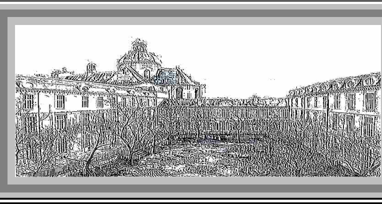
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi novembre
M.P.S.I.2



2023 2024

TD07

○0○ Calculez $\displaystyle\int_{u=0}^{1} \frac{du}{2+\sqrt{1-u^2}}$ (vous pourrez poser $u = \sin(\theta)$ et ensuite $t = \tan(\theta/2)$).

L'existence ne pose pas de problème, et le cours nous enjoint à poser $t = \sin(\theta)$ pour simplifier ensuite $\sqrt{1-\sin^2}$. Mais en fait, non, $t = \sin(\theta)$ est ambigu. On va poser $\theta = Arcsin(t)$ qui définit θ dans le bon intervalle pour avoir le cosinus positif.

L'intégrale devient $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\theta).d\theta}{2+\sqrt{1-\sin^2(\theta)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\theta).d\theta}{2+\cos(\theta)}$.

Notre ami Bioche n'a pas grand chose à dire, à part $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ ou plutôt $\theta = 2.Arctan(t)$.

L'intégrale devient cette fois $\displaystyle\int_0^1 \frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}.\frac{2.dt}{1+t^2}$ et même $\displaystyle 2.\int_0^1 \frac{1-t^2}{(3+t^2).(1+t^2)}.dt$.

On décompose $\dfrac{1-t^2}{(3+t^2).(1+t^2)}$ en éléments simples.

$$\frac{1-t^2}{(3+t^2).(1+t^2)} = \frac{a.t+b}{3+t^2} + \frac{c.t+d}{1+t^2}$$

Il faut déterminer quatre constantes, alors que le dénominateur est de degré 4, c'est cohérent.

On a besoin de $\dfrac{a.t+b}{3+t^2}$ et pas juste de $\dfrac{b}{3+t^2}$ car après tout, on doit pouvoir intégrer avec des termes en log.

On a besoin de $\dfrac{c.t+d}{1+t^2}$ et pas juste de $\dfrac{d}{1+t^2}$ car il va venir d'une décomposition sur $\mathbb{C}$en $\dfrac{\alpha}{t+i} + \dfrac{\beta}{t-i} = \dfrac{(\alpha+\beta).t+(-\alpha.i+\beta.i)}{1+t^2}$.

On décompose en se disant qu'en fait, on a juste $t^2 = T$:

$$\frac{1-t^2}{(3+t^2).(1+t^2)} = \frac{1-T}{(3+T).(1+T)} = \frac{-2}{3+T} + \frac{1}{1+T} = \frac{-2}{3+t^2} + \frac{1}{1+t^2}$$

On peut intégrer en arctangentes et trouver finalement $\boxed{\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2.\sqrt{3}.\pi}{9}}$

○1○ Calculez $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}$ (réduisez au dénominateur commun, c'est joli)..

On simplifie déjà

$$\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} = \frac{\sqrt{k^4+2.k^3+3.k^2+2.k+1}}{k.(k+1)} = \frac{k^2+k+1}{k.(k+1)}$$

Il ne reste plus qu'à décomposer en éléments simples :

$$\frac{k^2+k+1}{k.(k+1)} = \frac{(k^2+k)+1}{k.(k+1)} = 1 + \frac{1}{k.(k+1)} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

On peut sommer et télescoper : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} = n+1-\frac{1}{n+1}}$

○2○ Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(\theta)}.d\theta$ en posant $u = \sqrt{\tan(\theta)}$.

L'intégrale $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan(\theta)}.d\theta$ pose un petit problème en $\pi/2$, mais on va intégrer jusqu'à a et on le fera tendre vers $\frac{\pi}{2}$ ensuite (oui, par valeur inférieure).
On pose donc $u = \sqrt{\tan(\theta)}$ et $\theta = Arctan(u^2)$. On dérive : $du = \frac{2.u.du}{1+u^4}$.
On doit alors calculer $\int_0^{\alpha}\frac{2.u^2}{1+u^4}.du$.
Il faut décomposer en éléments simples :

$$1+X^4 = X^4+2.X^2+1-2.X^2 = (X^2+1)^2-(\sqrt{2}.X)^2 = (X^2-\sqrt{2}.X+1).(X^2+\sqrt{2}.X+1)$$

On doit donc trouver quatre constantes : $\frac{2.X^2}{X^4+1} = \frac{a.X+b}{X^2-\sqrt{2}.X+1}+\frac{a'.X+b'}{X^2+\sqrt{2}.X+1}$.
Il n'est pas absurde de réduire au dénominateur commun et résoudre le système :

$$\frac{2.X^2}{X^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\Big(\frac{X}{X^2-\sqrt{2}.X+1}-\frac{X}{X^2+\sqrt{2}.X+1}\Big)$$

On intègre ensuite en créant artificiellement les logarithmes :

$$\frac{2.X^2}{X^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}.\Big(\frac{2.X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}.X+1}-\frac{2.X+\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}.X+1}\Big)+\frac{1}{4}.\Big(\frac{1}{X^2-\sqrt{2}.X+1}+\frac{1}{X^2+\sqrt{2}.X+1}\Big)$$

$$\frac{2.X^2}{X^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}.\Big(\frac{2.X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}.X+1}-\frac{2.X+\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}.X+1}\Big)+\frac{1}{4}.\Big(\frac{1}{\Big(X-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{\Big(X+\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^2+\frac{1}{2}}\Big)$$

$$\frac{2.X^2}{X^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}.\Big(\frac{2.X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}.X+1}-\frac{2.X+\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}.X+1}\Big)+\frac{1}{4}.\Big(\frac{2}{\Big(2.X-\sqrt{2}\Big)^2+1}+\frac{2}{\Big(2.X+\sqrt{2}\Big)^2+1}\Big)$$

Entre 0 et l'infini, les termes en logarithmes se simplifient ensemble. les termes en arctangente s'accumulent et il reste

$$\boxed{\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan(\theta)}.d\theta = \int_0^{+\infty}\frac{2.t^2}{1+t^4}.dt = \frac{\pi.\sqrt{2}}{2}}$$

∘3∘

L''application f prend un rationnel x, écrit son écriture décimale et remplace tous les 5 par des 4, et le remet sous forme rationnelle.
Calculez $f\Big(\frac{1}{2}\Big)$, $f\Big(\frac{1}{4}\Big)$, $f\Big(\frac{17}{14}\Big)$. Combien l'équation $f(x) = \frac{73}{495}$ a-t-elle de solutions ?
Combien l'équation $f(x) = \frac{541}{990}$ a-t-elle de solutions ?

Quand il n'y a pas de 5 à modifier, on ne fait rien...

x	écriture décimale	image décimale	$f(x)$	
$\frac{1}{2}$	$0,5$	$0,4$	$\frac{4}{10}$	$=\frac{2}{5}$
$\frac{1}{4}$	$0,25$	$0,24$	$\frac{24}{100}$	$=\frac{6}{25}$
$\frac{17}{14}$	$1,2142857\overline{142857}\dots$	$1,2142847\overline{142847}\dots$		

L'écriture $1,2142857\overline{142857}\dots$ signifie que le motif 142857 se répète.
C'est le propre des rationnels. Une écriture périodique à partir d'un certain rang.
En fait, on pose la division, et dès qu'on retombe sur un reste déjà croisé, on sait que la boucle se met en place :

$$\begin{array}{lllllllll|llllllll}
\mathbf{1} & \mathbf{7} & & & & & & & & \mathbf{1} & \mathbf{4} & & & & & & \\
\cline{10-17}
 & 3 & 0 & & & & & & & 1, & 2 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 \\
 & & \mathbf{2} & 0 & & & & & & & & & & & & & \\
 & \nearrow & & 6 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 4 & 0 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 2 & 0 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 8 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \mathbf{2}\ \leftarrow & & & & & & & &
\end{array}$$

On vérifie en posant $x = 1,2142847\overline{142847}\dots$:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 10^6 & \times & x & = & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5, & 7 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & \dots \\ & & x & = & & & & & & & 1, & 2 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & \dots \\ difference & & & = & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 8 & 4, & 5 \end{array}$$

On déduit $(10^6 - 1).x = 1214283,5$.

On divise : $x = \dfrac{1214284,5}{999999} = \dfrac{12142845}{9999990} = \dfrac{17}{14}$ en simplifiant par $3^3.5.11.13.37$ (mais quelle horreur).

On remplace tous les 5 par des 4.

$f(x) = 1,2142847\overline{142847}\dots$:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 10^6 & \times & f(x) & = & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 8 & 4, & 7 & 1 & 4 & 2 & 8 & 4 & 7 & \dots \\ & & f(x) & = & & & & & & & 1, & 2 & 1 & 4 & 2 & 8 & 4 & 7 & \dots \\ difference & & & = & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 8 & 3, & 5 \end{array}$$

On divise : $x = \dfrac{1214283,5}{999999} = \dfrac{12142835}{9999990} = \dfrac{2428567}{1999998}$ et c'est laid.

On veut ensuite arriver à $f(x) = \dfrac{73}{495}$.

On traduit : $f(x) = 0,1474747\dots$ avec un 47 qui se répète.

De quel nombre ceci peut il venir sachant qu'on a transformé les 5 en 4.

L'idée naturelle est de dire : d'un seul : $x = 0,1\overline{57}5757\dots$ (c'est $\dfrac{26}{165}$).

Mais en fait il y en a d'autres, comme $0,147\overline{57}57\dots$ où le motif périodique 57 ne surgit qu'à la quatrième décimale.

Et comme on peut garder un nombre fini quelconque de 5 avant de commencer le motif répétitif, il y a une infinité de solutions.

On note qu'on a même aussi la solution $x = \dfrac{73}{495}$ qui ne contient aucun 5 et tout de suite des 4.

$f(x) = \dfrac{541}{990}$ c'est du même type.

◦4◦

♣ On définit φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $\varphi(2^a.3^b.5^c.7^d.11^e\dots) = 2^{-a}.3^b.5^c.7^d.11^e\dots$ et $\varphi(0) = 0$ puis on définit la relation $\trianglelefteq$ par $a \trianglelefteq b \Leftrightarrow \varphi(a) \leqslant \varphi(b)$.
Montrez que c'est une relation d'ordre et que 0 en est le plus petit élément.
Montrez que la suite $(n!)$ n'est ni croissante ni décroissante pour $\trianglelefteq$.
Montrez que la suite (p_n) des nombres premiers est croissante.
Montrez : $\forall(a, b, c),\ a \trianglelefteq b \Rightarrow a.c \trianglelefteq b.c$.
A-t-on $\forall(a, b, c),\ a \trianglelefteq b \Rightarrow a + c \trianglelefteq b + c$.
Un entier peut il être plus petit que tous ses diviseurs ?
Combien y a-t-il d'entiers entre 2020 et 2021 ?

φ transforme les entiers en rationnels, en changeant la valeur de l'exposant de 2.

Par exemple $\varphi(12) = \dfrac{3}{4}$ et $\varphi(120) = \dfrac{3.5}{8}$.

Une fois donnés des entiers, on calcule leurs images, on les trie pour l'ordre usuel, et voilà nos entiers triés pour notre ordre,si c'en est bien un.

A titre d'exemple, on calcule :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\varphi(n)$	0	1	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{4}$	5	$\frac{3}{2}$	7	$\frac{1}{8}$	9	$\frac{5}{2}$	11	$\frac{3}{4}$	13	$\frac{7}{2}$	15	$\frac{1}{16}$	17

Puis on trie

n	0	16	8	4	2	12	1	6	10	3	14	5	7	9	11	13	15	17
$\varphi(n)$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	5	7	9	11	13	15	17

Et voilà le travail :

n	0	16	8	4	2	12	1	6	10	3	14	5	7	9	11	13	15	17

C'est un peu n'importe quoi. Mais on devine déjà des choses.

A compléter.

◦5◦

♡ Pour tout n, on pose $I_n = \int_0^1 t^n.e^{-t}.dt$. calculez I_0, I_1 et I_2.
♡ Montrez qu'il existe deux suites d'entiers naturels (a_n) et (b_n) vérifiant $I_n = a_n + b_n.e^{-1}$ (exprimez a_{n+1} et b_{n+1} à l'aide de $a_n$et b_n).
♡Montrez pour tout n : $0 < I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ (surtout pas en calculant l'intégrale, mais en la majorant par une intégrale plus simple, c'est ça l'esprit des maths, on réfléchit avant de calculer, alors que dans les autres matières on vous demande de calculer et réfléchir en même temps).
On suppose que e est un rationnel, de la forme $\dfrac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux.
Montrez alors $\forall(a,\ b) \in \mathbb{Z}^2,\ \left(|a.e+b| < \dfrac{1}{q}\right) \Rightarrow (a.e+b=0)$.
Concluez : e est irrationnel.

$I_0 = \int_0^1 t^0.e^{-t}.dt$	$I_1 = \int_0^1 t^1.e^{-t}.dt$	$I_2 = \int_0^1 t^2.e^{-t}.dt$	$I_3 = \int_0^1 t^3.e^{-t}.dt$
$1 - e^{-1}$	$1 - 2.e^{-1}$	$2 - 5.e^{-1}$	$6 - 16.e^{-1}$
$a_0 = 1$ et $b_0 = -1$	$a_1 = 1$ et $b_1 = -2$	$a_2 = 2$ et $b_2 = -5$	$a_3 = 6$ et $b_3 = -16$

Ce sont des calculs simples, par parties. En D.S., ils permettraient de gagner des points sans faire de gros effort de réflexion.

On calcule $I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1}.e^{-t}.dt = [-t^{n+1}.e^{-t}]_{t=0}^1 + (n+1).\int_0^1 t^n.e^{-t}.dt$

t^{n+1}	$\hookrightarrow$	$(n+1).t^n$
e^{-t}	$\hookleftarrow$	$-e^{-t}$

On a donc $I_{n+1} = -e^{-1} + (n+1).I_n$.

Supposons pour un n quelconque donné qu'on a bien $I_n = a_n + b_n.e^{-1}$.
On a alors $I_{n+1} = (n+1).a_n + ((n+1).b_n - 1).e^{-1}$.
On pose $a_{n+1} = (n+1).a_n$ et $b_{n+1} = -1 + (n+1).b_n$.
Ceci définit deux nouveaux entiers, et on a alors $I_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}.e^{-1}$.
On a prouvé l'existence des deux suites, et la formule.

Supposons que e soit un rationnel, de la forme $\dfrac{p}{q}$.
Alors, tous les I_ns'écrivent $\dfrac{q.a_{n+1} + b_{n+1}.p}{p}$. Ce sont es rationnels, de dénominateur q (ou peut être moins en cas de simplification).

On encadre l'intégrale, non pas en la calculant, mais en la voyant comme une aire.
Déjà, la fonction intégrée est positive : I_n est positive.

Ensuite, pour tout t positif, on a $t^n.e^{-t} \leqslant t^n$ puisque t est positif.
On intègre de 0 à 1 : $I_n \leqslant \int_0^1 t^n.dt = \dfrac{1}{n+1}$.

La suite d'intégrales tend vers 0.

Si on prend n égal à p (numérateur de e qui est peut être très grand, mais qui existe si on a supposé e rationnel).
On a alors $0 < a_p + b_p.e^{-1} = \frac{p.a_p+q.b_p}{p} = I_p < \frac{1}{p+1}$.
On multiplie par p : $0 < p^2.a_p + q.p.b_p < \frac{p}{p+1} < 1$.
Le nombre $p^2.a_p + q.p.b_p$ est un entier. Strictement entre 0 et 1.
Pas possible...

◦6◦

Sachant $a + b.\sqrt[3]{5} + c.\sqrt[3]{25} = \dfrac{1}{1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}$ calculez la somme des trois rationnels a, b et c.

On part d'un lot de deux informations : $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}} = a + b.\sqrt[3]{5} + c.\sqrt[3]{25}$
a, b et c sont trois rationnels
(ah oui, il faut tout lire dans l'énoncé).
On effectue un produit en croix *(plutôt que de chasser les dénominateurs par conjugaison)*.
$(1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}).(a + b.\sqrt[3]{5} + c.\sqrt[3]{25}) = 1$

	a	$+b.\sqrt[3]{5}$	$+c.\sqrt[3]{25}$
1	a	$+b.\sqrt[3]{5}$	$+c.\sqrt[3]{25}$
$+\sqrt[3]{5}$	$+a.\sqrt[3]{5}$	$+b.\sqrt[3]{25}$	$+c.5$
$+\sqrt[3]{25}$	$+a.\sqrt[3]{25}$	$+b.5$	$+c.5.\sqrt[3]{5}$

On développe et regroupe
(sachant $\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{25}=5$, $\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{25}$ et $\sqrt[3]{25}.\sqrt[3]{25}=5.\sqrt[3]{5}$) :
$(a+5.b+5.c).1+(a+b+5.c).\sqrt[3]{5}+(a+b+c).\sqrt[3]{25}=1$

On identifie : $\begin{array}{rrrcl} a & +5.b & +5.c & = & 1 \\ a & +b & +5.c & = & 0 \\ a & +b & +c & = & 0 \end{array}$.

On résout ce système par exemple en inversant la matrice.

Ou par combinaisons : $\begin{array}{rrrcll} a & +5.b & +5.c & = & 1 & (a) \\ a & +b & +5.c & = & 0 & (b) \\ a & +b & +c & = & 0 & (c) \end{array}$ puis $\begin{array}{rrrcll} a & +5.b & +5.c & = & 1 & (a) \\ a & +b & +5.c & = & 0 & (b) \\ & 4.b & +4.c & = & 1 & (a)-(c) \end{array}$

puis $\begin{array}{rrrcll} a & & & = & -1/4 & (a)-5.(c') \\ a & +b & +5.c & = & 0 & (b) \\ & b & +c & = & 1/4 & (c') \end{array}$ et même $\begin{array}{rrrcll} a & & & = & -1/4 & (a') \\ & b & +5.c & = & 1/4 & (b)-(a') \\ & b & +c & = & 1/4 & (c') \end{array}$

et enfin $\begin{array}{rrrcll} a & & & = & -1/4 & (a') \\ & -4.b & & = & -1/4 & (b')-5.(c') \\ & b & +c & = & 1/4 & (c') \end{array}$. Bref : $a=-\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{4}$ et $c=0$.

La somme $a+b+c$ est nulle ! Cela dit, la troisième ligne du système l'offrait.

Il reste une ambigüité : pouvait on identifier ?
La formule $\alpha+\beta.\sqrt[3]{5}+\gamma.\sqrt[3]{25}=0$ avec α, β et γ rationnels implique-t-elle $\alpha=\beta=\gamma=0$?

Ce dont on est sûr : $(\alpha=\beta=\gamma=0)\Rightarrow(\alpha+\beta.\sqrt[3]{5}+\gamma.\sqrt[3]{25}=0)$.
Mais l'autre sens ?

Rappel : *Par exemple* $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}^2,\ (\alpha+\beta.\sqrt{5}=0)\Rightarrow(\alpha=\beta=0)$
$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}^2,\ (\alpha+\beta.\pi=0)\Rightarrow(\alpha=\beta=0)$
$(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ (\alpha+\beta.\sqrt{5}=0)\ n'implique\ pas\ (\alpha=\beta=0)$
$(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}^2,\ (\alpha+\beta.\dfrac{2}{3}=0)\ n'implique\ pas\ (\alpha=\beta=0)$

Mais $\sqrt[3]{5}$ est quand même irrationnel. Et $\sqrt[3]{25}$ aussi.
On verra plus tard qu'ils forment une famille libre dans $(\mathbb{R},+,.)$ vu comme $\mathbb{Q}$−espace vectoriel.

◦7◦

♡ Pour tout n, on pose $a_n=(1+\sqrt{3})^{2.n+1}$ et $b_n=(1-\sqrt{3})^{2.n+1}$.
a - Montrez : $0\geqslant b_n>-1$.
On pose $S_n=a_n+b_n$ pour tout n.
b - Montrez que la suite (S_n) est une suite d'entiers et vérifie $\forall n,\ S_{n+2}=8.S_{n+1}-4.S_n$.
c - Montrez que S_n est toujours divisible par 2^{n+1}.
d - Montrez : $S_n\leqslant a_n<S_n+1$.
e - Déduisez que la partie entière de a_n est toujours divisible par 2^{n+1}.

a - $1-\sqrt{3}$ est négatif. On l'élève à une puissance impaire. Il reste impair.
$\sqrt{3}-1$ est entre 0 et 1. On l'élève à une puissance positive. Il reste entre 0 et 1. On remet le signe moins, c'est bon.

---

b - Que chaque S_n soit entier ne saute pas aux yeux.

Ah oui, tiens, ça fait partie de la question ! Entier.
Combien auraient perdu des points là dessus ?
Et combien d'élèves seraient passés devant vous aux concours ?

Mais changeons l'ordre. Pour n donné, calculons S_{n+2} et $8.S_{n+1}-4.S_n$ en factorisant $a_n$et b_n :

$$S_{n+2}=(1+\sqrt{3})^{2.n+5}+(1-\sqrt{3})^{2.n+5}=(1+\sqrt{3})^4.(1+\sqrt{3})^{2.n+1}+(1-\sqrt{3})^4.(1-\sqrt{3})^{2.n+1}$$

On simplifie $S_{n+2}=(28+16.\sqrt{3}).(1+\sqrt{3})^{2.n+1}+(28-16.\sqrt{3}).(1-\sqrt{3})^{2.n+1}$

De même $\begin{array}{rclllll} -4.S_n & = & -4. & (1+\sqrt{3})^{2.n+1} & -4. & (1-\sqrt{3})^{2.n+1} \\ S_{n+1} & = & (4+2.\sqrt{3}). & (1+\sqrt{3})^{2.n+1} & +(4-2.\sqrt{3}). & (1-\sqrt{3})^{2.n+1} \\ 8.S_{n+1} & = & (32+16.\sqrt{3}). & (1+\sqrt{3})^{2.n+1} & +(32-16.\sqrt{3}). & (1-\sqrt{3})^{2.n+1} \end{array}$

On compare, c'est bon. La relation $S_{n+2}=8.S_{n+1}-4.S_n$ est vraie pour tout n.

Et s'il vous plait, sans récurrence.
C'est ensuite que ceci servira à des récurrences.
On évite le réflexe « entier n donc récurrence ».

Maintenant, on calcule les premiers : $S_0 = 2$ et $S_1 = 20$.
Les deux premiers sont des entiers.
Et ensuite, la formule $S_2 = 8.S_1 - 4.S_0$ dit que S_2est entier.
Et de proche en proche, chaque S_k est un entier.

C'est là qu'il y a une récurrence. Et la formule liant S_{n+2} et S_{n+1} et S_n est celle qui permet à la récurrence d'avancer.

---

c - La divisibilité par 2^{n+1} va se démontrer aussi par récurrence.
Il faut montrer que pour tout n, S_ns'écrit $2^{n+1}.s_n$ pour un entier s_n.
C'est à vus de prendre l'initiative de l'écriture et de l'existence de s_n.
On initialise : $S_0 = 2 = 2^{0+1}.1$ et $S_1 = 20 = 2^{1+1}.5$: $s_0 = 1$ et $s_1 = 5$.

On se donne n et on suppose $S_n = 2^{n+1}.s_n$ et $S_{n+1} = 2^{n+2}.s_{n+1}$.
On calcule : $S_{n+2} = 8.S_{n+1} - 4.S_n = 2^{n+5}.s_{n+1} - 2^{n+3}.s_n$.
On factorise : $S_{n+2} = 2^{n+3}.(4.s_{n+1} - s_n)$.
On décide de poser $s_{n+2} = 4.s_{n+1} - s_n$.
C'est un entier. La propriété est héréditaire.

---

d - La formule $S_n \leqslant a_n < S_n + 1$ se lit aussi $a_n + b_n \leqslant a_n < a_n + b_n + 1$.
C'est donc juste l'encadrement du début sur b_n.

---

e - a_n est coincé entre un entier (S_n) et le suivant $(1 + S_n)$.
Sa partie entière est donc S_n. Et elle est divisible par 2^{n+1}.
A titre d'exemple : a_7 vaut 3526400.00929 *à* 10^{-5}. *Sa partie entière vaut* 3526400 *et c'est* 2^8.13775.

◦8◦

♡ Combien l'équation $\cos^2(x) = 2.\cos(x) + 1$ a-t-elle de solutions dans $[0,\ 4.\pi]$? Quelle est la somme de ces solutions ?
Même question avec $\cos^2(x) = 4.\cos(x) + 6$.
Même question avec $6.\cos^2(x) = 4.\cos(x) + 1$.

◦9◦

Comparez l'action de ces quatre scripts pour $n = 5$:

```
def Scooby(n) :
....a, b = 1, 1
....for k in range(n) :
........a, b = b, a+b
........return(a, b)
```

```
def ScoobyDoo(n) :
....a, b = 1, 1
....for k in range(n) :
........a, b = b, a+b
....return(a, b)
```

```
def ScoobyDooBi(n) :
....a, b = 1, 1
....for k in range(n) :
........a, b = b, a+b
....return(a)
....return(b)
```

```
def ScoobyDooBiDoo(n) :
....a, b = 1, 1
....for k in range(n) :
........a = b
........b = a+b
.....return(a, b)
```

`Scooby(n)` a un défaut : la position du `return`.
Il est dans la boucle.
`n=5` ne se sert à rien.
Dès `k=0`, on sort.
`0` et `b` valent `1` et `1` avant d'entrer dans la boucle, ils sont modifiés (`1` et `2`).
On sort alors tout de suite, et on retourne le couple $(1,\ 2)$.

On notera que `Scooby(0)` *ne retournera rien.*

`ScoobyDo(n)` est une vraie procédure qui a deux variables `a` et `b` qu'elle modifie au fil de la boucle, et finit par retourner une foisclose la boucle `for`.

	avant l'instruction `a, b = b, a+b`		après l'instruction `a, b = b, a+b`	
k	a	b	a	b
0	1	1	1	2
1	1	2	2	3
2	2	3	3	5
3	3	5	5	8
4	5	8	8	13

`k` s'arrête avant d'atteindre `n=5`.
On retourne le couple $(8,\ 13)$ (oui, c'est la suite de Fibonacci).

`ScoobyDoBi(5)` fait les mêmes calculs que `Scoobydo(5)`.
Mais il ne retourne que `a`.
L'instruction `return(b)` est après le premier `return(a)`.
Elle ne sera jamais exécutée.
Le programme retourne donc juste 8.

D'ailleurs, mon éditeur interactif Python refuse ScoobyDooBi.
Il valide la fonction dès le premier return.

`ScoobyDoBiDoo(n)` commet une erreur en ne faisant pas une affectation simulatanée. Suivons son exécution pas à pas.

	avant l'instruction `a = b`		avant l'instruction `b = a+b`		après l'instruction `b = a+b`	
k	a	b	a	b	a	b
0	1	1	1	1	1	2
1	1	2	2	2	2	4
2	2	4	4	4	4	8
3	4	8	8	8	8	16
4	8	16	16	16	16	32

Ce n'est plus Fibonacci.
C'est une suite de puissances de 2.

∘10∘ Montrez $Arctan\Big(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\Big) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{Arcsin(x)}{2}$ pour tout réel x de $[-1,\ 1[$.

Pour x entre -1 et 1, $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$existe.
Pour comparer ces deux fonctions de x, on peut démontrer que la différence est nulle.
On crée $x \longmapsto Arctan\Big(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\Big) - \dfrac{Arcsin(x)}{2}$ qu'on dérive.
Sa dérivée est nulle (tous calculs faits). Cette application est constante sur l'intervalle $[-1,\ 1[$.

$$\frac{\dfrac{2}{(1-x)^2}}{2.\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}.\frac{1}{1+\dfrac{1+x}{1-x}} - \frac{1}{2.\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Il suffit de la calculer en 0 pour trouver sa valeur $Arctan\Big(\sqrt{\dfrac{1+0}{1-0}}\Big) - \dfrac{Arcsin(0)}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

On a donc $x \longmapsto Arctan\Big(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\Big) - \dfrac{Arcsin(x)}{2} = \dfrac{\pi}{4}$ pour tout x.

Autre idée. On prend x entre -1 et 1.
On pose $\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{Arcsin(x)}{2}$. On a alors $Arcsin(x) = 2.\theta - \dfrac{\pi}{2}$ puis $x = \sin\Big(2.\theta - \dfrac{\pi}{2}\Big)$ et enfin $x = -\cos(2.\theta)$.
On calcule alors

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{\frac{1-\cos(2.\theta)}{1+\cos(2.\theta)}} = \sqrt{\frac{2.\sin^2(\theta)}{2.\cos^2(\theta)}} = \sqrt{\tan^2(\theta)} = |\tan(\theta)|$$

On a même $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \tan(\theta)$ car θ est entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ $\Big(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi/2}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{Arcsin(x)}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi/2}{2}\Big)$.

On en déduit $Arctan\Big(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\Big)=\theta$ car θ est dans le bon intervalle.

Je vous laisse trouver d'autres preuves.

∘11∘ ♡ (a_n) et (b_n) sont les suites $\forall n,\ a_n=4^n-3.(-1)^n$ et $\forall n,\ b_n=-4^{n+1}+5.(-1)^n$.
Trouvez la matrice M vérifiant $M.\begin{pmatrix} a_0 & a_1\\ b_0 & b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}$.
Vérifiez qu'on a alors $\begin{pmatrix} a_n\\ b_n\end{pmatrix}=M^n.\begin{pmatrix} a_0\\ b_0\end{pmatrix}$ (sans calculer M^n).

On calcule $a_0=-2$, $b_0=1$,, $a_1=7$ et $b_1=-21$ et même $a_2=13$ et $b_2=-59$.
On résout donc : $M.\begin{pmatrix} -2 & 7\\ 1 & -21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 13\\ -21 & -59\end{pmatrix}$.

Mais il suffit de multiplier à droite par la bonne matrice : $M=\begin{pmatrix} 7 & 13\\ -21 & -59\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 & 7\\ 1 & -21\end{pmatrix}^{-1}$

$$M=\begin{pmatrix} 7 & 13\\ -21 & -59\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -21 & -7\\ -1 & -2\end{pmatrix}.\frac{1}{35}$$
$$M=\frac{1}{7}.\begin{pmatrix} -32 & -15\\ 100 & 53\end{pmatrix}$$

On veut prouver $U_{n+1}=M.U_n$avec la notation simplifiée $U_n=\begin{pmatrix} a_n\\ b_n\end{pmatrix}$.

La présence d'un n et l'initialisation $M.\begin{pmatrix} a_0 & a_1\\ b_0 & b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}$ (séparable en $M.\begin{pmatrix} a_0 & a_1\\ b_0 & b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}$ et $M.\begin{pmatrix} a_0 & a_1\\ b_0 & b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}$) peut faire penser à une récurrence.
On va déjà prouver

$$7.\begin{pmatrix} 4^{n+1} & -3.(-1)^{n+1}\\ -4^{n+2} & +5.(-1)^{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -32 & -15\\ 100 & 53\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4^n & -3.(-1)^n\\ -4.4^n & +5.(-1)^n\end{pmatrix}$$

Il suffit de vérifier la première ligne pour les 4^n : $7.4=-32+4.15$
pour les $(-1)^n$: $-7.3=-32.(-3)+5.15$
la deuxième ligne pour les 4^n : $-7.16=100-4.53$
pour les $(-1)^n$: $-7.5=-3.100+5.53$
On a donc $U_{n+1}=M.U_n$.

Maintenant, par récurrence, on a $U_n=M^n.U_0$: initialisation faite
hérédité : si l'on a $M^n.U_0=U_n$ (hypothèse de rang n)
et aussi $U_{n+1}=M.U_n$
alors on a $U_{n+1}=M.M^n.U_0=M^{n+1}.U_0$
Mais sinon, autant parler de suite géométrique de raison à gauche M et de premier terme U_0.

Et si j'avais demandé de trouver M vérifiant $\begin{pmatrix} a_n\\ b_n\end{pmatrix}=M^n.\begin{pmatrix} a_0\\ b_0\end{pmatrix}$ pour tout n ?

On peut attaquer cette question comme un physicien.
Quatre inconnues, quatre équations, quatre litres de sueurs, quatre points à gagner.

$$\begin{pmatrix} 4.4^n & +3.(-1)^n\\ -16.4^n & -5.(-1)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4^n & -3.(-1)^n\\ -4.4^n & +5.(-1)^n\end{pmatrix}$$

puisque $4^{n+1}=4.4^n$ et $4^{n+2}=16.4^n$.

Remarque : *L'erreur à ne pas commettre ensuite est si on est matheux en plus d'être physicien, c'est de prétendre « on identifie ».*
ce n'est pas une identification, mais juste un « il suffit qu'on ait ».
En effet, nul ne demande $(\forall n,\ U_{n+1}=M.U_n)\Rightarrow(M=truc)$ *(sens « nécessaire », on identifie)*
mais juste
$(M=truc)\Rightarrow(\forall n,\ U_{n+1}=M.U_n)$ *(sens « suffisant », on propose).*
On ne part pas de ce qu'on demande pour arriver à autre chose.
Le but est d'arriver à ce qu'on demande $(\forall n,\ U_{n+1}=M.U_n)$

On propose donc les systèmes : $\begin{matrix} 4.\alpha & -4.\beta & = & 4 & pour & 4^n\\ -3.\alpha & +5.\beta & = & 3 & pour & (-1)^n\end{matrix}$ et $\begin{matrix} 4.\alpha & -4.\beta & = & -16 & pour & 4^n\\ -3.\alpha & +5.\beta & = & -5 & pour & (-1)^n\end{matrix}$

On trouve une solution (unique entre parenthèses).

Mais il y a l'approche du matheux.

On écrit ce qu'on peut : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4^n \\ (-1)^n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4^n \\ (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4^{n+1} \\ (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4^{n+1} \\ (-1)^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4^n \\ (-1)^n \end{pmatrix}$

Il ne reste qu'à imbriquer : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4^{n+1} \\ (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4^n \\ (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Et voilà : $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$

Je vous laisse vérifier.

Et je vous invite à noter que ceci diagonalise M en l'écrivant $P.D.P^{-1}$.

∘12∘ Retrouvez les coefficients du développement asymptotique : $\dfrac{n^3+3.n+2}{n^2+n+1} = a.n+b+\dfrac{c}{n}+\dfrac{d}{n^2}+o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}$.

$\dfrac{n^3+3.n+2}{n^2+n+1}$ est équivalent à n quand n tend vers l'infini.

On soustrait : $\dfrac{n^3+3.n+2}{n^2+n+1} - n = \dfrac{-n^2+2.n+1}{n^2+n+1}$. Ceci tend vers -1.

On soustrait -1 : $\dfrac{n^3+3.n+2}{n^2+n+1} - n + 1 = \dfrac{3.n+3}{n^2+n+1}$. Ceci est équivalent à $\dfrac{3}{n}$.

On soustrait $\dfrac{3}{n}$: $\dfrac{n^3+3.n+2}{n^2+n+1} - n + 1 - \dfrac{3}{n} = \dfrac{-3}{n.(n^2+n+1)}$. Ceci est équivalent à $\dfrac{-3}{n^3}$.

Oh, on est allé trop loin. On a $\dfrac{n^3+3.n+2}{n^2+n+1} - n + 1 - \dfrac{3}{n} = \dfrac{-3}{n.(n^2+n+1)} = o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}$.

On refait passer de l'autre côté $\boxed{\dfrac{n^3+3.n+2}{n^2+n+1} = n - 1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{0}{n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}}$

Autre méthode : on se dit que le développement doit exister :

$\dfrac{n^3+3.n+2}{n^2+n+1} = a.n+b+\dfrac{c}{n}+\dfrac{d}{n^2}+o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}$.

On effectue le produit en croix : $n^3+3.n+2 = \Big(n^2+n+1\Big).\Big(a.n+b+\dfrac{c}{n}+\dfrac{d}{n^2}+o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}\Big)$

On développe : $\begin{array}{lclllllll} n^3+3.n+2 & = & a.n^3 & +b.n^2 & +c.n & +d & +o(1) & & \\ & & & +a.n^2 & +b.n & +c & +d/n & +o(1/n) & \\ & & & & +a.n & +b & +c/n & +d/n^2 & +o(1/n^2) \end{array}$.

On regroupe et on laisse tomber ce qui est trop petit :

$n^3+3.n+2 \;=\; a.n^3 \;+(a+b).n^2 \;+(a+b+c).n \;+(b+c+d) \;+o(1)_{n\to+\infty}$.

On identifie : $\begin{array}{llllll} a & & & & = & 1 \\ a & +b & & & = & 0 \\ a & +b & +c & & = & 3 \\ & b & +c & +d & = & 2 \end{array}$. On résout : $a=1$, $b=-1$, $c=3$, $d=0$.

∘13∘ ♡ On pose $u_n = \dfrac{2.n^2+3.n+5}{n+4}$. Donnez un équivalent simple en $+\infty$ et donnez son développement asymptotique sous la forme $a.n+b+\dfrac{c}{n}+\dfrac{d}{n^2}+o(n^{-2})_{n\to+\infty}$.

L'équivalent pour commencer : $u_n \sim 2.n$.

La soustraction : $u_n - 2.n = \dfrac{-5.n+...}{n+4}$.

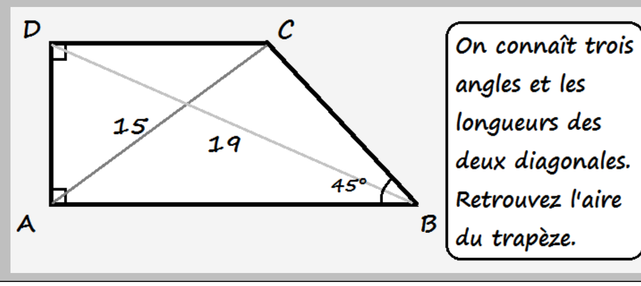
Le terme suivant : $u_n - 2.n = -5 + o(1)$.

Le développement pour l'instant : $u_n = 2.n - 5 + o(1)$.

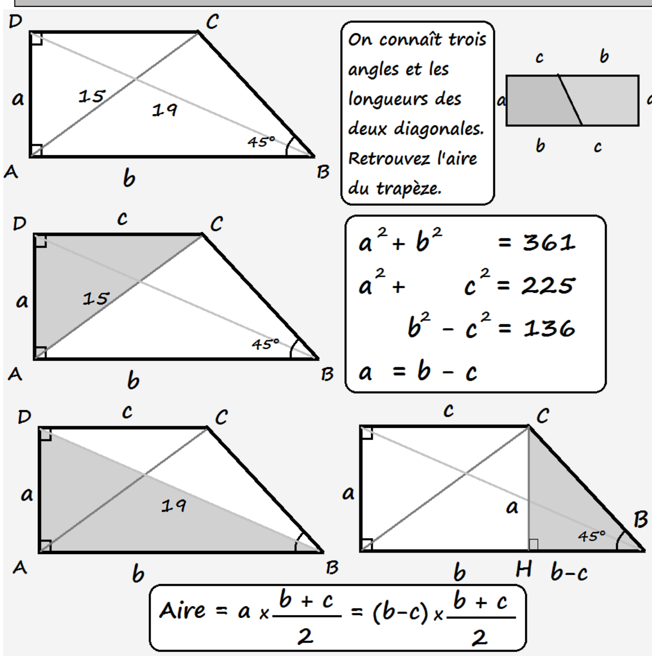
Calcul final :

$$u_n = 2.n - 5 + \frac{25}{n} - \frac{100}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)_{n\to+\infty}$$

Sur la trapèze semi-rectangle suivant, on connaît les longueurs des deux « diagonales » ($AC = 15$ et $BD = 19$) ; retrouvez son aire (piste : Pythagore deux fois, soustraction, petit triangle isocèle).



∘14∘ Quel est l'exposant de 13 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $\prod_{k=0}^{16}\binom{16}{k}$ et $\sum_{k=0}^{16}\binom{16}{k}$.



On commence par nommer a, b et c les longueurs des trois côtés deux à deux orthogonaux.
Dans le triangle rectangle (DAB), on a $a^2 + b^2 = 19^2$.
Dans le triangle rectangle (CDA), on a $a^2 + c^2 = 15^2$.
On soustrait : $(b - c).(b + c) = 136$.

Mais le demi-carré (CHB) (ou triangle rectangle iso-demi-sel) nous renseigne : $a = b - c$.

Or, l'aire d'un trapèze est « hauteur fois moyenne des bases ».
C'est donc ici $a.\frac{b+c}{2}$. Ce qui fait $(b-c).\frac{b+c}{2}$.
En regroupant $\boxed{Aire = 68}$ (unité ?)

Déjà, la somme $\sum_{k=0}^{n}\binom{16}{k}$ vaut 2^{16} (développement de $(1+1)^{16}$ par la formule du binôme). L'exposant de 13 est donc 0.

Regardons ensuite ce produit de $\frac{n!}{k!.(n-k)!}$:

$$\frac{16!}{16!.0!}.\frac{16!}{15!.1!}.\frac{16!}{14!.2!}.\frac{16!}{13!.3!}.\frac{16!}{12!.4!}.\frac{16!}{11!.5!}.\frac{16!}{10!.6!}.\frac{16!}{9!.7!}.\frac{16!}{8!.8!}.\frac{16!}{7!.9!}.\frac{16!}{6!.10!}.\frac{16!}{5!.11!}.\frac{16!}{4!.12!}.\frac{16!}{3!.13!}.\frac{16!}{2!.14!}.\frac{16!}{1!.15!}.\frac{16!}{0!.16!}$$

Dans cette énumération, ne regardons que les termes contenant un facteur 13 (et jamais plus de toutes façons) :

$$\frac{13}{13.1}.\frac{13}{13.1}.\frac{13}{13.1}.\frac{13}{13.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.1}.\frac{13}{1.13}.\frac{13}{1.13}.\frac{13}{1.13}.\frac{13}{1.13}$$

On compte : dix sept au numérateur
huit au dénominateur.
Notre produit contient exactement 17^9 (et c'est même $2^{49}.3^6.5^9.7^8.11^5.13^9$).

∘15∘ Résolvez $\cos(2.\theta) = 1 + \cos(\theta)$ d'inconnue réelle θ.

On transforme $\cos(2.\theta) = 1 + \cos(\theta)$ en $2.\cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2 = 0$.

On trouve deux solutions : $\cos(\theta) = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ et $\cos(\theta) = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$. On élimine la première *(un cosinus ne dépasse pas 1)*.

On vérifie quand même $-1 = \frac{1-\sqrt{25}}{4} \leqslant \frac{1-\sqrt{17}}{4} \leqslant \frac{1-\sqrt{16}}{4} = -\frac{3}{4}$.
On trouve cette fois un ensemble de solutions infini *(périodicité et parité)* :

$$\boxed{S_\theta = \Big\{ Arccos\Big(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\Big) + 2.k.\Pi \mid k \in \mathbb{Z},\ \varepsilon \in \{-1,\ 1\}\Big\}}$$

∘16∘ ♡♣ On pose $S=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$.
Citez les arguments qui permettent d'obtenir de ligne en ligne
$S=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n.(n+1)}$
$S=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n.(n+1)}\Big)$
$S=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n.(n+1)}\Big)$
$S=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=k}^{+\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\Big)$
$S=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}=1+S$
Le résultat final semble étrange ? Trouvez l'erreur.

$S=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n.(n+1)}$	on isole le terme $n=1$ on décale les indices $\frac{1}{n+1}$ pour n de 1 à l'infini on multiplie haut et bas par n
$S=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n.(n+1)}\Big)$	k est un compteur
$S=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n.(n+1)}\Big)$	on permute les sommes $1\leqslant k\leqslant n$
$S=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=k}^{+\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\Big)$	on décompose en éléments souples
$S=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{k}\Big)$	on télescope « à l'infini »
$S=1+S$	les variables sont muettes

L'erreur : on travaille sur quelquechose qui n'existe pas !
La somme S est en fait infinie.

∘17∘ Finalement, ce n'est pas un exercice, juste des formules pour obtenir 6 avec trois n et des symboles $+$, $\times$et autres (pour n de 0 à 10)

(	0	!+	0	!+	0	!) !	=	6
(	1	+	1	+	1	) !	=	6
	2	+	2	+	2		=	6
(	3	*	3	)-	3		=	6
$\sqrt{}$	4	$+\sqrt{}$	4	$+\sqrt{}$	4		=	6
	5	+	5	/	5		=	6
	6	$\times$	6	/	6		=	6
	7	-	7	/	7		=	6
(	8	$-\sqrt{}($	8	+	8	)) !	=	6
$\sqrt{}$	9	$+\sqrt{}$	9	$+\sqrt{}$	9		=	6
	10		10		10		=	6

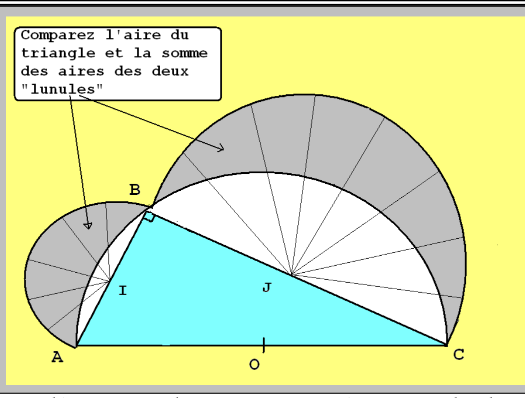
∘18∘ ♡ t est un réel fixé, θ est un réel de $]-\pi/2,\ \pi/2[$. Montrez : $\frac{1+i.\tan(\theta)}{1-i.\tan(\theta)}=e^{2.i.\theta}$.

Déterminez partie réelle et partie imaginaire de $\frac{1+i.t}{1-i.t}$ en utilisant la quantité conjuguée. Retrouvez les formules en arc moitié.

$$\frac{1+i.\tan(\theta)}{1-i.\tan(\theta)} = \frac{1+i.\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1-i.\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{\cos(\theta)+i.\sin(\theta)}{\cos(\theta)-i.\sin(\theta)} = \frac{e^{i.\theta}}{e^{-i.\theta}} = e^{2.i.\theta}.$$

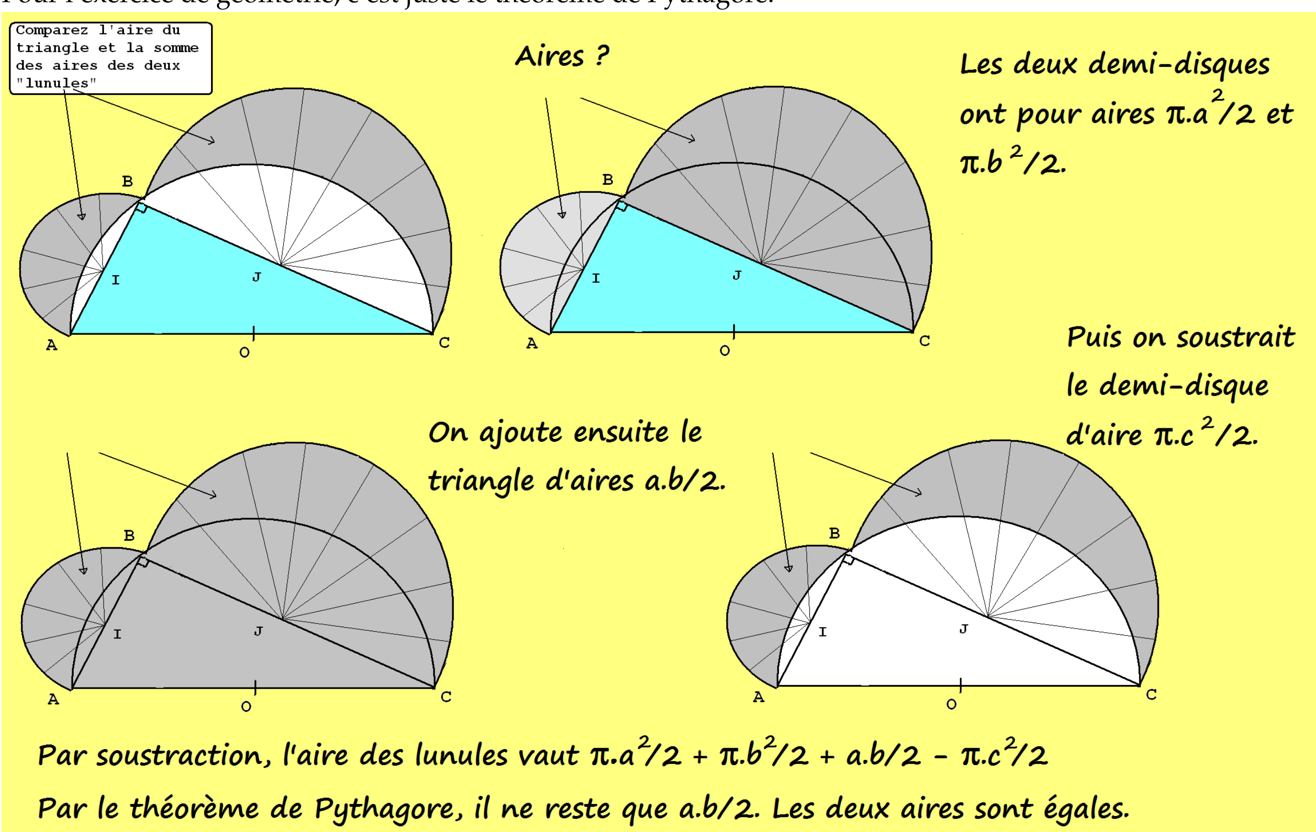
On a aussi $\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = \dfrac{(1+i.t)^2}{(1-i.t).(1+i.t)} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + i.\dfrac{2.t}{1+t^2}$.
On identifie partie réelle et partie imaginaire...

◦19◦ ♡ Déterminez le maximum de $x \longmapsto x.(a-x)$ sur $\mathbb{R}$. Montrez : $k.(2.n-k) \leqslant n^2$ pour tout k entre 0 et $2.n$. Déduisez : $(2.n)! \leqslant 2.n^{2.n}$.

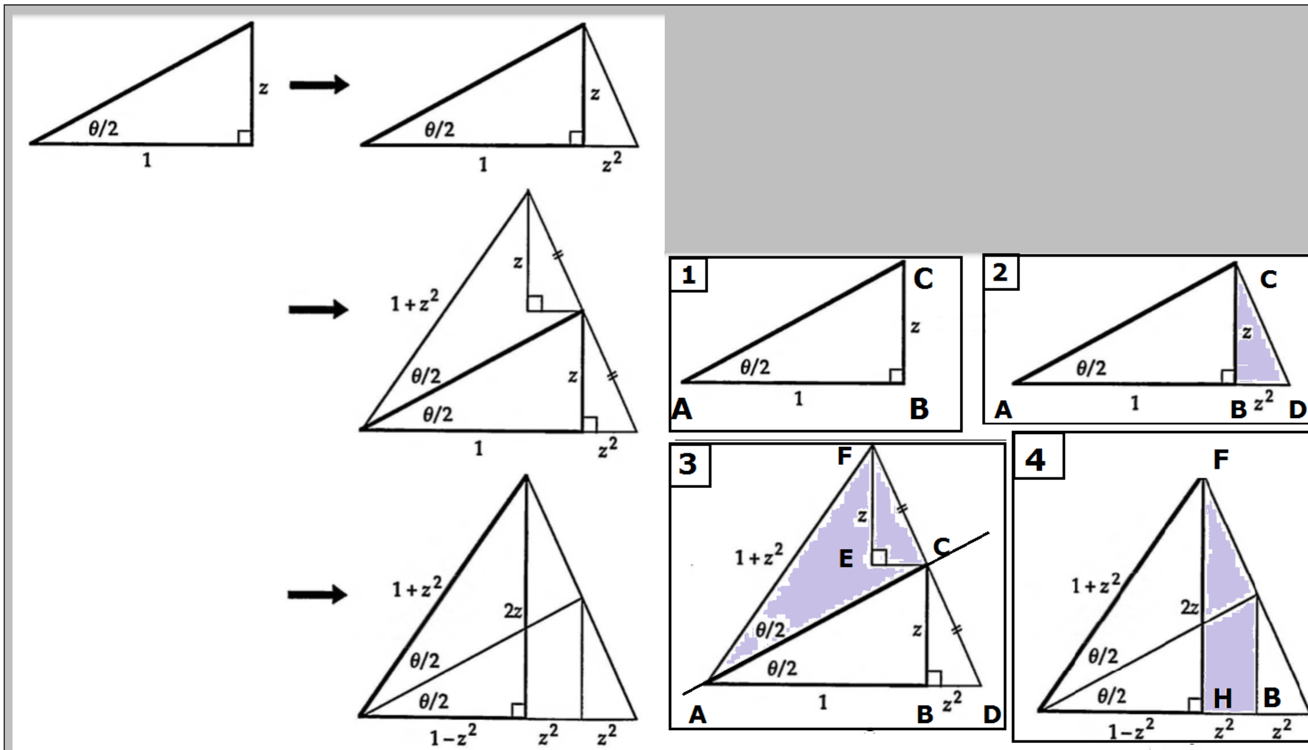
◦20◦ 

Existe-t-il un triangle rectangle à côtés entiers dont un des côtés mesure 2017 ?
Existe-t-il un triangle rectangle à côtés entiers dont le périmètre vaut 2017 ?
Existe-t-il un triangle rectangle à côtés entiers dont l'aire vaut 2017 ?
Construisez un triangle rectangle dont les côtés sont entiers, mais aussi la hauteur.
Quelles sont, entre 0 et 200 les aires possibles pour des triangles rectangles (c'est lassant, donnez un algorithme).
Comparez l'aire du triangle et la somme des aires des deux lunules.

Pour l'exercice de géométrie, c'est juste le théorème de Pythagore.



◦21◦



Quelles formules du cours prouve-t-on avec ces dessins ?

Ah, il y a quand même donc aussi une preuve purement géométrique des formules en arc moitié !

◦22◦

u et v sont deux applications de classe C^2 de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ *(deux fois dérivables, de plus u'' et v'' sont continues)*. Montrez : $\int_a^b u''.v = [u'.v - u.v'] + \int_a^b u.v''$.

Montrez sous hypothèse C^3 : $\int_a^b u^{(3)}v = [u''.v - u'.v' + u.v''] - \int_a^b u.v^{(3)}$.

Donnez la formule à l'ordre n *(et démontrez la)*.

On part de $\int_a^b u''.v = [u'.v]_a^b - \int_a^b u'.v'$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline u'' & \hookleftarrow & u' \\ \hline v & \hookrightarrow & v' \\ \hline\end{array}$ *puis on intègre* $\int_a^b u'.v'$ *en* $[u.v']_a^b - \int_a^b u.v''$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline u' & \hookleftarrow & u \\ \hline v' & \hookrightarrow & v'' \\ \hline\end{array}$

On peut recommencer.

Mais il y a plus intelligent.

On pose $w = u''.v - u'.v' + u.v''$.

On dérive : $w' = \begin{array}{llllll} (u''.v & & -u'.v' & & +u.v'')' & \\ u'''.v & +u''.v' & -u''.v' & -u'.v'' & +u'.v'' & +u.v''' \end{array}$

On simplifie : $w' = u'''.v + u.v'''$.

On intègre : $[w]_a^b = \int_a^b w' = \int_a^b (u'''.v + u.v''')$.

On bascule : $\int_a^b u^{(3)}v = [u''.v - u'.v' + u.v''] - \int_a^b u.v^{(3)}$

La formule est $\boxed{\int_a^b u^{(n+1)}v = [\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.u^{(n-k)}.v^{(k)}] + (-1)^n.\int_a^b u.v^{(n+1)}}$

On la prouve par récurrence.

Ou en dérivant $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.u^{(n-k)}.v^{(k)}$ *et en faisant passer de l'autre côté.*

∘23∘

	☻	☻	.
.	☹	☹	

Chaque jeton peut se déplacer d'une case horizontalement ou verticalement. Deux jetons ne peuvent pas occuper la même case. Trois non plus. Il faut échanger les les noirs et les blancs. Pour quelles valeurs de n existe-t-il une solution en n déplacements ?

Comme quatre pions doivent bouger, le nombre de déplacements est forcément au moins égal à 4.
Si on a une solution en n mouvements, alors on a une solution en $n+2$ mouvements.
En effet, il suffit de faire faire un aller retour à un pion avant de commencer

	☻	☻	...
...	☹	☹	

puis

	☻		☻
...	☹	☹	

puis retour à

	☻	☻	...
...	☹	☹	

et là on y va.
. Et ceci compte pour deux déplacements.
Si on trouve une solution en N coups, alors tous les entiers de la forme $N+2.p$ sont aussi solutions.
On notera que si on trouve deux solutions de parité différente, alors on aura tous les entiers à partir d'un certain rang.
Mais les solutions ont forcément un nombre pair de déplacements.
En effet, si on numérote les cases ainsi :

	0	1	0
0	1	0	

- au départ, les deux cases libres ont pour total 0
- à la fin, les deux cases libres ont pour même total 0
- à chaque déplacement, on libère une case d'une parité, et on comble une case de la parité opposée (un pion de case 1 va sur une case 0, ou alors un pion de case 0 va sur une case 1).
- il s'ensuit que si on a déplace $2.p+1$ pions, la somme des deux cases libres est impaire, on ne peut pas avoir gagné.

On élimine donc tous les entiers impairs, ainsi que 0, 2 et 4. sauf à être daltonien et affirmer : c'est bon pour $n=0$.
On montre qu'en six coups, ce n'est pas possible : un pion doit quitter une place pour aller dans un coin, et il est alors trop loin de sa destination.

	☻	☻	...
...	☹	☹	

	☻	...	☻
...	☹	☹	

	☻	☹	☻
...	☹	...	

	☻	☹	☻
...	...	☹	

	...	☹	☻
...	☻	☹	

	...	☹	☻
☻	...	☹	

	☹	...	☻
☻	...	☹	

	☹	☻	...
☻	...	☹	

	☹	☻	...
☻	☹	...	

	☹	...	...
☻	☹	☻	

	...	☹	...
☻	☹	☻	

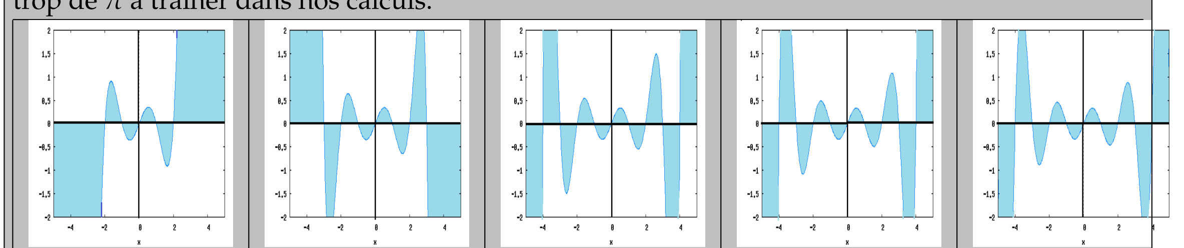
	☹	☹	...
☻		☻	

	☹	☹	...
...	☻	☻	

Cette solution en 12 déplacements convient.
Tous les entiers pairs plus grands que 12 conviennent.
Reste à trouver un argument pour éliminer 8 et 10.

∘24∘

L'objectif de ce4 problème est la formule $\boxed{\sin(\theta) = \theta.\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\theta^2}{k^2.\pi^2}\right)}$ démontrée *(à l'ancienne, c'est à dire pas avec toute la rigueur de preuve des convergences)* par Leonhard Euler. Disons qu'on va étudier avec rigueur le membre de droite de $\frac{\sin(\pi.x)}{\pi} = x.\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$ pour ne pas avoir trop de π à traîner dans nos calculs.



I∼0) Pour tout entier naturel N, on pose $\boxed{F_N(x) = x.\prod_{k=1}^{N}\Big(1-\frac{x^2}{k^2}\Big)}$

Soit x un réel positif. On note K l'entier naturel $[x]$. Montrez que $(F_N(x))_N$ est monotone à partir du rang K, de signe constant. Déduisez que $F_N(x))_N$ converge, vers une limite qu'on va noter $F(x)$ (et que l'on va déterminer plus tard).

I∼1) On définit ainsi sur $\mathbb{R}^+$ une application $x \longmapsto F(x)$. Montrez qu'elle se définit aussi sur $\mathbb{R}^-$ et qu'elle est impaire.

On se donne x et on considère $F_N(x) = x.\prod_{k=1}^{N}\Big(1-\frac{x^2}{k^2}\Big)$ avec N plus grand que K.

On va donc couper $F_N(x) = x.\prod_{k=1}^{K}\Big(1-\frac{x^2}{k^2}\Big).\prod_{k=K+1}^{N}\Big(1-\frac{x^2}{k^2}\Big)$.

Quelle est l'utilité de $k > K = [x]$? Dans le second produit $\prod_{k=K+1}^{N}\Big(1-\frac{x^2}{k^2}\Big)$, tous les termes sont positifs *((x/k) est positif plus petit que 1, son carré aussi)*.
Le signe de $F_N(x)$ est donc celui de $F_K(x)$.

Par exemple, pour $x = 3,4$, on a :
$F_5(x) = 3,4.\Big(1-(3,4)^2\Big).\Big(1-\frac{(3,4)^2}{4}\Big).\Big(1-\frac{(3,4)^2}{9}\Big).\Big(1-\frac{(3,4)^2}{16}\Big).\Big(1-\frac{(3,4)^2}{25}\Big)$ *et dans ce produit, les trois termes de* $\Big(1-(3,4)^2\Big).\Big(1-\frac{(3,4)^2}{4}\Big).\Big(1-\frac{(3,4)^2}{9}\Big)$ *sont négatifs. En revanche,* $\Big(1-\frac{(3,4)^2}{16}\Big)$ *et les suivants seront positifs.*

On étudie ensuite la monotonie en soustrayant :

$$F_{N+1}(x) - F_N(x) = \Big(1-\frac{x^2}{(N+1)^2}\Big).F_N(x) - F_N(x) = -\frac{x^2}{(N+1)^2}.F_N(x)$$

Cette différence est du signe de $-F_N(x)$ qui est d'ailleurs celui de $-F_K(x)$.
C'est toujours le même, la suite est monotone.

Soyons maintenant plus précis et étudions suivant le signe de $F_K(x)$:

	$F_K(x)$ positif	$F_K(x)$ négatif
$N > K$	$F_N(x)$ positif	$F_N(x)$ négatif
monotonie	suite décroissante	suite croissante
convergence	décroissante minorée par 0	croissante majorée par 0

Dans les deux cas, la suite $(F_N(x))_{N>K}$ converge. Pas forcément vers 0, comme on le verra par exemple avec $F(1/2)$.
Il reste à part le cas où $F_K(x)$ est déjà nul (x entier). Mais dans ce cas, la convergence est assurée.

Pour x négatif, on se contente de $F_N(-x) = -F_N(x)$ et on passe à la limite.
Non seulement, $F(x)$ existe pour x négatif, mais il coïncide avec $-F(-x)$. F est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire.

I∼2) Montrez que F est positive, majorée par 1sur $[0,\ 1]$.

On prend x juste entre 0 et 1. Dans $F_N(x)$, il y a x et des $\Big(1-\frac{x^2}{k^2}\Big)$.
Chacun de ces termes est positif, plus petit que 1.
Leur produit est positif, plus petit que 1.
Pour tout N, on a $0 \leqslant F_N(x) \leqslant 1$.
On passe à la limite : $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, l'application F est positive plus petite que 1 sur $[0,\ 1]$.

Par imparité, elle restera entre -1 et 1 sur $[-1,\ 1]$.
Elle ne parviendra pas à atteindre ce majorant 1, on verra que son maximum est $1/\pi$, atteint en 1.

I∼3) Montrez : $F_N(x).(x+N+1) = F_N(x+1).(x-N)$ pour tout couple $(N,\ x)$.

On se donne x et on prouve $F_N(x).(x+N+1) = F_N(x+1).(x-N)$ par récurrence sur N (prévenir sur qui porte la récurrence, il pourrait y avoir plusieurs variables).

Pour N égal à 0, on a $F_0(x) = x$, et $F_0(x+1) = x+1$.
On a bien $x.(x+0+1) = (x+1).(x-0)$.

Pour N égal à 1, on compare :

$F_1(x).(x+1+1)$	$F_1(x+1).(x-1)$
$\Big(x.(1-x).(1+x)\Big).(x+2)$	$\Big((x+1).(1-(x+1)).(1+(x+1)).(x-1)$

Supposons la relation correcte au rang N. On calcule au rang $N+1$:

$$F_{N+1}(x).(x+N+1+1) = \Big(F_N(x).\Big(1-\frac{x^2}{(N+1)^2}\Big)\Big).(x+N+2)$$

$$F_{N+1}(x).(x+N+2) = \frac{1}{(N+1)^2}.F_N(x).(N+1-x).(N+1+x).(x+N+2)$$

On regroupe $F_N(x).(N+1+x)$ qu'on remplace par $F_{N+1}(x).(x-N)$ par hypothèse de récurrence :

$$F_{N+1}(x).(x+N+2) = \frac{1}{(N+1)^2}.\Big(F_{N+1}(x).(x-N)\Big).(N+1-x).(x+N+2)$$

On arrange en jouant même sur les signes :

$$F_{N+1}(x).(x+N+2) = \frac{1}{(N+1)^2}.\Big(F_{N+1}(x).(N-x).(x+N+2)\Big).(x-(N+1))$$

On est en droit de se demander si $\frac{1}{(N+1)^2}.(N-x).(N+3-x)$ n'est pas le terme $\Big(1-\frac{(x+1)^2}{(N+1)^2}\Big)$ qui manque pour passer de $F_N(x+1)$ à $F_{N+1}(x+1)$.
On vérifie : $((N+1)^2-(x+1)^2) = ((N+1)-(x+1)).((N+1)+(x+1))$. C'est gagné.

On pouvait aussi trouver la formule sans récurrence en écrivant $F_N(x) = x.\prod_{k=1}^{n}\frac{(k-x).(k+x)}{k^2}$ *puis en décalant les indices.*

I∼4) Déduisez que F est périodique de période 2.

On va faire tendre N vers l'infini dans cette formule qu'on écrit plutôt $F_N(x).\frac{(x+N+1)}{(x-N)} = F_N(x+1)$ *(petite condition : dénominateur non nul ; mais même si x a le mauvais goût d'être entier, on prend N plus grand que x et c'est bon).*
On fait tendre N vers l'infini. Comme x est fixé, le quotient $\frac{(x+N+1)}{(x-N)}$ tend vers -1.
Comme F est la limite simple des applications F_N,
les deux termes $F_N(x)$ et $F_N(x+1)$ convergent : $\boxed{F(x+1) = -F(x)}$

C'est la relation $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$*, elle traduit des symétries centrales sur le graphe.*

On veut montrer que F est périodique de période 2. On calcule donc :

$$F(x+2) = F((x+1)+1) = -F(x+1) = -(-F(x)) = F(x)$$

en appliquant le résultat précédent à $x+1$ puis à x.
On reconnaît la périodicité.

I∼5) Déduisez que F est bornée sur $\mathbb{R}$.

Il suffit de regarder et borner F sur une période pour la borner sur tout $\mathbb{R}$, par périodicité.

I∼6) Juste parce que la question précédente m'y a fait penser, un exercice en passant, sans rapport avec la suite : soit φ une application paire telle que $x \longmapsto \varphi(x+1)$ soit impaire. Montrez que φ est périodique.

On traite donc ici un petit exercice. On suppose que φ est paire et $x \longmapsto \varphi(x+1)$.
On traduit : $\varphi(-x) = \varphi(x)$ et $f(-x) = -f(x)$ pour $f(x) = \varphi(x+1)$ et donc $f(-x) = \varphi(-x+1)$.
On reformule : $\varphi(-x+1) = -\varphi(x+1)$ et pour $-x$ à la place de x : $\varphi(x+1) = -\varphi(-x+1)$ (oui, c'est la même).

Ça ne ressemble pas à la périodicité. la période ne doit pas être 1. On va essayer 2.

$$f(x+2) = f((x+1)+1) = -\varphi(-(x+1)+1) = -\varphi(-x) = -\varphi(x)$$

On a utilisé la parité de φ en fin de ligne.
Ce n'est pas encore gagné. On continue.

$$(x+4) = \varphi((x+2)+2) = -\varphi(x+2)$$

On met les résultats bout à bout : $\varphi(x+4) = \varphi(x)$.

Une interprétation graphique avec des centres et axes de symétrie pouvait mettre sur la piste.

II∼0) Montrez que F est croissante sur $[0,\ 1/2]$ *(celui qui commence par "je dérive F" peut aller tout de suite cherche un emploi d'attaché parlementaire, on ne sait même pas si elle sera continue... alors, dérivable... et la forme de sa dérivée...).*

Pour la croissance, on ne va pas dériver, c'est trop lourd, vu le nombre de termes du produit. Et vu aussi le passage à la limite qui peut faire perdre la dérivabilité.
On oublie les réflexes de Terminable, et on en revient à la définition.

On se donne a plus petit que b, et on va montrer $F(a) \leqslant F(b)$.
Mais la présence de l'infini nous pousse à éviter les bêtises. On travaille à horizon fini N.
On se donne donc N et on compare $F_N(a)$ et $F_N(b)$

$a \leqslant b$	
$1-a^2 \leqslant 1-b^2$	
$1-\dfrac{a^2}{4} \leqslant 1-\dfrac{b^2}{4}$	
$\vdots$	
$1-\dfrac{a^2}{N^2} \leqslant 1-\dfrac{b^2}{N^2}$	
$F_N(a) \leqslant F_N(b)$	

Attention, si vous vous contentez de ce que j'ai écrit ici[a], vous avez perdu. Il manque un argument capital : toutes ces inégalités sont entre des réels positifs. Si on n'a pas cette garantie, on ne peut pas multiplier des inégalités membre à membre.

$-3 \leqslant 2$
$-5 \leqslant -1$
et donc $15 \leqslant -2$

a. judicieusement avec un tableau, mais je n'ose encore vous demander de rendre les choses lumineuses, je dois déjà me contenter qu'elles soient justes

On passe à la limite : $F(a) \leqslant F(b)$. F est croissante.

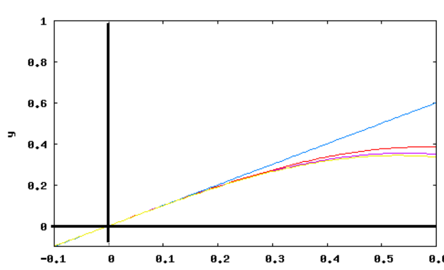
Pour montrer la croissance d'une application définie avec sa variable sous un signe somme ou sous un signe intégrale ou de manière tordue, revenez à la définition.

C'est bien parti que que F soit $x \longmapsto \dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi}$.

Cette preuve ne va pas du tout. Il faut que je trouve autre chose. Et je crois qu'on va devoir dériver F_N.
Et peut être même qu'on va dériver $\ln(F_N)$.

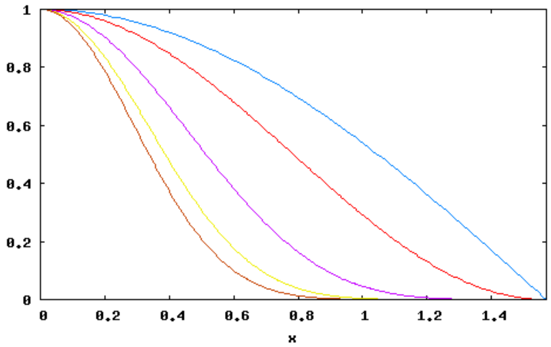
II∼1) Laquelle de ces phrases est correcte : "sur $[0,\ 1/2]$, (F_N) est une suite croissante d'applications décroissantes" "sur $[0,\ 1/2]$, (F_N) est une suite décroissante d'applications croissantes".

Chaque application $x \longmapsto F_n(x)$ est croissante sur $[0,\ 1/2]$, comme on vient de le voir.
Pour chaque x, la suite $N \longmapsto F_N(x)$ est positive décroissante (d'un terme au suivant, on multiplie par $\left(1-\dfrac{x^2}{(N+1)^2}\right)$.



On a donc une $\boxed{\text{suite décroissante d'applications croissantes}}$

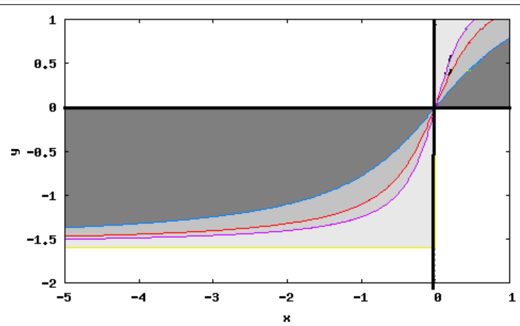
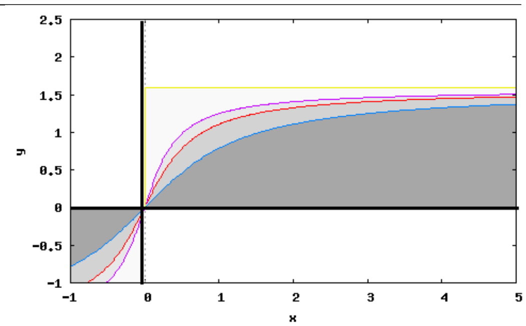
Comme quoi la mathématique n'est pas loin de la grammaire et vice versa. Il faut savoir qui s'accorde avec qui, une histoire de variable. Quand ce n'est pas aussi une histoire d'algèbre en linguistique.



Que serait une suite décroissante d'applications décroissantes ? Par exemple les $\cos^n$ qui vont servir plus loin, sur $[0,\ \pi/2]$.
Pour n fixé, $x \longmapsto \cos^n(x)$ décroît.
Pour x fixé, $n \longmapsto \cos^n(x)$ décroît (suite géométrique).

II∼2) Pour éviter de dire des bêtises sur les suites de fonctions et leur limite, montrez moi que $(x \longmapsto Arctan(n.x))_n$ est une suite d'applications continues dont la limite n'est plus continue.

Chaque application $x \longmapsto Arctan(n.x)$ (notée g_n) est continue, puisque l'arctangente l'est.
Passons à la limite, en discutant suivant x :

x	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
formule	$g_n(x) = Arctan(n.x)$ et $n.x \to_{n\to+\infty} -\infty$	$g_n(0) = 0$	$g_n(x) = Arctan(n.x)$ et $n.x \to_{n\to+\infty} +\infty$
limite	$g_\infty(x) = -\dfrac{\pi}{2}$	$g_\infty(0) = 0$	$g_\infty(x) = \dfrac{\pi}{2}$
			

Chaque g_n est continue, mais la limite g_∞ est une application discontinue en 0, elle y fait deux demi-sauts de hauteur $\pi/2$ (et un saut total de hauteur π.

Comme quoi il y a des choses qu'on perd par passage à la limite.
Mais est il si facile pour l'élève de construire des phrases au goût (faux) de théorème comme "cette application est continue car c'est une somme d'applications continues", alors qu'il s'agit d'une limite de sommes par exemple.

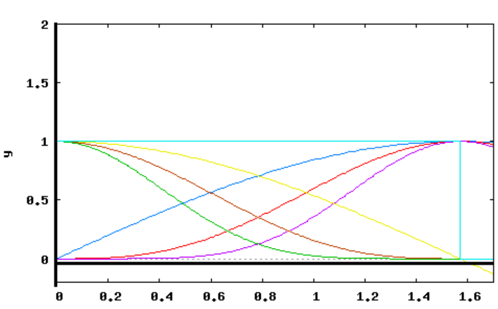
III∼0) On va calculer $F(1/2)$. Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t).dt$. Prouvez : $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}.W_{n-1}$. Calculez $W_{2.n}$ pour tout entier naturel n. (on pourra intégrer par parties $\int \sin^n . \sin$ et retrouver l'intégrale initiale dans $\displaystyle\int \sin^{n-1} .(1-\sin^2)$)

Chaque intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t).dt$ existe *(et coïncide avec la formulation* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta).d\theta$ *car sinus et cosinus font la même chose sur* $[0,\ \pi/2]$ *mais pas dans le même sens).*
On calcule les deux premières : $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$.
On intègre W_{n+1} par parties :

$\cos^n(t)$	$\hookrightarrow$	$-n.\cos^{n-1}(t).\sin(t)$
$\cos(t)$	$\hookleftarrow$	$\sin(t)$

Le terme crochet $[\cos^n(t).\sin(t)]_0^{\pi/2}$ est nul en 0 et en π. Le terme de compensation est $n.\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t).\sin^2(t).dt$ et on le remplace par $n.(W_{n-1} - W_{n+1})$ en remplaçant $\sin^2$ par $1-\cos^2$.

On regroupe et simplifie : $\boxed{W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}.W_{n-1}}$



On applique : $W_2 = \frac{1}{2}.W_0$ puis $W_4 = \frac{3}{4}.W_2$ et même $W_6 = \frac{5}{6}.W_4$.

Par récurrence non rédigée : $W_{2.n} = \frac{1.3.5\dots(2.n-1)}{2.4.6\dots(2.n)}.W_0$.

Quitte à insérer des termes : $W_{2.n} = \frac{(2.n)!}{(2.4.6\dots(2.n))^2}.W_0$.

En factorisant des 2 : $\boxed{W_{2.n} = \frac{(2.n)!}{(1.2.3\dots n)^2}.\frac{\pi}{2^{2.n+1}} = \frac{(2.n)!}{(n!)^2}.\frac{\pi}{2^{2.n+1}}}$

III∼1) Montrez : $W_{2.n+1} \leqslant W_{2.n} \leqslant W_{2.n-1}$ pour tout n. Déduisez : $W_{2.n} \sim_{n\to+\infty} W_{2.n+1}$.[a]

[a]. deux suites (a_n) et (b_n) sont dites équivalentes si leur quotient a_n/b_n tend vers 1 quand n tend vers l'infini, et on note alors $a_n \sim b_n$

Pour tout t de $[0,\ \pi/2]$, on écrit $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$. On élève à des puissances convenables : $\cos^{2.n+1}(t) \leqslant \cos^{2.n}(t) \leqslant \cos^{2.n-1}(t)$. On intègre de 0 à $\pi/2$: $\boxed{W_{2.n-1} \leqslant W_{2.n} \leqslant W_{2.n-1}}$

(bref, la suite W est décroissante).

On divise par $W_{2.n+1}$ positif : $1 \leqslant \frac{W_{2.n}}{W_{2.n+1}} \leqslant \frac{W_{2.n-1}}{W_{2.n+1}} = \frac{2.n+1}{2.n}$ *(la dernière égalité est issue d'un cas particulier de la formule $W_{n+1} = \frac{n}{n+1}.W_{n-1}$).*

Le majorant tend vers 0. Par encadrement, $\frac{W_{2.n}}{W_{2.n+1}}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. C'est la définition de l'équivalence asymptotique de deux suites.

III∼2) Prouvez $(2.n+1).W_{2.n}.W_{2.n+1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout n. Déduisez $W_{2.n} \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4.n}}$.

La formule $(2.n+1).W_{2.n}.W_{2.n+1} = \frac{\pi}{2}$ se démontre par récurrence sur n facile à initialiser.
Pour passer de n à $n+1$, on écrit :

$$(2.n+3).W_{2.n+3}.W_{2.n+2} = (2.n+3).\Big(\frac{2.n+2}{2.n+3}.W_{2.n+2}\Big).\Big(\frac{2.n+1}{2.n+2}.W_{2.n+1}\Big)$$

et on recommence avec $W_{2.n+2}$ et $W_{2.n+1}$. Tout se simplifie et il reste $(2.n+1).W_{2.n}.W_{2.n+1}$.

On peut aussi poser $H_p = (p+1).W_{p+1}.W_p$. On calcule H_0 qui vaut $\frac{\pi}{2}$.
On calcule $\frac{H_{p+1}}{H_p} = \frac{p+2}{p+1}.\frac{W_{p+2}}{W_{p+1}}.\frac{W_{p+1}}{W_p} = 1$. La suite est constante. En particulier, en p=2.n elle donne la relation demandée.

On a donc $W_{2.p}.W_{2.p+1} = \frac{\pi}{2.(2.n+1)} \sim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{4}$.
Mais le premier membre est équivalent à $(W_{2.n})^2$.

Les équivalents passent aux racines carrées : $\boxed{W_{2.n} \text{ est équivalent à } \sqrt{\frac{\pi}{4.n}}}$

III∼3) Déduisez $F\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{\pi}$ *(formule dite "de Wallis", on se demande pourquoi).*

Pour tout entier naturel n, on calcule $F_n\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}.\prod_{k=1}^{n}\Big(1 - \frac{1}{4.k^2}\Big)$.
On réduit au dénominateur commun et on identifie remarquablement :

$$F_n\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}.\prod_{k=1}^{n}\Big(\frac{(2.k-1).(2.k+1)}{4.k^2}\Big)$$

On factorise ce qu'on peut : $F_n\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2^{2.n+1}}.\prod_{k=1}^{n}\Big(\frac{(2.k-1).(2.k+1)}{k^2}\Big)$.

On sépare même $F_n\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2^{2.n+1}}.\prod_{k=1}^{n}(2.k-1).\prod_{k=1}^{n}(2.k+1).\frac{1}{(n!)^2}$.

On sort un terme inutile : $F_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2.n+1}{2^{2.n+1}.(n!)^2}.\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2.k-1)\right)^2$.

Dans le produit des impairs, on recommence à mettre les termes pairs : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2.k-1) = \dfrac{(2.n)!}{2^n.n!}$.

La formule à peu près définitive est $F_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2.n+1).((2.n)!)^2}{2^{4.n+1}.(n!)^4}$

Or, on avait montré : $W_{2.n} = \dfrac{(2.n)!}{2^{2.n+1}.(n!)^2}.\pi$ d'où $\left(\dfrac{(2.n)!}{2^{2.n+1}.(n!)^2}\right)^2 = \left(\dfrac{W_{2.n}}{\pi}\right)^2$.

On a donc $F_N\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2.(2.n+1).\left(\dfrac{W_{2.n}}{\pi}\right)^2$ *(bigre !).*

Il est temps de passer aux équivalents : $F_N(\dfrac{1}{2}) \sim_{n\to+\infty} 4.n.\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{4.n}}\right)^2.\dfrac{1}{\pi^2}$.

$F_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$ est équivalent au nombre $\dfrac{1}{\pi}$. Ceci signifie que $F_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$ converge vers ce réel. Et la limite des $F_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$ quand n tend vers l'infini, c'est $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$. On a donc bien $\boxed{F\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\pi}}$

C'est $\dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi}$ pour x égal à $1/2$.

La formule dite de Wallis, c'est $\boxed{\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\dfrac{4.k^2}{4.k^2-1}}$ *et pour la forme factorisée d'Euler :*

$1 = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}.\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{(\pi/2)^2}{k^2.\pi^2}\right)$

IV~0) Même si ça n'a aucun rapport avec la suite, prouvez moi : $(W_n)^2 \leqslant \frac{\pi}{2}.W_{2.n}$ pour tout n.Si je ne l'ai pas démontrée dans le cours, allez chercher dans « les beaux théorèmes de Sup » la formule de Cauchy-Schwarz.

On doit prouver une majoration $(W_n)^2 \leqslant \dfrac{\pi}{2}.W_{2.n}$.

On a certes une formule explicite pour $W_{2.n}$ du membre de droite. Mais pas de formule pour $(W_n)^2$, car elle dépend en tout cas de la parité de n.

Mais on a le carré d'une intégrale, et l'intégrale d'un carré.

On sent venir $\boxed{\text{l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les intégrales}}$:

$$\int_a^b f(t).g(t).dt \leqslant \int_a^b f(t)^2.dt.\int_a^b g(t)^2.dt$$

avec ici $a = 0$, $b = \pi/2$, $f = 1$ et $g = \sin^n$.

C'est aussi rapide que ça. Et classique aussi. mais peut être n'avons nous pas encore vu l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cours... Ça dépend des années.

V~0) Montrez : $F_n\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{W_{2.n}}{2.\pi.W_{4.n+1}}$ pour tout n. Calculez $F\left(\dfrac{1}{4}\right)$. Calculez $F\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

J'en ai certes bavé pour ma part en bricolant mes produits d'entiers impairs et autres pour aboutir à $F_n\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{W_{2.n}}{2.\pi.W_{4.n+1}}$, vous pouvez vous contenter de prouver le résultat par récurrence sur n.

On initialise à n égal à 0 : $F_0\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$ *(produit vide)* et $\dfrac{W_0}{2.\pi.W_1} = \dfrac{\pi/2}{2.\pi.1} = \dfrac{1}{4}$.

On peut regarder pour n égal à 1 : $F_1\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4}.\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right) = \dfrac{(4-1).(4+1)}{4.4^2}$ et $\dfrac{W_2}{2.\pi.W_5} = \dfrac{\pi/4}{2.\pi.8/15} = \dfrac{15}{64}$.

Ça ne sert pas forcément, ça fait perdre un peu de temps, mais ça permet de comprendre ce qu'il va se passer.

On suppose la formule vraie au rang n et on passe au rang $n+1$.

La clef est $F_{n+1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = F_n\left(\dfrac{1}{4}\right).\left(1-\dfrac{1}{4^2.(n+1)^2}\right) = F_n\left(\dfrac{1}{4}\right).\dfrac{(4.(n+1)-1).(4.(n+1)+1)}{2^4.(n+1)^2}$

On exploite l'hypothèse de rang n : $F_{n+1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{W_{2.n}}{2.\pi.W_{4.n+1}}.\dfrac{(4.n+3).(4.n+5)}{2^4.(n+1)^2}$.

On essaye d'y voir plus clair, avec des relations telles que $\frac{2.n+1}{2.n+2}.W_{2.n} = W_{2.n+2}$, ainsi que

$$\frac{4.n+2}{4.n+3}.W_{4.n+1} = W_{4.n+3} \textit{ et } \frac{4.n+4}{4.n+5}.W_{4.n+3} = W_{4.n+5}$$

On remplace, tout se simplifie miraculeusement bien, et on trouve effectivement $F_{n+1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{W_{2.n+2}}{2.\pi.W_{4.n+5}}$.

La formule est établie pour tout entier naturel n.

On fait tendre n vers l'infini. Le membre de gauche tend vers $F\left(\frac{1}{4}\right)$ (existence prouvée dès le I et nom donné à cette occasion).

Pour le membre de droite, on utilise l'équivalent trouvé $W_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4.n}}$ qui donne ici $W_{2.n} \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{8.n}}$ et $\frac{1}{W_{4.n+1}} \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{8.n+2}{\pi}}$. Les équivalents passent aux produits et $\sqrt{\frac{8.n+2}{8.n}}$ est équivalent à 1.

$F_n(1/4)$ est équivalent finalement à un réel, il tend vers ce réel qui vaut ici $\frac{1}{\pi.\sqrt{2}}$.

On peut donc écrire $\boxed{F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2.\pi}}$ *ce qui confirme* $F(x) = \frac{\sin(\pi.x)}{\pi}$ *en* $x = 1/4$.

Pour ce qui est de $F(1/3)$, on doit donc trouver $\frac{\sin(\pi/3)}{\pi}$ c'est à dire $\frac{\sqrt{3}}{2.\pi}$.

Je ne vous donne pas tous les éléments. On calcule $F_n\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{3^2.k^2}\right)$.

On a au dénominateur un produit : $3.\prod_{k=1}^{n} 3^2.k^2$ qu'on écrit donc $3^{2.n+1}.(n!)^2$, pour l'instant tout va bien.

Au numérateur, on factorise en $\prod_{k=1}^{n}(3.k-1).(3.k+1)$.

On l'écrit pour comprendre : $(2.4).(5.7).(8.10)\dots(3.n-1).(3.n+1)$.

C'est presque une factorielle, mais il lui manque des termes. C'est $\frac{(3.n+1)!}{3.6.9\dots(3.n)}$. On reconnaît $\frac{(3.n+1)!}{3^n.n!}$.

On a finalement $\boxed{F_n\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{(3.n+1)!}{3^{3.n+1}.(n!)^3}}$

Pour passer à la limite, il suffit de connaître son cours. Ou celui de Spé : $n! \sim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n.\sqrt{2.n.\pi}$ qui donne $(3.n+1)! \sim_{n\to+\infty} \left(\frac{3.n+1}{e}\right)^{3.n+1}.\sqrt{-.n.\pi}$ et $(n!)^3 \sim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^{3.n}.2.n.\pi.\sqrt{2.n.\pi}$.

On simplifie ce qu'on peut, on utilise que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge vers e et on trouve la limite demandée.

Et si on ne connaît pas la formule de Stirling, que fait on ? Les intégrales de Wallis ne sont pas utilisables car elles donnent des formules explicites pour $W_{2.p}$ et $W_{3.p+1}$ mais pas pour $W_{3.n+1}$.
Oui, mais si $F_n(1/3)$ converge vers $F(1/3)$, on sait aussi que $F_{2.n}(1/3)$ converge vers $F(1/3)$.
On va donc étudier $F_{2.n}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{(6.n+1)!}{3^{6.n+1}.((2.n)!)^3}$ et tenter d'y retrouver entre autre $W_{6.n}$.

Il y a aussi la solution du futur adjoint d'ingénieur qui a lu l'énoncé, a décidé qu'il faisait confiance à Euler et utilisait directement la formule $F(x) = \frac{\sin(\pi.x)}{\pi}$ *pour* x *égal à* $1/3$.
Mais celui là ne sera jamais ingénieur, juste assistant d'ingénieure, car il fait confiance à ce qui a été écrit par d'autres sans se l'approprier ni le prouver lui même... ou au moins sans comprendre les grandes lignes de la démonstration. Il sera prisonnier des logiciels et de leurs concepteurs...

∘25∘

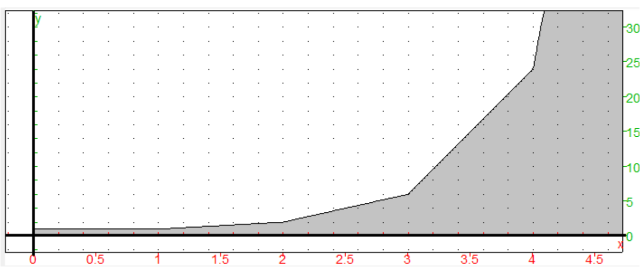
♣ On imagine qu'on définit une généralisation de la fonction factorielle de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ en lui demandant d'être affine sur chaque segment $[n,\ n+1]$ pour n dans $\mathbb{N}$ *(par exemple* $(3,4)! = 13,2$ *car* $3! = 6$ *et* $4! = 24$*)*. Est elle alors injective ? Est elle surjective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$? Si non, de $\mathbb{R}^+$ dans quoi ?
Calculez $(5,2)!$ et $(52/7)!$.
Calculez $\int_0^4 (x)!.dx$.
Résolvez l'équation $(x)! = 2017$ d'inconnue réelle x.

Sur le segment $[n,\ n+1]$, on veut une application affine qui vérofoe $f(n) = n!$ et $f(n+1) = (n+1)!$.
Son coefficient directeur vaut $\dfrac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n}$ ce qui ait ici $(n+1)! - n!$. On peut le factoriser en $n.n!$.
On ajuste pour avoir $f(n) = n!$: $f(x) = n.n!.(x-n) + n!$.
La formule est donc $x \longmapsto n.n!.x + (1-n^2).n!$ sur l'intervalle $[n,\ n+1]$.

$[0,\ 1]$	$[1,\ 2]$	$[2,\ 3]$	$[3,\ 4]$	$[4,\ 5]$	$[5,\ 6]$
1	x	$4.x - 6$	$18.x - 48$	$96.x - 360$	$600.x - 2880$

Elle est constante sur $[0,\ 1]$ et donc pas injective.

Aucun réel négatif n'est atteint. Son minimum vaut d'ailleurs 1.



Son intervalle image est $[1,\ +\infty[$.

En 5,2 l'image est 240.

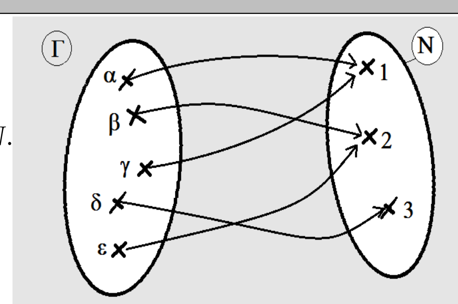
En $52/7$ (qui est entre 7 et 8) : 20160.

Pour atteindre la valeur 2017 (compris entre $6!$ et $7!$), il faut utiliser la formule $x \longmapsto 4320.x - 25200$.
On résout donc $4320.x - 25200 = 2017$.
On trouve $x = 27217/4320$.

Pour l'intégrale, on découpe par relation de Chasles $\int_0^1 1.dt + \int_1^2 (t).dt + \int_2^3 (4.t-6).dt + \int_3^4 (96.t - 360).dt$.
Sauf erreur : $43/2$.

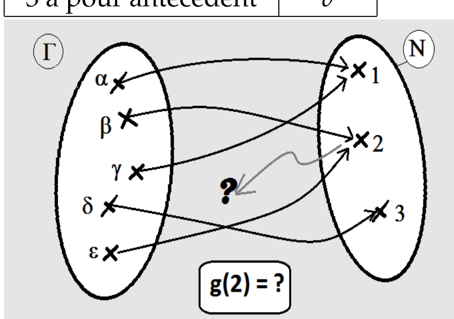
∘26∘

On pose $f(\alpha) = 1$, $f(\beta) = 2$, $f(\gamma) = 1$, $f(\delta) = 2$ et $f(\varepsilon) = 3$. Combien existe-t-il d'applications g de $\{1,2,3\}$ (noté N) dans $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ (noté Γ) vérifiant $f \circ g = Id_{\{1,2,3\}}$? Combien existe-t-il d'applications h de $\{1,2,3\}$ dans $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ vérifiant $h \circ f = Id_{\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}}$?

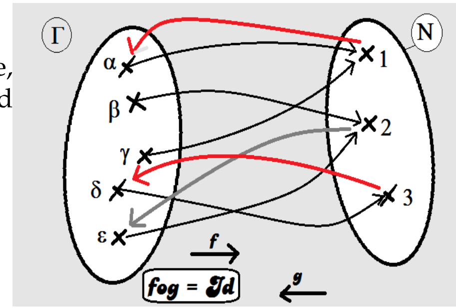


On a défini une application f que l'on peut représenter de G dans N.
Elle n'est pas injective puisque α et γ ont la même image.
Elle est surjective, car chaque nombre a au moins un antécédent.

1 a pour antécédents	α et γ
2 a pour antécédents	β et ε
3 a pour antécédent	δ



Il y a une question à laquelle on peut répondre tout de suite. Il ne peut existe h vérifiant $h \circ f = Id_N$. Non pas parce qu'on ne pourrait pas composer. Mais parce que si une telle application existant, $h \circ f$ serait injective, et f le serait aussi.
Mais on peut aussi se poser la question de la valeur de $h(2)$. On aurait $h(2) = h(f(\beta)) = \beta$ et en même temps $h(2) = h(f(\varepsilon)) = \varepsilon$.
On ne peut pas définir $h(2)$, h n'existe pas.
Le défaut d'injectivité de f ne peut pas être corrigé.



On cherche g vérifiant $f \circ g = Id_N$ (on prend un élément numérique, de N, on le monte dans Γ sur une lettre grecque, puis on redescend par f. On s'interroge sur les images par g :
$g(1)$ vérifie $f(g(1)) = 1$
$g(1)$ est un antécédent de 1 par f : α ou γ.
$g(2)$ vérifie $f(g(2)) = 2$
$g(2)$ est un antécédent de 2 par f : β ou ε.
$g(3)$ vérifie $f(g(3)) = 3$.

$g(3)$ est l'antécédent de 3 par f : δ. On a donc les valeurs possibles

$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$
α ou γ	β ou ε	δ

.

On peut raisonner avec un arbre de possibilités. On a $\boxed{2 \times 2 \text{ applications possibles}}$

$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$
α	β	δ

$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$
α	ε	δ

Représentée plus haut.

$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$
γ	β	δ

$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$
γ	ε	δ

∘27∘

Fillomino. C'est quoi ce jeu là ? Il faut découper le plan en maisons. Une maison n'est pas forcément carrée, mais elle est d'un seul tenant *(vous voyez sur chaque gille une maison de taille 3 dont les trois cases sont appelées 3)*. Et dans une maison, si il y a des nombres *(et il y en a toujours au moins un)*, ils indiquant la taille de la maison *(donc une maison de taille 1 contient l'unique chiffre 1)*. Deux maisons de même taille ne peuvent pas se toucher autrement que par un coin.

3				2	4		
2		1	3	3	2	1	
1		4		3			
4	4	5				4	3
1	2			1	5		4
		4	1			5	3
3		4	3			3	
1	4	2		3	1	2	

3	**3**	**3**	**2**	2	4	**4**	**4**
2	**2**	1	3	3	2	1	**4**
1	**4**	4	**5**	3	**2**	**3**	**3**
4	4	5	**5**	**5**	**4**	4	3
1	2	**2**	**5**	1	5	**4**	4
3	**3**	4	1	**5**	**5**	5	3
3	**4**	4	3	**3**	**5**	3	**3**
1	4	2	**2**	3	1	2	**2**

∘28∘

♡ Donnez une primitive de $x \longmapsto x.(Arctan(x))^2$ *(si vous intégrez par parties, dites vous que x peut venir de* $\dfrac{x^2}{2}$ *certes, mais aussi de* $\dfrac{x^2+1}{2}$*)*.

Sans donner de bornes, pour travailler sur des primitives :

$$\int x.(Arctan(x))^2.dx = \Big[\frac{x^2+1}{2}.(Arctan(x))^2\Big] - \int Arctan(x).dx$$ avec

$(Arctan(x))^2$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{2.Arctan(x)}{x^2+1}$
x	$\hookleftarrow$	$\dfrac{x^2+1}{2}$

On a donc $\boxed{\dfrac{x^2+1}{2}.(Arctan(x))^2 - x.Arctan(x) + \dfrac{\ln(1+x^2)}{2}}$ et tout ce que vous voulez en ajoutant une constante.

∘29∘

Pouvez vous placer les quatre couples de $\{a, b\} \times \{0, 1\}$ dans le tableau de taille 2 sur 2 de sorte à ce que chaque lettre soit visible une fois et une seule sur chaque ligne, et chaque chiffre une fois et une seule sur chaque colonne.
Pouvez vous placer les neuf couples de $\{a, b, c\} \times \{0, 1, 2\}$ dans le tableau de taille 3 sur 3 dans le tableau de sorte à ce que chaque lettre soit visible une fois et une seule sur chaque ligne, et chaque chiffre une fois et une seule sur chaque colonne.
Pouvez vous placer les seize couples de $\{a, b, c, d\} \times \{0, 1, 2, 4\}$ dans le tableau de taille 4 sur 4 de sorte à ce que chaque lettre soit visible une fois et une seule sur chaque ligne, et chaque chiffre une fois et une seule sur chaque colonne.

En taille 2, c'est impossible.

Plaçons $(a, 1)$ dans une case.

$(a,\ 1)$	

Sur sa ligne, il faut un b et un 2. C'est donc que l'autre élément de sa ligne est $(b, 2)$:

$(a,\ 1)$	$(b,\ 2)$

Mais sur sa colonne, il faut un b et un 2 :

$(a,\ 1)$	$(b,\ 2)$
$(b,\ 2)$	

C'est fini il y a un élément en double.

Pour les triplets, on tente, et on trouve des solutions surtout si on joue souvent au Su-Do-Ku :

$(a,\ 1)$	$(b,\ 2)$	$(c,\ 3)$
$(c,\ 2)$	$(a,\ 3)$	$(b,\ 1)$
$(b,\ 3)$	$(c,\ 1)$	$(a,\ 2)$

Et une fois qu'on a une solution, on en a d'autres, en échangeant deux lignes, et/ou deux colonnes :

$(c,\ 2)$	$(a,\ 3)$	$(b,\ 1)$
$(a,\ 1)$	$(b,\ 2)$	$(c,\ 3)$
$(b,\ 3)$	$(c,\ 1)$	$(a,\ 2)$

et

$(b,\ 2)$	$(a,\ 1)$	$(c,\ 3)$
$(a,\ 3)$	$(c,\ 2)$	$(b,\ 1)$
$(c,\ 1)$	$(b,\ 3)$	$(a,\ 2)$

et

$(a,\ 3)$	$(c,\ 2)$	$(b,\ 1)$
$(b,\ 2)$	$(a,\ 1)$	$(c,\ 3)$
$(c,\ 1)$	$(b,\ 3)$	$(a,\ 2)$

Je ne dis pas que j'ai toutes les solutions ainsi à partir d'une seule.

On cherche aussi en taille 4.

$(a,\ 1)$	$(b,\ 2)$	$(c,\ 3)$	$(d,\ 4)$
$(b,\ 4)$	$(a,\ 3)$	$(d,\ 2)$	$(c,\ 1)$
$(c,\ 2)$	$(d,\ 1)$	$(a,\ 4)$	$(b,\ 3)$
$(d,\ 3)$	$(c,\ 4)$	$(b,\ 1)$	$(a,\ 2)$

Ce sont les carrés gréco-latins, dits aussi « carrés d'Euler ».
Vous pouvez en chercher en taille 5 ;
Mais n'essayez pas en taille 6. C'est impossible.

∘30∘ Calculez $\int_0^1 t^2.e^t.dt$ quitte à intégrer assez par parties.
Calculez $\int_0^1 t.Arctan(t).dt$ en choisissant bien votre primitive de $t \longmapsto 2.t$ lors de l'intégration par parties.

t^2	$\hookrightarrow$	$2.t$	$\hookrightarrow$	2	$\hookrightarrow$	0
e^t	$\hookleftarrow$	e^t	$\hookleftarrow$	e^t	$\hookleftarrow$	e^t

Comme suggéré, on intègre trois fis par parties, d'où alternance de signes, et ici (astuce) un dernier terme nul

$$\int_0^1 t^2.e^t.dt = [t^2.e^t]_0^1 - \int_0^1 2.t.e^t.dt$$

$$\int_0^1 t^2.e^t.dt = [t^2.e^t]_0^1 - [2.t.e^t]_0^1 + \int_0^1 2.e^t.dt$$

$$\int_0^1 t^2.e^t.dt = [t^2.e^t]_0^1 - [2.t.e^t]_0^1 + [2.e^t]_0^1 - \int_0^1 0.e^t.dt$$

On peut aussi proposer et vérifier $t \longmapsto (t^2 - 2.t + 2).e^t$.

On trouve $\int_0^1 t^2.e^t.dt = e - 2$ (positif, c'est bon).

$Arctan(t)$	$\hookrightarrow$	$\frac{1}{1+t^2}$
t	$\hookleftarrow$	$\frac{t^2+1}{2}$

Génialement, le terme de compensation vaut $\int_0^1 \frac{t^2+1}{t^2+1}.dt$. Finalement $\boxed{\int_0^1 t.Arctan(t).dt = \frac{\pi - 2}{4}}$

∘31∘ Calculez $\int_1^2 t^2.\log_2(t).dt$.

On écrit cette fois $\frac{t^2.\ln(t)}{\ln(2)}$ et on intègre par parties autant que nécessaire (une fois)

$\ln(t)$	$\hookrightarrow$	$\frac{1}{t}$
t^2	$\hookleftarrow$	$\frac{t^3}{3}$

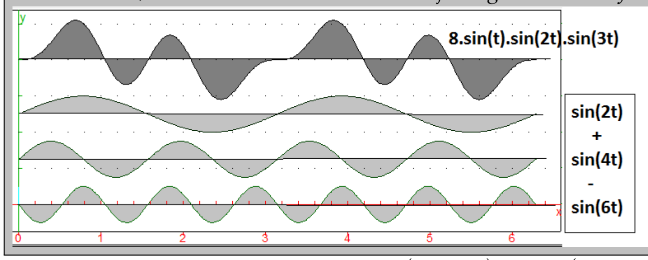
Primitive en $t \longmapsto \dfrac{3.t^3.\ln(t) - t^3}{9}$ et intégrale égale à $\boxed{\dfrac{24}{9} - \dfrac{7}{9.\ln(2)}}$

Et $\dfrac{1}{\ln(2)}$ *ne se simplifie pas. pas plus que* $(\ln(2))^2$ *ou* $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$

∘32∘

Montrez : $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \sin(t).\sin(2.t);\sin(3.t).dt = \frac{7}{96}$.

Mais surtout, évitez le truc de Terminable « j'intègre autant de fois par parties qu'il faut » ; pensez à linéariser.



Elles apprécient les charges libres.
Quelle rude éjection.
Avide de ferveur, il nous inonde de spams.
Ce vélib' à terre a mal aussi.

On linéarise : $\sin(t).\sin(3.t) = \dfrac{\cos(3.t - t) - \cos(3.t + t)}{2} = \dfrac{\cos(2.t) - \cos(4.t)}{2}$.

On linéarise : $\sin(2.t).\dfrac{\cos(2.t)}{2} = \dfrac{\sin(4.t)}{4}$ et $\sin(2.t).\dfrac{\cos(4.t)}{2} = \dfrac{\sin(4.t + 2.t) - \sin(4.t - 2.t)}{4}$.

On additionne tout : $\sin(t).\sin(3.t) = \dfrac{sin(4.t) - \sin(6.t) + \sin(2.t)}{4}$.

Il n'y a plus qu'à intégrer en $t \longmapsto \dfrac{\cos(4.t)}{16} + \dfrac{\cos(6.t)}{24} - \dfrac{\cos(2.t)}{8}$.

Pour les valeurs en $\dfrac{\pi}{6}$, on tourne plus ou moins autour du cercle trigonométrique.

∘33∘

Déterminez

$Sup\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-y}) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$	$Sup\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) \mid x \in \mathbb{R}\}$
$Inf\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-y}) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$	$Inf\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) \mid x \in \mathbb{R}\}$

La borne supérieure d'un ensemble est son plus petit majorant. Et par exemple, $[0,\ 1[$ a pour borne supérieure 1 alors qu'il n'a pas de plus grand élément.

Les quatre ensembles avec des arc tangentes sont majorés par $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ et non vides. Ils sont aussi minorés par 0, car ce sont des sommes d'arctangentes positives. Ils ont chacun une borne supérieure et une borne inférieure.

Pour tout x, $Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x})$ vaut toujours $\dfrac{\pi}{2}$ (c'est $Arctan(u) + Arctan(1/u)$ avec u positif, c'est dans le cours de géométrie ; sinon, pour convaincre le physicien, dites lui de dériver $x \longmapsto Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x})$ et il comprendra).

L'ensemble $\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un singleton : $\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ (écrit aussi $\left[\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$). Sa borne supérieure et sa borne inférieure valent $\dfrac{\pi}{2}$ (atteintes toutes les deux).

Sinon, π majore $Arctan(e^x) + Arctan(e^{-y})$ quand x et y décrivent $\mathbb{R}$.

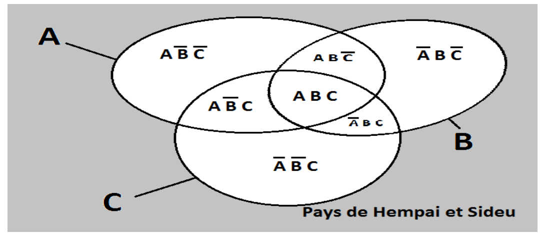
On fait tendre x vers $+\infty$ et y vers $-\infty$, les deux termes tendent vers $\dfrac{\pi}{2}$. Le majorant π n'est pas atteint, mais c'est bien le plus petit majorant.

De même, en faisant tendre $-\infty$ et y vers $+\infty$, la borne inférieure vaut 0.

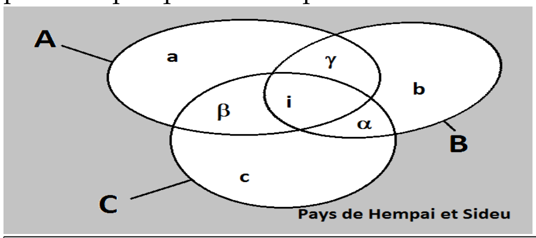
$Sup\left\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-y}) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\right\} = \pi$	$Sup\left\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \dfrac{\pi}{2}$
$Inf\left\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-y}) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\right\} = 0$	$Inf\left\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \dfrac{\pi}{2}$

∘34∘

Dans le pays de Hempai et Sideu, il y a des Arfs, des Bloutchs et des Crops (et c'est tout, mais on peut être Arfe et Bloutch, et même les trois à la fois, comme d'ailleurs 20 habitants). 50 Arfs sont aussi des Crops. Il y a 90 Bloutchs, dont un tiers sont d'ailleurs aussi des Crops. Parmi les Bloutchs, il y en a autant qui sont Arfs et Crops qu'il n'y en a qui sont Arf ou_e Crops. 40 Crops ne sont ni Arf, ni Bloutch. Il y a 100 Arfs. Alors, combien d'habitants dans ce pays Hempai et Sideu ? Et combien répondront "oui" à la question "*si tu es Arf, alors tu n'es ni Bloutch, ni Crop*" *(sachant qu'ils sont tous bons en logique et sincères)*.



Les Arfs, Bloutchs et les Crops. On ne sait même pas combien ils sont dans chaque catégorie. Mais on a des informations. On va découper les habitants en sept catégories, qu'on peut noter par exemple $A.\overline{B}.C$ ou $\overline{A}.B.\overline{C}$ avec un symbolisme qu'on comprend aisément. On sait par exemple que $A.B.C$ a pour cardinal 20.



On note les différents cardinaux avec des lettres (il va y en avoir sept) et on traduit les sept informations.
Sept informations pour sept inconnues, la chose semble cohérente. On a des chances d'avoir une et une seule solution.

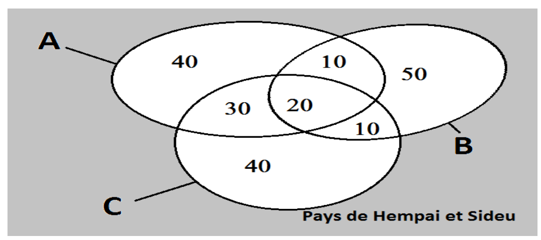
information	équation	numéro
On peut être les trois à la fois, comme d'ailleurs 20 habitants	$i = 20$	1
50 Arfs sont d'ailleurs aussi des Crops	$\beta + i = 50$	2
Il y a 90 Bloutchs...	$b + \gamma + \alpha + i = 90$	3
...dont un tiers sont d'ailleurs aussi des Crops	$i + \alpha = 30$	4
Parmi les Bloutchs autant sont "Arfs et Crops" que "Arf ou_e Crops"	$i = \alpha + \gamma$	5
40 Crops ne sont ni Arf, ni Bloutch	$c = 40$	6
Il y a 100 Crops.	$\alpha + \beta + i + c = 100$	7

On résout peu à peu le système en vérifiant si on utilise toutes les équations

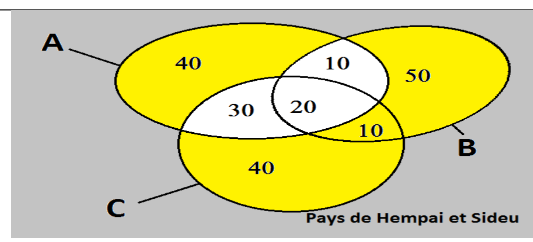
1	2	4	
$i = 20$	$\beta = 30$	$\alpha = 10$	

5	3	6	7
$\gamma = 10$	$b = 50$	$c = 40$	$c = 40$

On a tous les nombres cherchés, il ne reste plus qu'à sommer... Ils sont $\boxed{200}$ individus au total.



Quant à la question "si tu es Arf, alors tu n'es ni Bloutch, ni Crop", elle est de la forme "$A \Rightarrow (\overline{B}\ et\ \overline{C})$. On l'écrit $\overline{A}\ ou\ (\overline{B}\ et\ \overline{C})$. On l'écrit aussi $\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$. On hachure les éléments concernés, et on les compte : ils sont $\boxed{140}$
On peut passer d'ailleurs par le complémentaire : ceux qui sont A mais pas (ni B ni C), c'est à dire ceux qui sont A et (B ou C).



∘35∘ ♣ Calculez $\displaystyle\prod_{k=2}^{2015} \left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)}$ *(les crochets désignent la partie entière).*

Ecrivons ce produit avec des points de suspension pour comprendre :

k	2	3	4	5	6	7	8			2013	2014	2015
$\left[\frac{k}{2}\right]$	1	1	2	2	3	3	4			1006	1007	1007
$(-1)^k$	1	-1	1	-1	1	-1	1			-1	1	-1
$\left[\frac{k}{2}\right]^{(-1)^k}$	1	$\frac{1}{1}$	2	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$	4			$\frac{1}{1006}$	1007	$\frac{1}{1007}$

Chaque fois qu'il y a un entier au numérateur, il y a le même au dénominateur. Le produit vaut $\boxed{1}$

Proprement, on sépare par parité : $\prod_{k=2}^{2015}\left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} = \prod_{\substack{2\leqslant k\leqslant 2015\\ k\ pair}}\left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)}.\prod_{\substack{2\leqslant k\leqslant 2015\\ k\ impair}}\left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)}$

$$\prod_{k=2}^{2015}\left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} = \prod_{p=1}^{1007}\left[\frac{2.p}{2}\right]^{((-1)^{2.p})}.\prod_{p=1}^{1007}\left[\frac{2.p+1}{2}\right]^{((-1)^{2.p+1})}$$

$$\prod_{k=2}^{2015}\left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} = \prod_{p=1}^{1007}\left[\frac{2.p}{2}\right].\prod_{p=1}^{1007}\left[\frac{2.p+1}{2}\right]^{-1}$$

$$\prod_{k=2}^{2015}\left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} = \Big(\prod_{p=1}^{1007} p\Big).\Big(\prod_{p=1}^{1007}\frac{1}{p}\Big)$$

$$\prod_{k=2}^{2015}\left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} = 1007!.\frac{1}{1007!}$$

$$\prod_{k=2}^{2015}\left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} = 1$$

Un livre vous le rédigera ainsi, avec toute la rigueur voulue.
Mais qui, sinon la recherche à la main avec mille points de suspension, vous fera comprendre qu'il fallait passer par là ? Une vidéo peut être.

∘36∘ Montrez par récurrence sur n pour u et v dérivables autant de fois qu'on veut : $(u.v)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}.u^{(k-i)}.v^{(i)}$.

∘37∘

n est un entier naturel qu'on choisira convenablement à la fin.
On définit $f = x \longmapsto \frac{x^n.(1-x)^n}{n!}$. Montrez pour tout x de $]0,\ 1[$: $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.
Montrez que chaque $f^{(k)}(0)$ et $f^{(k)}(1)$ est un entier.
On suppose que π^2 est un rationnel de la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels.
Quel type de raisonnement se prépare-t-on à faire ?
On définit : $F = (x \longmapsto b^n.(\pi^{2.n}.f(x) - \pi^{2.n-2}.f''(x) + \pi^{2.n-4}.f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n.f^{(2.n)}(x))$ *(écrivez proprement avec un $\sum$).*
Montrez que $F(0)$ et $F(1)$ sont deux entiers.
Montrez : $(x \longmapsto F'(x).\sin(\pi.x) - \pi.F(x).\cos(\pi.x))' = (x \longmapsto \pi^2.a^n.f(x).\sin(\pi.x))$.
Déduisez : $\pi.\int_0^1 a^n.f(x).\sin(\pi.x).dx = F(0) + F(1)$.
Montrez aussi $0 < \pi.\int_0^1 a^n.f(x).\sin(\pi.x).dx \leqslant \frac{\pi.a^n}{n!}$.
Choisissez maintenant n pour avoir $\frac{\pi.a^n}{n!} < 1$.
Aboutissez à la contradiction attendue.
π est il rationnel ? Et $\sqrt{\pi}$?

Un classique.
Quand x varie entre 0 et 1, le réel $x.(1-x)$ reste entre 0 et 1 (et même entre 0 et $\frac{1}{4}$, valeur atteinte au maximum en $x = \frac{1}{2}$.
La valeur 0 n'est atteinte qu'en 0.
Pour x dans $]0,\ 1[$, on encadre $0 < x.(1-x) < 1$, on élève à la puissance n et on divise par $n!$.

---

f est nulle en 0 et en 1, mais pas forcément ses dérivées, n'abusez pas.
Toutefois, par exemple : $f'(x) = n.\frac{(x.(1-x))^{n-1}}{n!}.(1-2.x)$ nulle en 0 et en 1.
Et si on continue $f'(x) = n.(n-1)\frac{(x.(1-x))^{n-2}}{n!}.(1-2.x)^2 - 2.n.\frac{(x.(1-x))^{n-1}}{n!}$. Nulle en 0 et en 1.
Mais à force de dériver, il va rester des choses.

Prenons $n=3$:

$f^{(n)}(x)$	en 0	en 1
$\dfrac{x^3.(1-x)^3}{6}$	0	0
$\dfrac{x^2.(1-x)^2}{2}.(1-2.x)$	0	0
$x.(1-x).(5.x^2-5.x+1)$	0	0
$-20.x^3-30.x^2-12.x+1$	1	-1
$-60.x^2+60.x-12$	-12	-12

Bon, on a quand même des entiers.

Une idée : utiliser la formule de Leibniz, similaire à la formule du binôme :
$(u.v)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}.u^{(k-i)}.v^{(i)}$ (démontrable par récurrence).
On l'applique à $u = x \longmapsto x^n$ et $v = x \longmapsto (1-x)^n$
A prolonger....

Ce qu'on a établi pour 0, on l'établit aussi par 1, car le graphe de F admet un bel axe de symétrie $x = \dfrac{1}{2}$.
De fait, $F(x) = F(1-x)$.
En dérivant donc : $F^{(n)}(x) = (-1)^n.F^{(n)}(1-x)$.
On a donc $F^{(n}(1) = (-1)^n.F^{(n)}(0)$.
Efficace, non ?

On se prépare à faire un raisonnement par l'absurde.

Proprement $F = (x \longmapsto b^n.(\pi^{2.n}.f(x) - \pi^{2.n-2}.f''(x) + \pi^{2.n-4}.f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n.f^{(2.n)}(x))$ deivient $\sum_{k=0}^{2.n}(-1)^k.b^n.\pi^{2.n-2.k}.f^{(2.k)}$

Dans la somme alternée en $x=0$, chaque $(-1)^k.b^n.\pi^{2.n-2.k}.f^{(2.k)}(0)$ est un entier.
En effet, $f^{(2.k)}(0)$ est entier (vu plus hait), et $b^n.\pi^{2.n-2.k} = b^n.(\pi^2)^{n-k} = b^n.(\frac{a}{b})^{n-k} = a^{n-k}.b^k$ avec $n-k$ positif et k aussi.

En 1, c'est pareil.

A terminer.
Le final repose sur une contradiction avec une suite d'entiers strictement positifs qui tend vers 0. Ce qui est un peu contradictoire, non ?

Si on a réussi à prouver que π est irrationnel, alors $\sqrt{\pi}$l'est aussi.
Il suffit de raisonner par contraposée.
Si $\sqrt{\pi}$était rationnel, son carré $(\sqrt{\pi})^2$le serait aussi.

∘38∘

♡ On pose $f = a.\cos + b.\sin$.
Ajustez a et b pour avoir $f(\pi/3) = f(2.\pi/3) = 0$.
Ajustez a et b pour que f atteigne son maximum égal à 5 en $\pi/3$.
Pouvez vous ajuster a et b pour que le maximum de f soit 3 et son minimum -4.
Ajustez a et b pour avoir $f(0) = 1$ et $Sup\{|f(t)|\ \ t \in \mathbb{R}\} = 2$ (combien de possibilités ?).

La première question demande la résolution d'un système.
Et la seule solution est 0 (le déterminant du système $\left\{\begin{array}{cccc|} \frac{1}{2}.a & + & \frac{\sqrt{3}}{2}.b & = & 0 \\ -\frac{1}{2}.a & + & \frac{\sqrt{3}}{2}.b & = & 0 \end{array}\right.$ est non nul, et de toutes façons, par addition...).

La seconde question donne .$\left\{\begin{array}{cccc|} \frac{1}{2}.a & + & \frac{\sqrt{3}}{2}.b & = & 5 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}.a & + & \frac{1}{2}.b & = & 0 \end{array}\right.$ (valeur de la fonction, et dérivée nulle).
On trouve $t \longmapsto 5.\dfrac{\cos(t) + \sqrt{3}.\sin(t)}{2}$.
Et c'est même $t \longmapsto 5..\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$ et là on comprend tout !

Le maximum de $a.\cos + b.\sin$est $\sqrt{a^2+b^2}$ et son minimum $-\sqrt{a^2+b^2}$. Impossible donc que l'on passe de 3 à -4.

Pour avoir $f(0)=1$, on n'a pas le choix : $a=1$.
Ensuite, $\sqrt{a^2+b^2}$ vaut 2.
On a deux fonctions : $t\longmapsto \cos(t)+\sqrt{3}.\sin(t)$ et $t\longmapsto \cos(t)-\sqrt{3}.\sin(t)$.

∘39∘ 36 est égal à quatre fois la somme de ses chiffres ($36=4.(3+6)$). Trouvez tous les autres nombres entiers vérifiant cette propriété.
Et si je vous demande les entiers qui sont égaux à 2017 fois la somme de leurs chiffres, comme 42 357, comment en appelez vous au **Python** suprême ?

Il y a certes 0. Aucun autre entier à un chiffre ne convient.
On résout ensuite $10.a+b=4.(a+b)$.
Je trouve 12, 24, 36 et 48.

Combien de chiffres peut avoir n ?

On crée une procédure pour récupérer la somme des chiffes d'un entier :

```
def SommeChiffres(n) :
....S = 0
....while n>0 :
........S += n%10
........n = n//10
....return(S)
```

```
def SommeChiffres(n) :
....Mot = list(str(n))
....S = 0
....for lettre in mot :
........S += int(lettre)
....return(S)
```

```
L = [ ]
for n in range(100000) :
....if 2017*n == SommeChiffres(n) :
........L.append(n)
print(L)
```

∘40∘ ♡ Calculez $\int_0^\pi \frac{\sin(t).dt}{1+\cos^2(t)}$. On pose $I=\int_0^\pi \frac{t.\sin(t).dt}{1+\cos^2(t)}$. Effectuez le changement de variable $u=\pi-t$. Déduisez la valeur de I.

La première intégrale est en $\frac{u'}{1+u^2}$. On intègre en $t\longmapsto -Arctan(\cos(t))$ et on trouve $Arctan(1)-Arctan(-1)$ ce qui fait $\frac{\pi}{2}$.

Dans I dont l'existence est assurée, on pose donc comme suggéré $u=\pi-t$ qui nous fait parcourir l'intervalle en sens inverse (classique $\int_0^a\ldots$ devient $-\int_a^0\ldots$ par $u=a-t$).

On trouve $I=\int_\pi^0 \frac{(\pi-u).\sin(u)}{1+\cos^2(u)}.(-du)$ et on sépare :

$$I=\int_0^\pi \frac{(\pi-u).\sin(u)}{1+\cos^2(u)}.du=\pi.\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t).dt}-I$$

On bascule, on divise par 2 : $\boxed{I=\frac{1}{2}.\pi.\frac{\pi}{2}}$

∘41∘ La suite a_n tend vers 0 à l'infini. Donnez la limite des suites suivantes :
$\left(\sum_{k=0}^n a_{k+1}-a_k\right)$, $\left(\sum_{k=0}^n a_{k+2}-2.a_{k+1}+a_k\right)$, $\left(\sum_{k=0}^n a_{k+3}-3.a_{k+2}+3.a_{k+1}-a_k\right)$. Trouvez une formule générale.

On télescope : $\forall n,\ \sum_{k=0}^n a_{k+1}-a_k=a_{n+1}-a_0$.
On a une limite et elle vaut $-a_0$.

Pour tout n, $\sum_{k=0}^n a_{k+2}-2.a_{k+1}+a_k=\sum_{k=0}^n (a_{k+2}-a_{k+1})-(a_{k+1}-a_k)=(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_1-a_0)$.
Cette fois, la limite vaut a_1-a_0.

Pour conclure $\left(\sum_{k=0}^{n} a_{k+3} - 3.a_{k+2} + 3.a_{k+1} - a_k = \sum_{k=0}^{n}(c_{k+1} - c_k)\right.$ avec $c_k = a_{k+2} - 2.a_{k+1} + a_k$.
Cette fois, la limite est $a_2 - 2.a_1 + a_0$.

La généralisation sera pleine de binomiaux, avec des sommes de sommes...

◦42◦ ♡ Montrez : $\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 2.(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$. Déduisez que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_n$ diverge.

On utilise la quantité conjuguée :

$$2.(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2.\frac{k+1-k}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{k}}$$

Joli et classique.

Sinon, on peut voir une comparaison série intégrale : $\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}.dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}.dt = \frac{1}{\sqrt{k}}.\int_k^{k+1} dt = \frac{1}{\sqrt{k}}$.
Et devinez qui est le premier membre ?

Il reste ensuite à sommer. On minore $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ par $2.\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.
Le minorant télescope.
Il n'y a plus qu'à appeler un gendarme.

◦43◦ ♡ n^k est il équivalent à $(n+1)^k$ quand n tend vers l'infini *(k fixé)* ?
n^k est il équivalent à $(n+1)^k$ quand k tend vers l'infini *(n fixé)* ?
Montrez que n^n n'est pas équivalent à $(n+1)^n$ quand n tend vers l'infini (le logarithme de leur quotient va cacher un taux d'accroissement à trouver).

k est fixé, on calcle le quotient et son éventuelle limite :

$$\frac{(n+1)^k}{n^k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \rightarrow_{n \to +\infty} 1^k = 1$$

n fixé, on calcule le quotient et son éventuelle limite (qui peut dépende de n) :

$$\frac{(n+1)^k}{n^k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \rightarrow_{n \to +\infty} +\infty$$

On a supposé ici $n > 0$ (et donc $1 + \frac{1}{n}$ est strictement plus grand que 1). Sinon, pour n négatif, c'est dans l'autre sens.
Verdict : pas équivalents.

On pourra avoir à l'esprit l'exemple $n = 1$ l'une des suite est constante et l'autre est 2^k qui tend vers l'infini.

Enfin, le grand classique qui repose sur $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(x.\frac{\ln(1+\frac{x}{n}) - \ln(1)}{\frac{x}{n}}\right)$:

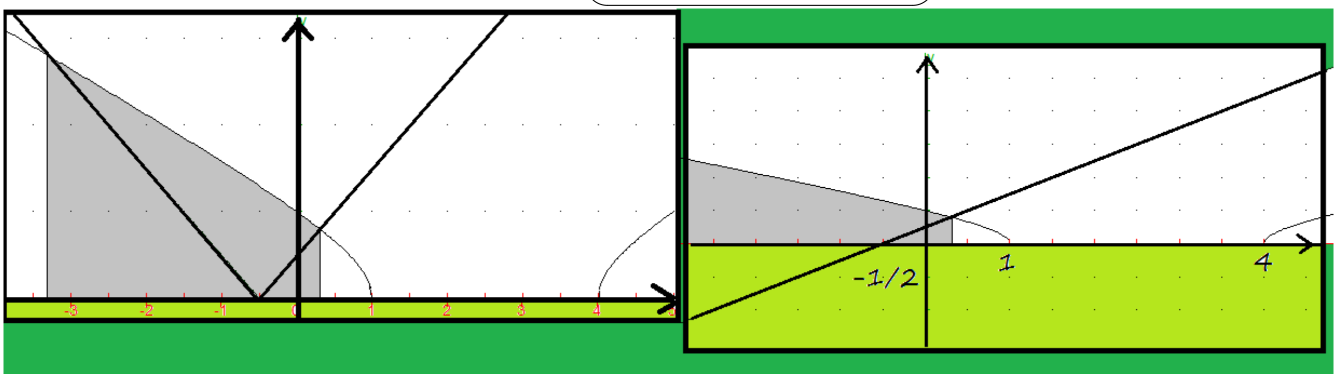
◦44◦ Résolvez dans $\mathbb{R}$ $\sqrt{x^2 - 5.x + 4} \geqslant |2.x + 1|$.
Résolvez dans $\mathbb{R}$ $\sqrt{x^2 - 5.x + 4} \geqslant 2.x + 1$.

Dans la première inéquation, tout est positif. Il y a donc équivalence avec $x^2 - 5.x + 4 \geqslant (2.x+1)^2$.
On trouve l'inéquation du second degré $0 \geqslant 3.x^2 + 9.x - 3$. Le trinôme convexe $x^2 + 3.x - 1$ est négatif entre ses racines : $S = \left[\frac{-3-\sqrt{13}}{2}, \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right]$.
Sauf qu'il y a aussi une condition dès le début : il faut que $x^2 - 5.x + 4$ soit positif. On doit donc intersecter avec $]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[$.
Par chance, $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ est plus petit que 1 : $\boxed{S = \left[\frac{-3-\sqrt{13}}{2}, \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right]}$

Pour la seconde, on a la conditions de départ : $x^2 - 5.x + 4 \geqslant 0$.
Ensuite, on sépare :

domaine	condition	équation	
$\left[-\frac{1}{2},\ +\infty\right[$	$2.x+1 \geqslant 0$	$(2.x+1)^2 \leqslant x^2-5.x+4$	$\left[\frac{-3-\sqrt{13}}{2},\ \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right] \bigcap \left[-\frac{1}{2},\ +\infty\right[$
$\left]-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]$	$2.x+1 \leqslant 0$	$2.x+1 \leqslant 0 \leqslant \sqrt{x^2-5.x+4}$	$\left]-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]$

Et on intersecte encore avec $]-\infty,\ 1] \cup [4,\ +\infty[$: $\boxed{S = \left]-\infty,\ \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right]}$



Et que n'ai je dressé un tableau ?

	$\left]-\infty,\ \frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right]$	$\left[\frac{-3-\sqrt{13}}{2},\ \frac{-1}{2}\right]$	$\left[\frac{-1}{2},\ \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right]$	$\left[\frac{-3+\sqrt{13}}{2},\ -1\right]$	$\left[-1,\ 4\right]$	$\left[4,\ +\infty\right[$
$\sqrt{x^2-5.x+4}$	existe positif	existe positif	existe positif	existe positif	n'existe pas	existe
$2.x+1$	négatif	négatif	positif	positif	positif	positif
$\lvert 2.x+1\rvert$	$-1-2.x$	$-1-2.x$	$1+2.x$	$1+2.x$	$1+2.x$	$1+2.x$
$x^2-5.x+4 \geqslant (2.x+1)^2$	faux	vrai	vrai	faux	faux	faux

∘45∘

On suppose $x_n = a_n + b_n$. Montrer $(x_n \sim a_n) \Leftrightarrow (b_n = o(a_n))$.

	entre	$\frac{a_n+b_n}{a_n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini
Il y a équivalence	et	$1+\frac{b_n}{a_n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini
	et	$\frac{b_n}{a_n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini

Avec ces Types, on épargne les comPromis. Elle évite les COpines lentes. Le capitaine fait Mander les marins à Bord. Tu me Paraissais bien CaLine. SI c'est mon énorme trUc ! Brigitte ne crût plus ce maçon. Il m'a véhIculé malgré ma suspENsion. Faut pas manquer de pèze Pour une belle comBine. On cherche leS ados dans les lyCées. Il apprécie les nyLons à CHoisir. Le curé cherche des Tenues pour les Catés.

∘46∘

Qui est le plus grand : 2^{22}, $\binom{34}{7}$, $\binom{25}{13}$?
(si possible sans calculatrice évidemment).

On va décomposer $\binom{34}{7}$ et $\binom{25}{13}$ en produit de facteurs premiers :

$$\binom{25}{13} = \binom{25}{12} = \frac{25.24.23.22.21.20.19.18.17.16.15.14}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}$$

douze termes en haut, douze termes en bas

$$\binom{25}{13} = \frac{25.\star.23.22.21.20.19.18.17.16.15.14}{1.2.\star.4.5.6.7.\star.9.10.11.12} = \frac{25.\star.23.\ast.21.20.19.18.17.16.15.14}{1.\ast.\star.4.5.6.7.\star.9.10.\ast.12}$$

$$\binom{25}{13} = \frac{25.\ast.23.\ast.21.\dagger.19.18.17.16.15.14}{1.\ast.\star.\dagger.\dagger.6.7.\star.9.10.\ast.12} = \frac{25.\ast.23.\ast.21.\dagger.19.18.17.16.15.\sharp}{1.\ast.\star.\dagger.\dagger.6.\sharp.\star.9.5.\ast.12}$$

on élimine encore les facteurs 5, 3 : $\binom{25}{13} = 2^2.5^2.7.17.19.23$

De même ou presque (on suite une autre méthode ?)

$$\binom{34}{7} = \frac{34\times 33\times 32\times 31\times 30\times 29\times 28}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7} = \frac{2.17\times 33\times 2^5\times 31\times 2.3.5\times 29\times 2^2.7}{1\times 2\times 3\times 2^2\times 5\times 2.3\times 7} = 2^5.11.17.29.31$$

Pour comparer nos deux binomiaux, on effectue le quotient pour simplifier au maximum :

$$\frac{\binom{25}{13}}{\binom{34}{7}} = \frac{2^2.5^2.7.17.19.23}{2^5.11.17.29.31} = \frac{5^2.7.19.23}{2^3.11.29.31}$$

Là, on n'a plus guère le choix : on calcule (à la main) : $\dfrac{\binom{25}{13}}{\binom{34}{7}} = \dfrac{76\,475}{79\,112}$.

C'est $\binom{34}{7}$ qui l'emporte.

Et pour insérer 2^{22} qui vaut un peu plus que $4.10^3.10^3$, il faut être prudent.

$2^{22} = 4\,194\,304$	$\binom{25}{13} = 5\,200\,300$	$\binom{34}{7} = 5\,379\,616$

∘47∘

♡ On donne : $u_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3} + \frac{4}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)_{n\to+\infty}$. Donnez le développement de $u_{n+1} - u_n$ sous la forme $\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\to+\infty}$.
Même question avec $2.u_{2.n} - u_n$.

On a $u_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3} + \frac{4}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)_{n\to+\infty}$ mais aussi $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} + \frac{3}{(n+1)^3} + \frac{4}{(n+1)^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)_{n\to+\infty}$.

Oui, $\alpha_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\alpha_n = o\left(\frac{1}{n+1}\right)$ c'est pareil, il suffit de revenir à la définition.
On a donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} + \frac{3}{(n+1)^3} + \frac{4}{(n+1)^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)_{n\to+\infty} - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3} - \frac{4}{n^4}$$

Inutile de cumuler les petits o. Mais sinon, on n'écrit quand même pas $o\left(\frac{1}{n^4}\right)_{n\to+\infty} - o\left(\frac{1}{n^4}\right)_{n\to+\infty} = 0$.
Ce n'est pas forcément « le même petit o ».

On regroupe

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + 2.\left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n)^2}\right) + 3.\left(\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n)^3}\right) + 4.\left(\frac{1}{(n+1)^4} - \frac{1}{(n)^4}\right) + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Quitte à regrouper :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{-1}{n.(n+1)}\right) - 2.\left(\frac{2.n+1}{n^2.(n+1)^2}\right) - 3.\left(\frac{3.n^2+3.n+1}{n^3.(n+1)^3}\right) - 4.\left(\frac{4.n^3+6.n^2+4.n+1}{(n+1)^4}\right) + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Le premier est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ et les suivants sont des $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On a déjà $u_{n+1} - u_n \sim \frac{-1}{n^2}$

On soustrait :

$$u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n^2} = \left(\frac{-1}{n.^2(n+1)}\right) - 2.\left(\frac{2.n+1}{n^2.(n+1)^2}\right) - 3.\left(\frac{3.n^2+3.n+1}{n^3.(n+1)^3}\right) - 4.\left(\frac{4.n^3+6.n^2+4.n+1}{(n+1)^4}\right) + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

On a cette fois $u_{n+1} - u_n - \frac{1}{n^2} \sim \frac{-3}{n^2}$ (les deux premiers termes sont en $\frac{1}{n^3}$avec coefficients -2 et -1)
d'où $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On peut recommencer encore une fois :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^4} o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$$

Remarque : on demandait un terme en $\frac{a}{n}$, il est nul.

Avec la même méthode :

$$2.u_{2.n} - u_n = -\frac{1}{n^2} - \frac{9}{4.n^3} - \frac{7}{2.n^4} o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$$

∘48∘ Pour a dans $]-\pi,\ 0[\cup]0,\ \pi[$, on définit : $f_a = x \longmapsto Arctan\Big(\frac{x-\cos(a)}{\sin(a)}\Big) - a + \frac{\pi}{2}$. Donnez son domaine de définition, ses limites aux bornes.
Indiquez suivant a son sens de variations, et ses éventuels points d'inflexion.

Donnez le développement limité d'ordre n en 0 de f_a.

Cette application est définie sur tout $\mathbb{R}$.
Malproprement : « pour tout x réel » (mais ça permet de bien dire que la variable c'est x).

Quand x tend vers l'infini, $\frac{x-\cos(a)}{\sin(a)}$ tend aussi vers l'infini et son arctangente tend vers $\pi/2.$ ou $-\pi/2$.
En effet, le signe de $\sin(a)$ a son importance.

position de a	signe de $\sin(a)$	limite quand x tend vers $-\infty$	limite quand x tend vers $+\infty$
$]-\pi,\ 0[$	$\ominus$	$\pi - a$	$-a$
$]0,\ \pi[$	$\oplus$	$-a$	$\pi - a$

Pour le sens de variation[1], pas besoin de dériver. $x \longmapsto \frac{x-\cos(a)}{\sin(a)}$ est monotone, on compose avec *Arctan* (croissante) et on ajoute et soustrait des constantes.
L'application f_a est croissante pour $\sin(a)$ positif, décroissante sinon.

On a quand même besoin de dériver cette composée

x	$\longrightarrow$	$\frac{x-\cos(a)}{\sin(a)}$	$\longrightarrow$	$Arctan\Big(\frac{x-\cos(a)}{\sin(a)}\Big)$	$\longrightarrow$	$Arctan\Big(\frac{x-\cos(a)}{\sin(a)}\Big) - a + \frac{\pi}{2}$
	affine		*Arctan*		affine	
	$\frac{1}{\sin(a)}$		$\frac{1}{1+\Big(\frac{x-\cos(a)}{\sin(a)}\Big)^2}$		1	

On simplifie et il reste $x \longmapsto \frac{\sin(a)}{x^2 - 2.x.\cos(a) + 1}$.
Sous cette forme, on sent qu'il va être facile de donner le développement limité de f'_a en 0 (mal dit mais compris « en $x = 0$ »).
Il suffira ensuite d'intégrer.

On décompose :

$$\frac{\sin(a)}{x^2 - 2.x.\cos(a)+1} = \frac{1}{2.i}.\Big(\frac{-1}{x - e^{-i.\theta}} + \frac{1}{x - e^{i.\theta}}\Big) = \frac{1}{2.i}.\Big(\frac{e^{i.\theta}}{1 - x.e^{i.\theta}} - \frac{e^{-i.\theta}}{1 - x.e^{-i.\theta}}\Big)$$

On peut développer à tout ordre (série géométrique) :

$$\frac{\sin(a)}{x^2 - 2.x.\cos(a)+1} = \frac{1}{2.i}.\Big(e^{i.\theta}.\sum_{k=0}^{n}(x.e^{i.\theta})^k - e^{-i.\theta}.\sum_{k=0}^{n}(x.e^{-i.\theta})^k + o(x^n)\Big)$$

On regroupe :

$$\frac{\sin(a)}{x^2 - 2.x.\cos(a)+1} = \sum_{k=0}^{n} x^k.\frac{e^{i..(k+1).\theta} - e^{-i.(k+1).\theta}}{2.i} + o(x^n)$$

On remercie de Moivre et Euler : $\boxed{\frac{\sin(a)}{x^2 - 2.x.\cos(a)+1} = \sum_{k=0}^{n} \sin((k+1).\theta).x^k + o(x^n)}$

1. pour une fois sans *s* à « variations »

Pouvait on rêver plus simple comme développement limité ? Les coefficients sont les sinus successifs $\sin(\theta)$, $\sin(2.\theta)$, $\sin(3.\theta)$ et ainsi de suite.

On intègre alors de 0 à t avec t qui va tendre vers 0 :

$$f_a(t) - f_a(0) = \sum_{k=0}^{n} \sin((k+1).\theta).\frac{t^{k+1}}{k+1} + o(t^{n+1})_{t\to 0}$$

Or, en 0, on a

$$f_a(0) = Arctan\Big(\frac{-\cos(a)}{\sin(a)}\Big) - a + \frac{\pi}{2} = Arctan\Big(\frac{-1}{\tan(a)}\Big) - a + \frac{\pi}{2} = Arctan\Big(\tan\Big(a+\frac{\pi}{2}\Big)\Big) - a + \frac{\pi}{2}$$

On est tenté de simplifier avec ardeur : $f_a(0) = 0$ ou un truc comme ça.
Mais il reste des congruences à surveiller : $Arctan(\tan(\alpha))$ ne vaut α que « modulo π ». Tout dépend ensuite de l'intervalle où α se trouve.
En fait, $Arctan(\tan(\alpha))$ramène entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

a	$a+\frac{\pi}{2}$	$Arctan\Big(\tan\Big(a+\frac{\pi}{2}\Big)\Big)$	$f_a(0)$	$f_a(x)$
$]-\pi,\ 0[$	$]-\pi/2,\ \pi/2[$	$a+\frac{\pi}{2}$	π	$\pi + \sum_{p=1}^{n+1} \frac{\sin(p.\theta)}{p}.x^p + o(x^{n+1})$
$]0,\ \pi[$	$]\pi/2,\ 3.\pi/2[$	$a+\frac{\pi}{2}-\pi$	0	$\sum_{p=1}^{n+1} \frac{\sin(p.\theta)}{p}.x^p + o(x^{n+1})$

∘49∘ Combien l'équation $a.b = 10!$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$?

Pour l'équation $a.b = 10!$, il suffit de trouver les diviseurs a de 10!. Pour chaque a, il y a un unique b.
Et on va chercher les solutions positives. En effet, pour un couple tel que $(120,\ 30240)$, on aura aussi $(-120,\ -30240)$.
Alors, qui sont les diviseurs de 10! ? Déjà, on écrit 10! comme produit de facteurs premiers.
$(1).(2).(3).(2^2).(5).(2.3).(7).(2^3).(3^2).(2.5) = 2^8.3^4.5^2.7$.
Les nombres a ne peuvent contenir que des facteurs 2, 3, 5 et 7. Et encore, avec des exposants pas trop grands.

On va écrire $a = 2^\alpha.3^\beta.5^\gamma.7^\delta$ et $a = 2^{8-\alpha}.3^{4-\beta}.5^{2-\gamma}.7^{1-\delta}$ avec
$$\begin{array}{lll} \alpha & \text{dans} & \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\} \\ \beta & \text{dans} & \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\} \\ \gamma & \text{dans} & \{0,\ 1,\ 2\} \\ \delta & \text{dans} & \{0,\ 1\} \end{array}$$

On a au total 9.5.3.2 couples, que l'on double pour les histoires de signes.

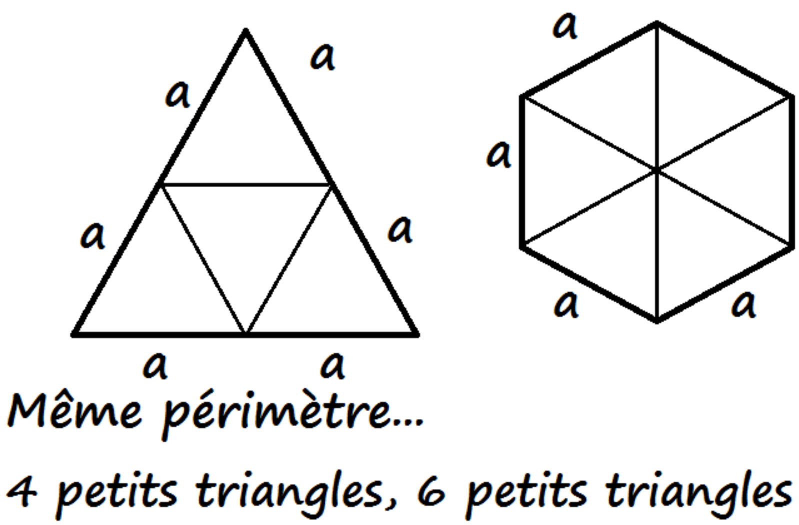
Au total $\boxed{\text{540 solutions}}$ dont la liste ne sera pas donnée ici.

La question « le nombre de diviseurs de $2^a.3^b.5^d\dots$ est égal à $(1+a).(1+b).(1+c)\dots$ » fut longtemps un classique de Terminale.

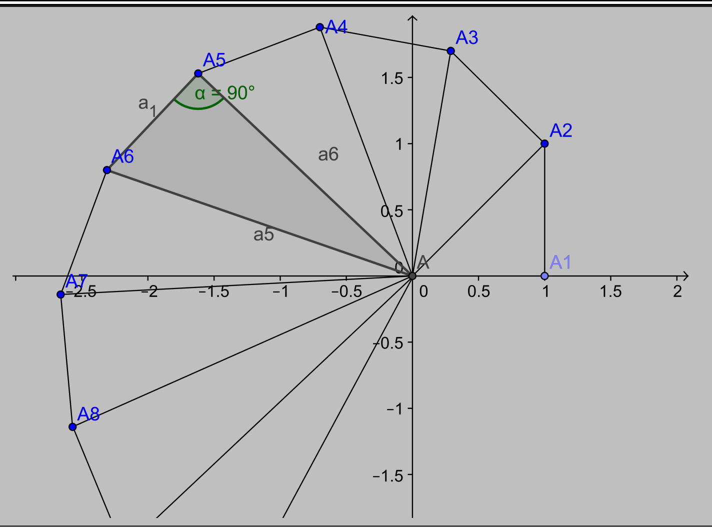
Sinon, on pouvait aussi proposer

```
F = 1
for k in range(10) :
....F *= k+1
NbDiv = 0
for k in range(1, F+1) :
....if F%k == 0 :
........NbDiv +=1
print(2*NbDiv)
```

∘50∘ Un triangle équilatéral et un hexagone régulier ont le même périmètre ; dans quel rapport sont leurs aires ?



Un dessin vaut mieux qu'un long discours.
Rapport : six contre quatre.



∘51∘ La construction de l'escargot de Pythagore est visible sur le dessin ci-contre.
Donnez un script **Python** pour en construire les segments avec le module **Turtle**.
Donnez la position du point A_n en coordonnées polaires. Montrez que module et "argument" divergent vers $+\infty$.
Que se passe-t-il si chaque longueur A_nA_{n+1} ne vaut plus 1 mais $1/(n+1)$?

∘52∘ On pose $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ et $a_{n+2} = a_{n+1}.a_n$. Calculez a_n pour tout n.
On pose $b_0 = \alpha$, $b_1 = \beta$ et $b_{n+2} = b_{n+1}.(b_n)^2$. Calculez b_n pour tout n.

Si α ou β est nul, c'est facile, on tombe très vite sur 0 et on y reste.

Sinon, on calcule les premiers, histoire d'émettre une conjecture :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	α	β	$\alpha.\beta$	$\alpha.\beta^2$	$\alpha^2.\beta^3$	$\alpha^3.\beta^5$	$\alpha^5.\beta^8$	$\alpha^8.\beta^{13}$	$\alpha^{13}.\beta^{21}$

La récurrence vient très vite, avec une formule tout de suite explicite : $a_n = \alpha^{F_n}.\beta^{F_{n+1}}$ où (F_n) (avec des parenthèses) est une suite de Fibonacci ($F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$), initialisée par 1 et 0.
Elle est initialisée : $a_0 = \alpha^1.\beta^0$ et $a_1 = \alpha^1.\beta^0$.

Supposons, pour un n donné, la formule vraie au rang n : $a_n = \alpha^{F_{n+1}}.\beta^{F_n}$ et $a_{n+1} = \alpha^{F_{n+2}}.\beta^{F_{n+1}}$. On multiplie :

$$a_{n+2} = \alpha^{F_{n+1}}.\beta^{F_n}.\alpha^{F_{n+2}}.\beta^{F_{n+1}} = \alpha^{F_{n+1}+F_{n+2}}.\beta^{F_n+F_{n+1}} = \alpha^{F_{n+3}}.\beta^{F_{n+2}}$$

La formule est validée par récurrence.

Recommençons avec des carrés : $b_{n+2} = b_{n+1}.(b_n)^2$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
b_n	α	β	$\alpha^2.\beta$	$\alpha^2.\beta^3$	$\alpha^6.\beta^5$	$\alpha^{10}.\beta^{11}$	$\alpha^{22}.\beta^{21}$	$\alpha^{42}.\beta^{43}$	$\alpha^{86}.\beta^{85}$

Ce qui serait présomptueux, ce serait de trouver tout de suite une formule explicite. On n'est plus au lycée, là où tout est simple.

C'est à vous de faire tout le travail par étapes.

On montre par récurrence évidente sur n que b_n est un produit de α et β avec des puissances à détailler.
Mettons cette idée en forme avec l'existence de deux suites u_n et v_n vérifiant $b_n = \alpha^{u_n}.\beta^{v_n}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
b_n	α	β	$\alpha^2.\beta$	$\alpha^2.\beta^3$	$\alpha^6.\beta^5$	$\alpha^{10}.\beta^{11}$	$\alpha^{22}.\beta^{21}$	$\alpha^{42}.\beta^{43}$	$\alpha^{86}.\beta^{85}$
u_n	1	0	2	2	6	10	22	42	86
v_n	0	1	1	3	5	11	21	43	85

On est certes tenté de raconter des choses en $|u_n - v_n| = 1$ pour tout n.
Mais ça ne sert pas beaucoup.
Ce qu'on veut, c'est prouver l'existence de ces suites (par récurrence) et trouver leur forme ou pour le moins des informations.

Par récurrence forte, supposons pour un entier n que u_n, v_n, u_{n+1} et v_{n+1} existent.
On écrit donc $b_n = \alpha^{u_n}.\beta^{v_n}$ et $b_{n+1} = \alpha^{u_{n+1}}.\beta^{v_{n+1}}$.
On multiplie : $b_{n+2} = (\alpha^{u_n}.\beta^{v_n})^2.\alpha^{u_{n+1}}.\beta^{v_{n+1}} = \alpha^{2.u_n+u_{n+1}}.\beta^{2.v_n+v_{n+1}}$.
On pose alors $u_{n+2} = 2.u_n + u_{n+1}$ et $v_{n+2} = 2.v_n + v_{n+1}$ (là, c'est à nous de prendre cette initiative).
u_{n+2} et v_{n+2} existent. C'est bon, la récurrence s'achève.

Les deux suites (u_n) et (v_n) existent.

Maintenant, on les explicite. On a montré $u_{n+2} = 2.u_n + u_{n+1}$.
On écrit l'équation caractéristique : $\lambda^2 = \lambda + 2$. On trouve $(u_n) \in Vect((2^n), ((-1)^n))$.
Si vous préférez : il existe A et B vérifiant « pour tout n, $u_n = A.(2)^n + B.(-1)^n$.
Il ne va de même pour (v_n). Et on trouve A et B par les conditions initiales :

suite u	suite v
$A.(2)^n + B.(-1)^n$	$A'.(2)^n + B'.(-1)^n$
$A + B = 1$	$A' + B' = 0$
$2.A - B = 0$	$2.A' - B' = 1$
$\dfrac{2^n + 2.(-1)^n}{3}$	$\dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$

La formule définitive est $\boxed{b_n = \alpha^{(2^n+2.(-1)^n)/3}.\beta^{(2^n-(-1)^n)/3}}$