(x) = f(0)$ pour tout x (cette démarche évite ces histoires contre nature de « je calcule ensuite la constante en un point », alors que le seul point de vue logique est « je regarde d'un étatt initial 0 à un état final x »)
Solution du mateux :	je pose $\theta = Arcsin(\sqrt{1-x^2})$ je traduis : $\sin(\theta) = \sqrt{1-x^2}$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ j'en déduis $\sin^2(\theta) = 1-x^2$ puis $\cos^2(\theta) = 1-(1-x^2) = x^2$ je retrouve $\cos(\theta) = x$ au signe près mais comme θ est entre 0 et $\pi/2$, c'est bien $\cos(\theta) = x$ avec $\cos(\theta) = x$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \leqslant \pi$ je reconnais $\theta = Arccos(x)$ j'efface θ dans $Arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \theta = Arccos(x)$ et c'est fini.

Euh, monsieur, il y en a deux qui s'appellent « solution du matheux », que vouliez vous dire vraiment ?
je voulais dire que justement, le matheux est celui qui va proposer plusieurs solutions, ne pas se contenter de « celle qui a marché ».

Sinon, le calcul :

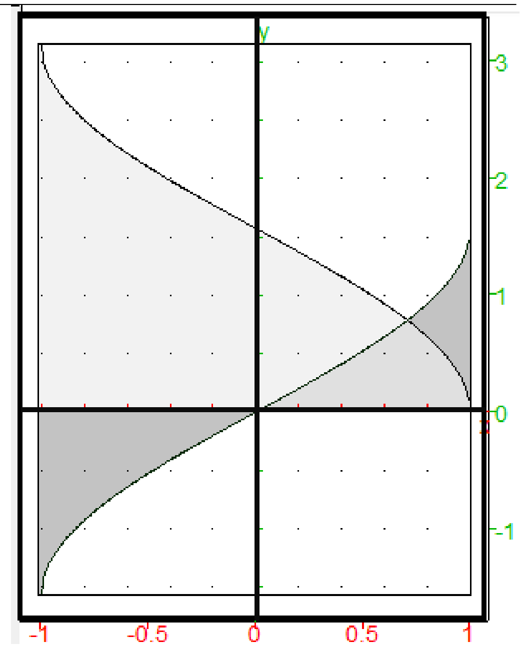
x	$\longrightarrow$	$\sqrt{1-x^2}$	$\longrightarrow$	$Arcsin(\sqrt{1-x^2})$
	$\dfrac{-2.x}{2.\sqrt{1-x^2}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}$	

On a donc $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{x^2}}$ et la positivité de x permet de simplifier $\dfrac{x}{|x|}$.
On notera quand même qu'il y a alors un problème pour le calcul effectife de cette dérivée en 0 (et en 1).

∘24∘

Résolvez $Arcsin(x) = Arccos(x)$ d'inconnue réelle x.

x est nécessairement entre -1 et 1.
On passe au cosinus (ou au sinus), condition juste nécessaire : $\sqrt{1-x^2} = x$.
On élève au carré (nécessaire) : $1 - x^2 = x^2$.
On résout : $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On garde $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ mais on élimine $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ qui donne $-\frac{\pi}{4} = \frac{3.\pi}{4}$.
L'unique solution est $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$



Et si on se dit qu'elle sautait aux yeux, on la propose, vérifie : $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} \subset S_x$
Mais pourquoi est ce la seule ? Juste parce que *Arcsin* est croissante et *Arccos* décroissante. Elles ne se croiseront donc qu'une fois (leur différence est strictement monotone donc injective et ne s'annule qu'une fois).

∘25∘

Complétez : $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+x} = \ln(1+\sqrt{x}+x) - \star.Arctan\left(\frac{\cdots}{\cdot}\right)$.

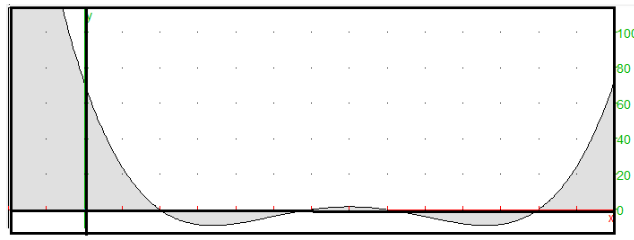
Puisqu'on nnou le propose, on dérive $x \longmapsto \ln(1+\sqrt{x}+x)$ et on trouve $x \longmapsto \frac{1+\frac{1}{2.\sqrt{x}}}{1+x+\sqrt{x}}$.
On a un terme à compenser $x \longmapsto \frac{1}{2.\sqrt{x}.(1+x+\sqrt{x})}$.
On va le calcule par changement de variable : $\int \frac{dx}{2.\sqrt{x}.(1+x+\sqrt{x})} = \int \frac{du}{1+u+u^2}$.
On factorise canoniquement :

$$\int \frac{dx}{2.\sqrt{x}.(1+x+\sqrt{x})} = \int \frac{du}{1+u+u^2} = \int \frac{du}{(u+0.5)^2+0;75} = \frac{4}{3}.\int \frac{du}{\left(\frac{2.u+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

On intègre en Arctangente : $\boxed{\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+x} = \ln(1+\sqrt{x}+x) - \frac{2}{\sqrt{3}}.Arctan\left(\frac{2.\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}}\right)}$

∘26∘

♡ Un polynôme unitaire de degré 4 a pour racines 1, 3, 4 et 6. Calculez sa valeur en 2 et en 5.
♡ Un polynôme de degré 4 a pour racines 1, 3, 4 et 6. Comparez sa valeur en 2 et sa valeur en 5.
♡ Un polynôme de degré 4 a pour racines 1, 2 et 3 *(et une autre)*. Il vaut 1 en 0 et en 5. Retrouvez la dernière racine.
(unitaire : coefficient dominant égal à 1).



Un polynôme unitaire de degré 4 a pour racines 1, 3, 4 et 6. Calculez sa valeur en 2 et en 5.
C'est donc forcément $(x-1).(x-3).(x-4).(x-6)$.
En 2 il vaut -8 et en 5 il vaut -8 aussi.

Un polynôme de degré 4 a pour racines 1, 3, 4 et 6. Comparez sa valeur en 2 et sa valeur en 5.
Cette fois, il s'écrit $\lambda.(x-1).(x-3).(x-4).(x-6)$ avec λ inconnu (non nul).
En 2 et en 5, il prend la même valeur $-8.\lambda$.

Un polynôme de degré 4 a pour racines 1, 2 et 3 *(et une autre)*. Il vaut 1 en 0 et en 5. Retrouvez la dernière racine.
Cette fois, il s'écrit $(x-1).(x-2).(x-3).(a.x+b)$ (son autre racine est $-b/a$).
On le calcule en 0 : $-6.b = 1$.
On le calcule en 5 : $24.(5.a+b) = 1$.
Ceci nous permet de récupérér a et b : $b = -\dfrac{1}{6}$ et $a = \dfrac{1}{24}$.
La racine qui manque est 4.

∘27∘

♡ Calculez $\int_0^{\pi} Arctan(\sin(x)).\cos(x).dx$.

Existence assurée. Changement de variable $s = \sin(x)$: $\int_{x=0}^{x=\pi} Arctan(\sin(x)).\cos(x).dx = \Big[F(\sin(x))\Big]_0^{\pi}$ en notant F une primitive d'Arctangente.
On trouve 0.
Et c'est normal. Tout ce qu'on fait de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$ est défait de $\dfrac{\pi}{2}$ à π.

On peut aussi donner une primitive : $x \longmapsto Arctan(\sin(x)).\sin(x) - \frac{\ln(1+\sin^2(x))}{2}$.

On a aussi une belle idée : on change de variable $t = \pi - x$.

$$I = \int_{x=0}^{x=\pi} Arctan(\sin(x)).\cos(x).dx = \int_{t=\pi}^{t=0} Arctan(\sin(\pi-t)).\cos(\pi-t).(-dt)$$

$$I = \int_{x=0}^{x=\pi} Arctan(\sin(x)).\cos(x).dx = \int_{t=0}^{t=\pi} Arctan(\sin(\pi-t)).\cos(\pi-t).dt$$

$$I = \int_{x=0}^{x=\pi} Arctan(\sin(x)).\cos(x).dx = -\int_{t=0}^{t=\pi} Arctan(\sin(t)).\cos(t).dt$$

$I = -I$: elle est nulle !

∘28∘

♡ Calculez $\int_1^2 x^x.(1+\ln(x)).dx$.

Facile en dépit des apparences.

$$\int_1^2 x^x.(1+\ln(x)).dx = \int_1^2 e^{x.\ln(x)}.(1+\ln(x)).dx = \Big[e^{x.\ln(x)}\Big]_{x=1}^{2}$$

(forme $e^u.u'$ ou changement de variable, c'est pareil).

∘29∘

♣ Calculez (à la main) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^n$ pour n de 0 à 9. Le corps de base est celui des entiers de 0 à 10 pour l'addition et la multiplication modulo 11. Résolvez $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue entière n.

Comme il n'y a que 11 valeurs possibles pour chaque coefficient, autant y aller « à la main », en calculant les premières puissances pour deviner quelquechose.

$\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}^0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}^1=\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27&22\\11&38\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&10\\5&8\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}^5=\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6\\3&7\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}^6=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}^7=\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&8\\4&2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}^8=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&0\\0&9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}^9=\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}9&0\\0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&7\\9&10\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}^{10}=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}9&0\\0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	

Une fois qu'on a $M^{10} = I_2$, tout est fini.
Plus besoin de récurrence !

On écrit $M^{10.n} = (M^{10})^n = (I_2)^n = I_2$ pour tout n.

On prolonge : $M^{10.n+r} = M^{10.n}.M^r = M^r$.

On en déduit la périodicité de période 10 :

n modulo 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M^n	I_2	M	$5.I_2$	$5.M$	$3.I_2$	$3.M$	$4.I_2$	$4.M$	$9.I_2$	$9.M$
plus concis que ça, tu meurs...										

Remarque :
Ici, le professeur/correcteur sera très déçu par m'élève qui perdra un temps fou à faire des récurrences.
Ou même par celui qui dira « avec de longues récurrences, on montrerait que.. ».
Il faut que vous ayez conscience que certains passages du type périodicité en arithmétique ne nécessitent rien de plus que des choses comme $M^{10.n} = (M^{10})^n = (I_2)^n = I_2$.
On vous demande non seulement de savoir raisonner/calculer, mais aussi de comprendre le prix à payer (ou non) pour certaines étapes.
On n'aime pas les automates qui disent « une entier n donc une récurrence »
« un entier n donc des calculs simples mais longs ».
Non ! « Zéro calcul », c'est quand même mieux !

On note qu'ayant obtenu $M^2 = 5.I_2$, on pouvait avancer sans calcul : $M^4 = 5^2.I_2 = 25.I_2 = 3.I_2$
$M^6 = 5^3.I_2 = 4.I_2$
$M^8 = 5^4.I_2 = 9.I_2$
$M^{10} = 5^5.I_2 = 1.I_2$

Comme on a la liste de toutes les possibilités, on peut raisonner par équivalences : $\boxed{(M^n = I_2) \Leftrightarrow (n = 0\ [10])}$
Et qui sont les idiots qui vont écrire $(M^n = I_2) \Leftrightarrow (n = 10.k)$ qui n'a aucune sens, puisqu'il y a là un k non quantifié ?
On pourra, si on tient à rédiger les maths comme un pied (un pied juste, mais quand même lourd [2]) :
$(M^n = I_2) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ n = 10.k)$.

Sinon, on peut aussi diagonaliser.

trace	déterminant
$11 = 0$	$30 - 2 = 6$
équation caractéristique	discriminant
$x^2 - 0.x + 6 = 0$	$-24 = 9 = 3^2$
valeurs propres	matrice diagonale choisie
$\dfrac{3}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$ et $\dfrac{-3}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$	$\begin{pmatrix}7&0\\0&4\end{pmatrix}$

On résout ensuite $\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1\\a&b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\a&b\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}7&0\\0&4\end{pmatrix}$ pour trouver une matrice de passage « simple » (des 1 sur la première ligne).
On trouve $\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}7&0\\0&4\end{pmatrix}$ (mais si, tout est modulo 11, ne l'oubliez pas).

2. au fait, vous savez comment on dit en anglais « quel pied juste » (au sens d'équitable) ? « what a fair foot » (lisez le à voix haute, mais pas à côté de vos parents)

On a donc $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.
Par un résultat connu, associé au nom de Fermat :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7^{10} & 0 \\ 0 & 4^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◦30◦

Montrez : $\forall n \in \mathbb{N},\ (10^n + 1 = 0\ [3]) \Rightarrow (10^{n+1} + 1 = 0\ [3])$.
Déduisez vous : $\forall n \in \mathbb{N},\ (10^n + 1 = 0\ [3])$.

On se donne n. On suppose $10^n + 1 = 0\ [3]$ (et on veut $10^{n+1} + 1 = 0\ [3]$).
On multiplie par 10 : $10.(10^n + 1) = 10.0\ [3]$.
On développe : $10^{n+1} + 10 = 0\ [3]$.
On réduit modulo 3 : $10^{n+1} + 1 = 0\ [3]$. C'est bon !

Niveau Terminale : je mets des k partout : $10^n + 1 = 3.k$
$10^{n+1} + 10 = 30.k$
$10^{n+1} + 1 = 30.k - 9$
$10^{n+1} + 1 = 3.(10.k - 3)$

C'est correct, c'est gentil, mais c'est indigeste.
On écrit $a = b\ [p]$ et c'est tout. Et si vraiment vraiment vraiment il faut : $\exists k,\ a = b + k.p$.
Mais on reste avec des « égalités modulo » : $a = b\ [p]$.
Et on a le droit d'additionner : $a + c = b + c\ [p]$
soustraire : $a - c = b - c\ [p]$
multiplier : $a \times c = b \times c\ [p]$
diviser : $a \times c^{-1} = b \times c^{-1}\ [p]$ où c^{-1} est l'inverse de c modulo p ($c \wedge p = 1$)

La propriété P_n : $10^n + 1 = 0\ [3]$ est héréditaire.

Mais pas initialisée.

Tant pis pour elle. Le principe de récurrence n'y peut rien pour elle.

◦31◦

Calculez $\sum_{k=0}^{2.n} k^{(2+(-1)^k)}$ avant que ce ne soit Sohel qui le fasse (source 2022).

$$\sum_{k=0}^{2.n} k^{(2+(-1)^k)} = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 2.n \\ k\ pair}} k^3 + \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 2.n \\ k\ impair}} k$$

$$\sum_{k=0}^{2.n} k^{(2+(-1)^k)} = 8. \sum_{0 \leqslant p \leqslant n} p^3 + n^2$$

(somme des premiers impairs)

$$\sum_{k=0}^{2.n} k^{(2+(-1)^k)} = 2.n^2.(n+1)^2 + n^2$$

◦32◦

Montrez par récurrence sur n plus grand que 5 : $3^n \leqslant \dfrac{(2.n)!}{(n!)^2} \leqslant 4^n$.

Pour prouver $3^n \leqslant \dfrac{(2.n)!}{(n!)^2} \leqslant 4^n$, on ne se précipite pas trop, on crée deux propriétés :

P_n	Q_n
$3^n \leqslant \dfrac{(2.n)!}{(n!)^2}$	$\dfrac{(2.n)!}{(n!)^2} \leqslant 4^n$

On les initialise toutes deux au rang 5 en effectuant :

$$\frac{10!}{(5!)^2} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{(5.4.3.2.1).(5.4.3.2.1)} = \frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2.1} = \frac{9.8.7.6}{4.3} = \frac{9.2.7.2}{1}$$

On doit donc minorer 252 par 9.9.3 *(évident)* et majorer par 1024 *(connu)*.
L'initialisation est faite.

On suppose pour un n donné, quelconque : $3^n \leqslant \dfrac{(2.n)!}{(n!)^2}$.

On veut alors prouver $3^{n+1} \leqslant \dfrac{(2.n+1)!}{((n+1)!)^2}$.

On regarde : $\dfrac{(2.n+1)!}{((n+1)!)^2} = \dfrac{(2.n)!.(2.n+1).(2.n+2)}{(n!.(n+1))^2} = \dfrac{(2.n)!}{(n!)^2}.\dfrac{(2.n+1).(2.n+2)}{(n+1)^2} = \dfrac{(2.n)!}{(n!)^2}.\dfrac{(4.n+2)}{(n+1)}$.

Sachant qu'on a déjà supposé $3^n \leqslant \dfrac{(2.n)!}{(n!)^2}$, la question se réduit à prouver que $\dfrac{(4.n+2)}{(n+1)}$ est plus grand que 3.

On effectue la différence : $\dfrac{4.n+2}{n+1} - 3 = \dfrac{n-1}{n+1}$. C'est positif. C'est bon.

Pour la suite de propriétés (Q_n), on suppose encore, pour un n quelconque donné $\dfrac{(2.n)!}{(n!)^2} \leqslant 4^n$ et on veut passer à $\dfrac{(2.n)!}{(n!)^2}.\dfrac{(4.n+2)}{(n+1)} \leqslant 4^n.4$.

Il suffit de prouver $\dfrac{(4.n+2)}{(n+1)} \leqslant 4$, ce qui est encore évident puisque $4.n+2$ est plus petit que $4.(n+1)$.

La propriété est initialisée au rang 5 et est héréditaire, le principe de récurrence nous garantit qu'elle est vraie pour tout n au moins égal à 4.

Remarque :	*Air connu pour un exercice de ce type :* *on doit prouver* $\forall n,\ (P_n \Rightarrow P_{n+1})$, *ce qui se rédige par "on prend un n quelconque fixé, on suppose* P_n*vraie"* *et surtout pas en "on suppose pour tout n* P_n*vraie".*

Vous êtes peut-être un mathématicien si...
– Vous ne pouvez pas vous empêcher de lâcher des contre-exemples dès que quelqu'un soutient une impossibilité,
– À 19 ans vos années les plus productives sont déjà derrière vous,
– Votre résultat majeur est nommé d'après le nom de quelqu'un d'autre,
– Vous faites des erreurs... mais ce sont des erreurs très intéressantes,
– Vous vous demandez comment Euler prononçait « Euclide »,
– Vous avez déjà souri pendant 10 secondes à la fin d'une preuve,
– Vous comprenez toutes les mathématiques que Gauss a manipulées... jusqu'à ses 13 ans,
– Votre matière principale était les mathématiques, la seconde la caféine,
– Vous connaissez tout l'alphabet grec, sans connaitre un seul mot de grec,
– La solution à tout problème passe par le décompte de balles dans des boîtes,
– Faire plus d'une chose à la fois est ennuyeux,
– Vous savez compter jusqu'à 32 avec les doigts de la main (en binaire),
– Vous pensez aux mathématiques en tant qu'art, pas (forcément) en tant que science...
– Vous trouvez que les blagues mathématiques sont drôles,
– Vous vous surprenez en train de dire « il existe » au lieu de « il y a »,
– Vous avez déjà eu des débats virulents autour de 0, 999 . . . = 1,
– Ou des débats virulents autour de la différence entre « Deux pièces sont lancées et l'une d'elles tombe sur face » et « Deux pièces sont lancées. Cette pièce donnée tombe sur face »,
– Vous trouvez ça cool, des nouvelles formules dont la somme donne e,
– Vous passez votre temps à faire de l'aide aux devoirs pour des inconnus,
– Vous écrivez des e mails en LATEX,[3]
– Vous prouvez votre innocence lors d'un interrogatoire en commençant par « Supposez en effet que je sois coupable... », point à partir duquel vous êtes arrêté,
– Mélanger un jeu de cartes vous fait penser au groupe symétrique S_n,
– Vous savez que 1+1 ne fait pas toujours 2,
– Vous grimacez chaque fois que vous lisez ou entendez quelqu'un dire « et réciproquement » incorrectement,

3. *il y en a déjà parmi vous !*

– Vous étiez allé voir le film Matrix parce que vous vous attendiez à des mathématiques...

∘33∘ Calculez $\sum_{k=0}^{2021} j^k$ et $\sum_{k=0}^{2021}(1+j)^k$ avec toujours ce même complexe de cube 1 (comme la salsa).

On a des séries géométriques, de raison différente de 1.
Pour chacune, le premier terme vaut 1.
Et le terme à venir dans $\sum_{k=0}^{2021} j^k$ est j^{2022} ce qui fait

$$\sum_{k=0}^{2021} j^k = \frac{1-1}{1-j} = 0$$

On pouvait aussi regrouper les éléments trois par trois.

De même, $\sum_{k=0}^{2021}(1+j)^k = \frac{1-(1+j)^{2022}}{1-(1+j)}$.
Or, $(1+j)^{2022} = (e^{i.\pi/3})^{2022} = e^{674.i.\pi} = 1$. Cette somme aussi est nulle.
Mais on aurait dû cette fois regrouper les termes six par six.

∘34∘ Il y a trois élèves dans cette classe dont les prénoms sont ambigus (on dit « épicènes ») : Claude, Dominique et Camille. Je sais que si Dominique est un garçon, alors Claude est en une fille. Si Camille est un garçon, alors Dominique est une fille. Si Dominique est une fille, alors Camille aussi. Si Camille est de sexe féminin, alors Claude s'appelle Monsieur. Donnez moi le sexe de chacun (euh, non, indiquez le moi, c'est tout).

On va écrire des implications, en supposant que se faire appeler Monsieur, c'est être de sexe masculin, sinon j'en perds mon latin.
On va noter avec une grande lettre le fait d'être une fille, et la négation avec une barre, c'est « garçon ».

1	si Dominique est un garçon, alors Claude est en une fille	$\overline{D} \Rightarrow Cl$ que je traduis par $D\ ou\ Cl$
2	Si Camille est un garçon, alors Dominique est une fille	$\overline{Ca} \Rightarrow D$ que je traduis par $Ca\ ou\ D$
3	Si Dominique est une fille, alors Camille aussi	$D \Rightarrow Ca$ qui donne $\overline{D}\ ou\ Ca$
4	Si Camille est de sexe féminin, alors Claude s'appelle Monsieur.	$Ca \Rightarrow \overline{Cl}$ et là c'est enfin $\overline{Ca}\ ou\ \overline{Cl}$

On peut mettre tout ça avec des *et*, développer par exemple $(Ca\ ou\ D)\ et\ (\overline{D}\ ou\ Ca)$ pour voir ce qu'il reste.

Mais on peut aussi y aller rapidement.
Supposons que Dominique est un garçon. Par 1, Claude est une fille.
Par contraposée de 4, Camille est un garçon.
Par 2, Dominique est une fille.
Contradiction interne.
On élimine « Dominique est un garçon ».
Il reste Dominique est une fille. Alors par 3, Camille aussi.
Par 4, Claude est un garçon.
Ceci ne contredit pas 1 (faux implique faux)
Et 2 est du type « faux implique... ».

On retient donc au final

Dominique	Claude	Camille
Fille	Garçon	Fille

∘35∘ ♡ Étudiez les variations sur $\mathbb{R}$ de l'application $\theta \longmapsto \theta - \sin(\theta)$. Déduisez pour tout θ réel : $|\sin(\theta)| \leqslant |\theta|$.
Le professeur demande de prouver pour tout θ réel et tout n entier naturel : $|\sin(n.\theta)| \leqslant n.|\sin(\theta)|$. Un élève propose la démonstration suivante : en appliquant le résultat précédent à θ et à $n.\theta$ on a $|\sin(\theta)| \leqslant |\theta|$ et $|\sin(n.\theta)| \leqslant |n.\theta|$, on effectue ensuite le quotient des inégalités et on trouve $\frac{|\sin(n.\theta)|}{|\sin(\theta)|} \leqslant n$ et c'est fini.
Où est l'erreur ? Démontrez quand même le résultat du professeur par récurrence sur n.
A-t-on aussi : $\forall \theta \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{R}^+,\ |\sin(n.\theta)| \leqslant n.|\sin(\theta)|$?
A-t-on aussi : $\forall \theta \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{R}^+,\ |\cos(n.\theta)| \leqslant n.|\cos(\theta)|$?
Montrez aussi : $|sh(x)| \geqslant |x|$ pour tout x réel.

L'application $\theta \longmapsto \theta - \sin(\theta)$ se dérive en $\theta \longmapsto 1 - \cos(\theta)$. Sa dérivée est positive ou nulle partout.
L'application $\theta \longmapsto \theta - \sin(\theta)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
Elle est nulle en 0.
Elle est donc négative sur $]-\infty,\ 0]$ et positive sur $[0,\ +\infty[$.

On a donc $\sin(\theta) \leqslant \theta$ pour θ positif
$\sin(\theta) \geqslant \theta$ pour θ négatif
$-\sin(\theta) \leqslant -\theta = |\theta|$
Maintenant, tout dépend du signe de $\sin(\theta)$.
Prenons θ positif : si $\sin(\theta)$ est positif, on a $|\sin(\theta)| = \sin(\theta) \leqslant \theta = |\theta|$.
Mais sinon ? On fait appel à une autre application : $\theta \longmapsto \theta + \sin(\theta)$.
Elle a aussi une dérivée positive, donc elle croît. Elle est nulle en 0.
Elle est donc positive sur $\mathbb{R}^+$: $-\sin(\theta) \leqslant \theta$.
Ceci donne alors $|\sin(\theta)| = -\sin(\theta) \leqslant \theta = |\theta|$.

On fait le même type de raisonnement sur $\mathbb{R}^-$.
Ou même, on applique le résultat précédent en $-\theta$ positif.

L'élève qui écrit $\begin{array}{ccc} |\sin(n.\theta)| & \leqslant & |n.\theta| \\ |\sin(\theta)| & \leqslant & |\theta| \end{array}$ a raison.
C'est quand il passe au quotient que c'est n'importe quoi. Certes tout est positif (pour les inégalités c'est important). Mais ce sont les produits qui passent, pas les quotients.
Rappelons $2 \leqslant 4$ et $1 \leqslant 4$. le passage au quotient donne $2 \leqslant 1$. Trop fort !

On se donne θ (non multiple de π afin d'avoir un dénominateur non nul) et on fait varier n au sein d'une récurrence.
On initialise à $n = 0$: $\dfrac{|\sin(0.\theta)|}{|\sin(\theta)|} = 0$.
On se donne n. On suppose vrai $\dfrac{|\sin(n.\theta)|}{|\sin(\theta)|} \leqslant n$.
On calcule alors :

$$\frac{|\sin((n+1).\theta)|}{|\sin(\theta)|} = \frac{|\sin(n.\theta).\cos(\theta) + \cos(n.\theta).\sin(\theta)|}{|\sin(\theta)|} \leqslant \frac{|\sin(n.\theta)|}{|\sin(\theta)|}.|\cos(\theta)| + |\cos(n.\theta)|.\frac{|\sin(\theta)|}{|\sin(\theta)|}$$

On majore les cosinus (en valeur absolue) par 1 : $\dfrac{|\sin((n+1).\theta)|}{|\sin(\theta)|} \leqslant \dfrac{|\sin(n.\theta)|}{|\sin(\theta)|} + \dfrac{|\sin(\theta)|}{|\sin(\theta)|}$.
On exploite l'hypothèse de récurrence et on majore bien par $n + 1$.

On notera que pour n trop grand, le résultat n'a plus aucun intérêt.

On a prouvé $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sin(n.\theta)| \leqslant n.|\sin(\theta)|$.
En effet, pour θ multiple de π, la formule est encore valable, du type $0 \leqslant 0$.

Mais qu'en est il de $\forall \theta \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{R}^+$, $|\sin(n.\theta)| \leqslant n.|\sin(\theta)|$ dans lequel les ensembles ont été intervertis ?
Pour θ égal à 1 et n égal à   on obtient une contradiction.

$\forall \theta \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{R}^+$, $|\cos(n.\theta)| \leqslant n.|\cos(\theta)|$ donnerait pour $\theta = 0$ et $n = \dfrac{1}{2}$ une formule étrange, vous ne trouvez pas ?

Pour comparer $sh(x)$ et x (en valeur absolue), on crée $x \longmapsto sh(x) - x$ et $x \longmapsto sh(x) + x$ de dérivées positives.

∘36∘

♣ On pose $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$. Calculez a^b. On ne sait pas, en l'état d'avancement actuel des mathématiques, si a est rationnel ou irrationnel. Montrez quand même que dans les deux cas, vous pouvez trouver deux irrationnels α et β tels que α^β soit redevenu rationnel.

$a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ (en utilisant $(a^b)^c = a^{b.c}$).
C'est un rationnel.
On ne sait pas si a est rationnel ou non ? pas grave, étudions les deux cas.

cas	choix des deux irrationnels	vérification
$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rationnel	$\alpha = \beta = \sqrt{2}$	$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$
$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrationnel	$\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $\beta = \sqrt{2}$	$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$

On a donc trouvé qu'il existe toujours un couple $(\alpha,\ \beta)$ avec α et β irrationnels et α^η rationnel.

Et si le physicien vient vous emmerder en demandant « c'est qui alors ce couple ? », vous ne pouvez pas lui répondre autrement qu'avec « dans un cas c'est... et dans l'autre c'est... ».
Et si il vous demande « mais lequel faut il choisir », répondez lui que ce n'est pas pire que la physique quantique...

Et si quelqu'un vous demande « est ce que ce n'est pas superbe comme démonstration », soyez sûr que c'est un mathématicien. Ou un poète. Ou inclusif.

∘37∘ Calculez $\displaystyle\int_0^{Arctan(1/2)} \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)-\sin(\theta)}.d\theta$ par le changement de variable $t=\tan(\theta)$.

L'existence ? cos et sinsont égaux en $\dfrac{\pi}{4}$ (c'est $Arctan(1)$) et ici on s'arrête avant.

Sinon, c'est bien Bioche qui nous le suggère. Par $\theta \longmapsto \theta+\pi$, sinus et cosinus changent de signe, la fraction ne change pas, et de $d\theta$ non plus.

On a alors sur l'intervalle où sinus, cosinus et tangente sont positifs :
on sait $\cos(\theta) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ *(venant de $1+\tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$)* et
$\sin(\theta) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ *(puisque $\sin = \tan.\cos$)*
On intègre :

$$\int_0^{1/2} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}}.\frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{1/2} \frac{dt}{(1-t).(1+t^2)}$$

Il faut décomposer en éléments simples : $\dfrac{1}{(1-t).(1+t^2)} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b.t+c}{1+t^2}$ *(la difficulté quand on n'a pas l'habitude, c'est d'avoir le bon nombre de constantes, la bonne forme).*

$\dfrac{1}{(1-t).(1+t^2)} = \dfrac{1}{2}.\Big(\dfrac{t+1}{1+t^2} - \dfrac{1}{t-1}\Big)$ et on vérifie, puis on propose.
On termine avec du logarithme et de l'arctangente :

$$\boxed{\int_0^{Arctan(1/2)} \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)-\sin(\theta)}.d\theta = \frac{\ln(5)}{4} + \frac{Arctan(1/2)}{2}}$$

Et pourquoi Bioche avait raison ? parce que tout s'exprime sous le signe somme à l'aide de la tangente, avec sa dérivée en facteur : $\dfrac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)-\sin(\theta)} = \dfrac{1}{1-\frac{\sin(t)}{\cos(t)}} = \dfrac{1}{1-t} = (1+t^2).\dfrac{1}{(1+t^2).(1-t)}$.

∘38∘ ♡ Montrez que la série de terme général $\dfrac{n+3}{n^3+3.n^2+2.n}$ converge et calculez sa somme.

Comme on doit calculer la somme, on se dit qu'il doit y avoir une formule pour les sommes partielles (on n'est pas encore en Spé).
On sent venir la décomposition en éléments simples. On factorise le dénominateur, et on va donc avoir trois coefficients à calculer par la méthode des pôles :

$$\frac{n+3}{n^3+3.n^2+2.n} = \frac{n+3}{n.(n+1).(n+2)} = \frac{3}{2.n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{2.(n+2)}$$

On somme à horizon fini : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{n+3}{n^3+3.n^2+2.n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{3}{2.n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n+1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2.(n+2)}$

On décale : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{n+3}{n^3+3.n^2+2.n} = \frac{3}{2}.\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 2.\sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}.\sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n}$

On télescope ça $\dfrac{3}{2} - 2 + \dfrac{1}{2} = 0)$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{n+3}{n^3+3.n^2+2.n} = \frac{3}{2}.\Big(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\Big) - 2.\Big(\frac{1}{2}\Big) + o(1)_{N\to+\infty}$

J'en connais qui se sont pris la tête à calculer les termes résiduels : $-2.\Big(\frac{1}{N+1}\Big)+\frac{1}{2}.\Big(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}\Big)$.
A quoi bon ? Ça va tendre vers 0.
Mais on ne met pas $+0$ *ou* $+\dots$ *ou « rien », on met* $o(1)_{N\to+\infty}$.
Les mathématiques demandent de la précision, mais autorisent pour cela la concision...
.

On fait tendre N vers l'infini, il reste $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{n+3}{n^3+3.n^2+2.n}=\frac{5}{4}}$

∘39∘ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{2.k-1}{\binom{k}{2}^2}$.

La somme a l'air étrange. Et si finalement on pouvait la calculer ?

Après tout, le binomial $\binom{k}{2}$ n'est pas un quotient de factorielles...[4].

On a $\binom{k}{2}=\frac{k.(k-1)}{2}$.

Oui, je sais, vous aviez le même avec $\frac{k!}{(k-2)!.2!}$ *finalement.*
Mais comment pouvez vous ensuite voir ceci comme le choix de deux éléments parmi k ?
Comment pouvez vous rapidement le calculer pour k égal à 8 ?

On poursuit : $\displaystyle\frac{2.k-1}{\binom{k}{2}^2}=\frac{4.(2.k-1)}{k^2.(k-1)^2}$.

Une somme de fractions rationnelles. On va décomposer en éléments simples.

$$\frac{4.(2.k-1)}{k^2.(k-1)^2}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k^2}+\frac{c}{(k-1)}+\frac{d}{(k-1)^2}$$

Les quatre éléments sont ceux qu'on attend.
Ils sont logiques pour reconstituer le dénominateur.
Et l'idée de seulement $\frac{4.(2.k-1)}{k^2.(k-1)^2}=\frac{b}{k^2}+\frac{d}{(k-1)^2}$ *comme proposé par certains n'est pas logique.*
Il n'y a pas assez de constantes sur lesquelles jouer si on réduit au dénominateur commun.
La vision « dimension en algèbre linéaire » ou « nombre de constantes à déterminer » est celle qui doit vous guider pour les décompositions en simples éléments.

On trouve b et d par la méthode des pôles (ce sont bien les termes importants en 0 et en 1).

$\frac{4.(2.k-1)}{k^2.(k-1)^2}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k^2}+\frac{c}{(k-1)}+\frac{d}{(k-1)^2}$ *donne* $\frac{4.(2.X-1)}{(X-1)^2}=a.X+b+\frac{c.X}{(X-1)}+\frac{d.X}{(X-1)^2}$
On fait tendre X vers 0 : $\frac{4.(2.0-1)}{(0-1)^2}=0+b+0+0$.
b vaut -4. *Et d vaut* 4 *aussi.*

On trouve a et c par la valeur en 2 et en 3 ou par réduction au dénominateur commun.

$$\frac{4.(2.k-1)}{k^2.(k-1)^2}=\frac{0}{k}-\frac{4}{k^2}+\frac{0}{(k-1)}+\frac{4}{(k-1)^2}$$

Tout ça pour avoir finalement seulement deux termes, comme le mauvais élève qui aurait mal compté ses constantes...

On peut à présent sommer : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{4.(2.k-1)}{k^2.(k-1)^2}=\sum_{k=2}^{n}\frac{4}{(k-1)^2}-\frac{4}{k^2}$.

Puis télescoper : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{4.(2.k-1)}{k^2.(k-1)^2}=\frac{4}{(2-1)^2}-\frac{4}{n^2}$.

---

4. si vous persistez à calculer $\binom{n}{3}$ avec des factorielles partout, c'est que vous êtes resté en première ; et comme avec une voiture, si vous restez en première, vous roulez, mais vous n'allez pas loin

Et même passer à la limite : $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{4.(2.k-1)}{k^2.(k-1)^2}=\frac{4}{(2-1)^2}$.

On notera que la convergence de la série pouvait être prouvée par les méthodes classiques : terme général en $O\Big(\frac{1}{k^3}\Big)$.
Mais pour la valeur de la somme, il fallait revenir à de l'explicite.

∘40∘ Recomposez en éléments compliqués : $5.X-5+\frac{7}{X-2}+\frac{28}{X+3}$.
Décomposez en éléments simples $\frac{(3.X^2+2.X+4).(8.X^2-7.X+7)}{(X^3-2.X^2+X-2).(X^3+3.X^2+X+3)}$.

∘41∘ ♡ Calculez $\int_1^2\frac{dt}{e^t-e^{-t}}$ et $\int_1^2\frac{dt}{5^t-5^{-t}}$.

Idée naturelle : changer de variable (non sans avoir vérifie que l'intégrale existe car la fonction est continue, son dénominateur ne s'annulant pas).

On pose $e^t=u$, et on doit calculer $\int_e^{e^2}\frac{du}{u.\Big(u-\frac{1}{u}\Big)}$.

On décompose ce $\frac{1}{u^2-1}$ en éléments simplesi : $\frac{1}{2}.\Big(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\Big)$.

On intègre en logarithmes, et on trouve $\frac{1}{2}.\Big(\ln(e^2-1)-\ln(e-1)-\ln(e^2+1)+\ln(e+1)\Big)$

Et on pourra simplifier $\ln(e^2-1)-\ln(e-1)$ en $\ln(e+1)$.

L'autre intégrale est sur le même modèle : $5^t=u$ donc $t=\frac{\ln(u)}{\ln(5)}$ et $dt=\frac{du}{\ln(5).u}$.

On effectuera la même décomposition en éléments simples et le même calcul d'intégrale.

$\frac{\ln(18)-\ln(13)}{.\ln(5)}$ et on ne peut guère simplifier plus.

∘42∘ La suite u vérifie : $u_0=8$, $u_1=-5$ et $u_2=49$, et $u_{n+3}=7.u_{n+1}-6.u_n$ pour tout n. *Hélas, on a tout oublié du cours, alors on innove.*
Calculez u_n pour n de 0 à 7.
On définit l'application $x\longmapsto\frac{-7.x^2-5.x+8}{6.x^3-7.x^2+1}$, notée f. Calculez $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$.
On définit : $u=x\longmapsto 6.x^3-7.x^2+1$. Calculez $(f\times u)^{(n)}(0)$ de deux façons.
Déduisez que la suite (u_n) est exactement la suite $\Big(\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Big)$.
Factorisez u.
Vérifiez que f admet pour décomposition en éléments simples $x\longmapsto\frac{1}{1-x}+\frac{3}{1-2.x}+\frac{4}{1+3.x}$.
Déterminez $\Big(x\longmapsto\frac{1}{1-a.x}\Big)^{(n)}$ pour tout n et $\Big(x\longmapsto\frac{1}{1-a.x}\Big)^{(n)}(0)$.
Trouvez alors la formule générale pour (u_n).

∘43∘ Le polynôme P de degre 4 a pour racines a, b, c et d (distincts). Decomposez en elements simples $\frac{P'(X)}{P(X)}$.
Et si on a $a=b$ la formule est elle encore valable ?

La clef : on factorise P (en mettant un coefficient dominant λ) puis on dérive $P=\lambda.(X-a).(X-b).(X-c).(X-d)$

$$P'=\lambda.(X-b).(X-c).(X-d)+\lambda.(X-a).(X-c).(X-d)+\lambda.(X-a).(X-b).(X-d)+\lambda.(X-a).(X-b).(X-c)$$

On dérive

$$\frac{P'}{P}=\frac{\lambda.(X-b).(X-c).(X-d)+\lambda.(X-a).(X-c).(X-d)+\lambda.(X-a).(X-b).(X-d)+\lambda.(X-a).(X-b).(X-c)}{\lambda.(X-a).(X-b).(X-c).(X-d)}$$

et on simplifie $\boxed{\frac{P'(X)}{P(X)}=\frac{1}{X-a}+\frac{1}{X-b}+\frac{1}{X-c}+\frac{1}{X-d}}$

On note que λ a disparu.
Et on note que a, b, c et d n'ont pas besoin d'être distincts quand on dérive puis quand on divise.

Simplement, on écrira $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \dfrac{1}{X-a} + \dfrac{1}{X-b} + \dfrac{1}{X-c} + \dfrac{1}{X-d} = \dfrac{2}{X-a} + \dfrac{1}{X-c} + \dfrac{1}{X-d}$ avec un joli 2 au numérateur qui marque la multiplicité de la racine.

◦44◦

Une liste de phrases, une liste de permutations. Appariez les :

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Les philanthropies des ouvriers charpentiers. *Tu me paraissais bien câline.* Le boutre du Sultan coulait au confluent de la Garonne. *Tu danses comme un beau ballot.* Ce cas de Corée me turlupine. *L'aspirant habite Javel.* Le capitaine a enfumé sa cale. *Les mutins ont passé la berge du ravin.*

Javel	habite	ant	spir	a	l			
Tu me		araissais bien		â		ine		
Les		utins ont		assé la		erge du ra		in
Tu		an		es comme un beau		allot.		
Ce c		s de C		rée me t		rl		pine

◦45◦

Pourquoi n'a-t-on pas $\left(x \longmapsto \dfrac{x^3+4.x^2-16.x+5}{x^3-2.x^2-5.x+6}\right) = \left(x \longmapsto \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{x+2}\right)$.

Résolvez $\left(x \longmapsto \dfrac{x^3+4.x^2-16.x+5}{x^3-2.x^2-5.x+6}\right)^{(n)} = \left(x \longmapsto \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{x+2}\right)^{(n)}$ *(qui est l'inconnue ?)*

En réduisant $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{x+2}$ au dénominateur commun, on aura $\dfrac{a.x^2+b.x+c}{(x-1).(x-3).(x+2)}$.
Le dénominateur sera le bon, mais pas le numérateur. Degré insuffisant.

Toute fraction $\dfrac{a.x^2+b.x+c}{(x-1).(x-3).(x+2)}$ se décompose en $\dfrac{\alpha}{x-1} + \dfrac{\beta}{x-3} + \dfrac{\gamma}{x+2}$.

Mais $\dfrac{a.x^3+b.x^2+c.x+d}{(x-1).(x-3).(x+2)}$ va donner $\lambda + \dfrac{\alpha}{x-1} + \dfrac{\beta}{x-3} + \dfrac{\gamma}{x+2}$.

Et $\dfrac{a.x^4+b.x^3+c.x^2+d.x+e}{(x-1).(x-3).(x+2)}$ va donner $\lambda.x + \mu + \dfrac{\alpha}{x-1} + \dfrac{\beta}{x-3} + \dfrac{\gamma}{x+2}$.

Et ainsi de suite.

$\left(x \longmapsto \dfrac{x^3+4.x^2-16.x+5}{x^3-2.x^2-5.x+6}\right)^{(n)} = \left(x \longmapsto \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{x+2}\right)^{(n)}$ n'a pas pour inconnue x (x est variable muette).
L'inconnue est n.
Par exemple : pour $n=0$, a-t-on $\left(x \longmapsto \dfrac{x^3+4.x^2-16.x+5}{x^3-2.x^2-5.x+6}\right) = \left(x \longmapsto \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{x+2}\right)$. Non.
Ce qu'on a vraiment $\left(x \longmapsto \dfrac{x^3+4.x^2-16.x+5}{x^3-2.x^2-5.x+6}\right) = \left(x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{x+2}\right)$.

Mais si on dérive une fois, voire plus, le 1 s'en va.

$$\left(x \longmapsto \frac{x^3+4.x^2-16.x+5}{x^3-2.x^2-5.x+6}\right)' = \left(x \longmapsto 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+2}\right)' = \left(x \longmapsto \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+2}\right)'$$

$n=1$ est solution.
Et les suivants aussi.

◦46◦

La relation $\|$ définie sur $\mathbb{Z}$ par $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ (a\|b) \Leftrightarrow (a|b \textit{ ou } b|a)$ est elle une relation d'ordre ? d'équivalence ?
La relation $\|$ définie sur $\mathbb{Z}$ par $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ (a\|b) \Leftrightarrow (a|b \textit{ et } b|a)$ est elle une relation d'ordre ? d'équivalence ?

On commence par celle en *ou* et on teste quatre propriétés.
Quand le résultat est « évidemment vrai », je ne détaille pas.
Et quand il est évidemment faux, je donne un contre-exemple.

Réflexive	oui	$(a\|a \; ou \; a\|a)$
Symétrique	oui	$(a\|b \; ou \; b\|a) \Rightarrow (b\|a \; ou \; a\|b)$
Transitive	non	$(2\Vert 6)$ et $(6\Vert 3)$ mais rien entre 2 et 3
Antisymétrique	non	$(2\Vert 6)$ et $(6\Vert 3)$ mais $2 \neq 6$
ni ordre ni équivalence		

La négation d'antisymétrique n'est pas « symétrique », c'est juste « il existe a et b vérifiant $(a\Vert b)$ et $(b\Vert a)$ et $a \neq b$ ».

Réflexive	oui	$(a\|a \; et \; a\|a)$
Symétrique	oui	$(a\|b \; et \; b\|a) \Rightarrow (b\|a \; et \; a\|b)$
Transitive	oui	$(a\|b \; et \; b\|a \; et \; a\|c \; et \; c\|a) \Rightarrow (a\|c \; et \; c\|a)$
Antisymétrique	non	$(2\Vert(-2))$ et $((-2)\Vert 2)$ mais $2 \neq -2$
équivalence et pas ordre		

En fait,si on a à la fois $a|b$ et $b|a$, alors on a $a = b$ (au signe près).
C'est une relation d'équivalence qui regroupe les éléments deux à deux : chaque entier et son opposé.

On ne confondra pas les lois (calcul) et les relations (affirmation).

Lois	Relations
$+, \times, \cup, \cap, \Delta, \wedge, et, ou, \circ,$	$=, \leqslant, \subset, \neq$, divise, $\sim, \equiv, >, \subsetneq$

Avec une loi $*$, on peut calculer $(a * b) * c$.
Avec une relation $\Re$, peut on écrire $(a \Re b) \Re c$? Essayez avec $\neq$ ou avec « divise ».

.	Une relation $\Re$ sur un ensemble est "formellement" une application de $E \times E$ dans $\{Vrai, \; Faux\}$. Pratiquement, on prend deux éléments a et b, et on dit $(a\Re b)$ si a est ou non en relation avec b.
Réflexive	Tout élément est en relation avec lui même $\forall a \in E, \; a \Re a$
Transitive	Les flèches se mettent bout à bout. $\forall (a, \; b, \; c) \in E^3, \; (a \Re b \; et \; b \Re c) \Rightarrow (a \Re c)$
Antisymétrique	Il ne peut pas y avoir de flèches dans les deux sens $\forall (a, \; b) \in E^2, \; (a \Re b \; et \; b \Re a) \Rightarrow (a = b)$ Ce n'est pas la négation de "symétrique".
Symétrique	Il y a une flèche à l'aller il y a une flèche au retour $\forall (a, \; b) \in E^2, \; (a \Re b) \Rightarrow (b \Re a)$
Ordre	Relation réflexive, antisymétrique et transitive un ordre peut être total $(\forall (a,b), \; a \ll b \; ou \; b \ll a\,)$ ou partiel $(\exists (a,b), \; a \not\ll b \; et \; b \not\ll a\,)$
Équivalence	Relation réflexive, symétrique et transitive la classe d'équivalence d'un élément a est l'ensemble des éléments en relation avec a : $Cl(a) = \{\alpha \in E \mid \alpha \Re a\}$
l'égalité $=$	est à la fois relation d'ordre et d'équivalence.

∘47∘

Ces relations sur la MPSI sont elles réflexives, symétriques, anti-symetriques, transitives ?

a	avoir eu une fois la même note en colle de maths que
b	avoir le même prenom que
c	avoir les mêmes initiales que
d	ne pas avoir le même prenom que
e	être amoureux de
f	avoir vote (lors des elections de delegues) pour
g	venir du même departement que

a	avoir eu une fois la même note en colle de maths que
	Réflexivité
Oui	(sauf s'il existe un élève n'ayant eu aucune note)
	Symétrie
Oui	Si a a eu la même note que b (en semaine n) alors b a eu la même note que a (en semaine n justement)
	Antisymétrie
Non	On donne deux élèves a et b ayant eu au moins une fois un 15 (par exemple) on a alors $a\Re b$ et aussi $b\Re a$ mais a n'est pas égal à b. Remarque : Dans une classe de vingt et un élèves où l'élève a n'a eu que des 0, l'élève b que des 1 jusqu'à l'élève t qui n'a eu que des 20, la relation serait anti-symétrique !
	Transitivité
Non	On doit bien pouvoir trouver une situation de ce type : $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline a & 12 & 14 & 16 \\ \hline b & 12 & 15 & 17 \\ \hline c & 13 & 15 & 17 \\ \hline\end{array}$ Alors on a $a\Re b$ et aussi $b\Re c$ mais on n'a pas $a\Re c$

Chaque fois que la réponse est oui, il faut une preuve solide avec des variables introduites. Par exemple pour la transitivité.
Rappelons la définition

$$\forall(a,b,c)\in E,\ (a\Re b \text{ et } b\Re c) \Rightarrow (a\Re c)$$

et indiquons comment on rédige en maths (c'est à dire sans massacrer les symboles mais en rédigeant avec des mots)

Quantification	Rédaction	Remarque
$\forall(a,b,c)\in E^3$	On se donne a, b et c dans E	Ils sont quantifiés
$(a\Re b \text{ et } b\Re c)\Rightarrow$	On suppose $a\Re b$ et $b\Re c$	Hypothèses
	On traduit « a a eu une même note que b »	
$\Rightarrow$	...	Raisonnement avec des mots
	« a a eu une même note que c »	
$\Rightarrow(a\Re c)$	On reconnaît $a\Re c$.	Conclusion

Si en revanche le résultat est faux, il suffit de donner un contre-exemple.
Par exemple pour la réflexivité :

$$\left(\overline{\forall a,\ a\Re a}\right) = \left(\exists a\in E,\ a \not\Re a\right)$$

On donne donc un vrai contre-exemple avec de vraies valeurs pour dire « lui ça ne marche pas ».

b	**avoir le même prénom que**
	Réflexivité
Oui	Évidemment
	Symétrie
Oui	Aussi
	Antisymétrie
Non	Ines a le même prénom que Ines, mais ce n'est pas la même Ines.
	Transitivité
Oui	Évidemment

Pour « avoir les mêmes initiales que », on a encore réflexivité, symétrie et transitivité.
On a encore « non antisymétrie », avec nos deux Ines B.
Une autre année, il se pourra que tous les élèves aient leurs propres initiales, et elle sera alors antisymétrique.

d	ne pas avoir le même prénom que
Réflexivité	
Non	Évidemment. Sauf dans une société où personne n'a de prénom, peut être ?
Symétrie	
Oui	Aussi
Antisymétrie	
Non	Si Enis n'a pas le même prénom que Ines et que Ines n'a pas le même prénom que Enis, allez vous prétendre que Ines et Enis sont une seule et même personne ?
Transitivité	
Non	Agathe n'a pas le même prénom que Aurore. Aurore n'a pas le même prénom que Agathe. Et pourtant Agathe a le même prénom que Agathe (mais elle ne le sait peut être pas).

e	être amoureux de
Réflexivité	
Oui	En tout bien tout honneur, le mariage entre vous même et vous même a-t-il été consommé ?
Symétrie	
Non	Vous avez dû vous rendre compte que a s'est pris un râteau auprès de b. Non, je ne donnerai pas de noms.
Antisymétrie	
Non	Je pense pouvoir trouver deux élèves a et b (distincts) qui sont amoureux mutuellement. En l'absence de couples formés, avec donc des flèches toutes à sens unique, le relation sera anti-symétrique.
Transitivité	
Non	Enfin, là je n'ai aucun élément de preuve.

f	avoir voté (aux élections) pour
Réflexivité	
Non	Tiphaine n'a pas voté pour elle même, puisque personne n'a voté pour Tiphaine.
Symétrie	
Non	Je connais un élève qui a voté pour Joseph, et pour qui Joseph n'a pas voté. Car Joseph a reçu plus de voix qu'il ne pouvait lui même en donner.
Antisymétrie	
Oui ? Non ?	Non. Peut être a-t-on eu Émilie qui a voté pour Josh et dans le même temps Josh qui a voté pour Émilie (liste commune !). Oui. On ne connaît aucun cas où a a voté pour b et en même temps b aurait voté pour a.
Transitivité	
Oui ? Non ?	J'essaye d'imaginer le contre-exemple. Émilie vote pour Josh (et Quentin). Josh vote pour Émilie. Mais Emilie n'a pas voté pour elle même.

Pour « venir du même département que », la relation est évidemment réflexive, symétrique, transitive, mais pas antisymétrique (je suis sûr que Mahmoud et Maryem viennent du même département).

Il reste un doute pour « réflexive ». Naïma vient du lycée Louis Pasteur à Lagos qui n'est dans aucun département.
A moins que le Nigeria ne soit subdivisé en départements (sur Wikipedia, j'ai trouvé 36 *états plus Abuja et* 774 *« zones de gouvernement local », mais pas de département).*

∘48∘

♡ Vrai ou faux :

- 1 -	$\left(a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n + b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
- 2 -	$\left(a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n + b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
- 3 -	$\left(a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n + b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
- 4 -	$\left(a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n.b_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$
- 5 -	$\left(a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n.b_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$
- 6 -	$\left(a_n = o(n^2) \text{ et } b_n = o(n)\right) \Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} = o(n)\right)$

Rappel : $a_n = o(e_n)$ signifie $\dfrac{a_n}{e_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

En particulier, $a_n = o(1)$ signifie que a_n tend vers 0.

$a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ signifie que « même $n.a_n$ tend vers 0, et donc à plus forte raison, a_n tend vers 0 ».

$a_n = O(e_n)$ signifie $\dfrac{a_n}{e_n}$ est bornée.

- 1 -	$\left(a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n + b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
	VRAI

En effet $\dfrac{a_n + b_n}{1/n} = \dfrac{a_n}{1/n} + \dfrac{b_n}{1/n}$ tend vers 0.

- 2 -	$\left(a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n + b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
	VRAI

En effet $\dfrac{a_n + b_n}{1/n} = \dfrac{a_n}{1/n} + \dfrac{b_n}{1/n}$ est la somme d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle (donc bornée).

- 3 -	$\left(a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n + b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
	VRAI

En effet $\dfrac{a_n + b_n}{1/n} = \dfrac{a_n}{1/n} + \dfrac{b_n}{1/n} = \dfrac{1}{n}.\dfrac{a_n}{1/n^2} + \dfrac{b_n}{1/n}$.

On dira aussi que tout $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est un $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ (les $\dfrac{borne}{n^2}$ tendent vers 0 plus vite que $\dfrac{1}{n}$.

- 4 -	$\left(a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n.b_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$
	VRAI

En effet, dans $\dfrac{a_n.b_n}{1/n^3} = \dfrac{a_n}{1/n^2}.\dfrac{b_n}{1/n}$ on a un terme borné et un terme de limite nulle. C'est « limite nulle » qui l'emporte.

- 5 -	$\left(a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(a_n.b_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$
	VRAI

Si le terme est un $o(c_n)$ (le quotient tend vers 0), alors c'est a fortiori un $O(c_n)$ (le quotient est borné).
On peut écrire $o(c_n) \Rightarrow O(c_n)$. Ou même $o(c_n) \subset O(c_n)$. On évitera $o(c_n) = O(c_n)$ car « une seul sens d'implication est vrai ».

- 6 -	$\left(a_n = o(n^2) \text{ et } b_n = o(n)\right) \Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} = o(n)\right)$
	FAUX

Par (contre)-exemple $a_n = b_n = \sqrt{n}$. On a bien $\sqrt{n} = o(n^2)$ et $\sqrt{n} = o(n)$ [5]. Et le quotient $\dfrac{a_n}{b_n}$ vaut 1.
Et on peut faire encore pire avec des choses sans limite à la fin.

∘49∘

$a_n = o(e_n)$ signifie $\dfrac{a_n}{e_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La relation « être un petit o de « est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive sur l'ensemble des suites réelles strictement positives ?

Réflexive Comment pourrait on avoir $\dfrac{a_n}{a_n}$ tend vers 0 sachant que ce quotient vaut 1.

5. on note au passage que l'égalité utilisée ici n'est pas transitive... étonnant, un peu comme ces « $+C^{te}$ » avec la constante C qui peut changer de ligne en ligne

On se donne la suite $a_n = 1$ pour tout n et on a un contre-exemple.

Il fallait VRAIMENT donner un contre-exemple ?

$\boxed{\text{Symétrique}}$ Si $\frac{a_n}{b_n}$ tend vers 0, alors $\frac{b_n}{a_n} tend$vers l'infini et nullement vers 0.
Contre-exemple : $1 = o(n)$, mais on n'a pas $n = o(1)$ quand n tend vers l'infini.

$\boxed{\text{Anti-symétrique}}$ On se donne deux suites (a_n) et (b_n). On suppose qu'on a à la fois $\frac{a_n}{b_n}$et $\frac{b_n}{a_n}$ qui tendent vers 0.
C'est impossible (leur produit vaut 1 et il devrait tendre vers 0^2).
Mais si l'hypothèse est fausse, alors l'implication est vraie (que (a_n) soit ou on égale à (b_n).
On a donc bien $(a_n = o(b_n)\ et\ b_n = o(a_n)) \Rightarrow (\forall n,\ a_n = b_n)$.

$\boxed{\text{Transitive}}$ On se donne trois suites strictement positives (a_n), (b_n) et (c_n).
On suppose que $\frac{a_n}{b_n}$ et $\frac{a_n}{b_n}$ tendent vers 0.
Leur produit tend aussi vers 0.
Et c'est la définition de $a_n = o(c_n)$.

∘50∘

Dans cette famille, tous les enfants *(Prof, Atchoum, Dormeur, Nolan, Grincheux, Timide et Joyeux)* sont nés un 7 juillet *(07/07, oui)*. Le jour de l'anniversaire, chacun a un gâteau avec autant de bougies que son âge. Tiens, il y a cinq ans, il y avait autant de gâteux, mais deux fois moins de bougies que cette année. Alors, combien de bougies ?

Et maintenant, cette histoire de nains tous nés un 7 juillet.
Il y a cinq ans, il fallait $\sum_{k=0}^{6} a_k$ bougies. Et cette année, il en faut $\sum_{k=0}^{6}(a_k + 5)$.
On nous dit donc :

$$\sum_{k=0}^{6}(a_k + 5) = 2.\sum_{k=0}^{6} a_k$$

soit $\sum_{k=0}^{6} a_k = 7 \times 5$. Il y a donc 70 bougies cette année.

∘51∘

Trouvez le plus de coefficients du développement asymptotique :
$\sqrt{n^4 + n^3} - n^2 = a.n + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}$.
(chaque fois que vous en avez un, soustrayez et essayez d'obtenir un équivalent du reste).
(ou alors partez de l'écriture $\sqrt{n^4 + n^3} = n^2 + a.n + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}$ *et élevez au carré)*

$\sqrt{n^4 + n^3} - n^2 = \frac{n^3}{\sqrt{n^4 + n^3} + n^2}$. Cette suite tend vers l'infini, mais elle est équivalente à $\frac{n}{2}$. a vaut $\frac{1}{2}$.

$$\sqrt{n^4 + n^3} - n^2 - \frac{n}{2} = \frac{(n^4 + n^3) - \Big(n^3 + \frac{n}{2}\Big)^2}{\sqrt{n^4 + n^3} + n^2} = \frac{-n^2/4}{2.n^2 + o(n^2)}$$

elle converge vers $\frac{-1}{8}$; elle est équivalente à $\frac{-1}{8}$.

$$\sqrt{n^4 + n^3} - n^2 - \frac{n}{2} + \frac{1}{4} = \frac{(n^4 + n^3) - \Big(n^2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{8}\Big)^2}{\sqrt{n^4 + n^3} + n^2} = \frac{\frac{n}{8} - \frac{1}{64}}{2.n^2 + o(n^2)}$$

elle tend vers 0 et équivaut à $\frac{1}{16.n}$.
Provisoire : Résumé : $\sqrt{n^4 + n^3} = n^2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16.n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)_{n\to+\infty}$.
Encore une ligne, encore un peu de calculs.

Résumé : $\boxed{\sqrt{n^4 + n^3} = n^2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16.n} - \frac{5}{128.n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}}$

Mais on peut aussi ruser...

On admet que ce développement asymptotique $\sqrt{n^4+n^3} = n^2 + a.n + b + \dfrac{c}{n} + \dfrac{d}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\to+\infty}$ existe et on l-élève au carré :

$$n^4+n^3 = \left(n^2 + a.n + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\to+\infty}\right)^2$$

On développe le membre de droite en étant méthodique, c'est à dire sans tout mettre sur une ligne :

$$\left[\begin{array}{ccccccc}
 & n^2 & a.n & b & \frac{c}{n} & \frac{d}{n^2} & o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
n^2 & & & & & & \\
a.n & & & & & & \\
b & & & & & & \\
\frac{c}{n} & & & & & & \\
\frac{d}{n^2} & & & & & & \\
o\left(\frac{1}{n^2}\right) & & & & & &
\end{array}\right] \text{oui, un tableau.}$$

Mais on ne garde que ce qui est pertinent :
$$\left[\begin{array}{ccccccc}
 & n^2 & a.n & b & \frac{c}{n} & \frac{d}{n^2} & o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
n^2 & n^4 & a.n^3 & & & & \\
a.n & a.n^3 & & & & & \\
b & & & & & & \\
\frac{c}{n} & & & & & & \\
\frac{d}{n^2} & & & & & & \\
o\left(\frac{1}{n^2}\right) & & & & & &
\end{array}\right]$$
donne déjà $n^4+2.a.n^3$

On continue :
$$\left[\begin{array}{ccccccc}
 & n^2 & a.n & b & \frac{c}{n} & \frac{d}{n^2} & o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
n^2 & n^4 & a.n^3 & b.n^2 & c.n & d & o(1) \\
a.n & a.n^3 & a^2.n^2 & & & & \\
b & b.n^2 & & & & & \\
\frac{c}{n} & c.n & & & & & \\
\frac{d}{n^2} & d & & & & & \\
o\left(\frac{1}{n^2}\right) & o(1) & & & & &
\end{array}\right]$$

La présence d'un $o(1)$ en première ligne et première colonne suffisent à nous dire : ne calculons pas tous les termes, dès qu'un terme est plus petit qu'un $o(1)$, il est absorbé par le $o(1)$ qu'on a déjà crée .

$$\left[\begin{array}{ccccccc}
 & n^2 & a.n & b & \frac{c}{n} & \frac{d}{n^2} & o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
n^2 & n^4 & a.n^3 & b.n^2 & c.n & d & o(1) \\
a.n & a.n^3 & a^2.n^2 & a.b.n & a.c & o(1) & \\
b & b.n^2 & a.b.n & b^2 & o(1) & & \\
\frac{c}{n} & c.n & a.c & o(1) & & & \\
\frac{d}{n^2} & d & o(1) & & & & \\
o\left(\frac{1}{n^2}\right) & o(1) & & & & &
\end{array}\right]$$
et on lit dans l'ordre, par diagonale

$$\left(n^2 + a.n + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\to+\infty}\right)^2 = n^4 + 2.a.n^3 + (a^2+2.b).n^2 + (2.a.b+2.c).n + (2.d+2.a.c+b^2) + o(1)_{n\to+\infty}$$

Remarque : Certes, on reconnaît les termes qu'on aurait obtenu en développant avec des carrés et doubles produits.
Mais ici, carrés et double-produits ne sont pas judicieux, car ils ne trient pas les termes dans l'ordre convenable...

Il ne reste qu'à identifier avec n^4+n^3 :

$$\left[\begin{array}{lcccllll}
\textit{terme en } n^4 & : & 1 & = & 1 & & & \\
\textit{terme en } n^3 & : & 1 & = & 2.a & & & \\
\textit{terme en } n^2 & : & 0 & = & a^2 & +2.b & & \\
\textit{terme en } n & : & 0 & = & 2.a.b & & +2.c & \\
\textit{terme en } n^0 & : & 0 & = & 2.a.c & +b^2 & & +2.d
\end{array}\right]$$

On résout de proche en proche le système et on (re)-trouve les nombres cherchés.

∘52∘

♡ f est une application de classe C^n. On se donne a et h. On définit :
$F = t \longmapsto f(a+t.h) + (1-t).h.f'(a+t.h) + \dfrac{(1-t)^2}{2}.h^2.f''(a+t.h) + \dfrac{(1-t)^3}{6}.h^3.f^{(3)}(a+t.h)$
Calculez $F(0)$ et $F(1)$. Simplifiez $F'(t)$ pour tout t.
Que vous rappelle alors la formule $F(1) - F(0) = \displaystyle\int_0^1 F'(t).dt$.

F est une fonction de la variable t qui intervient dans des compositions et des produits. Dans les compositions telles que $t \longmapsto a + t.h \longmapsto f(a+t.h)$, un h sort. Et dans produits, il y a un signe moins car ce sont des puissances de $1-t$.

On dérive :

$$\begin{array}{llllll} F & = t \longmapsto & f(a+t.h) & +(1-t).h.f'(a+t.h)+ & \frac{(1-t)^2}{2}.h^2.f''(a+t.h) & +\frac{(1-t)^3}{6}.h^3.f^{(3)}(a+t.h) \\ & & & & & \\ F' & = t \longmapsto & h.f'(a+t.h) & -h.f'(a+t.h) & -(1-t).h^2.f''(a+t.h) & -\frac{(1-t)^2}{2}.h^3.f^{(3)}(a+t.h) \\ & & & +(1-t).h.f''(a+t.h) & +\frac{(1-t)}{2}.h^3.f^{(3)}(a+t.h) & +\frac{(1-t)^3}{6}.h^4.f^{(4)}(a+t.h) \end{array}$$

Il reste $F' = t \longmapsto \dfrac{(1-t)^3}{6}.h^4.f^{(4)}(a+t.h)$.

D'autre part $F(0) = f(a) + h.f'(a) + \dfrac{h^2}{2}.f''(a) + \dfrac{h^3}{6}.f^{(3)}(a)$ et $F(1) = f(a+t.h)$ (tous les autres termes sont nuls en 1).

On écrit $F(1) - F(0) = \displaystyle\int_0^1 F'(t).dt$ et ceci donne

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2}.f''(a) + \frac{h^3}{6}.f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{6}.\int_{t=0}^1 (1-t)^3.f^{(4)}(a+t.h).dt}$$

C'est le formule de Taylor avec reste intégrale, ici à l'ordre 3.

Remarque | *Dans votre cours de physique, ce sera juste la formule de Taylor* $f(a+h) \simeq f(a) + h.f'(a) + \dfrac{h^2}{2}.f''(a) + \dfrac{h^3}{6}.f^{(3)}(a)$*en tentant de donner à* $\simeq$ *un sens qu'il ne pourra jamais avoir tant que la rigueur sera dans vos pas.*

∘53∘

♡ Sachant $deg(P) = 3$, $P(1) - 1 = P'(1) + 1 = P''(1) - 6 = P^{(3)}(1) + 6 = 0$, calculez $P(3)$.
Si vous commencez en écrivant $P(X) = a.X^3 + b.X^2 + c.X + d$, vous êtes très mal parti, sauf si vous adorez les calculs idiots.

Application directe de la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$P(a+h) = P(a) + h.P(a) + \frac{h^2}{2}.P''(a) + \frac{h^3}{6}.P^{(3)}(a) + \frac{h^4}{6}.\int_0^1 (a-t)^3.P^{(4)}(a+t.h).dt$$

Mais le degré de P nous donne $P^{(4)} = 0$, qu'on regarde en a, en $a+h$ ou en $a+t.h$.

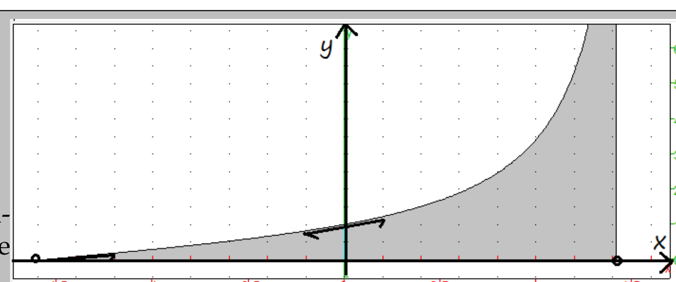
On a donc $P(a+h) = P(a) + h.P(-a) + \dfrac{h^2}{2}.P''(a) + \dfrac{h^3}{6}.P^{(3)}(a)$.
On choisit $a = 1$ (là où on a les informations) et $h = 2$ (pour aller assez loi) :

$$P(3) = P(1) + 2.P'(1) + \frac{2^2}{2}.P''(1) + \frac{2^3}{6}.P^{(3)}(1) = 1 - 2.P'(1) + \frac{4.6}{2} + \frac{2^3.(-6)}{6}$$

$P(3)$ vaut 3 et on a en fait $P = -X^3 + 6.X^2 - 10.X + 6$ si on y tient.

∘54∘

On pose $I = \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
et $f = x \longmapsto \dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$.
Déterminez $f^{(n)}$ pour n de 0 à 3.
Justifiez que le graphe de f est celui indiqué ci contre (y compris limite et dérivée en $-\pi/2$).



I∼0)

En tant que composée, f est de classe C^∞ et on peut commencer le travail, en écrivant plutôt $f(x) = (1 +$

$\sin(x)).\cos^{-1}(x)$.

A la première étape, la formule en $\dfrac{u'.v-u.v'}{v^2}$ est d'usage légitime :

$f' = x \longmapsto \dfrac{\cos(x).\cos(x)+\sin(x).(1+\sin(x)}{\cos^2(x)}$. On simplifie déjà en $\boxed{f' = \dfrac{1+\sin}{\cos^2}}$

Je l'ai écrit ici à l'étage des fonctions. Et un correcteur sanctionnera partiellement une réponse comme $f' = \dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$ qui mélange les étages.

On l'écrit $(1+s).c^{-2}$ et on redérive en $(0+c).c^{-2}+(1+s).(-2).(-s).c^{-3}$.

On réduit au dénominateur commun : $\dfrac{c^2+2.s.(1+s)}{c^3}$.

On reformule $f'' = x \longmapsto \dfrac{(1+s)^2}{c^3}$ On notera qu'on peut aussi écrire $f'' = x \longmapsto \dfrac{(1+s)^2}{c.(1-s).(1+s)}$ et même $f = \dfrac{c}{(1-s)^2}$ même si ça n'a aucun intérêt.

Comme on a lu la suite de l'énoncé, on se dit qu'une forme avec « seulement du sinus en haut » est la plus simple. On remplace donc chaque c^2 par $1-s^2$.

On redérive : $f^{(3)} = x \longmapsto \dfrac{c.2.(1+s)}{c^3}+(1+s)^2.\dfrac{(-3).(-s)}{c^4}$.

On réduit au dénominateur commun : $f^{(3)} = x \longmapsto \dfrac{c^2.2.(1+s)+(1+s)^2.3.s}{c^4}$.

On remplace les $\cos^2$ par $1-\sin^2$ et on trouve $\boxed{f^{(3)} = x \longmapsto \dfrac{(1+\sin(x)).(\sin^2(x)+3.\sin(x)+2)}{\cos^4(x)}}$

Ceux qui en sont à des choses en $\dfrac{2.(1+s)^1.c.c^3-3.(-s).c^2.(1+s)^2}{(c^3)^2}$ doivent être largués. Et surtout, ils doivent couper l'envie au correcteur de simplifier, comparer à la réponse simple attendue.

On simplifie et on synthétise dans un tableau :

$f^{(0)}(x)$	$f^{(1)}(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$
$\dfrac{1+\sin(x)}{\cos^2(x)}$	$\dfrac{(1+\sin(x))}{\cos^2(x)}$	$\dfrac{(1+\sin(x))^2}{\cos^3(x)}$	$\dfrac{(1+\sin(x)).(\sin^2(x)+3.\sin(x)+2)}{\cos^4(x)}$

Le rapport du jury ne parle pas de tableau, mais avouez que pour le lecteur/correcteur, ce n'est pas mal.
Attention, pas de conclusion trop hâtive à partir des deux premières dérivées.

<u>**Rapport du jury :**</u> les candidats gagneraient à simplifier progressivement leurs calculs. La suite du sujet permettait d'orienter vers une suppression des $\cos(x)$.

La dérivée de f est positive. f est donc croissante.
Quand x tend vers $\pi/2$, le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers 0, la fraction tend vers l'infini.

En 0, on a la valeur de la fonction et de sa dérivée.

En $-\pi/2$, on a une forme indéterminée, car numérateur et dénominateur tendent vers 0.
On pose « naturellement » : $x = -\dfrac{\pi}{2}+h$: $f\Big(h-\dfrac{\pi}{2}\Big) = \dfrac{1-\cos(h)}{\sin(h)}$ (trigonométrie)
on peut réagir en physicien : je connais mes développements limités

$$f\Big(h-\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1-\Big(1-\dfrac{h^2}{2}+o(h^2)\Big)}{h} = \frac{h}{2}+o(h)$$

on identifie un prolongement par continuité par la valeur 0
et on a la demi tangente de coefficient directeur $\dfrac{1}{2}$

on peut réagir en matheux : je connais ma trigonométrie :

$$f\Big(h-\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1-\cos(h)}{\sin(h)} = \frac{2.\sin^2\left(\dfrac{h}{2}\right)}{2.\sin\left(\dfrac{h}{2}\right).\cos\left(\dfrac{h}{2}\right)} = \tan\left(\frac{h}{2}\right)$$

on peut prolonger par la valeur 0
et on a même l'équivalent $f\Big(h-\dfrac{\pi}{2}\Big) \sim_{h\to 0} \dfrac{h}{2}$

on peut réagir en élève astucieux : je pense à l'arc moitié

$$f(x)=\frac{1+\dfrac{2.t}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{1+t^2+2.t}{1-t^2}=\frac{(1+t)^2}{(1-t).(1+t)}$$

avec $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$$f(x)=\tfrac{1+t}{1-t}=\frac{1+\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}=\tan\left(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{x}{2}\right)$$

la fonction se prolonge en $-\frac{\pi}{2}$ sans effort et se dérive même

$$f'(x)=\frac{1}{2}.\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right)$$

C'est une question de cours que j'ai ajoutée personnellement par rapport au sujet initial de seconde année.

Quand j'ai posé le problème en 2020*, les réponse sur le fait que c'était le bon graphe étaient bien trop laconiques.*
En gros, on me disait « beh oui, elle est croissante ». mais rien sur son asymptote verticale, sur sa valeur en $-$*'pi*/2*, sur l'existence de tangentes.*

Bref, pour vous un graphe c'est trois points bien placés sur le dessin (approche rapide)
ou douze points bien placés (approché débilitante des tableaux de valeurs de seconde)
ou quatre cent points bien placés (approche numpy de la physique).

Non, c'est des tangentes, des asymptotes, bref, des résultats fins.

I∼1) Montrez qu'il existe une suite (P_n) de polynômes vérifiant $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in I,\ f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(\sin(x))}{(\cos(x))^{n+1}}$.

On a l'existence des premiers polynômes : $P_0=1+X$, $P_1=(1+X)^2$, $P_2=(1+X)^2$...

On suppose, pour un n quelconque donné, que P_n existe vérifiant $\forall x,\ f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$.

On redérive pour montrer que P_{n+1} existe, en le construisant :

$\forall x,\ f^{(n+1)}(x)=\dfrac{\cos(x).P_n'(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}+P_n(\sin(x)).\dfrac{-(n+1).(-\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}$.

On réduit au dénominateur commun :

$$\forall x,\ f^{(n+1)}(x)=\frac{\cos^2(x).P_n'(\sin(x))+(n+1).P_n(\sin(x)).\sin(x)}{\cos^{n+2}(x)}$$

On remplace :

$$\forall x,\ f^{(n+1)}(x)=\frac{(1-\sin^2(x)).P_n'(\sin(x))+(n+1).P_n(\sin(x)).\sin(x)}{\cos^{n+2}(x)}$$

On définit alors $\boxed{P_{n+1}=(n+1).X.P_n(X)+(1-X^2).P_n'}$

Il existe.

Et c'est un polynôme.

Et il vérifie $\forall x,\ f^{(n+1)}(x)=\dfrac{P_{n+1}(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}$.

L'essentiel de la récurrence est l'EXISTENCE. Et pas forcément la formule. Chaque chose en son temps.
Déjà, les variables. Et ensuite, on met en route l'autre partie du cerveau : le côté physicien qui calcule.
Et ce n'est pas une insulte. C'est juste l'ordre des priorités de vos raisonnements.

Cela dit, la formule encadrée permet de les calculer de proche en proche. Et si on est en devoir à la maison, on a le temps de vérifier la cohérence de P_1, P_2 et P_3.

Rapport du jury : Confusion fréquente entre $P(\sin(x))$ et $P\times\sin(x)$.
On remarque une maladresse à passer des polynômes en $\sin(x)$ à des polynômes en X.

La formule $P_{n+1}=(n+1).X.P_n(X)+(1-X^2).P_n'(X)$ que l'on a écrite pour prouver l'existence des P_n au sein d'une récurrence va servir maintenant pour des récurrences.

P_0 est le polynôme $1+X$, de degré 1, unitaire à coefficients positifs.

Pareil pour P_1.

I$\sim$2) Montrez que pour tout n, P_n est unitaire, de degré n, à coefficients dans $\mathbb{N}$.

Supposons pour un n donné que P_n est unitaire de degré n à coefficients entiers positifs.
Alors $(n+1).X.P_n(X)+(1-X^2).P_n'(X)$ est une somme de polynômes à coefficients entiers. C'est un polynôme à coefficients entiers.
Mais unitaire ? Et coefficients positifs ? Il y a quand même un $1-X^2$ qui introduit un signe moins.

On écrit $P_n = X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k.X^k$ ou même $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k.X^k$ avec $a_n = 1$.

On calcule $P_n' = n.X^{n-1} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} k.a_k.X^{k-1}$

$$-X^2P_n' = -n.X^{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} k.a_k.X^{k+1}$$

$$(n+1).X.P_n(X) = (n+1).X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}(n+1).a_k.X^{k+1}$$

On somme : $P_{n+1}(X) = (n+1).X^{n+1} + \sum\limits_{k=0}^{n-1}(n+1).a_k.X^{k+1} + n.X^{n-1} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} k.a_k.X^{k-1} - n.X^{n+1} - \sum\limits_{k=0}^{n-1} k.a_k.X^{k+1}$.

Déjà le terme en X^{n+1} est le terme de plus haut degré
a pour coefficient $(n+1)-n$ ce qui fait 1.
Le nouveau polynôme est unitaire.
Le coefficient de X^{k+1} est ensuite $(n+1).a_k - k.a_k$ issu des sommes « naturelles »
$(k-2).a_{k-2}$ issue de la somme décalée $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k.a_k.X^{k-1}$ $(k \geqslant 2)$
Cette somme est positive. Chaque coefficient de $P_{n+1}(X)$ est positif ou nul.

Rapport du jury : Très peu de justifications que les coefficients sont positifs ou nuls, ce qui demandait un calcul explicite des coefficients.

Ah oui, combien d'élèves ne lisent pas la question en entier, se contentent de « c'est un polynôme » quand il est demandé « polynôme à coefficients entiers ».
On dirait que vous êtes resté au collège où on vous mâche le travail « polynôme, puis polynôme à coefficients entiers, puis polynôme à coefficients entiers positifs ».

I$\sim$3) Montrez : pour tout x : $2.f'(x) = 1 + (f(x))^2$.

La relation $2.f'(x) = 1 + (f(x))^2$ est un cadeau. Il suffit de calculer... Mais elle est là pour préparer la suite.

I$\sim$4) Pour tout n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$. Montrez : $2.\alpha_1 = (\alpha_0)^2 + 1$ et $2.\alpha_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\alpha_k.\alpha_{n-k}$.
On pourra démontrer pour tout couple de fonctions $(u,\ v)$: $(u.v)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.u^{(n-k)}.v^{(k)}$ (ou l'utiliser directement si il a été vu en cours), puis l'appliquer à u et v bien choisies.

On l'applique en 0 : $2.f'(0) = 1 + (f(0))^2$. Et avec nos notations, c'est $2.\alpha_1 = 1 + (\alpha_0)^2$! justement !

Maintenant, comme on sait que f est de classe C^∞, on peut dériver n fois la relation $2.f'(x) = 1 + (f(x))^2$ vraie en tout point.

La formule de Leibniz donne $2.(f')^{(n)} = 0 + \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.f^{(k)}.f^{(n-k)}$ (à l'étage des fonctions).

n est dans $\mathbb{N}^*$ pour que la dérivation de 1 donne 0.

On applique en 0 : $2.f'^{(n+1)}(0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.f^{(k)}(0).f^{(n-k)}(0)$.

Et avec nos notations, c'est $\boxed{\alpha_{n+1} = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\alpha_k.\alpha_{n-k}}{2}}$ (on sait que ce sera quand même un entier car P_n est à coefficients dans $\mathbb{N}$).

Rapport du jury : Il n'est pas vrai que toute assertion dépendant d'un entier se démontre par récurrence ! Il est important de parler ici de formule de Leibniz, sans quoi il n'est pas clair du tout pour le lecteur de deviner la méthode employée.

Là, ce n'est pas moi qui le dis. Mais presque une fois par semaine, c'est moi qui le dis.

I∼5) Écrivez un script **Python** qui prend N en entrée et calcule les α_n pour n de 0 à N.

Pour calculer des termes consécutifs, c'est la formule ci dessus qui va servir. On va créer une liste qu'on va allonger peu à peu, en créant le nouveau terme comme somme.

```
def Coeff(n) :
....L = [1, 1] #les deux premiers
....for n in range(1, N) : #il n'en faut que N-1 pour en avoir N+1 au total
........S = 0
........for k in range(n+1) : #la somme de 0 à n inclus
............S += binomial(n,k)*L[k]*L[n-k]
........L.append(S//2) #on sait qu'il est pair
....return(L)
```

Et on aura crée une procédure pour calculer les coefficients binomiaux :

```
def Binomial(n, k) :
....if k == 0 :
........return(1)
....return((n-k+1)*binomial(n,k)//k)
```

Et voici les premières valeurs
[1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, 50521, 353792, 2702765, 22368256, 199360981, 1903757312]

En fait le mieux serait de les construire pas à pas dans la somme, plutôt que de tout reprendre à chaque fois.

```
def Coeff(n) :
....L = [1, 1] #les deux premiers
....for n in range(1, N) : #il n'en faut que N-1 pour en avoir N+1 au total
........S, bin = 0, 1 #la somme et le binomial
........for k in range(n+1) : #la somme de 0 à n inclus
............S += bin*L[k]*L[n-k]
............bin = bin*(n-k)//(k+1) #actualisation du coefficient binomial
........L.append(S//2) #on sait qu'il est pair
....return(L)
```

C'est moi qui ai ajouté cette question Python... Le sujet (filière P.C.) n'osait pas en demander. Je trouve cela dommage.

II∼0) Montrez pour tout n et tout $x$de $I \cap \mathbb{R}^+$: $\sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n \leqslant f(x)$ (indication : Taylor).

Dans $\sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n \leqslant f(x)$, le premier membre ressemble vraiment à un développement de Taylor entre 0 et x.
f est de classe suffisante pour écrire

$$f(0+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k + \frac{x^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.f^{(n+1)}(t.x).dt$$

On comprend qu'il suffit de montrer que le reste intégrale $\frac{x^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.f^{(n+1)}(t.x).dt$ est positif.

Comme x est positif, le terme $\frac{x^{n+1}}{n!}$ l'est aussi.

Ensuite, dans l'intégrale, $(1-t)^n$est positif, et $\frac{P_{n+1}(\sin(t.x))}{(\cos(t.x))^{n+1}}$ est positif.

En effet, $\sin(t.x)$ et $\sin(t.x)$ sont positifs car $t.x$ est entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Et le polynôme P_{n+1} est à coefficients positifs (question en fin de partie précédente).
La combinaison $P_{n+1}(\sin(t.x))$ est positive.

Rapport du jury : Beaucoup d'erreurs dans la formule de Taylor avec reste intégrale. certains utilisent la positivité de $f^{(n)}$ invoquant le fait que P_n est à coefficients strictement positifs, même s'ils ont négligé ce point auparavant.

II∼1) Déduisez que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ la série de terme général $\frac{\alpha_n}{n!}.x^n$ converge vers une somme qu'on notera $g(x)$ (c'est à dire $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n$).

Rappel : on appelle série de terme général a_n la suite (A_N) défnie par $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$. Ici, croissez et majorez.

La série de terme général $\frac{\alpha_n}{n!}.x^n$ est croissante.

En effet, quand on calcule la différence de deux sommes partielles $\sum_{n=0}^{N+1} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n - \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n$, il reste $\frac{\alpha_{N+1}}{(N+1)!}.x^{N+1}$ qui est positif comme on l'a dit dans la positivité du reste dans la formule de Taylor.

La suite $\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n\right)_N$ est croissante, majorée (le majorant $f(x)$ ne dépend pas de N, c'est bon).
Elle converge.

La grande naïveté serait de dire « elle converge vers $f(x)$ juste parce que c'est le majorant proposé. Mais il est peut être trop large !
Une suite majorée par 4 ne converge pas forcément vers 4, elle peut converger vers e ou π ou n'importe quoi encore.
Bon, certes, ici, on montrera que c'est encore vers le majorant trouvé dans l'énoncé que la série va converger...

II∼2) On admettra que l'on peut (sous des conditions ici validées) dériver $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!}.x^n$ comme une limite de sommes (alors qu'il s'agit d'une limite de sommes) et permuter les sommes doubles (familles sommables). Montrez $2.g'(x) = 1 + (g(x))^2$.

On dérive formellement : $g'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{k!}.k.x^{k-1}$ (en ne commençant qu'au terme d'indice 1 puisque le terme constant a une dérivée nulle).

On décale les indices et simplifie la factorielle : $2.g'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2.\alpha_{n+1}}{n!}.x^n$.

On développe ensuite le carré : $g(x).g(x) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\alpha_i}{i!}.x^i\right).\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\alpha_j}{j!}.x^j\right)$

$$(g(x))^2 = \sum_{i,j} \frac{\alpha_i.\alpha_j}{i!.j!}.x^{i+j} \text{ en écrivant une double somme}$$

$$(g(x))^2 = \sum_{i,j} \frac{(i+j)!}{i!.j!}\alpha_i.\alpha_j.\frac{x^{i+j}}{(i+j)!} \text{ en forçant la main}$$

$$(g(x))^2 = \sum_{i,j} \binom{i+j}{i}.\alpha_i.\alpha_j.\frac{x^{i+j}}{(i+j)!} \text{ en voyant le binomial}$$

$$(g(x))^2 = \sum_{n}\Big(\sum_{i+j=n} \binom{i+j}{i}.\alpha_i.\alpha_j\Big).\frac{x^n}{n!} \text{ en regroupant par exposant}$$

c'est ce qu'on appelle le « produit de Cauchy »

On reconnaît alors la formule qui calcule de proche en proche les α_i : $(g(x))^2 = \sum_n \alpha_{n+1}.\frac{x^n}{n!}$.

II∼3) Déduisez $\forall x \in I,\ f(x) = g(x)$.

f et g sont définies au moins sur le même domaine,

vérifient la même équation différentielle $2.y' = 1 + (y^2)$

vérifient la même condition initiale

elles sont donc égales dira le physicien, et même le mathématicien qui dispose du théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'existence et unicité des solutions d'équations différentielles.

Rapport du jury : Oubli fréquent : « la même condition initiale ».

Mais en fait, il y a une solution propre, niveau Sup.
On définit $F = x \longmapsto Arctan(f(x)$ et $G = x \longmapsto Arctan(g(x))$.
On les dérive : $F' = x \longmapsto \dfrac{f'(x)}{1+(f'(x))^2}$ et $G' = x \longmapsto \dfrac{g'(x)}{1+(g'(x))^2}$.

La coïncidence des équations différentielles donne $F' - G' = 0$.
On intègre de 0 à x : $F(x) - G(x) = F(0) - G(0)$ (mille fois plus propre et rigoureux que $F(x) - G(x) = C^{te}$ qui n'a de sens qu'en amphi de physique).
Or, $F(0) = G(0)$, donc pour tout x, $F(x) = G(x)$ (mille fois plus judicieux que de dire « et ensuite je détermine la constante en 0).

III∼0) Montrez que la seule application à la fois paire et impaire est $x \longmapsto 0$.

Prenons une fonction ϕ à la fois paire et impaire. On traduit : $\forall x,\ f(x) = f(-x)$
$\forall x,\ f(-x) = -f(x)$
On met bout à bout : $\forall x,\ f(x) = -f(x)$.
On arrange : $\forall x,\ 2.f(x) = 0$.
L'application f est nulle.
Et bien sûr, la fonction nulle est à la fois paire et impaire.

Les fonctions constantes sont paires, mais seule la constante nulle est aussi impaire.

III∼1) Déduisez, par analyse et synthèse, que pour toute application ϕ de I dans $\mathbb{R}$ il existe un unique couple $(p,\ i)$ avec p paire et i impaire vérifiant $\phi = p + i$.
Précisez qui sont p et i dans les cas $\phi = x \longmapsto 3.x^4 + 5.x^3 + 4.x^2 + 2.x - 1$
$\phi = x \longmapsto e^x$
$\phi = x \longmapsto \cos(x - \varphi_0)$ pour φ_0 fixé

Pour prouver qu'une application quelconque ϕse décompose en somme « paire plus impaire », on va raisonner par analyse et synthèse. L'analyse nous permettra de dire « si il y a une décomposition, ce ne peut être que » et la partie synthèse dira « oui, et c'est bien une décomposition ».

Donc, je triche et je vous donne tout de suite la décomposition : $\phi = \left(x \longmapsto \dfrac{\phi(x)+\phi(-x)}{2}\right) + \left(x \longmapsto \dfrac{\phi(x)-\phi(-x)}{2}\right)$.
On confirme : cette somme donne bien ϕ.

l'application $\left(x \longmapsto \dfrac{\phi(x)+\phi(-x)}{2}\right)$ est bien paire : $\dfrac{\phi(-x)+\phi(-(-x))}{2} = \dfrac{\phi(x)+\phi(-x)}{2}$
l'application $\left(x \longmapsto \dfrac{\phi(x)-\phi(-x)}{2}\right)$ est bien impaire : $\dfrac{\phi(-x)-\phi(-(-x))}{2} = \dfrac{\phi(x)-\phi(-x)}{2}$

Maintenant, l'analyse, parce que sinon, vous allez me dire « mais comment on pouvait deviner ça ? ».
facile. Supposons que p et i existent vérifiant $\phi = p + i$.
On a alors $\phi(x) = p(x) + i(x)$
$\phi(-x) = p(-x) + i(-x)$
$\phi(-x) = p(x) - i(x)$ par parité et imparité
On combine première et dernière ligne, et on trouve $p(x) = \dfrac{\phi(x)+\phi(-x)}{2}$.

Cette étape d'analyse prouve l'unicité de la décomposition (si elle existe, on n'a pas le choix)
et nous souffle à l'oreille laquelle proposer et vérifier.

Mais à quoi servait la question « la seule application à la fois paire et impaire est l'application nulle » ?
A faire une question « de cours ».
A permettre devoir l'unicité par ce biais : si f admet deux décompositions $\phi = p_1 + i_1$ et $\phi = p_2 + i_2$, alors on a $p_2 - p_1 = i_1 - i_2$.
Cette différence est donc à la fois paire (c'est $p_2 - p_1$) et impaire (c'est $i_1 - i_2$).
Elle est donc nulle.
Et on a donc $p_1 = p_2$ et $i_1 = i_2$.

Mon énoncé demandait des décompositions, il suffisait de les proposer :

fonction	paire		impaire
g$3.x^4 + 5.x^3 + 4.x^2 + 2.x - 1$	$= 3.x^4 + 4.x^2 - 1$	$+$	$5.x^3 + 2.x$
e^x	$= ch(x)$	$+$	$sh(x)$
$\cos(x - \varphi_0)$	$= \cos(\varphi_0).\cos(x)$	$+$	$\sin(\varphi_0).\sin(x)$

et vérifier... (synthèse)

III∼2) Montrez aussi : $\tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2.n+1}}{(2.n+1)!}.x^{2.n+1}$ et $\frac{1}{\cos(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.x^{2.n}$.

On a montré : $f(x) = \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{k!}.x^k$.

On décompose alors f en « paire+impaire » sous chacune des deux formes.

$\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$		$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{k!}.x^k$	
$\frac{1}{\cos(x)}$	$+\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\sum_{k\ pair} \frac{\alpha_k}{k!}.x^k$	$+\sum_{k\ impair} \frac{\alpha_k}{k!}.x^k$

Par unicité de la décomposition, on peut identifier :

paire	$\frac{1}{\cos(x)} = \sum_n \frac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.x^{2.n}$
impaire	$\tan(x) = \sum_n \frac{\alpha_{2.n+1}}{(2.n+1)!}.x^{2.n+1}$

Mais au fait, qu'est ce qui dit que $x \longmapsto \sum_n \frac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.x^{2.n}$ et $x \longmapsto \sum_n \frac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.x^{2.n}$ sont bien les parties paire et impaire de f ?

Est ce juste parce que les exposants sont respectivement pairs et impairs ?

C'est tentant. ; et sinon, $\sum_n \frac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.(-x)^{2.n} = \sum_n \frac{\alpha_{2.n}}{(2.n)!}.x^{2.n}$

et $\sum_n \frac{\alpha_{2.n+1}}{(2.n+1)!}.(-x)^{2.n+1} = -\sum_n \frac{\alpha_{2.n+1}}{(2.n+1)!}.x^{2.n+1}$

Rapport du jury : Idéalement, il faudrait justifier pourquoi la partie paire/impaire d'une fonction développable en série entière est donnée par la somme des termes pairs/impairs de son développement. On pouvait d'ailleurs calculer $f(x) \pm f(-x)$ et simplifier pour obtenir les formes attendues.

III∼3) Pour tout entier naturel n, exprimez $\tan^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

On peut ensuite identifier $\tan(x) = \sum_n \frac{\alpha_{2.n+1}}{(2.n+1)!}.x^{2.n+1}$ et l'écrire même $\tan(x) = \sum_k \frac{A_k}{k!}.x^k$ avec $A_k = 0$ si k pair et $A_k = \alpha_{2.n+1}$ si k impair de la forme $2.n+1$.

On identifie avec la formule de Taylor (ou on dérive plein de fois et on calcule en 0) : $\tan^{(k)}(0) = A_k$.

Pour k pair, $\tan^{(k)}(0) = 0$

Pour k impair (de la forme $2.n+1$) : $\tan^{(k)}(0) = \tan^{(2.n+1)}(0) = \alpha_{2.n+1}$.

Rapport du jury : Le taux d'échec à cette question a été une grande surprise pour les correcteurs. Les candidats font preuve d'une grande maladresse pour interpréter la formule qu'ils viennent de démontrer et oublient qu'on ne leur demande qu'une valeur en 0. De nombreuses confusions d'indice, le même entier étant appelé indifféremment n ou $2n+1$ dans la même égalité.

III∼4) Exprimez $\tan'$ à l'aide de tan. Déduisez $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_{2.n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2.n}{2.k-1}.\alpha_{2.k-1}.\alpha_{2.n-2.k+1}$.

La formule $\tan' = 1 + \tan^2$.

On lui applique la formule de Leibniz : $\tan^{(2.n+1)} = 0 + \sum_{j=0}^{2.n} \binom{2.n}{j}.\tan^{(j)}.\tan^{(2.n-j)}$.

On l'applique en 0 : $\tan^{(2.n+1)}(0) = \sum_{j=0}^{2.n} \binom{2.n}{j}.\tan^{(j)}(0).\tan^{(2.n-j)}(0)$.

Ne restent que les termes d'indice impair dans le membre de droite (les dérivées d'indices pairs de la fonction sont nulles en 0) :

$$\tan^{(2.n+1)}(0) = \sum_{k=1}^{n} \binom{2.n}{2.k-1}.\tan^{(2.k-1)}(0).\tan^{(2.n-2.k+1)}(0)$$

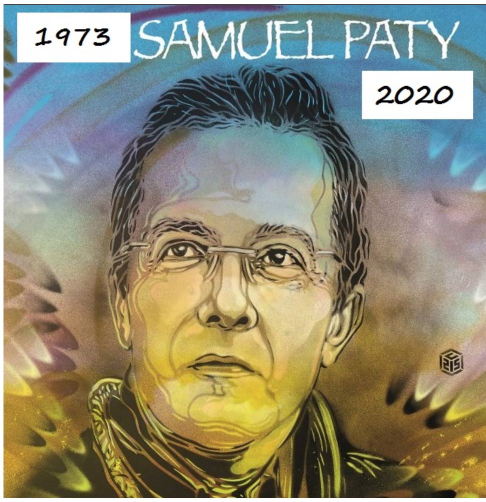
C'est la formule souhaitée.

Rapport du jury : Ici il est important d'expliquer ce que l'on fait, calculer ne suffit pas. Un raisonnement expéditif « par analogie avec Q5 » n'était certes pas suffisant, mais il était bienvenu d'alléger les calculs en expliquant la similarité avec ceux de Q5.

∘0∘ ♡ Calculez $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$, $\int_0^1 \frac{dt}{1+(1+t)^2}$, $\int_0^1 \frac{dt}{1+(2+t)^2}$, $\int_0^1 \frac{dt}{t^2+6.t+10}$.

$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$	$\int_0^1 \frac{dt}{1+(1+t)^2}$	$\int_0^1 \frac{dt}{1+(2+t)^2}$	$\int_0^1 \frac{dt}{1+(3+t)^2}$
$Arctan(t)$	$Arctan(t+1)$	$Arctan(t+2)$	$Arctan(t+3)$
$\frac{\pi}{4}$	$Arctan(2)-\frac{\pi}{4}$	$Arctan(3)-Arctan(2)$	$Arctan(4)-Arctan(3)$

Trouverez vous vraiment utile de compacter $Arctan(4)-Arctan(3)$ en $Arctan\left(\frac{1}{1+12}\right)$? Moi non.



Dans notre République, être libre, c'est avoir le droit de dire ce que l'on pense, le droit de partager ses connaissances, d'écouter, de débattre, de dessiner, de chanter.

Tout cela fait partie de ce que nous appelons la liberté d'expression, qui est une de nos libertés les plus importantes.

La liberté d'expression signifie aussi que personne n'a le droit de forcer les autres à penser comme lui, à faire comme lui ou à dire la même chose que lui.

Cette liberté d'expression n'est pas sans limites. On peut ne pas être d'accord avec les idées des autres, et on peut en rire, on peut même s'en moquer, mais on n'a pas le droit d'inciter à la violence ou à la haine contre qui que ce soit.

∘1∘ ♡ Résolvez $Arctan'(e^x)=\frac{1}{1+e^{2.x}}$. d'inconnue réelle x.

Enorme confusion pour qui croit savoir faire des maths mais calcule sans réfléchir.
On a $Arctan'(t)=\frac{1}{1+t^2}$ et donc $Arctan'(e^x)=\frac{1}{1+(e^x)^2}$.
Dans l'ordre : on dérive, puis on remplace t par e^x.
On a donc ici mS=\R .

La confusion : on n'a pas dérivé $x \longmapsto Arctan(e^x)$.
On a dérivé Arctan puis calculé en e^x.
C'est bien pour ça que $(Arctan((e^x))'$ n'a pas de sens ou en tout cas est un summum d'ambiguïté.
De même $f'(-x)$ est clair. Et $(f(-x))'$ ne l'est pas du tout.
Et ce n'est pas pour rien que le matheux insiste sur $(x \longmapsto f(-x))' = (x \longmapsto -f'(x))$ par exemple.

∘2∘ Pouvez vous mettre $x \longmapsto \cos(x)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ sous la forme $x \longmapsto A.\cos(x-\varphi)$?

Oui.
Les quatre termes du premier membre sont de la forme $a_k.\cos(x)+b_k.\sin(x)$.
Leur somme est de la forme $\alpha.\cos(x)+\beta.\sin(x)$.
On peut la mettre sous la forme demandée.

	$\cos(x)$	$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$	$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$	
cosinus	$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}.\cos(x)$	$\frac{1}{2}.\cos(x)$		$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right).\cos(x)$
sinus		$-\frac{\sqrt{2}}{2}.\sin(x)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}.\sin(x)$	$-\sin(x)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right).\cos(x)$

Le réel positif A est égal à $\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2}$. Et φ est un simple Arctangente.

∘3∘ Montrez : $\int \frac{6}{1+(x-1)^3}.dx = \sqrt{12}.Arctan\left(\frac{2.x-3}{\sqrt{3}}\right)+\ln\left(\frac{x^2}{x^2-3.x+3}\right)$.

Ne suffirait il pas de dériver $x \longmapsto \sqrt{12}.Arctan\Big(\frac{2.x-3}{\sqrt{3}}\Big) + \ln\Big(\frac{x^2}{x^2-3.x+3}\Big)$?

Et même $x \longmapsto \sqrt{12}.Arctan\Big(\frac{2.x-3}{\sqrt{3}}\Big) + 2.\ln(x) - \ln(x^2-3.x+3)\frac{x^2}{x^2-3.x+3}\Big)$?