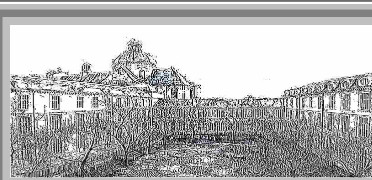
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 13 novembre
M.P.S.I.2



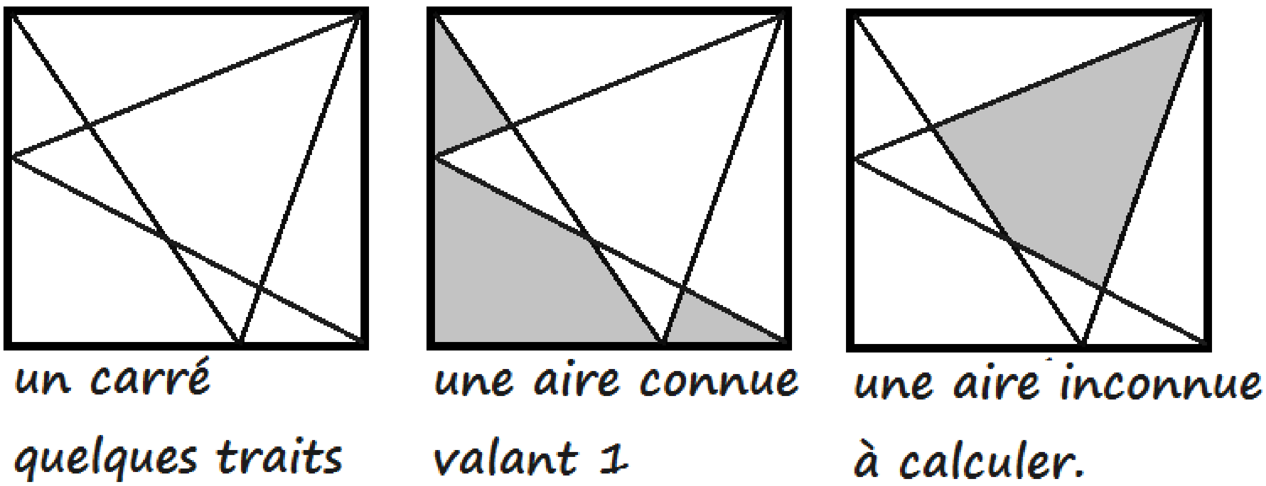
2023 2024

TD08

∘0∘ (a_n) est une suite réelle convergente de limite α. k est un entier naturel donné. On pose $D_n = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j}.(-1)^j.a_{k+n+j}$ pour tout n. Calculez $D_{n+1} - D_n$.

Calculez alors la limite quand N tend vers l'infini de $\sum_{n=0}^{N} \Big(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}.a_{n+k+i}.(-1)^i \Big)$.

∘1∘



∘2∘ ♡ On définit le connecteur logique de Scheffer : $a\#b = \overline{a \text{ et } b}$ *(en électronique, c'est le NAND, câblé avec trois transistors)*.
Exprimez en n'utilisant que des # *(et des a et des b, mais pas de et, de ou ou de non)* les propositions logiques

$non(a)$	a et b	a ou b	$a \Longrightarrow b$	a ou$_e$ b	$a \Longleftrightarrow b$

∘3∘ ♡ Donnez une primitive de $t \longmapsto \sin(\ln(t))$ sur $]0,\ +\infty[$.

∘4∘ Montrez que pour tout entier naturel n, $(t.\ln(t))^n$ tend vers 0 quand t tend vers 0.
Pour tout n, on pose $I_n = \int_0^1 (\ln(t))^n.dt$. Calculez I_0, I_1 et I_2.
Calculez I_n pour tout n en intégrant par parties.

∘5∘ Donnez une primitive de $x \longmapsto e^{Arcsin(x)}$ (il faudra peut être intégrer deux fois par parties)..

∘6∘ ♡ Montrez $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{\sum_{k=1}^{n}(k^3-k)} = \frac{11}{9}$.

∘7∘ ♡ n décrit l'ensemble des entiers naturels et k décrit l'ensemble des entiers relatifs. Lesquelles des propositions suivantes sont vraies *(et écrivez les avec des connecteurs logiques et, ou, ⇒ et ⇔)* :

$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif ou strictement plus grand que n.	
$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif ou si k est strictement plus grand que n.	
$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif et si k est strictement plus grand que n.	
$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif et strictement plus grand que n.	
Pour que $\binom{n}{k}$ vaille 1 il faut que k soit égal à n.	
Pour que $\binom{n}{k}$ vaille 1 il faut que $k^3 - n^2.k$ soit nul.	

∘8∘ Montrez : $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{4.\cos(\theta).d\theta}{\sin(\theta)+\cos(\theta)} = \ln(2) + \frac{\pi}{2}$ après avoir justifié l'existence de l'intégrale.

Rappel : pour calculer $\displaystyle\int R(\cos(\theta), \sin(\theta)).d\theta$ on change de variable avec les règles de Bioche, en testant l'invariance de $R(\cos(\theta), \sin(\theta)).d\theta$ par symétrie trigonométrique :

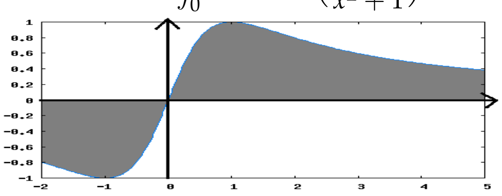
symétrie	invariance	poser
$\theta \to -\theta$	si $R(\cos(-\theta), \sin(-\theta)).(-d\theta) = R(\cos(\theta), \sin(\theta)).d\theta$	poser $c = \cos(\theta)$
$\theta \to \pi - \theta$	si $R(\cos(\pi-\theta), \sin(\pi-\theta)).(-d\theta) = R(\cos(\theta), \sin(\theta)).d\theta$	poser $s = \sin(\theta)$
$\theta \to \pi + \theta$	si $R(\cos(\pi+\theta), \sin(\pi+\theta)).d\theta = R(\cos(\theta), \sin(\theta)).d\theta$	poser $\tau = \tan(\theta)$
$\theta \longmapsto \theta + 2.\pi$	si rien n'a marché	poser $t = \tan(\theta/2)$

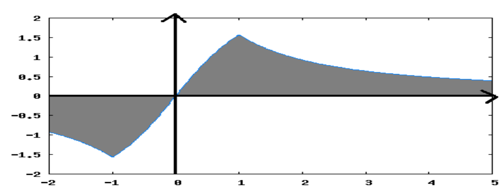
∘9∘ Montrez : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{ch(t)}{ch(2.t)}.dt = \frac{\pi.\sqrt{2}}{4}$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(\theta)}{\cos(2.\theta)}.d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}.\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$.

Indication : $u^4 + 1 = (u^2+1)^2 - 2.u^2$ et on peut factoriser.

∘10∘ Calculez $\displaystyle\int_0^1 Arcsin\left(\frac{2.x}{x^2+1}\right).dx$.

Calculez ensuite $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} Arcsin\left(\frac{2.x}{x^2+1}\right).dx$ après en avoir vérifié évidemment l'existence.





∘11∘ Montrez : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2.\theta)}{2+\cos^2(\theta)}.d\theta = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$. Montrez : $\displaystyle\int_0^1 \frac{Arctan(t)}{(1+t)^2}.dt = \frac{\ln(2)}{4}$.

∘12∘ Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos^5(t).dt$ en utilisant la bonne règle de Bioche.

Calculez $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt$ (en posant $t = sh(x)$ par exemple.

Calculez $\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$.

∘13∘ Montrez $\displaystyle\int_3^{10} \frac{3.dx}{x+4-\sqrt{x+6}} = \ln(25)$ après avoir justifié l'existence de l'intégrale.

∘14∘ Est il vrai que la consommation en essence d'une voiture est une aire ?

∘15∘ ♡ Montrez que pour $ch(x) = 5/4$, on a $sh(x) \in \mathbb{Q}$.
Combien existe-t-il de solutions dans $\mathbb{R}$ à l'équation $(ch(x),\ sh(x)) \in \mathbb{Z}^2$?
Combien existe-t-il de solutions dans $\mathbb{R}$ à l'équation $(ch(x),\ sh(x)) \in \mathbb{Q}^2$?

Rappel : $ch(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, $sh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, $ch^2 - sh^2 = ?$.

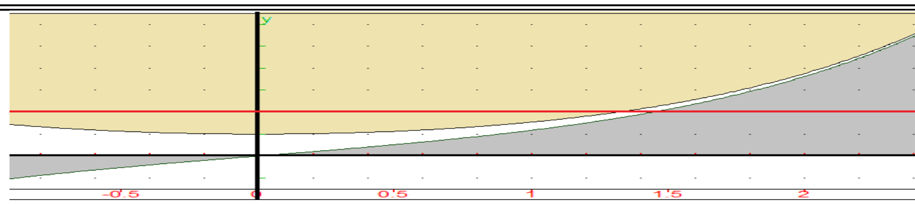
∘16∘ ♡ Montrez que $th(x/2)$ est rationnelle si et seulement si $sh(x)$ et $ch(x)$ sont rationnels.

Si $sh(x)$ vaut $\dfrac{60}{229}$, est il vrai que $ch(x)$ est rationnel ?

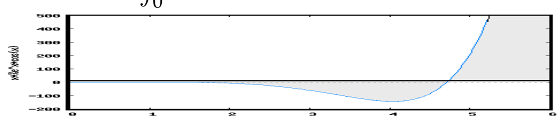
∘17∘ Calculez ces trois intégrales $\int_0^1 2^t.dt$, $\int_0^1 2^t.3^{(2^t)}.dt$ et $\int_0^1 2^t.(3^2)^t.dt$.

∘18∘ Un tour aux portes de Paris dans le sens trigonométrique :
Réunion postdatée. Clé d'hypocrite. Vélo à serpillère. La mort pilote. Amulette. Vil soleil urbain. L'autorité dupe. Le volapuk du savant affamé. Vicieuse irritante. Dose hypocrite. Encadrèrent photo. Préméditer un loto. Protège ta blonde. Sapin et graviers. Piéton perdant. Lopette vétillarde. Plan d'égout incorrect.

∘19∘ ♡ Résoudre $sh(t) \leqslant 2 \leqslant ch(t)$ d'inconnue réelle t.



∘20∘ ♡ Montrez $\int_0^{2.\pi} \cos(t).t.e^t.dt = \pi.e^{2.\pi}$.



Vous pourrez intégrer par parties, quitte à finir par retomber sur la même fonction au bout d'un moment.
Ou alors, vous pourrez essayer une primitive de la forme $t \longmapsto ((a.t+b).\sin(t) + (c.t+d).\cos(t)).e^t$.
Vous pourrez aussi mettre sous la forme $t.e^{(1+i).t}$ et intégrer par parties.

∘21∘ Pour tout n, on pose $\boxed{B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}$

Montrez que (B_n) est croissante, majorée par 2 (comparaison série intégrale, ou somme télescopique $1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.(k-1)}$).

Déduisez que (B_n) converge. On note $\boxed{\zeta(2)}$ sa limite.

Déduisez que pour tout p de $\mathbb{N}^*$, la suite $B_{p,n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2.p}}$ converge.

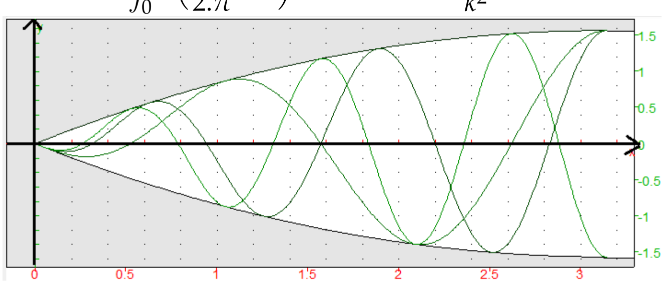
I∼0) **Vitesse de convergence.**

Montrez que (B_n) et $\left(B_n + \frac{1}{n}\right)$ forment n couple de suites adjacentes, de limite $\zeta(2)$.

I∼1) Donnez un entier n pour lequel vous êtes sûr d'avoir $|B_n - \zeta(2)| \leqslant 10^{-5}$.

II∼0) **Première méthode (Fourier, Dirichlet).**

Montrez : $\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right).\cos(k.t).dt = \frac{1}{k^2}$ pour tout entier naturel k.



II∼1) Déduisez : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right).\frac{\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.t\right)}{2.\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.dt.$

II∼2) Montrez que $t \longmapsto \left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right).\frac{1}{2.\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ notée φ se prolonge par continuité en 0 et y est même dérivable.

II∼3) En intégrant par parties, montrez que $\int_0^{\pi} \varphi(t).\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.t\right).dt$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

II∼4) Déduisez que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ converge vers $\frac{\pi^2}{6}$ quand n tend vers l'infini.

III∼0) **Entrainement.**

♡ Copiez une ligne de zêta, xi et sigma minuscule : $\boxed{\zeta \text{ et } \xi \text{ et } \varsigma.}$

IV∼0) **Deuxième méthode (Wallis et parties).**

On pose pour tout n : $I_n = \int_0^{\pi/2}\cos^{2.n}(t).dt$ et on pose aussi : $J_n = \int_0^{\pi/2} t^2.\cos^{2.n}(t).dt$ et $K_n = \frac{J_n}{I_n}$.

Montrez : $I_n = \binom{2.n}{n}.\frac{\pi}{2^{2.n+1}}$ (oui, Wallis).

IV∼1) Montrez : $I_n = 2.n.\int_0^{\pi/2} t.\cos^{2.n-1}(t).\sin(t).dt$.

IV∼2) Montrez : $J_{n-1} - J_n = \int_0^{\pi/2} t^2.\sin(t).\cos^{2.n-2}(t).\sin(t).dt$.

IV∼3) Déduisez : $J_{n-1} - J_n = \frac{1}{2.n-1}.\Big(\frac{I_n}{n} + J_n\Big)$ (par parties).

IV∼4) Déduisez : $\frac{J_{n-1}}{I_n} - K_n = `\frac{1}{2.n-1}.\Big(\frac{1}{n} + K_n\Big)$ puis $K_{n-1} - K_n = \frac{1}{2.n^2}$.

IV∼5) Montrez pour tout t de $\Big[0, \frac{\pi}{2}\Big]$: $t \leqslant \frac{\pi}{2}.\sin(t)$.

IV∼6) Déduisez : $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{8.(n+1)}.I_n$ et $0 \leqslant K_n \leqslant \frac{\pi^2}{8.(n+1)}$.

IV∼7) Retrouvez la valeur de $\zeta(2)$.

V∼0) **Troisième méthode et généralisation (Viète et trigonométrie).**

On pose $P_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\binom{2.n+1}{2.k+1}.X^{n-k}$. Donnez son degré, son coefficient dominant, et vérifiez que ses racines sont les $\cot^2\Big(\frac{k.\pi}{2.n+1}\Big)$ pour k de 1 à n inclus.

V∼1) Déduisez : $P_n = (2.n+1).\prod_{k=1}^{n}\Big(X - \cot^2\Big(\frac{k.\pi}{2.n+1}\Big)\Big)$.

V∼2) Montrez pour tout x de $\Big]0, \frac{\pi}{2}\Big[$: $\sin(x) < x < \tan(x)$ puis $0 < \frac{1}{x^2} - \cot^2(x) < 1$.

V∼3) Montrez ensuite pour tout entier p : $0 < \frac{1}{x^{2.p}} - \cot^{2.p}(x) < \frac{p}{x^{2.(p-1)}}$ (pensez aux identités remarquables de la famille de la série géométrique).

V∼4) Déduisez : $0 < \Big(\frac{2.n+1}{\pi}\Big)^{2.p}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2.p}} - \sum_{k=1}^{n}\cot^{2.p}\Big(\frac{k.\pi}{2.n+1}\Big) < p.\Big(\frac{2.n+1}{\pi}\Big)^{2.p-2}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2.(p-2)}}$.

V∼5) En exploitant les formules de Viète dans P_n après avoir divisé par $n^{2.p}$ (puis choisi $p = 1$ et $p = 2$), dédisez $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

VI∼0) **Compléments.**

Montrez : $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2.p-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2.p)^2} = \frac{\pi^2}{24}$.

VI∼1) Calculez $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2.p-1)^4}$ et $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2.p)^4}$.

VI∼2) Montrez : $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\binom{2.k}{k}.k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

VI∼3) Montrez à la « Euler » : $\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} = \prod_{p\in\mathbb{P}}\Big(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\Big) = \zeta(2)$ où $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.

VII∼0) **Accélération de la convergence.**

Pour tout k, on pose $v_k = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k.(k+1)}$. Montrez : $\forall n,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{k^3}$.

VII∼1) Montrez que la série de terme général v_k converge et que sa somme vaut $\zeta(2) - 1$.

VII~2) Montrez : $0 \leqslant \zeta(2) - 1 - \sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \dfrac{1}{2.k^2}$ par comparaison série intégrale.

VII~3) Pour quel entier n la somme $\sum_{k=1}^{n} v_k$ est elle une approximation de $\zeta(2)$ à 10^{-5} près ?

VII~4) On pose ensuite $w_k = v_k - \dfrac{1}{k.(k+1).(k+2)}$. Exprimez $\sum_{n=1}^{+\infty} w_k$ à l'aide de $\zeta(2)$.

VII~5) Pour quel entier n la somme $\sum_{k=1}^{n} w_k$ est elle une approximation de $\zeta(2) - \dfrac{5}{4}$ à 10^{-5} près ?

VII~6) Écrivez une procédure Python qui pour n donné calcule $\sum_{k=1}^{n} w_k$.

∘22∘ ♡ Sur que intervalle $(x \longmapsto (x^2-1).e^{2.x})^{(n)}$ est elle négative ? (oui, formule de Leibniz)

	D		A		B	
C	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	B
	.	.	.	.	.	
			C	C		

	A		B		C	
	.	.	.	.	.	D
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
A	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
		D	D			

Règle du jeu : sur chaque ligne, les lettres de A à D et une case transparente. Et au bout, l'indication de « qui on voit depuis ce bord ».

	A	C		A		
	A	C	D		B	
D	D	B	C	A		A
A		A	B	D	C	
C	C		A	B	D	D
	B	D		C	A	

A vous de jouer :

	D	B		D		
A						D
D						
B						A
					D	

		C		B		
C						
B						D
						A
D						
			B			

	C		A			
B						D
						D
						C
	B					

Tiens, et un programme Python qui vérifie que pour une matrice donnée sous forme de liste de listes comme [[D,B,A,O,C], [A, C, B, D,O], [O,D,C,A,B], [B, O, D, C, A], [C, A, O, B, D]] [a] pour la première que chaque ligne est chaque colonne est bien formée des cinq symboles ?
Et même qui ensuite vous dit même quelle est la première lettre (autre que O) visible depuis chaque extrémité de ligne et/ou de colonne.

a. convention : lettre O pour la case vide

Paris aux prestigieuses ***scè***nes est la capitale mondiale capitale du ***lu***xe. On y rencontre plein de ***t***i***t***is qui ru***s***ent et bi***s***ent des copines à l'air cool. On voit plein de péni***ches*** à la ***S***eine et plein de b***us*** faciles à ***ci***ter. On entend parfois soupirer des touristes subjugués par l'abî***m***e dans la ***T***our : "Ah que j'aurais aimé connaître vos ***motiv***ations, Ei***ffel*** !"

Et Joël Martin en Haute-Savoie (ah le ***g***oût de Mont-***B***lanc) :

Les amateurs de ***p***entes collectionnent les ***f***aces, ***é***patés par les f***a***ces et les ***p***entes e***ff***ilées. Une grimpeuse qui apprécie la Ver***t***e quand elle est ***j***olie, et surtout la Ver***t***e ennei***g***ée, parcourt le mont sans craindre le vi***de***. Une autre lu***g***e sous la Ver***t***e. Mais gare à l'excès de ***gl***isse quand se déchaîne le ***v***ent... dét***re***sse sur les f***a***ces !

∘23∘ Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{2+\cos^2(x)}.dx$ (Bioche ?).

∘24∘ Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}.d\theta$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}.d\theta$ (Bioche toujours ? mais déjà, sont elles égales, et que vaut leur somme ?).

∘25∘ Calculez $\displaystyle\int_0^{1} Arctan(\sqrt{1-x^2}).dx$ (parties et $s = \sin(\theta)$ par exemple).

∘26∘ Calculez $\int_a^b \frac{d\theta}{\sin^2(\theta).\cos^2(\theta)}$.

∘27∘ Calculez $\int_0^\pi \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)}$ (changez de variable en tangente, mais prenez garde aux bornes).

∘28∘ ♡ Calculez $\int_0^{\pi/4} \cos^5(t).dt$ en utilisant la règle de Bioche.

∘29∘ ♡ Calculez $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t).dt}{\sin(t)+\cos(t)}$ (pas Bioche).

∘30∘ Calculez $\int_0^1 \sin(Arctan(x)).dx$ (parties ?).

∘31∘ ♡ Calculez $\int_0^x \cos(\theta).d\theta$ en effectuant tous les changements de variable que peuvent préconiser les règles de Bioche.

∘32∘ Calculez (géométriquement pour l'une) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}.dt$ et $\int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2}.dt$.

∘33∘ Calculez ces versions trigonométriques et hyperboliques $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}.dt$ et $\int_0^{\ln(2)} \frac{sh^2(t)}{ch^2(t)}.dt$.

∘34∘ La suite u est définie par $u_0 = 7$, $u_1 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2.u_n$. (u_n) est elle croissante ? Est elle croissante à partir d'un certain rang ?

∘35∘ ♡ Montrez que la dérivée de $t \longmapsto \int_0^t f(u).sh(t-u).du$ *(où f est une application continue)* est $.t \longmapsto \int_0^t f(u).ch(t-u).du$.
(vous serez conduit à écrire $sh(t).\int_0^t f(u).ch(u).du - ch(t).\int_0^t f(u).sh(u).du$).

∘36∘

35	+		−		=	37
−	■	+	■	+	■	■
	+	9	+		=	14
−	■	+	■	×	■	■
	×		+		=	61
=	■	=	■	=	■	■
26	■	23	■	19	■	■

29	−		+		=	31
−	■	×	■	+	■	■
	+		+	2	=	17
−	■	−	■	×	■	■
	×		−		=	30
=	■	=	■	=	■	■
12	■	17	■	17	■	■

Il faut complétez les cases avec les nombres de 2 à 9 (l'un d'entre eux est déjà en place). Il faut que les trois opérations en lignes et trois opérations en colonne soient exactes.

∘37∘ Montrez l'existence d'une suite de polynômes P_n vérifiant $t^n + \frac{1}{t^n} = P_n(\left(t+\frac{1}{t}\right))$ pour tout entier naturel n et tout réel t non nul (on prouvera l'existence par récurrence double, et on ne cherchera pas à les expliciter, mais juste à exprimer P_{n+1} à l'aide de P_n et P_{n-1}, ce qui prouvera de proche en proche leur existence).

∘38∘ ♡ On note T_n le n^{ieme} polynôme de Tchebychev. Calculez $T_{12}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$.

∘39∘ Résolvez $T_n\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{1}{2}$ d'inconnue n *(polynômes de Tchebychev)*.

∘40∘ Calculez $\int_{-1}^1 T_5(t).T_4(t).dt$ où T_n est le n^{ieme} polynôme de Tchebychev (on est en maths, on réfélechit avant d'écrire douze formules !).

∘41∘ Les nombres

1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10

sont inscrits au tableau. Un élève en efface deux *(disons a et b)* et écrit à la place le nombre $a.b + a + b$. Il n'y a plus que neuf nombres, par exemple

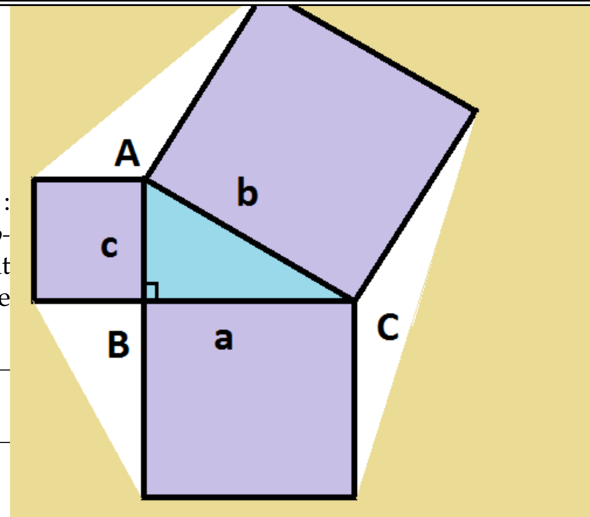
1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/8	1/10	17/63

. Un autre élève passe et fait de même, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un nombre. Indiquez quel sera le dernier nombre écrit, même si vous ne savez pas l'ordre dans lequel les élèves ont effectué leurs éliminations.

C'est en fait mine de rien un exercice sur une loi de groupe $(a, b) \longmapsto a * b = \ldots$.

∘42∘ Développez $(u+v+w).(u+v-w).(u-v+w).(-u+v+w)$. a, b et c sont les longueurs de trois côtés d'un triangle et vérifient $2.(a^8+b^8+c^8) = (a^4+b^4+c^4)^2$. Montrez que le triangle est rectangle. Réciproque ?

Le concours Kangourou propose l'exercice suivant : (A, B, C) est un triangle rectangle en B *(côtés a, b etc, hypoténuse b)*. On construit des carrés sur les côtés.On obtient ainsi une figure qu'on complète en hexagone. Montrez que l'aire de l'hexagone est $2.a.c + 2.(a^2+c^2)$.



Calculez celle là : $\int_0^1 x.4^x.dx$.

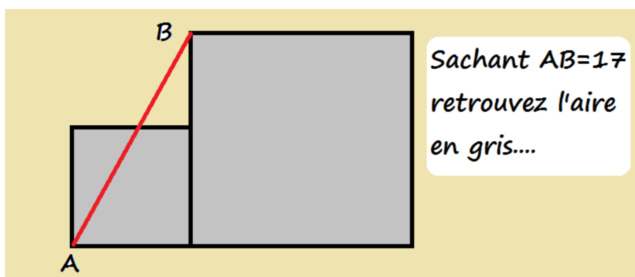
∘43∘ Montrez cette inégalité :
$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \tan(x) \geqslant 1 + 2.\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

∘44∘ Un triangle pythagoricien (rectangle à côtés entiers) peut il avoir des hauteurs entières ?
Un triangle pythagoricien (rectangle à côtés entiers) peut il avoir des médianes entières ?

∘45∘ ♣ (a_n) est une suite d'entiers naturels. On suppose : $((a_n)!)$ est croissante, $(a_{n!})$ est décroissante et a_{12} vaut 12 que vaut a_{2019} ?

∘46∘

Sachant $x = 45678^3 - 45676^3$,
calculez $\sqrt{\frac{x-2}{6}}$.



Les deux figures en gris sont des carrés.

∘47∘ Un triangle est dit grectangle si la racine carrée de l'hypoténuse est la somme des racines carrées des deux autres côtés. Existe-t-il des triangles à la fois grectangles et rectangles ? Est il vrai que tout triangle grectangle est aussi rectangle ?

∘48∘ ♡ Montrez que l'application tan est injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (indication : π est irrationnel).
Est elle bijective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$?
Montrez que l'application sin est injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$?
Montrez que l'application cos n'est pas injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$