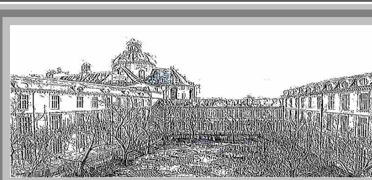
LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 20 octobre
M.P.S.I.2



2023 2024

IS06

θ est un réel de $]0,\ \pi/2[$. Donnez les deux racines de l'équation $x^2 - \dfrac{2.x}{\sin(2.\theta)} + 1 = 0$ d'inconnue x réelle.

Montrez que l'une des racines du polynôme $X^3 + (1 - 20.i).X^2 - (137 + 15.i).X - 50 + 310.i$ est imaginaire pur (en la trouvant).

Posez la division euclidienne.

Trouvez les deux autres racines et montrez que les trois racines forment un triangle isocèle rectangle.

Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(4.t).\sin(t).dt$ en pendant à transformer le produit en somme.

Justifiez : $e^{2.i.\theta} = \dfrac{1 + i.\tan(\theta)}{1 - i.\tan(\theta)}$.

En prenant la partie imaginaire, exprimez $\sin(2.\theta)$ à l'aide de $\tan(\theta)$.

Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta) + \sin(2.\theta)}$ avec le changement de variable $t = \tan(\theta)$.

.

Soit I l'intégrale $\int_3^8 \frac{3.dt}{t-1+\sqrt{t+1}}$. Effectuez le changement de variable $u=\sqrt{t+1}$.

.

Décomposez en éléments simples.

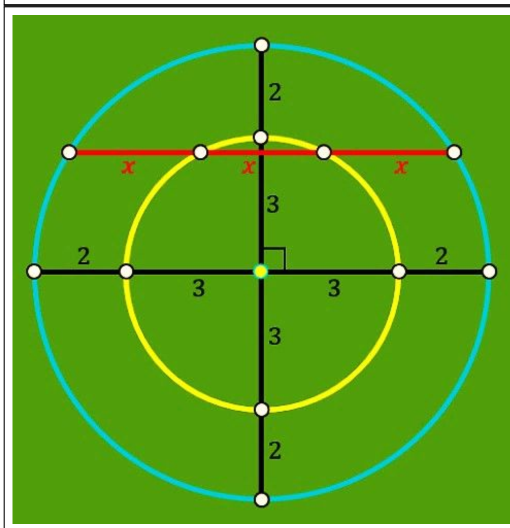
.

Calculez l'intégrale.

.

$\diamond$ 0 $\diamond$ Donnez le format de la matrice qui manque, et calculez ses coefficients. 3 pt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & ? \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -5 & -5 & 5 \\ -12 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$ Format : ☐ lignes / ☐ colonnes



Trouvez x. 2 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 20 octobre
M.P.S.I.2

2023 2024
IS06
CORRECTION

θ est un réel de $]0,\ \pi/2[$. Donnez les deux racines de l'équation $x^2 - \dfrac{2.x}{\sin(2.\theta)} + 1 = 0$ d'inconnue x réelle.

On calcule le discriminant :

$$\Delta = \frac{4}{\sin^2(2.\theta)} - 4 = 4.\frac{1-\sin^2(2.\theta)}{\sin^2(2.\theta)} = 4.\frac{\cos^2(2.\theta)}{\sin^2(2.\theta)}$$

Il est positif et on peut poser $\delta = 2.\dfrac{\cos(2.\theta)}{\sin(2.\theta)}$. On calcule les deux racines

$$\frac{\dfrac{2}{\sin(2.\theta)} \pm \dfrac{2.\cos(2.\theta)}{\sin(2.\theta)}}{2} = \frac{1 \pm \cos(2.\theta)}{\sin(2.\theta)}$$

On peut ensuite écrire $1 + \cos(2.\theta) = 2.\cos^2(\theta)$ et $1 - \cos(2.\theta) = 2.\sin^2(\theta)$ et aussi $\sin(2.\theta) = 2.\sin(\theta).\cos(\theta$.
On a trouvé les deux racines : $\tan(\theta)$ et $\dfrac{1}{\tan(\theta)}$ (dont l'existence esr assurée).

On pouvait aussi proposer et vérifier.

Les formules $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)} = \dfrac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ *sont d'ailleurs dans le cours !*

Montrez que l'une des racines du polynôme $X^3 + (1-20.i).X^2 - (137+15.i).X - 50 + 310.i$ est imaginaire pur (en la trouvant).

On ne cherche pas comme un dingue des i, $2.i$, $-2.i$ et autres.

On réfléchit. Si on a une solution imaginaire pure $i.a$, alors il doit être simple d'identifier partie réelle et partie imaginaire.
On va donc raisonner par analyse[1] et synthèse[2].

On écrit donc

$$(i.a)^3 + (1-20.i).(i.a)^2 - (137+15.i).(i.a) - 50 + 310.i$$

On identifie partie réelle et partie imaginaire

$$0 - a^2 + 15.a - 50 = 0 \ \textit{et} \ -a^3 + 20.a^2 - 137.a + 310 = 0$$

On résout l'équation du second degré (deux racines 5 et 10). On reporte dans la seconde et seule 5 convient.

On tient la seule racine possible : $5.i$ et d'ailleurs quand on reporte, on annule bien partie réelle et partie imaginaire.

$X^3 \quad +($
$-(X^3$
$($
$-($

Posez la division euclidienne.

Et pourquoi ne tricherais-je pas. On note z_1, z_2 et $5.i$ le strois racines.
On sait : $z_1 + z_1 + 5.i = 20.i - 1$ et $z_1.z_2.(5.i) = 50 - 310.i$.
On trouve alors $z_1 + z_2$ et $z_1.z_2$. On n'a plus qu'aà écire le quotient $X^2 - (z_1+z_2).X + z_1.z_2$ (et le reste est nul).

1. je cherche la solution à coups de conditions nécessaires en supposant qu'il en existe une
2. on propose on vérifie

Trouvez les deux autres racines et montrez que les trois racines forment un triangle isocèle rectangle.

On résout à présent $z^2 + (1 - 15.i).z - 62 - 10.i = 0$ d'inconnue complexe z.

On calcule le discriminant :

$$(1 - 15.i)^2 - 4.(-62 - 10.i) = 1 - 225 - 30.i + 248 + 40.i = 24 + 10.i$$

On cherche les racines carrées de ce complexe en résolvant

$\Re e$	$a^2 - b^2$	$= 24$
module	$a^2 + b^2$	$= \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$
$\Im m$	$2.a.b$	$= 10$

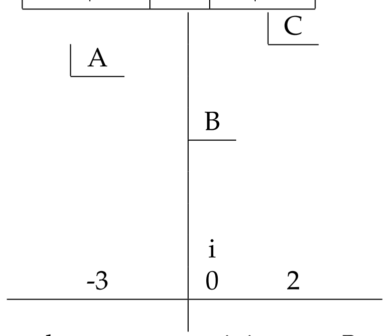
Je trouve $\delta = 5 + i$ et je vérifie.

Les deux racines sont donc $\frac{15.i-1+(5+i)}{2} = 2 + 8.i$ *et* $\frac{15.i-1-(5+i)}{2} = -3 + 7.i$

On a nos trois racines qu'on peut disposer dans le plan complexe : $-3 + 7.i$, $5.i$ et $2 + 8.i$.

On les nomme

z_A	z_B	z_C
$-3 + 7.i$	$5.i$	$2 + 8.i$



Sur le dessin, on se dit que le sommet « isocèle » du triangle doit être en B

On se ramène donc avec « origine en B » en calculant les affixes des deux vecteurs $z_A - z_B$ et $z_C - z_B$

$z_A - z_B$	$z_B - z_B$	$z_C - z_B$
$-3 + 2.i$		$2 + 3.i$

Les deux vecteurs ont la même norme $\sqrt{3^2 + 2^2}$. Triangle isocèle.
Et on passe de l'un à l'autre par multiplication par i : rotation d'angle $\pi/2$.
On a bien un triangle isocèle rectangle : $z_A - z_B = e^{i.\pi/2}.(z_C - z_B)$.

Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(4.t).\sin(t).dt$ en pendant à transformer le produit en somme.

Déjà l'intégrale existe.
Ensuite, on transforme le produit en somme (hyper classique) :

$$\cos(4.t).\sin(t) = \frac{\sin(5.t) - \sin(3.t)}{2}$$

On peut l'avoir avec les formules de Moivre et Euler

$$\cos(4.t).\sin(t) = \frac{(e^{4.i.t} + e^{-4.i.t}).(e^{i.t} - e^{-i.t})}{2.2.i} = \frac{1}{2}.\frac{(e^{5.i.t} - e^{-5.i.t}) + (e^{-3.i.t} - e^{3.i.t})}{2.i} = \frac{\sin(5.t) - \sin(3.t)}{2}$$

On intègre avec des cosinus

$$\int_0^{\pi/2} \cos(4.t).\sin(t).dt = \frac{1}{2}.\int_0^{\pi/2} (\sin(5.t) - \sin(3.t)).dt = \Big[\frac{-\cos(5.t)}{10} + \frac{\cos(3.t)}{6}\Big]_0^{\pi/2}$$

Les cosinus (impairs) sont nuls en $\dfrac{\pi}{2}$ et donnent 1 en 0.

Attention, avec $\cos\left(4.\frac{\pi}{2}\right)$ *on n'aurait pas eu* 0.

On pouvait aussi développer $\cos(4.t) = 8.\cos^4(t) - 8.\cos^2(t) + 1$ *et intégrer par exemple*

$$\int_0^{\pi/2} 8.\cos^4(t).\sin(t).dt = \Big[-\frac{8.\cos^5(t)}{5}\Big]_0^{\pi/2}$$

en identifiant fort heureusement une forme en $u^4.u'$. Rappelons qu'on n'a pas de primitive agréable de $t \longmapsto \cos^4(t)$, tandis que $t \longmapsto \cos^4(t).\sin(t)$ est le rêve du méthématicien.

Justifiez : $e^{2.i.\theta} = \dfrac{1+i.\tan(\theta)}{1-i.\tan(\theta)}$.

Partons du membre le plus compliqué pour arriver au plus simple.

$$\frac{1+i.\tan(\theta)}{1-i.\tan(\theta)} = \frac{1+i.\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1+i.\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{\cos(\theta)+i.\sin(\theta)}{\cos(\theta)-i.\sin(\theta)} = \frac{e^{i.\theta}}{e^{-i.\theta}} = e^{i.\theta}.e^{i.\theta} = e^{2.i.\theta}$$

En prenant la partie imaginaire, exprimez $\sin(2.\theta)$ à l'aide de $\tan(\theta)$.

On va faire les deux, car ça devient du cours. On élimine le dénominateur complexe de $\dfrac{1+i.\tan(\theta)}{1-i.\tan(\theta)}$ en utilisant la quantité conjuguée

$$\frac{1+i.\tan(\theta)}{1-i.\tan(\theta)} = \frac{(1+i.\tan(\theta))^2}{(1-i.\tan(\theta)).(1+i.\tan(\theta))} = \frac{1-\tan^2(\theta)+2.i.\tan(\theta)}{1^2+\tan^2(\theta)}$$

Comme ceci coïndide avec $\cos(2.\theta)+2.i.\sin(\theta)$ (Euler), on identifie

$$\cos(2.\theta) = \frac{1-\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} \ et\ \sin(2.\theta) = \frac{2.\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}$$

Une erreur de calcul peut vous conduire à $\sin(2.\theta) = \dfrac{2.\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$*. Vous ne pouvez pas l'encadrer. En effey, quand la tangente vaut* 1*, votre sinus explose, ce qui n'est pas très cohérent. Et votre sinus doit se retrouver à dépasser* 1*.*
Avant d'encadrer, on réfléchit.
Mais on encadre aussi... Je dis ça pour certains.

Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)+\sin(2.\theta)}$ avec le changement de variable $t = \tan(\theta)$.

On pose en fait $\theta = Arctan(t)$ ce qui permet d'écrire $d\theta = \dfrac{dt}{1+t^2}$.
On a aussi $\sin(2.\theta) = \dfrac{2.t}{1+t^2}$ et $\cos^2(\theta) = \dfrac{1}{1+t^2}$(notre célèbre $1+\tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$)

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/3} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)+\sin(2.\theta)} = \int_{t=0}^{t=\sqrt{3}} \frac{1}{\dfrac{1}{1+t^2}+\dfrac{2.t}{1+t^2}}.\frac{dt}{1+t^2} = \int_{t=0}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+2.t} = \frac{1}{2}.\ln\Big(\frac{1+2.\sqrt{3}}{1+2.0}\Big)$$

Peut être que directement certains ont évité le changement de variable

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/3} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)+2.\sin(\theta).\cos(\theta)} = \int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)+2.\cos^2(\theta).\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}$$

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/3} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)+2.\sin(\theta).\cos(\theta)} = \int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{1+2.\tan(\theta)}.\frac{d\theta}{\cos^2(\theta)}$$

Soit I l'intégrale $\displaystyle\int_3^8 \frac{3.dt}{t-1+\sqrt{t+1}}$. Effectuez le changement de variable $u = \sqrt{t+1}$.

Petit détail préliminaire : l'intégrale existe car $t+1$ dépasse 1 sur tout l'intervalle d'intégration, donc $\sqrt{t+1}$ aussi et $\sqrt{t+1}-1$ reste positif. On lui ajoute t, le dénominateur ne s'annule jamais.
On glisse au passage le mot « continuité » pour garantir l'intégrabilité.

On effectue le changement dans les deux sens pour avoir l'élément différentiel : $t = u^2-1$ donc $dt = 2.u.du$.
On change les bornes, la fonction et l'élément différentiel :

$$\int_{t=3}^{t=8} \frac{3.dt}{t-1+\sqrt{t+1}} = \int_{u=\sqrt{3+1}}^{u=\sqrt{8+1}} \frac{3.2.u.du}{u^2-1-1+u} = \int_2^3 \frac{6.u.du}{u^2+u-2}$$

Décomposez en éléments simples.

$$\frac{6.u}{u^2+u-2} = \frac{6.u}{(u-1).(u+2)} = \frac{2}{u-1} + \frac{4}{u+2}$$

Calculez l'intégrale.

On intègre en logarithmes

$$\int_{t=3}^{t=8} \frac{3.dt}{t-1+\sqrt{t+1}} = \int_2^3 \Big(\frac{2}{u-1} + \frac{4}{u+2}\Big).du = 2.\ln\Big(\frac{3-1}{2-1}\Big) + 4.\ln\Big(\frac{3+2}{2+2}\Big)$$

On termine avec la mention « calculable » et si on y tient, on donne $\ln\Big(\frac{5^4}{2^6}\Big)$.

Donnez le format de la matrice qui manque, et calculez ses coefficients.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} & \\ & \\ & ? \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -5 & -5 & 5 \\ -12 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$ Format : $\square$ lignes / $\square$ colonnes

En notant c et l les formats qui manquent, on a avec les formats déjà donnés :

$$[3,\ 2].[c,\ l].[2,\ 3] \to [3,\ 3]$$

Les formats qui manquent sont : deux lignes (pour tomber sur deslignes de deux colonnes de large)
et deux lignes (pour que tombent dessus des colonnes de deux lignes de haut).

On nomme les coefficients et on vérifie la cohérence visuelle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -5 & -5 & 5 \\ -12 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$

On effectue les calculs

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+2.c & b+2.d \\ a+3.c & b+3.d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

et on voit qu'on va avoir neuf équations pour seulement quatre inconnues

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.a+2.c+5.b+5.d & a+c+3.b+3.d & a+c+b+d \\ 2.a+4.c+5.b+10.d & a+2.c+3.b+6.d & a+2.c+b+2.d \\ 2.a+6.c+5.b+15.d & a+3.c+3.b+9.d & a+3.c+b+3.d \end{pmatrix}$$

On identifie terme à terme avec la matrice de droite. On a bien neuf équations.

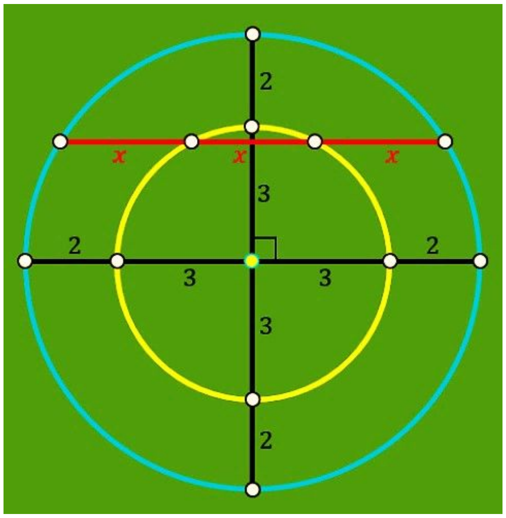
Et si on n'en garde que quatre
$$\begin{matrix} 2.a+2.c+5.b+5.d = 2 \\ a+c+3.b+3.d = 0 \\ 2.a+4.c+5.b+10.d = -5 \\ a+2.c+3.b+6.d = -5 \end{matrix}$$

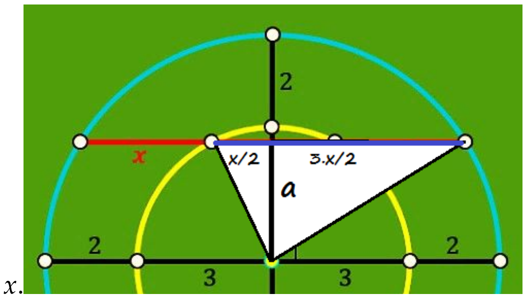
C'est moche mais ça se fait, avec des combinaisons.

On trouve une solution, et on vérifie pour les derniers coefficients de la matrice produit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -5 & -5 & 5 \\ -12 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$

Il est possible que vous ayez trouvé des solutions (du bon format) qui ne valident qu'une partie de la grande matrice produit.
Ce sera déjà bien.





Trouvez x.

On applique le théorème de Pythagore dans deux triangles, après avoir nmmé a la distance entre la corde x et le centre des deux cercles concentriques.
Dans le plus petit des deux triangles rectangles (côtés a et $x/2$, hypoténuse égale au rayon du petit cercle)
Dans le plus grand des deux triangles rectangles (côtés a et $3.x/2$, hypoténuse égale au rayon du grand cercle)

$$a^2 + \frac{x^2}{4} = 3^2 \ et \ a^2 + \frac{9.x^2}{4} = 5^2$$

On soustrait membre à membre, les a^2 s'en vont[3] :

$$\frac{8.x^2}{4} = 5^2 - 3^2$$

On résout et on trouve $x = 2.\sqrt{2}$. Et c'est cohérent avec le dessin.

3. on pourra calculer a ensuite si on y tient