LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 10 octobre
M.P.S.I.2

2023 2024

IS05

♡ 0 ♡ Montrez que si z est racine du polynôme P à coefficients réels, alors $\overline{z}$ est aussi racine de ce polynôme. 2 pt.

♡ 1 ♡ Donnez les quatre racines quatrièmes de $28 - 96.i$. Même question avec $28 + 96.i$. 3 pt.

♡ 2 ♡ Le polynôme $X^4 - 3.X^2 + 4.X + 1$ a pour racines a, b, c et d.
Montrez $(1-a).(1-b).(1-c).(1-d) = 3$. 2 pt.

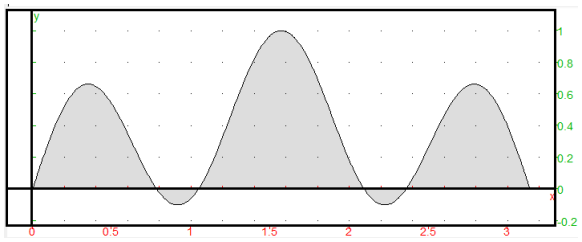
◇ 0 ◇ On sait $\cos(a) = 7/25$ et $\sin(b) = 28/53$. Donnez les quatre valeurs possibles de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ (montrez que ce sont des rationnels). 2 pt.

◇ 1 ◇ Transformez le produit $\cos(2.t).\sin(3.t)$ en somme de sinus et/ou de cosinus.
Déduisez $\int_0^{\pi} \cos(2.t).\sin(3.t).dt = \frac{6}{5}$. 3 pt.

Montrez pur tout x de $]0,\ \pi[$:

$$\cos(x).\cos(2.x).\cos(3.x) = \frac{\sin(4.x).\cos(3.x)}{4.\sin(x)}$$

Déduisez $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right).\cos\left(\frac{2.\pi}{7}\right).\cos\left(\frac{3.\pi}{7}\right) = \frac{1}{8}$. 3 pt.

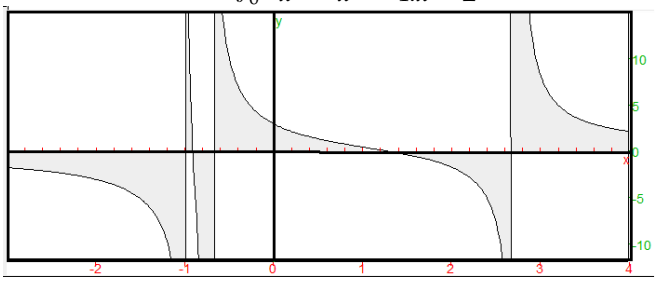


♣ 0 ♣ Un élève propose de prouver $(x \longmapsto x^{1+i}) = (x \longmapsto (1+i).x^i)$. Aidez le en revenant à l'exponentielle complexe $x^i = e^{i.\ln(x)}$ certes contestable. 2 pt.

◇ 2 ◇ Montrez pour tout x strictement positif $2.Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2.x+1}}\right) = Arctan\left(\frac{\sqrt{2.x+1}}{x}\right)$. 3 pt.

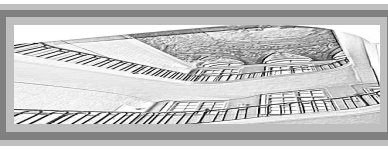
♣ 1 ♣ Ma calculatrice a trouvé $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} \simeq 0,638$ et aussi $\frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}} \simeq 0,638$. Est ce le fruit du hasard si ils ont l'air égaux ? Prouvez moi que non.
Indication : on pourra poser $x = \sqrt[3]{2}$ pour simplifier les calculs.
On pourra aussi multiplier par $\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}+1)^3}$, si si ! 4 pt.

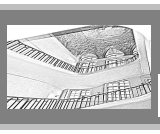
◇ 3 ◇ Résolvez $\int_0^a \frac{5.x^2 - 2.x - 6}{x^3 - x^2 - 4.x - 2}.dx = \ln(3)$ d'inconnue réelle a. 5 pt.



Si L est une liste de notes, que fait ce script ? 2 pt.

```
def Scooby(n) :
....if n % 2 == 0 :
........return n//2
....else :
........return n
L = [Scooby(n) for n in L]
```

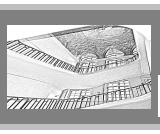


Polynôme à coefficients réels. IS05

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{d} a_k.z^k = 0 \quad &\Rightarrow \quad \overline{\sum_{k=0}^{d} a_k.z^k} = \overline{0} \\
&\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k.z^k} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k}.\overline{z^k} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{d} a_k.\overline{z}^k = 0
\end{aligned}$$

On note $P = \sum_{k=0}^{d} a_k.X^k$ le polynôme à coefficients réels et z la racine. On raisonne par implications mais on pourrait raisonner par équivalences.

Et surtout, on ajoute les mots qui manquent :
« on conjugue »,
« le conjugué de la somme est la somme des conjugués »,
« le conjugué du produit est le produit des conjugués »,
« les coefficients sont réels », on reconnaît $P(\overline{z}) = 0$.



Racines quatrièmes. IS05

On commence par les racines carrées de $28 - 96.i$. On résout $(x + i.y)^2 = 28 - 96.i$:

$x^2 - y^2$	$= 28$
$x^2 + y^2$	$= \sqrt{28^2 + 96^2} = \sqrt{10000} = 100$
$2.x.y$	$= -96$

On trouve deux racines carrées : $8 - 6.i$ et son opposé.

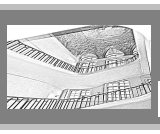
On recommence avec cette fois $(a + i.b)^2 = 8 - 6.i$:

$x^2 - y^2$	$= 8$
$x^2 + y^2$	$= \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$
$2.x.y$	$= -6$

On trouve nos quatre racines quatrièmes :

$1 + 3.i$	$-1 - 3.i$
$3 - i$	$-3 + i$

Avec un changement de signe, il suffit de passer au conjugué : si on a $z^4 = 28 - 96.i$ alors on a aussi $\overline{z}^4 = \overline{z^4} = 28 + 96.i$.



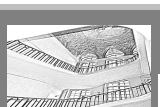
Coefficients racines. IS05

Si on note a, b, c et d les quatre racines du polynôme $X^4 - 3.X^2 + 4.X + 1$ on a

$$\begin{array}{ccccccc}
a & +b & +c & +d & = & 0 \\
a.b & +a.c & +a.d & & & \\
 & +b.c & +b.d & & = & -3 \\
 & & +c.d & & & \\
a.b.c & +a.b.d & +a.c.d & +b.c.d & = & -4 \\
a & \times b & \times c & \times d & = & 1
\end{array}$$

et on développe $(1-a).(1-b).(1-c).(1-d) = \begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ -a & -b & -c & -d & & \\ +a.b & +a.c & +a.d & +b.c & +b.d & +c.d \\ -a.b.c & -a.b.d & -a.c.d & -b.c.d & +a.b & .c.d \end{array}$ et on termine le calcul.

Mais si on a du recul, on écrit $X^4 - 3.X^2 + 4.X + 1 = (X-a).(X-b).(X-c).(X-d)$ et on remplace X par 1. C'est tout !

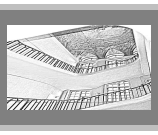


Trigonométrie et intégrale. IS05

L'application intégrée $x \longmapsto$ est continue, donc intégrable. Ensuite, on a juste à écrire

$$\cos(2.t).\sin(3.t) = \frac{\sin(2.t + 3.t) + \sin(3.t - 2.t)}{2}$$

Une primitive est donc $t \longmapsto -\dfrac{\cos(5.t)}{10} - \dfrac{\cos(t)}{2}$. Le reste n'est que calcul.



Trigonométrie et somme. IS05

On part de $\cos(a) = \dfrac{7}{25}$ et $\sin(b) = \dfrac{28}{53}$, on élève au carré et on soustrait à 1. On a donc

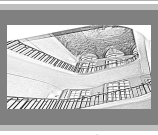
$$\sin^2(a) = \frac{25^2 - 7^2}{25^2} = \frac{(25+7).(25-7)}{25^2} = \frac{32.18}{25^2} = \frac{8^2.3^2}{25^2}$$

et de même $\cos^2(b) = \dfrac{(53+28).(53-28)}{53^2} = \dfrac{5^2 3^4}{53^2}$. On tient nos sinus au signe près.
Il en sera de même pour $\cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$ et $\cos(a).\sin(b) + \sin(a).\cos(b)$

$\cos(a+b)$	$\frac{7}{25}.\frac{45}{53} - \frac{24}{25}.\frac{28}{35}$
	$\frac{7}{25}.\frac{45}{53} + \frac{24}{25}.\frac{28}{35}$
	$-\frac{7}{25}.\frac{45}{53} - \frac{24}{25}.\frac{28}{35}$
	$-\frac{7}{25}.\frac{45}{53} + \frac{24}{25}.\frac{28}{35}$

$\sin(a+b)$	$\frac{7}{25}.\frac{28}{53} - \frac{24}{25}.\frac{45}{35}$
	$\frac{7}{25}.\frac{28}{53} + \frac{24}{25}.\frac{45}{35}$

Y tient on ? $\pm\dfrac{357}{1325}, \pm\dfrac{987}{1325}, \dfrac{1276}{1325}$ et $-\dfrac{884}{1325}$?



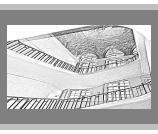
Dérivation. IS05

On écrit donc $f = x \longmapsto x.(\cos(\ln(x)) + i.\sin(\ln(x))$ et on dérive partie réelle et partie imaginaire qui sont chacune un produit

$$f' = x \longmapsto \left(1.\cos(\ln(x)) + x.\frac{-\sin(\ln(x)}{x}\right) + i.\left(1.\cos(\ln(x)) + x.\frac{\cos(\ln(x)}{x}\right)$$

On simplifie les x et il reste $x \longmapsto (1+i).\cos(\ln(x)) + (i-1).\sin(\ln(x))$. On écrit $i - 1 = i.(1+i)$ et on a bien $x \longmapsto (1+i).e^{i.\ln(x)}$ qu'on va écrire $x \longmapsto (1+i).x^i$.

On pouvait aussi partir de $(1+i).e^{i.\ln(.x)}$ et arriver à notre $x \longmapsto \cos(\ln(x)) - \sin(\ln(x)) + i.\sin(\ln(x)) + i.\cos(\ln(x))$.



π sur 7. IS05

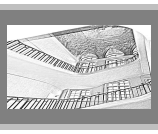
Si on doit comparer $\cos(x).\cos(2.x).\cos(3.x)$ et $\dfrac{\sin(4.x).\cos(3.x)}{4.\sin(x)}$ il suffit de comparer $\cos(x).\sin(2.x)$ et $\dfrac{\sin(4.x)}{4.\sin(x)}$.

Par produit en croix, il suffit de constater qu'on applique deux fois la formule $\sin(t).\cos(t) = \dfrac{\sin(2.t)}{2}$.

On a directement

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right).\cos\left(\frac{2.\pi}{7}\right).\cos\left(\frac{3.\pi}{7}\right) = \frac{\sin\left(\frac{4.\pi}{7}\right).\cos\left(\frac{4.\pi}{7}\right).}{4.\sin\left(\frac{\pi}{7}\right).} = \frac{\sin\left(\frac{4.\pi}{7} - \frac{3.\pi}{7}\right) + \sin\cos\left(\frac{4.\Pi}{7} - \frac{3.\pi}{7}\right).}{8.\sin\left(\frac{\pi}{7}\right).} = \frac{0 + \sin(\pi/7)}{8.\sin(\pi/7)} = \frac{1}{8}$$

Il a fallu quand même rappeler $\sin(a).\cos(b) = \dfrac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$.



Arctangentes. IS05

On étudie la différence $2.Arctan\Big(\frac{1}{\sqrt{2.x+1}}\Big) - Arctan\Big(\frac{\sqrt{2.x+1}}{x}\Big)$ vue comme fonction de x. On dérive (composée) :

$$x \longmapsto 2.\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2.x}{(2.x+1)^{3/2}}}{1+\frac{1}{2.x+1}} - \frac{\frac{\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{2.x+1}}.x - \sqrt{2.x+1}}{x^2}}{1+\frac{2.x+1}{x^2}}$$

La dérivée est nulle après simplification. L'application est constante sur $]0,\ +\infty[$. On calcule sa valeur en 1 :

$$2.Arctan\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) - Arctan(\sqrt{3}) = 2.\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = 0$$

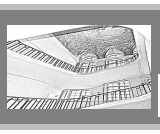
L'application est non seulement constante, elle est nulle.

Plus simple : on compare les deux membres en calculant la tangente de chacun.

$$\frac{2.\frac{1}{\sqrt{2.x+1}}}{1-\Big(\frac{1}{\sqrt{2.x+1}}\Big)^2} \ et\ \frac{\sqrt{2.x+1}}{x}$$

il y a égalité. Les deux angles sont donc congrus modulo π. Le premier est entre 0 et $2.\frac{\pi}{2}$ et le second entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Il y a égalité.

On peut aussi poser $\theta = Arctan((2.x+1)^{-1/2})$ et calculer $\tan(2.\theta)$.
Il reste quand même à surveiller les domaines car on a juste une congruence modulo π.



Racines cubiques. IS05

On va prouver $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}$ en calculant le cube de chacun de ces deux nombres.
Si ils sont égaux, on pourra conclure.
Le membre de gauche a pour cube $\sqrt[3]{2}-1$ (positif).
Pour celui de droite, on a $\frac{(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3}{9}$. On va avoir besoin d'initiative :
• développer $(a+b+c)^3$ (et trouver après calcul $a^3+b^3+c^3+3.a^2.b+3.a^2.c+3.b^2.a+3.b^2.c+3.c^2.a+3.c^2.b+6.a.b.c$)
• poser $x = \sqrt[3]{2}$
Finalement, on développe $(1-x+x^2)^3$ et c'est plus simple, surtout si on tient compte de $x^3 = 2$:

$$(1-x+x^2)^3 = calcul = x^6-3.x^5+6.x^4-7.x^3+6.x^2-3.x+1 = 4-6.x^2+12.x-7.2+6.x^2-3.x+1 = -9+9.x$$

On divise par 9, il y a bien égalité.

Mais c'est quand même calculatoire.

Et si on lisait la petite indication. On va multiplier par $\sqrt[3]{2}+1$ (c'est bien $\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}+1)^3}$) dès le début.
A droite, on développe $(1-x+x^2).(1+x)$ et c'est classique

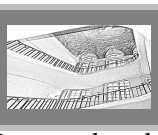
$$\frac{(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}).(\sqrt[3]{2}+1)}{\sqrt[3]{9}} = \frac{(\sqrt[3]{2}+1)-(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})+(\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4})}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{8}+1}{\sqrt[3]{9}} = \frac{2+1}{\sqrt[3]{9}} = \frac{3}{3^{2/3}} = 3^{1/3}$$

A gauche, on calcule quitte à réunir sous le m^me signe racine et à développer $(x+1)^3$:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}.\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}+1)^3} = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}-1).(\sqrt[3]{2}+1)^3} = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}-1).(2+3.\sqrt[3]{4}+3.\sqrt[3]{2}+1)}$$

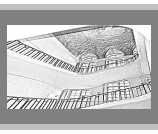
$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}.\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}+1)^3} = \sqrt[3]{3.(\sqrt[3]{2}-1).(1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})} = \sqrt[3]{3.(\sqrt[3]{8}-1)} = \sqrt[3]{3}$$

Bref, on a établi : $\sqrt[3]{(x-1)}.\sqrt[3]{(x+1)^3} = \dfrac{1-x+x^2}{\sqrt[3]{9}}.(x+1)$, il reste à simplifier par $x+1$ (non nul) pour conclure.



Scooby s'occupe de vos notes. IS05

On remplace la liste L par une liste où toutes les ntes paires sont divisées par 2 (et les notes impaires sont conservées).
On se demande ensuite à quoi ça sert.



Fraction rationnelle. IS05

Pour résoudre $\displaystyle\int_0^a \frac{5.x^2-2.x-6}{x^3-x^2-4.x-2}.dx = \ln(3)$ d'inconnue a (dans un domaine bien choisi), on a faire tout ce qui semble en notre pouvoir : calculer l'intégrale en décomposant en éléments simples.

Première étape : les racines du dénominateur.
Une racine évidente égale à -1 : $(-1)^3-1+4-2=0$.
Une factorisation directe : $x^3-x^2-4.x-2=(x+1).(x^2-2.x-2)$.
Encore une ($\Delta=13$ et donc $\delta=2.\sqrt{3}$) : $x^3-x^2-4.x-2=(x+1).(x-1-\sqrt{3}).(x-1+\sqrt{3})$.
Forme de la décomposition :

$$\frac{5.x^2-2.x-6}{x^3-x^2-4.x-2} = \frac{5.x^2-2.x-6}{(x+1).(x-1-\sqrt{3}).(x-1+\sqrt{3})} = \frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{x-1-\sqrt{3}}+\frac{\gamma}{x-1+\sqrt{3}}$$

Coefficients par la méthode des pôles

$$\frac{5.x^2-2.x-6}{(x-1-\sqrt{3}).(x-1+\sqrt{3})} = \alpha+\frac{\beta.(x+1)}{x-1-\sqrt{3}}+\frac{\gamma.(x+1)}{x-1+\sqrt{3}}$$

et donc $\alpha = \dfrac{5.1-2.(-1)-6}{((-1)^2-2.(-1)-2} = 1$.
Les autres ont l'air plus laids, mais tout va bien à la fin :

$$\beta = \frac{5.(1+\sqrt{3})^2-2.(1+\sqrt{3})-6}{(1+\sqrt{3}+1).(1+\sqrt{3}-1+\sqrt{3})} = \frac{(5.1+5.3-2-6)+\sqrt{3}.(5.2-2)}{4.\sqrt{3}+6} = 2$$

De même $\gamma=2$. Soulagement :

$$\frac{5.x^2-2.x-6}{x^3-x^2-4.x-2} = \frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1-\sqrt{3}}+\frac{2}{x-1+\sqrt{3}} = \frac{1}{x+1}+\frac{4.x-4}{x^2-2.x-2}$$

Sur un intervalle ne contenant aucun des pôles (et contenant 0) on peut intégrer en séparant par linéarité :

$$\int_0^a \frac{5.x^2-2.x-6}{x^3-x^2-4.x-2}.dx = \int_0^a \frac{1}{x+1}.dx+\int_0^a \frac{2}{x-1-\sqrt{3}}.dx+\int_0^a \frac{2}{x-1+\sqrt{3}}.dx$$

Après calcul des logarithmes, l'équation devient

$$\ln(a+1)+2.\ln\left(\frac{a-1-\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}}\right)+2.\ln\left(\frac{a-1+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}\right) = \ln(3)$$

Si on y tient, on remplace $2.\ln(a-1-\sqrt{3})$ par $\ln((a-1-\sqrt{3})^2)$ pour éviter les signes négatifs.

On passe à l'exponentielle (bijective entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{+*}$) :

$$(a+1).\frac{(a-1-\sqrt{3})^2.(a-1+\sqrt{3})^2}{(-1-\sqrt{3})^2.(-1+\sqrt{3})^2} = 3$$

On résout $(a+1).(a^2-2.a-2)^2=12$.
J'ai une racine évidente : 2. Je crains de ne pas trouver les autres, devant résoudre $a^4-a^3-6.a^2-4.a+4=0$ d'inconnue a.

Mais déjà, $a=2$ fait que entre 0 et 2 il n'y a ni -1 ni $1+\sqrt{3}$ ni $1-\sqrt{3}$. l'intégrale existe au vaut bien $\ln(3)$.