

◦0◦ Calculez $\int_{u=0}^1 \frac{du}{2 + \sqrt{1-u^2}}$ (vous pourrez poser $u = \sin(\theta)$ et ensuite $t = \tan(\theta/2)$).

◦1◦ Calculez $\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$ (réduisez au dénominateur commun, c'est joli)..

◦2◦ Calculez $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(\theta)} \cdot d\theta$ en posant $u = \sqrt{\tan(\theta)}$.

◦3◦ L'application f prend un rationnel x , écrit son écriture décimale et remplace tous les 5 par des 4, et le remet sous forme rationnelle.

Calculez $f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{4}\right), f\left(\frac{17}{14}\right)$. Combien l'équation $f(x) = \frac{73}{495}$ a-t-elle de solutions ?

Combien l'équation $f(x) = \frac{541}{990}$ a-t-elle de solutions ?

◦4◦ ♣ On définit φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $\varphi(2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \dots) = 2^{-a} \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \dots$ et $\varphi(0) = 0$ puis on définit la relation $\triangleleft$ par $a \triangleleft b \Leftrightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$.

Montrez que c'est une relation d'ordre et que 0 en est le plus petit élément.

Montrez que la suite $(n!)$ n'est ni croissante ni décroissante pour $\triangleleft$.

Montrez que la suite (p_n) des nombres premiers est croissante.

Montrez : $\forall (a, b, c), a \triangleleft b \Rightarrow a \cdot c \triangleleft b \cdot c$.

A-t-on $\forall (a, b, c), a \triangleleft b \Rightarrow a + c \triangleleft b + c$.

Un entier peut-il être plus petit que tous ses diviseurs ?

Combien y a-t-il d'entiers entre 2020 et 2021 ?

◦5◦ ♡ Pour tout n , on pose $I_n = \int_0^1 t^n \cdot e^{-t} \cdot dt$. calculez I_0, I_1 et I_2 .

♡ Montrez qu'il existe deux suites d'entiers naturels (a_n) et (b_n) vérifiant $I_n = a_n + b_n \cdot e^{-1}$ (exprimez a_{n+1} et b_{n+1} à l'aide de a_n et b_n).

♡ Montrez pour tout $n : 0 < I_n \leq \frac{1}{n+1}$ (surtout pas en calculant l'intégrale, mais en la majorant par une intégrale plus simple, c'est ça l'esprit des maths, on réfléchit avant de calculer, alors que dans les autres matières on vous demande de calculer et réfléchir en même temps).

On suppose que e est un rationnel, de la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux.

Montrez alors $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \left(|a \cdot e + b| < \frac{1}{q}\right) \Rightarrow (a \cdot e + b = 0)$.

Concluez : e est irrationnel.

◦6◦ Sachant $a + b \cdot \sqrt[3]{5} + c \cdot \sqrt[3]{25} = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}}$ calculez la somme des trois rationnels a, b et c .

◦7◦ ♡ Pour tout n , on pose $a_n = (1 + \sqrt{3})^{2n+1}$ et $b_n = (1 - \sqrt{3})^{2n+1}$.

a - Montrez : $0 \geq b_n > -1$.

On pose $S_n = a_n + b_n$ pour tout n .

b - Montrez que la suite (S_n) est une suite d'entiers et vérifie $\forall n, S_{n+2} = 8 \cdot S_{n+1} - 4 \cdot S_n$.

c - Montrez que S_n est toujours divisible par 2^{n+1} .

d - Montrez : $S_n \leq a_n < S_n + 1$.

e - Déduisez que la partie entière de a_n est toujours divisible par 2^{n+1} .

◦8◦ ♡ Combien l'équation $\cos^2(x) = 2 \cdot \cos(x) + 1$ a-t-elle de solutions dans $[0, 4\pi]$? Quelle est la somme de ces solutions ?

Même question avec $\cos^2(x) = 4 \cdot \cos(x) + 6$.

Même question avec $6.\cos^2(x) = 4.\cos(x) + 1$.

◦9◦

Comparez l'action de ces quatre scripts pour $n = 5$:

```
def Scooby(n) :
```

```
....a, b = 1, 1
```

```
....for k in range(n) :
```

```
.....a, b = b, a+b
```

```
.....return(a, b)
```

```
def ScoobyDoo(n) :
```

```
....a, b = 1, 1
```

```
....for k in range(n) :
```

```
.....a, b = b, a+b
```

```
....return(a, b)
```

```
def ScoobyDooBi(n) :
```

```
....a, b = 1, 1
```

```
....for k in range(n) :
```

```
.....a, b = b, a+b
```

```
....return(a)
```

```
....return(b)
```

```
def ScoobyDooBiDoo(n) :
```

```
....a, b = 1, 1
```

```
....for k in range(n) :
```

```
.....a = b
```

```
.....b = a+b
```

```
....return(a, b)
```

◦10◦

Montrez $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{Arcsin}(x)}{2}$ pour tout réel x de $[-1, 1[$.

◦11◦

♥ (a_n) et (b_n) sont les suites $\forall n, a_n = 4^n - 3 \cdot (-1)^n$ et $\forall n, b_n = -4^{n+1} + 5 \cdot (-1)^n$.

Trouvez la matrice M vérifiant $M \cdot \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.

Vérifiez qu'on a alors $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ (sans calculer M^n).

◦12◦

Retrouvez les coefficients du développement asymptotique : $\frac{n^3 + 3.n + 2}{n^2 + n + 1} = a.n + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \rightarrow +\infty}$.

◦13◦

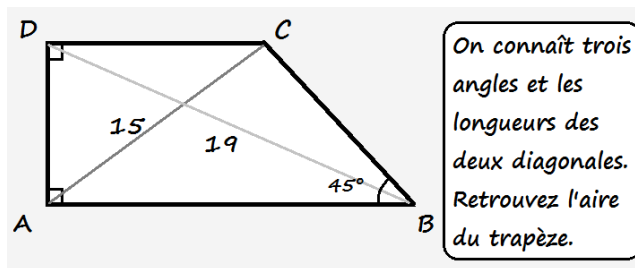
♥ On pose $u_n = \frac{2.n^2 + 3.n + 5}{n + 4}$. Donnez un équivalent simple en $+\infty$ et donnez son développement asymptotique sous la forme $a.n + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o(n^{-2})_{n \rightarrow +\infty}$.

Sur la trapèze semi-rectangle suivant, on connaît les longueurs des deux « diagonales » ($AC = 15$ et $BD = 19$) ; retrouvez son aire (piste : Pythagore deux fois, soustraction, petit triangle isocèle).

Quel est l'exposant de 13 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de

$$\prod_{k=0}^{16} \binom{16}{k} \text{ et } \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k}.$$

◦14◦



◦15◦

Résolvez $\cos(2.\theta) = 1 + \cos(\theta)$ d'inconnue réelle θ .

◦16◦

♥♣ On pose $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$.

Citez les arguments qui permettent d'obtenir de ligne en ligne

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n.(n+1)}$$

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n.(n+1)} \right)$$

$$S = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n.(n+1)} \right)$$

$$S = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right)$$

$$S = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + S$$

Le résultat final semble étrange ? Trouvez l'erreur.

◦17◦

Finalement, ce n'est pas un exercice, juste des formules pour obtenir 6 avec trois n et des symboles $+$, $\times$ et autres (pour n de 0 à 10)

(	0	!+	0	!+	0	!)!	=	6
(	1	+	1	+	1	)!	=	6
	2	+	2	+	2		=	6
(	3	*	3	-	3		=	6
√	4	+√	4	+√	4		=	6
	5	+	5	/	5		=	6
	6	×	6	/	6		=	6
	7	-	7	/	7		=	6
(	8	-√(	8	+	8	))!	=	6
√	9	+√	9	+√	9		=	6
	10		10		10		=	6

◦18◦

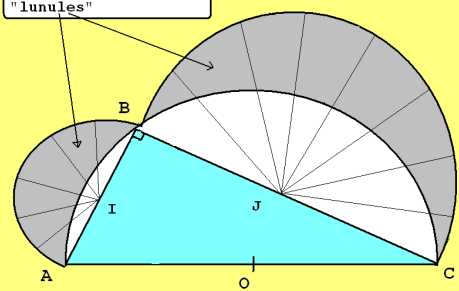
♡ t est un réel fixé, θ est un réel de $] -\pi/2, \pi/2[$. Montrez : $\frac{1+i \cdot \tan(\theta)}{1-i \cdot \tan(\theta)} = e^{2i \cdot \theta}$.

Déterminez partie réelle et partie imaginaire de $\frac{1+i \cdot t}{1-i \cdot t}$ en utilisant la quantité conjuguée. Retrouvez les formules en arc moitié.

◦19◦

♡ Déterminez le maximum de $x \mapsto x \cdot (a-x)$ sur $\mathbb{R}$. Montrez : $k \cdot (2 \cdot n - k) \leq n^2$ pour tout k entre 0 et $2 \cdot n$.
Dédisez : $(2 \cdot n)! \leq 2 \cdot n^{2 \cdot n}$.

Comparez l'aire du triangle et la somme des aires des deux "lunules"



Existe-t-il un triangle rectangle à côtés entiers dont un des côtés mesure 2017 ?

Existe-t-il un triangle rectangle à côtés entiers dont le périmètre vaut 2017 ?

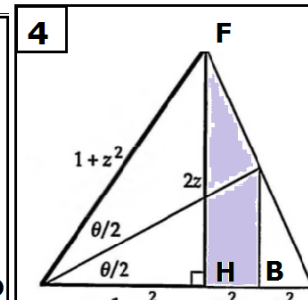
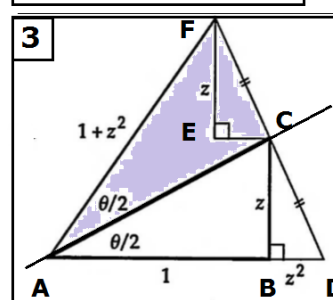
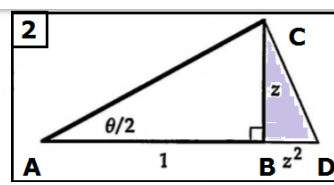
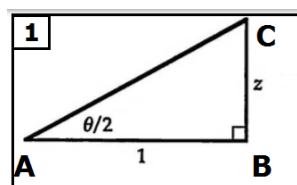
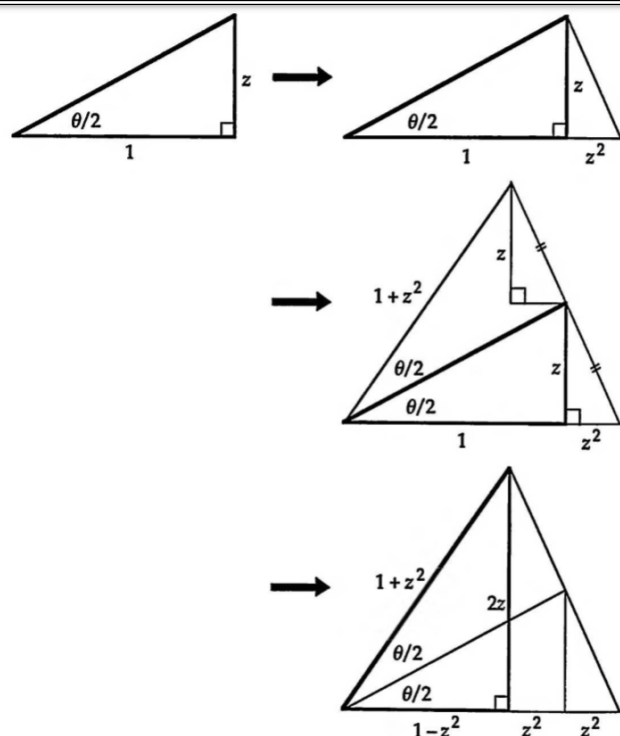
Existe-t-il un triangle rectangle à côtés entiers dont l'aire vaut 2017 ?

Construisez un triangle rectangle dont les côtés sont entiers, mais aussi la hauteur.

Quelles sont, entre 0 et 200 les aires possibles pour des triangles rectangles (c'est lassant, donnez un algorithme).

Comparez l'aire du triangle et la somme des aires des deux lunules.

◦20◦



◦21◦

Quelles formules du cours prouve-t-on avec ces dessins ?

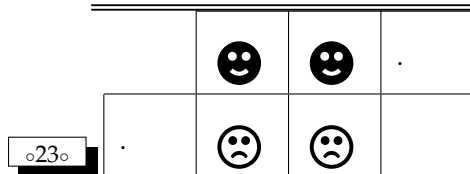
◦22◦

u et v sont deux applications de classe C^2 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ (deux fois dérivables, de plus u'' et v'' sont continues). Montrez

$$: \int_a^b u'' \cdot v = [u' \cdot v - u \cdot v'] + \int_a^b u \cdot v''.$$

Montrez sous hypothèse C^3 : $\int_a^b u^{(3)}v = [u'' \cdot v - u' \cdot v' + u \cdot v''] - \int_a^b u \cdot v^{(3)}.$

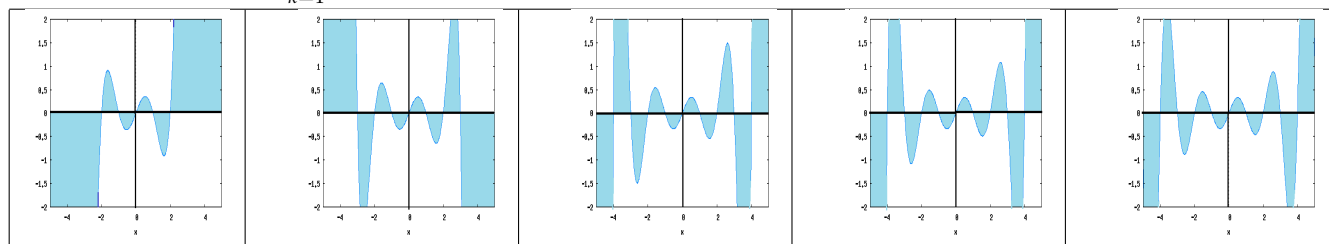
Donnez la formule à l'ordre n (et démontrez la).



Chaque jeton peut se déplacer d'une case horizontalement ou verticalement. Deux jetons ne peuvent pas occuper la même case. Trois non plus. Il faut échanger les blancs et les noirs. Pour quelles valeurs de n existe-t-il une solution en n déplacements ?

24

L'objectif de ce problème est la formule $\sin(\theta) = \theta \cdot \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\theta^2}{k^2 \cdot \pi^2}\right)$ démontrée (à l'ancienne, c'est à dire pas avec toute la rigueur de preuve des convergences) par Leonhard Euler. Disons qu'on va étudier avec rigueur le membre de droite de $\frac{\sin(\pi \cdot x)}{\pi} = x \cdot \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$ pour ne pas avoir trop de π à traîner dans nos calculs.



I~0) Pour tout entier naturel N , on pose $F_N(x) = x \cdot \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$

Soit x un réel positif. On note K l'entier naturel $[x]$. Montrez que $(F_N(x))_N$ est monotone à partir du rang K , de signe constant. Déduisez que $F_N(x)_N$ converge, vers une limite qu'on va noter $F(x)$ (et que l'on va déterminer plus tard).

I~1) On définit ainsi sur $\mathbb{R}^+$ une application $x \mapsto F(x)$. Montrez qu'elle se définit aussi sur $\mathbb{R}^-$ et qu'elle est impaire.

I~2) Montrez que F est positive, majorée par 1 sur $[0, 1]$.

I~3) Montrez : $F_N(x) \cdot (x + N + 1) = F_N(x + 1) \cdot (x - N)$ pour tout couple (N, x) .

I~4) Déduisez que F est périodique de période 2.

I~5) Déduisez que F est bornée sur $\mathbb{R}$.

I~6) Juste parce que la question précédente m'y a fait penser, un exercice en passant, sans rapport avec la suite : soit φ une application paire telle que $x \mapsto \varphi(x + 1)$ soit impaire. Montrez que φ est périodique.

II~0) Montrez que F est croissante sur $[0, 1/2]$ (celui qui commence par "je dérive F " peut aller tout de suite chercher un emploi d'attaché parlementaire, on ne sait même pas si elle sera continue... alors, dérivable... et la forme de sa dérivée...).

II~1) Laquelle de ces phrases est correcte : "sur $[0, 1/2]$, (F_N) est une suite croissante d'applications décroissantes" "sur $[0, 1/2]$, (F_N) est une suite décroissante d'applications croissantes".

II~2) Pour éviter de dire des bêtises sur les suites de fonctions et leur limite, montrez moi que $(x \mapsto \text{Arctan}(n \cdot x))_n$ est une suite d'applications continues dont la limite n'est plus continue.

III~0) On va calculer $F(1/2)$. Pour tout entier naturel n , on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \cdot dt$. Prouvez : $W_{n+1} =$

$\frac{n}{n+1} \cdot W_{n-1}$. Calculez $W_{2,n}$ pour tout entier naturel n . (on pourra intégrer par parties $\int \sin^n \cdot \sin$ et retrouver l'intégrale initiale dans $\int \sin^{n-1} \cdot (1 - \sin^2)$)

III~1) Montrez : $W_{2,n+1} \leq W_{2,n} \leq W_{2,n-1}$ pour tout n . Déduisez : $W_{2,n} \sim_{n \rightarrow +\infty} W_{2,n+1}$.¹

III~2) Prouvez $(2n+1) \cdot W_{2,n} \cdot W_{2,n+1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout n . Déduisez $W_{2,n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$.

III~3) Déduisez $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}$ (formule dite "de Wallis", on se demande pourquoi).

IV~0) Même si ça n'a aucun rapport avec la suite, prouvez moi : $(W_n)^2 \leq \frac{\pi}{2} \cdot W_{2,n}$ pour tout n .

Si je ne l'ai pas démontrée dans le cours, allez chercher dans « les beaux théorèmes de Sup » la formule de Cauchy-Schwarz.

V~0) Montrez : $F_n\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{W_{2,n}}{2\pi \cdot W_{4,n+1}}$ pour tout n . Calculez $F\left(\frac{1}{4}\right)$. Calculez $F\left(\frac{1}{3}\right)$.

◦25◦

♣ On imagine qu'on définit une généralisation de la fonction factorielle de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ en lui demandant d'être affine sur chaque segment $[n, n+1]$ pour n dans $\mathbb{N}$ (par exemple $(3,4)! = 13,2$ car $3! = 6$ et $4! = 24$). Est elle alors injective ? Est elle surjective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$? Si non, de $\mathbb{R}^+$ dans quoi ?

Calculez $(5,2)!$ et $(52/7)!$.

Calculez $\int_0^4 (x)! \cdot dx$.

Résolvez l'équation $(x)! = 2017$ d'inconnue réelle x .

◦26◦

On pose $f(\alpha) = 1, f(\beta) = 2, f(\gamma) = 1, f(\delta) = 2$ et $f(\varepsilon) = 3$. Combien existe-t-il d'applications g de $\{1,2,3\}$ (noté N) dans $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ (noté Γ) vérifiant $f \circ g = Id_{\{1,2,3\}}$? Combien existe-t-il d'applications h de $\{1,2,3\}$ dans $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ vérifiant $h \circ f = Id_{\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}}$?

Fillomino. C'est quoi ce jeu là ? Il faut découper le plan en maisons. Une maison n'est pas forcément carrée, mais elle est d'un seul tenant (vous voyez sur chaque gille une maison de taille 3 dont les trois cases sont appelées 3). Et dans une maison, si il y a des nombres (et il y en a toujours au moins un), ils indiquant la taille de la maison (donc une maison de taille 1 contient l'unique chiffre 1). Deux maisons de même taille ne peuvent pas se toucher autrement que par un coin.

3				2	4		
2		1	3	3	2	1	
1		4		3			
4	4	5				4	3
1	2			1	5		4
		4	1			5	3
3		4	3			3	
1	4	2		3	1	2	

◦28◦

♥ Donnez une primitive de $x \mapsto x \cdot (\text{Arctan}(x))^2$ (si vous intégrez par parties, dites vous que x peut venir de $\frac{x^2}{2}$ certes, mais aussi de $\frac{x^2+1}{2}$).

◦29◦

Pouvez vous placer les quatre couples de $\{a,b\} \times \{0,1\}^2$ dans le tableau de taille 2 sur 2 de sorte à ce que chaque lettre soit visible une fois et une seule sur chaque ligne, et chaque chiffre une fois et une seule sur chaque colonne. Pouvez vous placer les neuf couples de $\{a,b,c\} \times \{0,1,2\}$ dans le tableau de taille 3 sur 3 dans le tableau de sorte à ce que chaque lettre soit visible une fois et une seule sur chaque ligne, et chaque chiffre une fois et une seule sur chaque colonne.

Pouvez vous placer les seize couples de $\{a,b,c,d\} \times \{0,1,2,4\}$ dans le tableau de taille 4 sur 4 de sorte à ce que chaque lettre soit visible une fois et une seule sur chaque ligne, et chaque chiffre une fois et une seule sur chaque colonne.

◦30◦

Calculez $\int_0^1 t^2 \cdot e^t \cdot dt$ quitte à intégrer assez par parties.

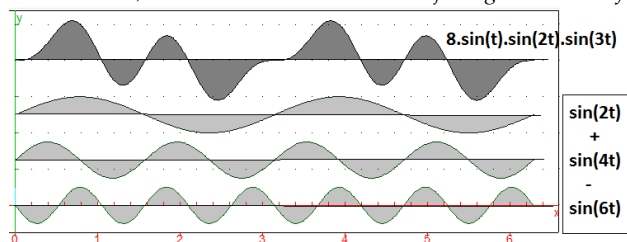
1. deux suites (a_n) et (b_n) sont dites équivalentes si leur quotient a_n/b_n tend vers 1 quand n tend vers l'infini, et on note alors $a_n \sim b_n$
 2. v'est à dire $(a,0), (a,1), (b,0)$ et $(b,1)$

Calculez $\int_0^1 t \cdot \text{Arctan}(t) \cdot dt$ en choisissant bien votre primitive de $t \mapsto 2 \cdot t$ lors de l'intégration par parties.

◦31◦ Calculez $\int_1^2 t^2 \cdot \log_2(t) \cdot dt$.

◦32◦ Montrez : $\int_0^{\pi/6} \sin(t) \cdot \sin(2t) \cdot \sin(3t) \cdot dt = \frac{7}{96}$.

Mais surtout, évitez le truc de Terminale « j'intègre autant de fois par parties qu'il faut » ; pensez à linéariser.



Elles apprécient les charges libres.
Quelle rude éjection.
Avide de ferveur, il nous inonde de spams.
Ce vélib' à terre a mal aussi.

◦33◦ Déterminez

$\text{Sup}\{\text{Arctan}(e^x) + \text{Arctan}(e^{-y}) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ $\text{Sup}\{\text{Arctan}(e^x) + \text{Arctan}(e^{-x}) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$\text{Inf}\{\text{Arctan}(e^x) + \text{Arctan}(e^{-y}) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ $\text{Inf}\{\text{Arctan}(e^x) + \text{Arctan}(e^{-x}) \mid x \in \mathbb{R}\}$

La borne supérieure d'un ensemble est son plus petit majorant. Et par exemple, $[0, 1[$ a pour borne supérieure 1 alors qu'il n'a pas de plus grand élément.

◦34◦ Dans le pays de Hempai et Sideu, il y a des Arfs, des Bloutchs et des Crops (et c'est tout, mais on peut être Arfe et Bloutch, et même les trois à la fois, comme d'ailleurs 20 habitants). 50 Arfs sont aussi des Crops. Il y a 90 Bloutchs, dont un tiers sont d'ailleurs aussi des Crops. Parmi les Bloutchs, il y en a autant qui sont Arfs et Crops qu'il n'y en a qui sont Arf ou Crops. 40 Crops ne sont ni Arf, ni Bloutch. Il y a 100 Arfs. Alors, combien d'habitants dans ce pays Hempai et Sideu ? Et combien répondront "oui" à la question "si tu es Arf, alors tu n'es ni Bloutch, ni Crop" (sachant qu'ils sont tous bons en logique et sincères).

◦35◦ ♣ Calculez $\prod_{k=2}^{2015} \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil^{((-1)^k)}$ (les crochets désignent la partie entière).

◦36◦ Montrez par récurrence sur n pour u et v dérivables autant de fois qu'on veut : $(u \cdot v)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot u^{(k-i)} \cdot v^{(i)}$.

◦37◦ n est un entier naturel qu'on choisira convenablement à la fin.

On définit $f = x \mapsto \frac{x^n \cdot (1-x)^n}{n!}$. Montrez pour tout x de $]0, 1[$: $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.

Montrez que chaque $f^{(k)}(0)$ et $f^{(k)}(1)$ est un entier.

On suppose que π^2 est un rationnel de la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels.

Quel type de raisonnement se prépare-t-on à faire ?

On définit : $F = (x \mapsto b^n \cdot (\pi^{2n} \cdot f(x) - \pi^{2n-2} \cdot f''(x) + \pi^{2n-4} \cdot f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n \cdot f^{(2n)}(x)))$ (écrivez proprement avec un Σ).

Montrez que $F(0)$ et $F(1)$ sont deux entiers.

Montrez : $(x \mapsto F'(x) \cdot \sin(\pi \cdot x) - \pi \cdot F(x) \cdot \cos(\pi \cdot x))' = (x \mapsto \pi^2 \cdot a^n \cdot f(x) \cdot \sin(\pi \cdot x))$.

Déduisez : $\pi \cdot \int_0^1 a^n \cdot f(x) \cdot \sin(\pi \cdot x) \cdot dx = F(0) + F(1)$.

Montrez aussi $0 < \pi \cdot \int_0^1 a^n \cdot f(x) \cdot \sin(\pi \cdot x) \cdot dx \leq \frac{\pi \cdot a^n}{n!}$.

Choisissez maintenant n pour avoir $\frac{\pi \cdot a^n}{n!} < 1$.

Aboutissez à la contradiction attendue.

π est-il rationnel ? Et $\sqrt{\pi}$?

◦38◦ ♡ On pose $f = a \cdot \cos + b \cdot \sin$.

Ajustez a et b pour avoir $f(\pi/3) = f(2\pi/3) = 0$.

Ajustez a et b pour que f atteigne son maximum égal à 5 en $\pi/3$.

Pouvez-vous ajuster a et b pour que le maximum de f soit 3 et son minimum -4.

Ajustez a et b pour avoir $f(0) = 1$ et $\text{Sup}\{|f(t)| \mid t \in \mathbb{R}\} = 2$ (combien de possibilités ?).

◦39◦ 36 est égal à quatre fois la somme de ses chiffres ($36 = 4 \cdot (3 + 6)$). Trouvez tous les autres nombres entiers vérifiant cette propriété.

Et si je vous demande les entiers qui sont égaux à 2017 fois la somme de leurs chiffres, comme 42 357, comment en appelez vous au Python suprême ?

◦40◦ ♡ Calculez $\int_0^\pi \frac{\sin(t).dt}{1 + \cos^2(t)}$. On pose $I = \int_0^\pi \frac{t.\sin(t).dt}{1 + \cos^2(t)}$. Effectuez le changement de variable $u = \pi - t$. Déduisez la valeur de I .

◦41◦ La suite a_n tend vers 0 à l'infini. Donnez la limite des suites suivantes :
 $\left(\sum_{k=0}^n a_{k+1} - a_k\right), \left(\sum_{k=0}^n a_{k+2} - 2.a_{k+1} + a_k\right), \left(\sum_{k=0}^n a_{k+3} - 3.a_{k+2} + 3.a_{k+1} - a_k\right)$. Trouvez une formule générale.

◦42◦ ♡ Montrez : $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2 \cdot (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$. Déduisez que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_n$ diverge.

◦43◦ ♡ n^k est il équivalent à $(n+1)^k$ quand n tend vers l'infini (k fixé) ?
 n^k est il équivalent à $(n+1)^k$ quand k tend vers l'infini (n fixé) ?
 Montrez que n^n n'est pas équivalent à $(n+1)^n$ quand n tend vers l'infini (le logarithme de leur quotient va cacher un taux d'accroissement à trouver).

◦44◦ Résolvez dans $\mathbb{R}$ $\sqrt{x^2 - 5.x + 4} \geq |2.x + 1|$.
 Résolvez dans $\mathbb{R}$ $\sqrt{x^2 - 5.x + 4} \geq 2.x + 1$.

◦45◦ On suppose $x_n = a_n + b_n$. Montrer $(x_n \sim a_n) \Leftrightarrow (b_n = o(a_n))$.

Avec ces Types, on épargne les comPromis. Elle évite les cOPines lentes. Le capitaine fait Mander les marins à Bord. Tu me Paraissais bien CaLine. Si c'est mon énorme trUc ! Brigitte ne crût plus ce maçon. Il m'a véhIculé malgré ma suspENsion. Faut pas manquer de pèze Pour une belle comBine. On cherche les ados dans les lycées. Il apprécie les nyLons à Choisir. Le curé cherche des Tenues pour les Catés.

◦46◦ Qui est le plus grand : $2^{22}, \binom{34}{7}, \binom{25}{13}$?
 (si possible sans calculatrice évidemment, décomposez en produits de facteurs premiers).

◦47◦ ♡ On donne : $u_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3} + \frac{4}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)_{n \rightarrow +\infty}$. Donnez le développement de $u_{n+1} - u_n$ sous la forme $\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n \rightarrow +\infty}$.
 Même question avec $2.u_{2n} - u_n$.

◦48◦ Pour a dans $] -\pi, 0[\cup]0, \pi[$, on définit : $f_a = x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x - \cos(a)}{\sin(a)}\right) - a + \frac{\pi}{2}$. Donnez son domaine de définition, ses limites aux bornes.
 Indiquez suivant a son sens de variations, et ses éventuels points d'inflexion.

Donnez le développement limité d'ordre n en 0 de f_a .

◦49◦ Combien l'équation $a.b = 10!$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

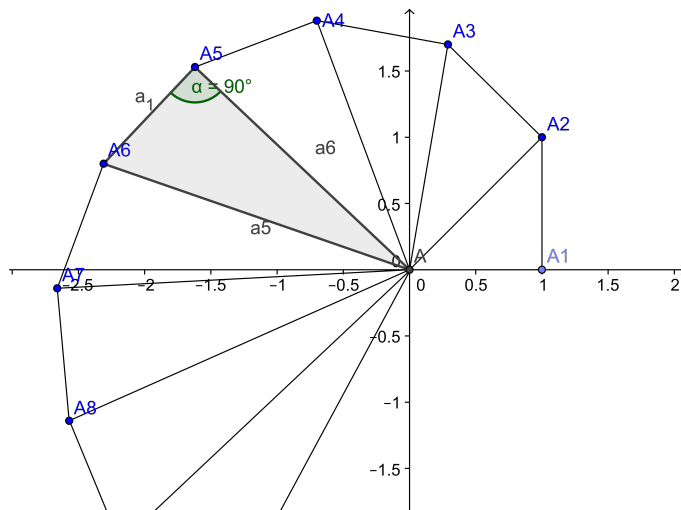
◦50◦ Un triangle équilatéral et un hexagone régulier ont le même périmètre ; dans quel rapport sont leurs aires ?

La construction de l'escargot de Pythagore est visible sur le dessin ci-contre.

Donnez un script `Python` pour en construire les segments avec le module `Turtle`.

Donnez la position du point A_n en coordonnées polaires. Montrez que module et "argument" divergent vers $+\infty$.

Que se passe-t-il si chaque longueur $A_n A_{n+1}$ ne vaut plus 1 mais $1/(n+1)$?



◦51◦

◦52◦

On pose $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ et $a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n$. Calculez a_n pour tout n .

On pose $b_0 = \alpha$, $b_1 = \beta$ et $b_{n+2} = b_{n+1} \cdot (b_n)^2$. Calculez b_n pour tout n .

On pourra considérer comme connue la suite de Fibonacci.