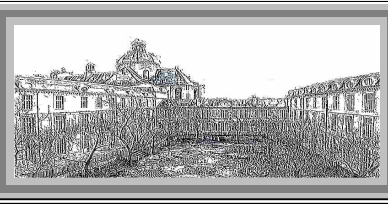
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 13 novembre
M.P.S.I.2



2023 2024

TD08

◦0◦

(a_n) est une suite réelle convergente de limite α. k est un entier naturel donné. On pose $D_n = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j}.(-1)^j.a_{k+n+j}$ pour tout n. Calculez $D_{n+1} - D_n$.

Calculez alors la limite quand N tend vers l'infini de $\sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}.a_{n+k+i}.(-1)^i \right)$.

Dans un premier temps, écrivons D_n et D_{n+1} pour k égal à 5 pour comprendre.

Rappel

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

$D_n = \sum_{j=0}^{6} \binom{6}{j}.(-1)^j.a_{5+n+j} =$	$1.a_{5+n}$	$-6.a_{5+n+1}$	$+15.a_{5+n+2}$	$-20.a_{5+n+3}$	$+15.a_{5+n+4}$	$-6.a_{5+n+5}$	$+1.a_{5+n+6}$	
$D_{n+1} = \sum_{j=0}^{6} \binom{6}{j}.(-1)^j.a_{6+n+j} =$		$1.a_{5+n+1}$	$-6.a_{5+n+2}$	$+15.a_{5+n+3}$	$-20.a_{5+n+4}$	$+15.a_{5+n+5}$	$-6.a_{5+n+6}$	$+1.a_{5+n+7}$
$D_{n+1} - D_n$	$-1.a_{5+n}$	$+7.a_{5+n+1}$	$-21.a_{5+n+2}$	$+35.a_{5+n+3}$	$-35.a_{5+n+4}$	$+21.a_{5+n+5}$	$-7.a_{5+n+6}$	$+1.a_{5+n+7}$

Quand on soustrait, les termes se regroupent deux à deux en diagonale.

On retrouve le même type de formule, mais pour la valeur de k suivante.

On va le prouver avec des manipulations rigoureuses sur les sommes, avec une translation, une fusion.

$$D_{n+1} - D_n = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j}.(-1)^j.a_{k+n+1+j} - \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j}.(-1)^j.a_{k+n+j}$$

$$D_{n+1} - D_n = \sum_{j'=1}^{k+2} \binom{k+1}{j'-1}.(-1)^{j'-1}.a_{k+n+j'} - \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j}.(-1)^j.a_{k+n+j}$$

$$D_{n+1} - D_n = -\sum_{jp=1}^{k+1} \binom{k+1}{p-1}.(-1)^p.a_{k+n+j'} + (-1)^{k+1}.\binom{k+1}{k+1}.a_{k+n+k+1} - \sum_{p=1}^{k+1} \binom{k+1}{p}.(-1)^p.a_{k+n+p} - \binom{k+1}{0}.a_{k+n}$$

$$D_{n+1} - D_n = -\sum_{jp=1}^{k+1} \left(\binom{k+1}{p-1}. + \binom{k-1}{p} \right).(-1)^p.a_{k+n+j'} + (-1)^{k+1}.1.a_{k+n+k+1} - 1.a_{k+n}$$

$$D_{n+1} - D_n = -\sum_{jp=1}^{k+1} \binom{k-2}{p}.(-1)^p.a_{k+n+j'} - (-1)^{k+2}.1.a_{k+n+k+1} - 1.a_{k+n}$$

$$D_{n+1} - D_n = -\sum_{jp=0}^{k+2} \binom{k-2}{p}.(-1)^p.a_{k+n+j'}$$

On retrouve le même modèle de formule mais au rang $k+1$.

Quitte à écrire plus proprement $D_{n,k} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j}.(-1)^j.a_{k+n+j}$ pour marquer la dépendance en k

$$D_{n+1,k} - D_{n,k} = -D_{n,k+1}$$

Peut être aurais-je dû l'écrire avec k au lieu de $k+1$ dans mes formules.

Quoi qu'il en soit, on va sommer sur n de 0 à N.
La première somme télescope

$$D_{N+1,k} - D_{0,k} = \sum_{n=0}^{N} \Big(D_{n+1,k} - D_{n,k} \Big) = - \sum_{n=0}^{N} D_{n,k+1}$$

Ecrite pour $k-1$ à la place de k elle donne

$$\sum_{n=0}^{N} \Big(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} . a_{n+k+i} . (-1)^i \Big) = - \Big(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} . a_{N+1+k-1+i} . (-1)^i \Big) + \Big(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} . a_{0+k-1+i} . (-1)^i \Big)$$

Si à présent on fait tendre N vers l'infini (et donc les $N+1+k-j$ le font aussi)

$$\sum_{n=0}^{N} \Big(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} . a_{n+k+i} . (-1)^i \Big) \longrightarrow_{N \Rightarrow +\infty} - \Big(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} . \alpha . (-1)^i \Big) + \Big(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} . a_{0+k-1+i} . (-1)^i \Big)$$

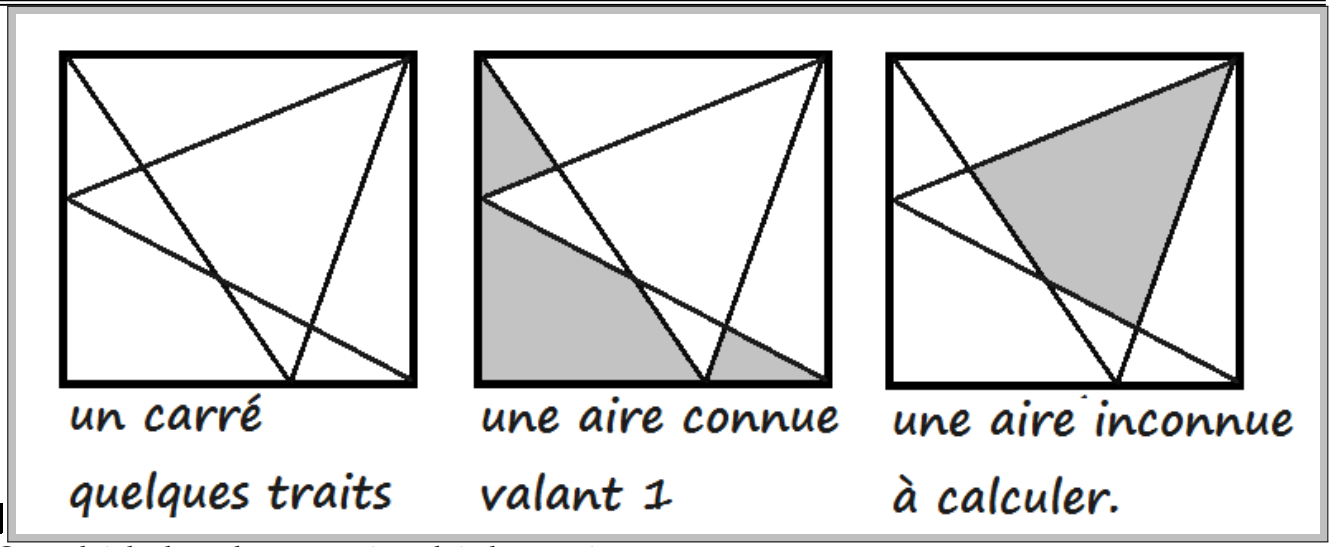
Mais en plus, la somme $\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} . (-1)^i$ vaut 0 (c'est $(1-1)^{k-1}$), il reste

$$\sum_{n=0}^{N} \Big(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} . a_{n+k+i} . (-1)^i \Big) \longrightarrow_{N \Rightarrow +\infty} \Big(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} . a_{0+k-1+i} . (-1)^i \Big)$$

C'est la généralisation (sans récurrence) de formules comme $\sum_{k=0}^{N} (a_{n+1} - a_n) \longrightarrow_{N \to +\infty} \alpha - a_0$

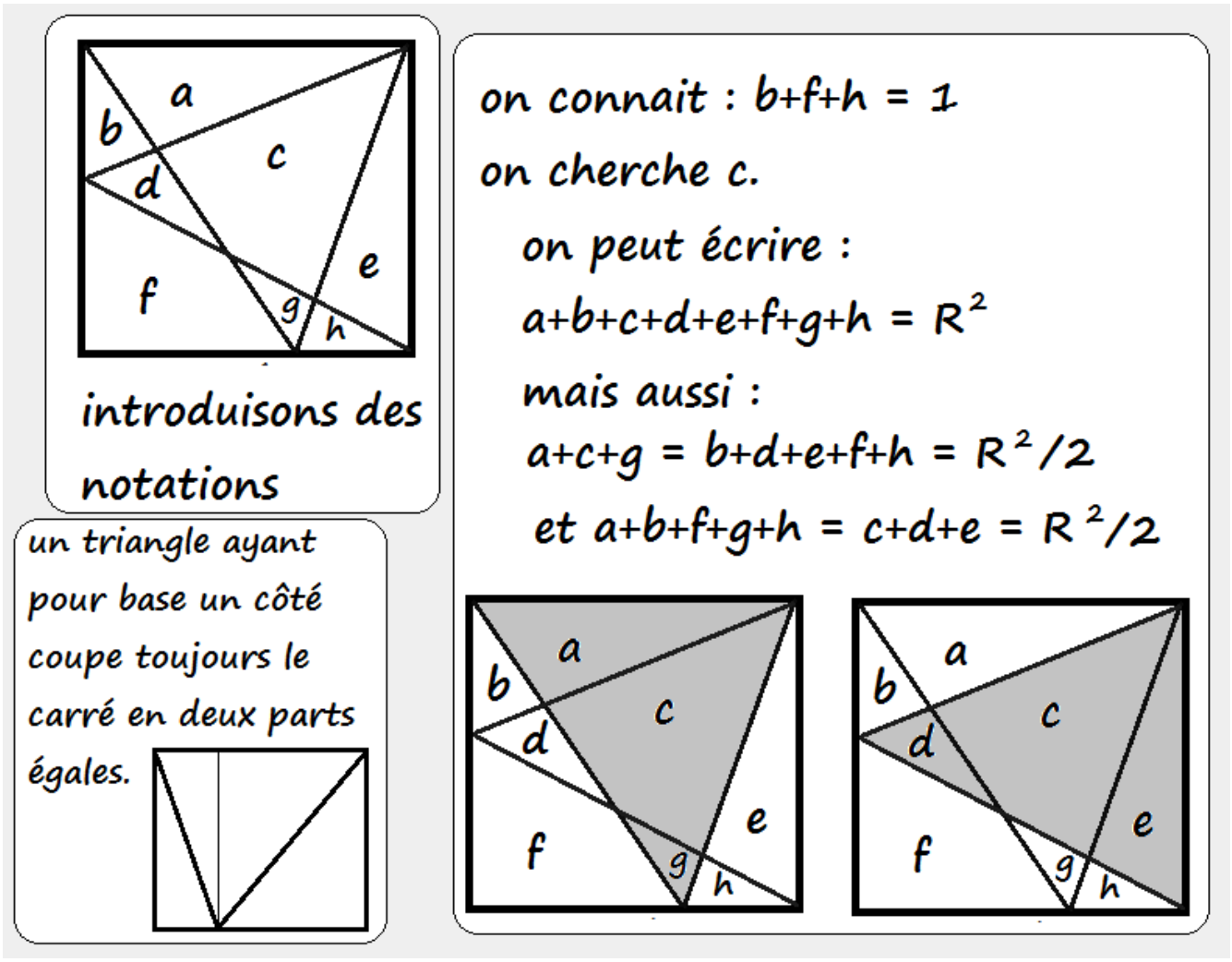
$$\sum_{k=0}^{N} (a_{n+2} - 2.a_{n+1} + a_n) \longrightarrow_{N \to +\infty} -a_1 + a_0$$

$$\sum_{k=0}^{N} (a_{n+3} - 3.a_{n+2} + 3.a_{n+1} - a_n) \longrightarrow_{N \to +\infty} a_2 + 2.a_1 - a_0$$



◦1◦

On traduit les hypothèses et on introduit des notations.
On rappelle ensuite que le découpage d'un carré par un triangle donne deux morceaux de même aire R^2 (en fait, quatre morceaux qui se regroupent justement deux à deux ; ou alors on écrit « base fois hauteur sur 2 »).



En combinant alors les informations $a+b+c+d+e+f+h = R^2$

$$a+c+g \;=\; b+d+e+f+h \;=\; R^2/2$$
$$a+b+f+g+h \;=\; c+d+e \;=\; R^2/2$$

et l'hypothèse $b+f+h=1$
on arrive à $c = b+f+h$ et donc $c=1$.

Je me demande si on ne peut pas utiliser directement le « carpet theorem » (voir You-Tube).
Mais justement, si il faut le prouver, il faut exactement suivre le raisonnement ci dessus avec
$a+c+g \;=\; b+d+e+f+h$
$a+b+f+g+h \;=\; c+d+e.$

Sujet extrait de « Mind your decisions ».

∘2∘ ♡ On définit le connecteur logique de Scheffer : $a\#b = \overline{a \text{ et } b}$ *(en électronique, c'est le NAND, câblé avec trois transistors).*
Exprimez en n'utilisant que des # *(et des a et des b, mais pas de et, de ou ou de non)* les propositions logiques

$non(a)$	a et b	a ou b	$a \Longrightarrow b$	a ou$_e$ b	$a \Longleftrightarrow b$
$a\sharp a$	$(a\sharp b)\sharp(a\sharp b)$	$(a\sharp a)\sharp(b\sharp b)$	$a\sharp(b\sharp b)$	$\big(a\sharp(b\sharp b)\big)\sharp\big(a\sharp(b\sharp b)\big)$	$(a\sharp b)\sharp\Big((a\sharp a)\sharp(b\sharp b)\Big)$
			$a\sharp(a\sharp b)$		ou pire

Ils montrent leur front et leur petitesse (translation).
Elles aiment les rues vides.
Les sections s'affairent.
Aux élections trop raides, les impies sont privés de scrutin.

∘3∘ ♡ Donnez une primitive de $t \longmapsto \sin(\ln(t))$ sur $]0,\,+\infty[$.

La question est « une primitive », c'est à dire « une fonction dont la dérivée est... ».
Je ne sais pas pourquoi des élèves confondent et croient qu'il faut calculer $\int_0^{+\infty} \sin(\ln(t)).dt$.

On doit juste être capable de calculer $\int_a^b \sin(\ln(t)).dt$ *pour a et b dans* $]0,\ +\infty[$.

On intègre par parties :

$\sin(\ln(t))$	$\hookrightarrow$	$\frac{\cos(\ln(t))}{t}$
1	$\hookleftarrow$	t

On a donc $\int_a^b \sin(\ln(t)).dt = \Big[t.\sin(\ln(t))\Big]_a^b - \int_a^b \cos(\ln(t)).dt$.

On recommence :

$\cos(\ln(t))$	$\hookrightarrow$	$\frac{-\sin(\ln(t))}{t}$
1	$\hookleftarrow$	t

$\int_a^b \sin(\ln(t)).dt = \Big[t.\sin(\ln(t)) - t.\cos(\ln(t))\Big]_a^b - \int_a^b \sin(\ln(t)).dt$

On fait passer d l'autre côté, on divise par 2 : $\int_a^b \sin(\ln(t)).dt = \Big[\frac{t.\sin(\ln(t)) - t.\cos(\ln(t))}{2}\Big]_a^b$.

Une primitive (fonction) est donc $\boxed{t \longmapsto \frac{t.\sin(\ln(t)) - t.\cos(\ln(t))\Big]_a^b}{2}}$ *(vérifiez).*

◦4◦

Montrez que pour tout entier naturel n, $(t.\ln(t))^n$ tend vers 0 quand t tend vers 0.
Pour tout n, on pose $I_n = \int_0^1 (\ln(t))^n.dt$. Calculez I_0, I_1 et I_2.
Calculez I_n pour tout n en intégrant par parties.

$t.\ln(t)$ est en 0^+ une indétermination classique du type $0.(-\infty)$.
C'est un de nos classiques de Sup.

On la lève en posant $t = \frac{1}{X}$, on a alors $t.\ln(t) = \frac{\ln(1/X)}{X} = -\frac{\ln(X)}{X}$.
C'est cette fois une forme indéterminée classique : croissances comparées en $+\infty$.

On encadre donc en grand : $\boxed{t.\ln(t) \longrightarrow_{t\mapsto+\infty} 0}$

On élève à la puissance n, ça ne change rien : $(t.\ln(t))^n$ tend vers 0 en 0.

Aucune des I_n n'a de sens véritable. Il faut poser $I_{n,\varepsilon} = \int_\varepsilon^1 (\ln(t))^n.dt$, calculer et voir si cette intégrale a une limite quand ε tend vers 0.

Tenez : $I_{0,\varepsilon} = \int_\varepsilon^1 (\ln(t))^0.dt = \int_\varepsilon^1 dt = 1 - \varepsilon$.
Bon, l'exemple est mal chosi : $I_0 = 1$ sans difficulté.

Prenons plus classiquement $I_{1,\varepsilon} = \int_\varepsilon^1 (\ln(t))^1.dt = [t.\ln(t) - t]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon.\ln(\varepsilon) + \varepsilon$.
C'est certes indéterminé quand ε tend vers 0, mais c'est la question précédente. Il ne va rester que $I_1 = -1$.

Pour I_2, on intègre $\int_\varepsilon^1 (\ln(t))^2.dt$ par parties :

$(\ln(t))^2$	$\hookrightarrow$	$2.\ln(t).\frac{1}{t}$
1	$\hookleftarrow$	t

$$I_{2,\varepsilon} = \int_\varepsilon^1 (\ln(t))^2.dt = [t.(\ln(t))^2]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 2.\ln(t).dt = -\varepsilon.(\ln(\varepsilon))^2 - 2.I_{2,\varepsilon}$$

On fait tendre ε vers 0. $I_{1,\varepsilon}$tend vers -1 et $\varepsilon.(\ln(\varepsilon))^2$ tend vers 0.
On a trouvé une limite : $I_2 = 2$.

Bilan provisoire :

I_0	I_1	I_2
1	-1	2

(de là à en déduire tout de suite quelquechose...)

Supposons que I_n existe, en tant que limite des $I_{n,\varepsilon}$, et étudions l'existence(et le calcul) de I_{n+1}.
On intègre $I_{n+1,\varepsilon}$par parties :

$\int_\varepsilon^1 (\ln(t))^{n+1}.dt$:

$(\ln(t))^{n+1}$	$\hookrightarrow$	$(n+1).(\ln(t))^n.\frac{1}{t}$
1	$\hookleftarrow$	t

$$I_{n+1,\varepsilon} = \int_\varepsilon^1 1.(\ln(t))^{n+1}.dt = [t.(\ln(t))^{n+1}]_\varepsilon^1 - (n+1).\int_\varepsilon^1 (\ln(t))^n.dt = -\varepsilon.(\ln(\varepsilon))^{n+1} - (n+1).I_{n,\varepsilon}$$

On peut faire tendre ε vers 0, le membre de droite a une limite, celui de gauche aussi.
On a même $I_{n+1} = -(n+1).I_n$

En mettant en boucle, on a très vite alternance de signes et la factorielle qui se forme : $\boxed{I_n = (-1)^n.n!}$

Corollaire : je peux définir $(1/2)!$ par $\int_0^1 \sqrt{\ln(t)}.dt$ ou plutôt $\int_0^1 \sqrt{|\ln(t)|}.dt$.

Au fait, on a prouvé que $t.(\ln(t))^n$ tendait vers 0 quand t tendait vers 0 ?

Oui, au dessus, c'est $\varepsilon.(\ln(\varepsilon))^n$, mais ça nechange rien, hormis la rapidité de frappe pour moi.

Ce qu'on a prouvé, c'est $(t.\ln(t))^n$ tend vers 0.
Mais ici, on a un seul t face à $(\ln(t))^n$.
Le résultat reste quand même valable, mais il faut ruser.

On part de $(t.\ln(t))^n$ tend vers 0.
On l'applique à $t = \varepsilon^{1/n}$ avec n fixé et εqui tend vers 0.
On obtient : $(\sqrt[n]{\varepsilon}.\ln(\sqrt[n]{\varepsilon}))^n$ tend vers 0.
On simplifie : $\varepsilon.\Big(\frac{\ln(\varepsilon)}{n}\Big)^n$ tend vers 0 quand εtend vers 0.
La « constante » $\frac{1}{n^n}$ n'y change rien, puisque n est fixé : $\varepsilon.(\ln(\varepsilon))^n$ tend vers 0 quand ε tend vers 0.

◦5◦ Donnez une primitive de $x \longmapsto e^{Arcsin(x)}$ (il faudra peut être intégrer deux fois par parties)..

Tout étant C^1 au moins sur un intervalle inclus dans $]-1,\ 1[$, on intègre par parties

$e^{Arcsin(t)}$	$\hookrightarrow$	$\frac{e^{Arcsin(t)}}{\sqrt{1-t^2}}$
1	$\hookleftarrow$	t

$$\int e^{Arcsin(t)}.dt = [t.e^{Arcsin(t)}] - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}.e^{Arcsin(t)}.dt$$

On recommence avec le nouveau terme en répartissant les morceaux différemment :

$e^{Arcsin(t)}$	$\hookrightarrow$	$\frac{e^{Arcsin(t)}}{\sqrt{1-t^2}}$
$\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$	$\hookleftarrow$	$-\sqrt{1-t^2}$

$$\int e^{Arcsin(t)}.dt = [t.e^{Arcsin(t)}] - [\sqrt{1-t^2}.e^{Arcsin(t)}] - \int e^{Arcsin(t)}.dt$$

On fait passer de l'autre côté et on divise : $\boxed{\int e^{Arcsin(t)}.dt = \Big[\frac{t.e^{Arcsin(t)} + \sqrt{1-t^2}.e^{Arcsin(t)}}{2}\Big]}$

Mais avez vous trouvé plus rapide ?

◦6◦ Montrez $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{\sum_{k=1}^{n}(k^3-k)} = \frac{11}{9}$.

Pour calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{\sum_{k=1}^{n}(k^3-k)}$, travaillons à horizon fini et calculons déjà $\sum_{n=2}^{N} \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{\sum_{k=1}^{n}(k^3-k)}$ et même $\sum_{k=1}^{n}(k^3-k)$.

Là, on a $\frac{(n.(n+1))^2}{4} - \frac{n.(n+1)}{2}$ qui devient $\frac{n.(n+1).(n-1).(n+2)}{4}$.[1]

Quand on effectue le quotient avec $\sum_{k=1}^{n} k$, on trouve

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k}{\sum_{k=1}^{n} (k^3 - k)} = \frac{2}{(n-1).(n+2)}$$

On décompose en éléments simples et on finit par sommer $\frac{2}{3}.\sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right)$.

On ré-indexe et somme de 1 à N, on garde

$$\frac{2}{3}.\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right)$$

On trouve bien $\frac{11}{9}$

∘7∘

♡ n décrit l'ensemble des entiers naturels et k décrit l'ensemble des entiers relatifs. Lesquelles des propositions suivantes sont vraies *(et écrivez les avec des connecteurs logiques et, ou, ⇒ et ⇔)* :

$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif ou strictement plus grand que n.	
$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif ou si k est strictement plus grand que n.	
$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif et si k est strictement plus grand que n.	
$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif et strictement plus grand que n.	
Pour que $\binom{n}{k}$ vaille 1 il faut que k soit égal à n.	
Pour que $\binom{n}{k}$ vaille 1 il faut que $k^3 - n^2.k$ soit nul.	

1. Cours : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n.(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)^2$

$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif ou strictement plus grand que n. $(k > n \; ou \; k < 0) \Rightarrow \binom{n}{k} = 0$ Vrai	
$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif ou si k est strictement plus grand que n. $(k < 0 \; ou \; k > n) \Rightarrow \binom{n}{k} = 0$ Vrai	
$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif et si k est strictement plus grand que n. $(k < 0 \; et \; k > n) \Rightarrow \binom{n}{k} = 0$ Vrai (du type « faux implique... »)	
$\binom{n}{k}$ est nul si k est strictement négatif et strictement plus grand que n. comme au dessus	
Pour que $\binom{n}{k}$ vaille 1 il faut que k soit égal à n. $(\binom{n}{k} = 1) \Rightarrow k = 1$ Faux (il y a aussi $k = n$)	
Pour que $\binom{n}{k}$ vaille 1 il faut que $k^3 - n^2.k$ soit nul. $(\binom{n}{k} = 1) \Rightarrow (k = 0 \; ou \; k = n \; ou \; k = -n)$ Vrai	

∘8∘ Montrez : $\int_0^{\pi/4} \frac{4.\cos(\theta).d\theta}{\sin(\theta)+\cos(\theta)} = \ln(2) + \frac{\pi}{2}$ après avoir justifié l'existence de l'intégrale.

Rappel : pour calculer $\int R(\cos(\theta), \sin(\theta)).d\theta$ on change de variable avec les règlesde Bioche, en testant l'invariance de $R(\cos(\theta), \sin(\theta)).d\theta$ par symétrie trigonométrique :

symétrie	invariance	poser
$\theta \to -\theta$	si $R(\cos(-\theta), \sin(-\theta)).(-d\theta) = R(\cos(\theta), \sin(\theta)).d\theta$	poser $c = \cos(\theta)$
$\theta \to \pi - \theta$	si $R(\cos(\pi-\theta), \sin(\pi-\theta)).(-d\theta) = R(\cos(\theta), \sin(\theta)).d\theta$	poser $s = \sin(\theta)$
$\theta \to \pi + \theta$	si $R(\cos(\pi+\theta), \sin(\pi+\theta)).d\theta = R(\cos(\theta), \sin(\theta)).d\theta$	poser $\tau = \tan(\theta)$
$\theta \longmapsto \theta + 2.\pi$	si rien n'a marché	poser $t = \tan(\theta/2)$

L'existence de $\int_0^{\pi/4} \frac{4.\cos(\theta).d\theta}{\sin(\theta)+\cos(\theta))}$ fait juste appel aux mots clefs "continuité" et "intégration sur un segment".

Bioche a ses règles, il n'aura pas piscine, mais il vous dira qu'on ne peut pas poser $c = \cos(\theta)$ ni $s = \sin(\theta)$, mais $\tau = \tan(\theta)$. On a donc $\theta = Arctan(\tau)$ sur notre domaine, puis $d\theta = \frac{d\tau}{1+\tau^2}$. On force ensuite : $\frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)+\sin(\theta)} = \frac{1}{1+\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}$. L'intégrale devient $\int_{\tau=0}^{\tau=1} \frac{4.d\tau}{(1+\tau^2).(1+\tau)}$.

On décompose en éléments simples $\frac{4}{(1+T).(1+T^2)} = \frac{a}{1+T} + \frac{b.T+c}{1+T^2} = \frac{2}{T+1} + \frac{-2.T+2}{T^2+1} = 2.\frac{1}{T+1} - \frac{2.T}{1+T^2} + 2.\frac{1}{T^2+1}$.

On peut intégrer avec des logarithmes et une arctangente : $\left[2.\ln(1+\tau) - \ln(1+\tau^2) + 2.Arctan(\tau)\right]_{\tau=0}^{\tau=1}$.

Preuve qu'il ne faut pas avoir une confiance totale en un logiciel : XCas donne la réponse étrange et même négative $\ln(\sqrt{2}) - \pi/4$ *! Et j'ai du mal à comprendre par quel changement de variable erroné ce logiciel y parvient...*

∘9∘ Montrez : $\int_0^{+\infty} \frac{ch(t)}{ch(2.t)}.dt = \frac{\pi.\sqrt{2}}{4}$ et $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(\theta)}{\cos(2.\theta)}.d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}.\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$.

Indication : $u^4 + 1 = (u^2+1)^2 - 2.u^2$ et on peut factoriser.

Les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{ch(t)}{ch(2.t)}.dt$ et $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(t)}{\cos(2.t)}.dt$ existent par continuité des applications mises en jeu *(les dénominateurs ne s'annulent pas)*.

Pour $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(\theta)}{\cos(2.\theta)}.d\theta$, faisons appel à Bioche : pas $t \longmapsto -t$; mais $t \longmapsto \pi - t$ (deux signes moins).
Bref, on va $s = \sin(\theta)$. On a alors $\cos(\theta).d\theta = ds$ et $\cos(2.\theta) = 1 - 2.\sin^2(\theta)$.
On affronte donc après simplifications $\int_0^{1/2} \frac{ds}{(1-\sqrt{2}.s).(1+\sqrt{2}.s)}$. On décompose en éléments simples

$$\frac{1}{(1-\sqrt{2}.s).(1+\sqrt{2}.s)} = \frac{1}{2}.\Big(\frac{1}{1-\sqrt{2}.s} + \frac{1}{1+\sqrt{2}.s}\Big)$$

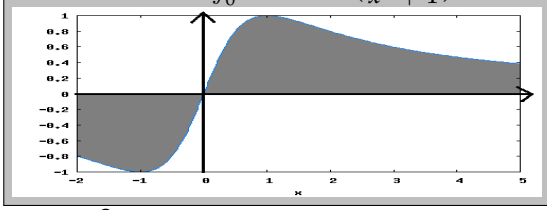
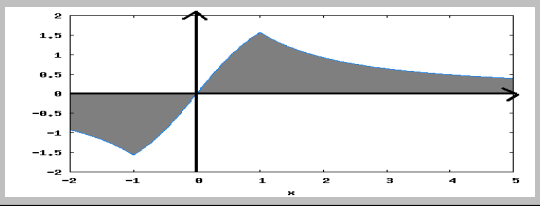
et on intègre en logarithmes.

L'autre intégrale est du même genre :

$$\int_0^{+\infty} \frac{ch(t)}{ch(2.t)}.dt = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{d(sh(t))}{1+2.sh^2(t)}$$

On intègre en arctangente.

∘10∘ Calculez $\int_0^1 Arcsin\Big(\frac{2.x}{x^2+1}\Big).dx$.
Calculez ensuite $\int_0^{\sqrt{3}} Arcsin\Big(\frac{2.x}{x^2+1}\Big).dx$ après en avoir vérifié évidemment l'existence.

Le réel $\frac{2.x}{1+x^2}$ reste entre -1 et 1. On reconnaît d'ailleurs un sinus dans la formule de l'arc moitié.

Sinon, terre à terre, on montre $(2.t)^2 \leqslant (1+t^2)^2$ (car la différence vaut $(t^2-1)^2$), on passa à la racine, on fait passer $1+t^2$ au dénominateur. C'est du chapitre -1 tout ça.

Si on ne pense pas à la trigonométrie en arc moitié, on intègre par parties

$Arcsin\Big(\frac{2.x}{x^2+1}\Big)$	$\hookrightarrow$	$\frac{2.(1+x^2)-2.x.(0+2.x)}{(1+x^2)^2}.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4.x^2}{(1+x^2)^2}}}$
1	$\hookleftarrow$	x

tout est C^1 sauf à une extrémité d'intervalle

Le terme v' se simplifie bien

$$\frac{2.(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.\frac{(1+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2+4.x^2}} = \frac{2.(1-x^2)}{(1+x^2)}.\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} = \frac{2}{1+x^2}$$

On trouve donc finalement $\Big[x.Arcsin\Big(\frac{2.x}{x^2+1}\Big)\Big]_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{2.x}{1+x^2}.dx$: $\frac{\pi}{2} - \ln(2)$.

Et en faisant de la trigonométrie : $x = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ou plutôt $\theta = 2.Arctan(x)$ pour être sur un bon intervalle.
On a alors $\frac{2.x}{1+x^2} = \sin(\theta)$ et $Arcsin\Big(\frac{2.x}{1+x^2}\Big) = \theta$ (domaines de bijectivité). mais évidemment, il y a le dx :

$$\int_{x=0}^1 Arcsin\Big(\frac{2.x}{x^2+1}\Big).dx = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \theta.\frac{1}{2.\cos^2(\theta/2)}.d\theta$$

et on n'échappe pas à l'intégration par parties :

θ	$\hookrightarrow$	1
$\frac{1}{2.\cos^2(\theta/2)}$	$\hookleftarrow$	$\tan(\theta/2)$

et il restera à intégrer $\tan(\theta/2)$ en $\ln(\sin(\theta/2))$.

La valeur trouvée est la même.

Et de 0 à $\sqrt{3}$? On traverse 1, tout ne se passe plus si bien.
Plusieurs raisons : L'intégration par parties pose problème en 1.
De plus, les valeurs absolues qu'on a simplifiées ne se simplifient plus si bien $\sqrt{(1-t^2)^2}$ donne t^2-1 quand on est sur $[1,\ \sqrt{3}]$!
Le changement de variable éventuel n'est pas C^1-difféomorphe.[a]

a. on tolère un défaut de dérivabilité au bout de l'intervalle, ou une dérivée « infinie » au bout de l'intervalle ; mais pas « au milieu »

Il faut donc bel et bien découper comme le suggère le dessin.
Voilà de quoi faire couler de l'encre...

$$\int_0^{\sqrt{3}} Arcsin\Big(\frac{2.x}{x^2+1}\Big).dx = \int_0^{1} Arcsin\Big(\frac{2.x}{x^2+1}\Big).dx + \int_1^{\sqrt{3}} Arcsin\Big(\frac{2.x}{x^2+1}\Big).dx$$

On intègre $\int_1^{\sqrt{3}} Arcsin\Big(\frac{2.x}{x^2+1}\Big).dx$ par parties aussi, mais cette fois :

$Arcsin\Big(\frac{2.x}{x^2+1}\Big)$	$\hookrightarrow$	$\frac{2.(1+x^2)-2.x.(0+2.x)}{(1+x^2)^2}.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4.x^2}{(1+x^2)^2}}}$
1	$\hookleftarrow$	$-x$

car cette fois,

$$\sqrt{1-\frac{4.x^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{\sqrt{x^4-2.x^2+1}}{(1+x^2)} = \frac{x^2-1}{(1+x^2)}$$

Le calcul donne $\int_1^{\sqrt{3}} Arcsin\Big(\frac{2.x}{x^2+1}\Big).dx = \ln(2) - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

En recollant les morceaux : $\boxed{\int_0^{\sqrt{3}} Arcsin\Big(\frac{2.x}{1+x^2}\Big).dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}}$ (de l'ordre de $1,8$).

Au fait, et si je vous offrais l'autre méthode pour trouver les coefficients de la décomposition en éléments simples :
$\frac{P(X)}{Q(X)}$ est une somme de $\frac{\alpha_k}{X-a_k}$ du moins quand Q a des racines simples.
Quelle est la valeur du coefficient α_k ?

Méthode des pôles :
- $\frac{P(X)}{(X-a_{\&})\dots(X-a_k)\dots(X-a_d)} = \frac{\alpha_k}{X-a_k} + autres\ termes$
- on multiplie par $X-a_k$ $\frac{P(X)}{(X-a_{\&})\dots 1\dots(X-a_d)} = \alpha_k + (X-a_k).autres\ termes$
- on fait tendre X vers a_k : $calculable = \alpha_k + 0$.

Mais il y a aussi la formule toute prête : $\boxed{\alpha_k = \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}}$

Est elle vraiment une formule toute prête ? Non, c'est le retour de la méthode des pôles.

Réfléchissez : $(X-a_k).\frac{P(X)}{Q(X)} = a_k + (X-a_k).autre\ chose$

On réécrit : $\frac{\frac{P(a_k)}{Q(X)}}{X-ak} = \alpha_k + (X-a_k).autre\ chose$

Et même : $\frac{\frac{P(a_k)}{Q(X)-Q(a_k)}}{X-ak} = \alpha_k + (X-a_k).autre\ chose$ puisque $Q(a_k)$ est nul.

Et maintenant, quand X tend vers a_k, on récupère $P(a_k)$ au numérateur par continuité
on récupère $Q'(a_k)$ au dénominateur (dérivation)

Autre approche : dans la méthode des pôles, on a écrit $\frac{P(X)}{tout\ sauf\ (X-a_k)} = \alpha_k + (X-a_k).autre\ chose$
Quand on fait tendre X vers a_k, il reste au dénominateur le produit des (a_k-a_i) pour i différent de k. Vous avez dû le constater à chaque fois.

Or, regardons juste sur notre exemple $Q(X) = X.(X+1).(X+2)$.
Quand on a regardé le pôle en -1, on a écrit $\dfrac{P(X)}{X.(X+2)} = \dfrac{\alpha_0}{X}.(X+1) + \alpha_1 + \dfrac{\alpha_2}{X+2}.(X+1)$.
Et on va faire tendre X vers -1.
Et qui est $Q'(X)$? C'est la dérivée d'un produit : $Q'(X) = (X+1).(X+2) + X.(X+2) + X.(X+1)$.
Et quand on calcule en -1, tous s'en vont sauf $X.(X+2)$ qui donne ici $(-1).1$.
Bref, $\boxed{\prod_{i\neq k}(a_k - a_i) = Q'(a_k)}$

Tout cela marche très bien quand les $a_k$sont des racines simples. Sinon évidemment, $Q'(a_k)$ est nul.

Si vous avez un esprit P.C.S.I., vous pouvez donc apprendre par cœur $\boxed{\alpha_k = \dfrac{P(a_k)}{Q'(a_k)}}$ *sans même comprendre ce qu'il y a derrière (là, vous êtes esprit PSI mais pas « maths de PSI »).*
Mais peut être que si vous avez l'esprit PSI vous avez sauté la fin de la correction de cet exercice en vous disant « j'ai la bonne réponse, je me fous de ses remarques ».

∘11∘ Montrez : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2.\theta)}{2+\cos^2(\theta)}.d\theta = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$. Montrez : $\displaystyle\int_0^1 \frac{Arctan(t)}{(1+t)^2}.dt = \frac{\ln(2)}{4}$.

Existence : continuité des applications intégrées.

Bioche pour la première : par $\theta \longmapsto -\theta$, $\dfrac{\sin(2.\theta)}{2+\cos^2(\theta)}.d\theta$ devient $\dfrac{-\sin(2.\theta)}{2+\cos^2(\theta)}.(-d\theta)$, ce qui ne change rien.
C'est donc qu'on peut changer de variable en $c = \cos(\theta)$.
En effet, $\sin(2.\theta) = 2.\cos(\theta).\sin(\theta)$ et on reconnaît $\displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{2.\cos(\theta)}{2+\cos^2(\theta)}.\sin(\theta).d\theta$.
L'intégrale devient $\displaystyle\int_{c=1}^{c=0} \frac{2.c}{2+c^2}.(-dc)$. On intègre en $\Big[\ln(2+c^2)\Big]_{c=0}^{c=1}$ (ou si vous préférez, dérivez $\theta \longmapsto \ln(2+\cos^2(\theta))$ pour vérifer).
On a bien une différence de logarithmes, ou le logarithme d'un quotient.

On intègre par parties :

$Arctan(t)$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$\dfrac{1}{(1+t)^2}$	$\hookleftarrow$	$-\dfrac{1}{1+t}$

On décompose ensuite en éléments simples : $\dfrac{1}{(1+t^2).(1+t)} = \dfrac{a.t+b}{1+t^2} + \dfrac{c}{1+t}$.
On a très vite $\dfrac{1}{(1+t^2).(1+t)} = \dfrac{1}{2}.\Big(\dfrac{1-t}{1+t^2} + \dfrac{1}{1+t}\Big)$.
On a finalement une primitive en tenant compte du premier terme crochet :
$\boxed{t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{2} - \dfrac{\ln(1+t^2)}{4} + \dfrac{Arctan(t)}{2} - \dfrac{Artan(t)}{1+t}}$ Le reste n'est que calcul.

La démarche est plus intéressante que le résultat.

∘12∘ Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos^5(t).dt$ en utilisant la bonne règle de Bioche.
Calculez $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt$ (en posant $t = sh(x)$ par exemple.
Calculez $\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$.

Pour la première, la règle $t \longmapsto -t$ ne donne rien.

Passons à $t \longmapsto \pi - t$ qui cette fois ci est valable.
On pose donc $s = \sin(t)$ et donc $\cos(t) = \sqrt{1-s^2}$ au moins sur l'intervalle $t \in [0,\ \pi/6]$ [2]

2. votre travail de matheux commence à « mais au fait, c'est $\sqrt{1-s^2}$ou c'est $-\sqrt{1-s^2}$? » ; le reste n'est que calcul

On change les bornes, l'élément différentiel et la fonction

$$\int_{t=0}^{\pi/6}\cos^5(t).dt=\int_{s=0}^{1/2}(\sqrt{1-s^2})^5.\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}=\int_{s=0}^{1/2}(1-s^2)^2.ds=\Big[\frac{s^5}{5}-2.\frac{s^3}{3}+s\Big]_0^{1/2}=\frac{203}{480}$$

(et en tant que atheux, on se fout pas mal de la valeur du moment qu'elle est cohérente à l'encadrement).

Passons à $t\longmapsto\pi+t$. Elle ne donne rien.

Enfin, le changement universel donne

$$\int_{t=0}^{\pi/6}\cos^5(t).dt=\int_{x=0}^{\tan(\pi/12)}\frac{(1-x^2)^5}{(1+x^2)^5}.\frac{2.dx}{1+x^2}$$

Avec l'aide d'un logiciel car je n'ai pas tant de courage

$$\frac{(1-X)^5}{(1+X)^6}=\frac{32}{(1+X)^6}-\frac{80}{(1+X)^5}+\frac{80}{(1+X)^4}-\frac{40}{(1+X)^3}+\frac{10}{(1+X)^2}-\frac{1}{(1+X)}$$

(je vous explique plus loin)
Avec un changement de variable

$$\frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^6}=\frac{32}{(1+x^2)^6}-\frac{80}{(1+x^2)^5}+\frac{80}{(1+x^2)^4}-\frac{40}{(1+x^2)^3}+\frac{10}{(1+x^2)^2}-\frac{1}{(1+x^2)}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer. Mais il faudra ruser avec des idées comme

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\int\frac{(1+x^2).dx}{(1+x^2)^2}-\frac{1}{2}.\int\frac{2.x}{(1+x^2)^2}.x.dx=\Big[Arctan(x)\Big]-\frac{1}{2}.\Big[\frac{-1}{1+x^2}.x\Big]+\frac{1}{2}\int\frac{-1}{1+x^2}.1.dx$$

(vous avez vu l'intégration par parties ?)
J'ai au final (merci Xcas) une primitive en

$$x\longmapsto\frac{15.x^9+20.x^7+58.x^5+20.x^3+15.x}{15.(1+x^2)^5}$$

Je rappelle enfin :

$$\tan\Big(\frac{\pi}{12}\Big)=\tan\Big(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\Big)=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}.1}=2-\sqrt{3}$$

et j'arrive au même rationnel en prétendant avoir fait les calculs tout seul.

Remarque : pour la décomposition en éléments simples

$$\frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^6}=\frac{32}{(1+x^2)^6}-\frac{80}{(1+x^2)^5}+\frac{80}{(1+x^2)^4}-\frac{40}{(1+x^2)^3}+\frac{10}{(1+x^2)^2}-\frac{1}{(1+x^2)}$$

ce n'est pas si compliqué. J'ai commencé par poser $X=x^2$ car c'est en fait la vraie variable.
J'a ensuite posé $Y=X+1$ et décomposé

$$\frac{(1-X)^5}{(1+X)^6}=\frac{(2-Y)^5}{(Y)^6}=\frac{64-80.Y+80.Y^2-40.Y^3+10.Y^4-Y^5}{Y^6}$$

Il ne reste plus qu'à séparer et revenir à la vraie variable

$$\frac{(1-X)^5}{(1+X)^6}=\frac{64}{Y^6}-\frac{80}{Y^5}+\frac{80}{Y^4}-\frac{40}{Y^3}+\frac{10}{Y^2}-\frac{1}{Y}=\frac{64}{(1+X)^6}-\frac{80}{(1+X)^5}+\dots$$

Mais sinon, comment aurait on calculé $\int_0^{\pi/6}\cos^5(t).dt$?
Bien sûr en l'écrivant

$$\int_0^{\pi/2}(\cos^2(t))^2.\cos(t).dt=\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2(t))^2.\cos(t).dt=\int_0^{\pi/2}(\sin^4(t)-2.\sin^2(t)+1).\cos(t).dt$$

comme dans la règle de Bicohe du changement en sinus.

Mais on pouvait aussi faire appel à Euler et Moivre

$$\cos^5(t) = \frac{(e^{i.t} + e^{-i.t})^5}{2^5} = \frac{e^{5.i.t} + 5.e^{4.i.t}.e^{-i.t} + 10.e^{3.i.t}.e^{-2.i.t} + 10.e^{2.i.t}.e^{-3.i.t} + 5.e^{i.t}.e^{-4.i.t} + e^{-5.i.t}}{2.16} en$$

regroupant les termes de même exposant au signe près

$$\cos^5(t) = \frac{2.\cos(5.t) + 5.2.\cos(3.t) + 10.2.\cos(t)}{2.16}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer

$$\int_0^{\pi/6} \cos^5(t).dt = \frac{1}{16}.\int_0^{\pi/6} (\cos(5.t) + 5.\cos(3.t) + 10.\cos(t)).dt = \frac{1}{16}.\Big[\frac{\sin(5.t)}{5} + 5.\frac{\sin(3.t)}{3} + 10.\sin(t)\Big]_0^{\pi/6}$$

Passons à $\int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt$ avec un sinus hyperbolique. $t = sh(x)$ donc $dt = ch(x).dx$ et surtout $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.
Comme le cosinus hyperbolique est à coup sûr positif

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt = \int_{x=0}^{\ln(1+\sqrt{1+1^2})} ch(x).ch(x).dx = \int_{x=0}^{\ln(1+\sqrt{1+1^2})} \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}.dx = \int_{x=0}^{\ln(1+\sqrt{1+1^2})} \frac{e^{2.x} + 2 + e^{-2.x}}{4}.dx$$

On intègre en exponentielles et on termine le calcul.

Mais au fait, comment a-t-on résolu $sh(x) = 1$? On voulait $e^x - e^{-x} = 2$ mais on ajoute une information $e^x.e^{-x} = 1$
.
On connait la somme et la différence. Autant dire que ce sont deux nombres dont on connaît la somme et le produit : $(e^x) + (-e^{-x}) = 2$ et $e^x.(-e^{-x}) = 1$.
e^x et $-e^x$ sont les deux racines de $X^2 - 2.X - 1$.
On a donc la racine positive : $e^x = 1 + \sqrt{2}$ et on sait aussi $-e^{-x} = 1 - \sqrt{2}$.

Ceci permet de conclure à la fin pour les valeurs à la borne du haut d el'intervalle d'intégration. Bref

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt = \Big[\frac{e^{2.x} - e^{-2.x}}{8} + \frac{x}{2}\Big]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})}{2}$$

On peut aussi foncer et proposer

$$\Big[\frac{x.\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2}}{2}\Big]$$

issu d'une intégration par parties et d'une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ déjà croisée.

Et enfin $\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}}$ se traite directement

$$\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} = \int_1^4 \frac{1}{1 + (\sqrt{t})^2}.\frac{dt}{\sqrt{t}} = \Big[2.Arctan(\sqrt{t})\Big]_1^4$$

Si vous ne le voyez pas directement, changez de variable en $u = \sqrt{t}$.
Quitte à fusinner ensuite $Arctan(2) - Arctan(1)$ en $Arctan\Big(\frac{2-1}{1+2.1}\Big)$, on a une formule pas trop laide.

∘13∘ Montrez $\int_3^{10} \frac{3.dx}{x + 4 - \sqrt{x+6}} = \ln(25)$ après avoir justifié l'existence de l'intégrale.

Pour l'existence de $\int_3^{10} \frac{3.dx}{x + 4 - \sqrt{x+6}}$, il suffit de dire qu'on intègre une application continue sur un segment.
Mais il faut quand même s'assurer que
• la racine carrée existe (pas de problème, $x + 6$ va de 9 à 16)
• le dénominateur ne s'annule pas *(il faudrait pour celà avoir $x + 4 = \sqrt{x+6}$, or, en élevant au carré, on trouve $x^2 + 8.x + 16 = x + 6$, qui n'est vrai qu'en -2 et -5, hors de notre intervalle)*.

On change de variable *(mot clef C^1 difféomorphisme)* : $u = \sqrt{x+6}$, donc $x = u^2 - 6$ et $dx = 2.u.du$.
L'intégrale devient

$$\int_{u=\sqrt{9}}^{u=\sqrt{16}} \frac{6.u}{u^2 - 6 + 4 - u}.du$$

(on dit "merci Tonton Nicolas pour les bornes simples"). On décompose en éléments simples

$$\frac{6.u}{u^2 - u - 2} = \frac{6.u}{(u+1).(u-2)} = \frac{2}{u+1} + \frac{4}{u-2}$$

(on dit merci aussi pour les pôles simples vraiment simples et les coefficients gentils).

Il n'y a plus qu'à intégrer en logarithme pour arriver à $2.\ln\left(\frac{4+1}{3+1}\right) + 4.\ln\left(\frac{4-2}{3-2}\right)$. En fusionnant, il reste juste

$\boxed{2.\ln(5)}$

∘14∘

Est il vrai que la consommation en essence d'une voiture est une aire ?

Une voiture consomme de l'essence. Et cette essence lui sert à parcourir des distances.
La quantité d'essence se mesure en litres.
La distance parcourue en kilomètres.
Et vous dites « tant de litres pour cent kilomètres »
La consommation est donc en litres par kilomètre.
Mais un litre est un volume. Cube d'une longueur.
On divise par une longueur. On a un carré de longueur.
C'est bien une aire.

∘15∘

♡ Montrez que pour $ch(x) = 5/4$, on a $sh(x) \in \mathbb{Q}$.
Combien existe-t-il de solutions dans $\mathbb{R}$ à l'équation $(ch(x),\ sh(x)) \in \mathbb{Z}^2$?
Combien existe-t-il de solutions dans $\mathbb{R}$ à l'équation $(ch(x),\ sh(x)) \in \mathbb{Q}^2$?
Rappel : $ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $sh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $ch^2 - sh^2 = ?$.

On va retrouver les triplets pythagoriciens, mais avec la trigonométrie hyperbolique...
On rappelle : $ch^2 - sh^2 = 1$ (à l'étage des fonctions).
On a donc ici : $\left(\frac{5}{4}\right)^2 - sh^2(x) = 1$. On simplifie : $sh^2(x) = \frac{3^2}{4^2}$.
Qu'on prenne la racine positive ou négative, on trouve un rationnel.

Rappel : pour avoir $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$ il suffit d'écrire $ch(x) + sh(x) = e^x$ et $ch(x) - sh(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

L'équation où $ch(x)$ et $sh(x)$ sont entiers n'a qu'une solution : 0 : $ch(0) = 1$ et $sh(0) = 0$.
En effet, si $sh(x)$ et $ch(x)$ sont entiers, alors $sh(x) + ch(x)$ et $ch(x) - ch(x)$ le son aussi.
Mais ce sont alors deux entiers dont le produit vaut 1 !
La seule solution est que chacun vaille 1 (ou -1 mais la somme est positive).

En revanche, l'équation où $ch(x)$ et $sh(x)$ sont rationnels a aussi une infinité de solutions.
On demande trois entiers a, b et c vérifiant $ch(x) = \frac{a}{c}$ et $sh(x) = \frac{b}{c}$ (quitte à avoir réduit au dénominateur commun).
Ceci revient à exiger : $\frac{a^2}{c^2} - \frac{b^2}{c^2} = 1$ c'est à dire $a^2 + c^2 = b^2$. Un triplet pythagoricien !

Par exemple 60, 11 et 61 forment un triplet pythagoricien.
Le point $\left(\frac{60}{61}, \frac{11}{61}\right)$ est sur le cercle trigonométrique d'équation $x^2 + y^2 = 1$.
le point $\left(\frac{61}{60}, \frac{11}{60}\right)$ est sur l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

Tu veux construire tes propres triplets pythagoriciens ?
Choisis un rationnel $\frac{\alpha}{\beta}$ dans le rôle de $ch(x) + sh(x)$ et son inverse dans le rôle de $ch(x) - sh(x)$.
Tu as alors : $ch(x) = \dfrac{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}}{2}$ et $sh(x) = \dfrac{\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}}{2}$. Les deux sont rationnels.

Et ils s'écrivent : $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2.\alpha.\beta}$ et $\frac{\alpha^2+-\beta}{2.\alpha.\beta}$.
Et le triplet pythagoricien est $(\alpha^2-\beta^2, 2.\alpha.\beta,\ \alpha^2+\beta^2)$.

∘16∘ ♡ Montrez que $th(x/2)$ est rationnelle si et seulement si $sh(x)$ et $ch(x)$ sont rationnels.
Si $sh(x)$ vaut $\frac{60}{229}$, est il vrai que $ch(x)$ est rationnel ?

On utilise les formules $\boxed{sh(x)=\frac{2.t}{1-t^2},\ ch(x)=\frac{1+t^2}{1-t^2}}$ qui se démontrent directement en partant par exemple du membre de droite.
On peut aussi écrire $t=\frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{e^{x/2}+e^{-x/2}}=\frac{e^x-1}{e^x+1}$. On renverse : $e^x=\frac{t+1}{1-t}$ puis on inverse : $e^{-x}=\frac{1-t}{1+t}$ *(en sachant que $1-t$ est strictement positif)*.
On somme :

$$2.ch(x)=\frac{t+1}{1-t}+\frac{1-t}{1+t}=\frac{(t+1)^2+(t-1)^2}{(1-t).(1+t)}=\frac{2.t^2+2}{1-t^2}$$

et aussi $2.sh(x)=\frac{2.t}{1-t^2}$ par le même type de calcul.

On raisonne ensuite par équivalence.
Si t est rationnelle alors $\frac{1+t^2}{1-t^2}$ et $\frac{2.t}{1-t^2}$ sont rationnels *(stabilité de* $\mathbb{Q}$ *par les opérations en jeu)*.

Si $ch(x)$ et $sh(x)$ sont rationnels, alors en renversant $ch(x)=\frac{1+t^2}{1-t^2}$ on déduit que t^2 est rationnel.

On reporte dans $t=\frac{(1-t^2).sh(x)}{2}$ et voilà t rationnel.

Quand $sh(x)$ vaut $\frac{60}{229}$ alors par la formule $ch^2-sh^2=1$, on trouve que $ch^2(x)$ vaut $\frac{60^2+229^2}{229^2}$.
On passe à la racine, car $ch(x)$ est positif, et le résultat n'a aucun interêt...
C'eut été plus drôle avec $\frac{68}{285}$ qui donnait $ch(x)=\frac{293}{285}$ *(retrouvez le triplet pythagoricien caché)*.

C'est quand le sinus tout court vaut $\frac{60}{229}$ *que le cosinus est rationnel.*

∘17∘ Calculez ces trois intégrales $\int_0^1 2^t.dt$, $\int_0^1 2^t.3^{(2^t)}.dt$ et $\int_0^1 2^t.(3^2)^t.dt$.

Pour $\int_0^1 2^t.dt$, $\int_0^1 2^t.3^{(2^t)}.dt$ et $\int_0^1 2^t.(3^2)^t.dt$ il n'y a pas de problème d'existence, par continuité.
Mais les écritures en puissances d'entiers posent problème pour intégrer. On doit revenir à $a^b=e^{b.\ln(a)}$ en l'occurrence ici : $2^x=e^{x.\ln(2)}$.
On intègre donc $x\longmapsto e^{x.\ln(2)}$ en $x\longmapsto\frac{e^{x.\ln(2)}}{\ln(2)}$ et on trouve $\boxed{\int_0^1 2^t.dt=\frac{2-1}{\ln(2)}}$

La troisième est du même type :

$$\boxed{\int_0^1 2^t.(3^2)^t.dt=\int_0^1 2^t.9^t.dt=\int_0^1 18^t.dt=\int_0^1 e^{t.\ln(18)}.dt=\frac{e^{t.\ln(18)}}{\ln(18)}=\frac{17}{\ln(18)}}$$

La deuxième est plus vicieuse. Elle est presque en $u'.3^u$. En effet, si on pose $u(t)=2^t$, on a $u'(t)=\ln(2).2^t$ (dérivez $t\longmapsto e^{t.\ln(2)}$) et $3^{u(t)}=3^{(2^t)}$.
On intègre $u'.3^u$ (égal à $u'.e^{u.\ln(3)}$) en $\frac{e^{u.\ln(3)}}{\ln(3)}$.
En tenant compte de tout ce qu'il faut compenser aux dénominateurs :

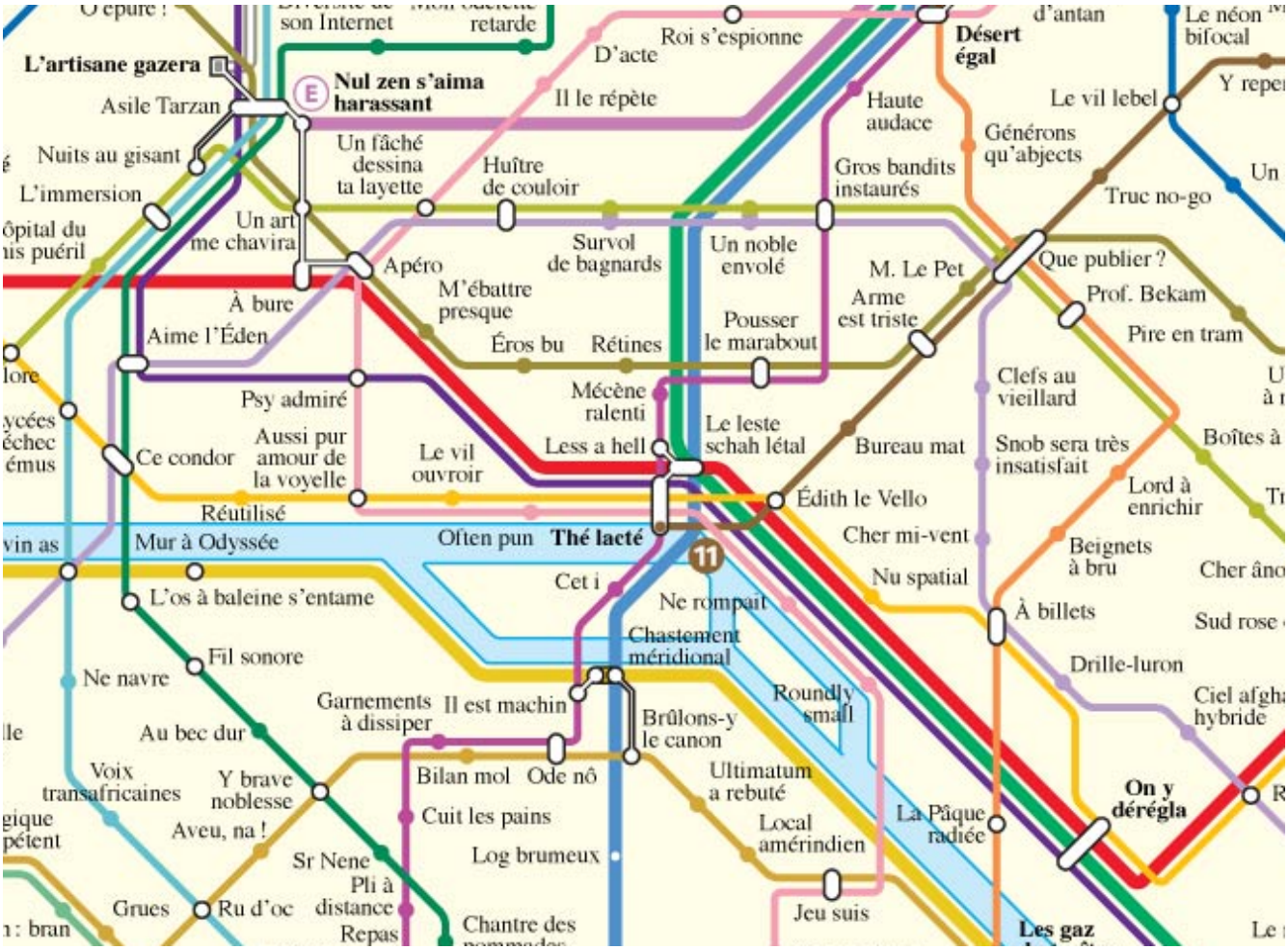
$$\boxed{\int_0^1 2^t.3^{(2^t)}.dt=\Big[\frac{e^{e^{t.\ln(2)}.\ln(3)}}{\ln(2).\ln(3)}\Big]_{t=0}^{t=1}=\frac{6}{\ln(2).\ln(3)}}$$ *(et* $\ln(2).\ln(3)$ *ne se simplifie pas)*.

◦18◦

Un tour aux portes de Paris dans le sens trigonométrique :
Réunion postdatée. Clé d'hypocrite. Vélo à serpillère. La mort pilote. Amulette. Vil soleil urbain. L'autorité dupe. Le volapuk du savant affamé. Vicieuse irritante. Dose hypocrite. Encadrèrent photo. Préméditer un loto. Protège ta blonde. Sapin et graviers. Piéton perdant. Lopette vétillarde. Plan d'égout incorrect.

Réunion postdatée. Porte de Saint-Ouen
Clé d'hypocrite. Porte de Clichy
Vélo à serpillère. Pereire Levallois
La mort pilote. Porte Maillot
Amulette. La Muette
Vil soleil urbain. Boullainvilliers
L'autorité dupe. Porte d'Auteuil
Le volapuk du savant affamé. Malakoff - Plateau de Vanves [3]
Vicieuse irritante. Cité Universitaire
Dose hypocrite. Porte de Choisy
Encadrèrent photo. Porte de Charenton
Préméditer un loto. Porte de Montreuil
Protège ta blonde. Porte de Bagnolet
Sapin et graviers. Pré-Saint-Gervais
Piéton perdant. Porte de Pantin
Lopette vétillarde. Porte de la Villette
Plan d'égout incorrect. Porte de Clignancourt

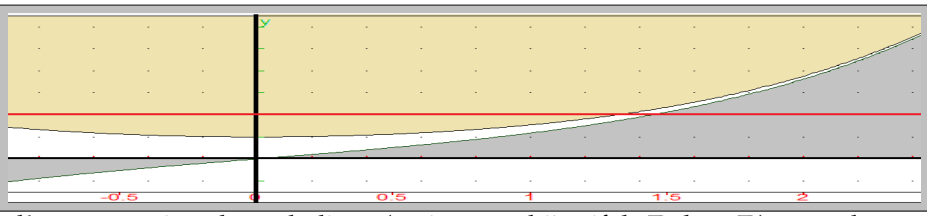
http : //www.gef.free.fr/metro.html



3. solution alternative (Volapük fantasmé de favela) (et le volapuk est une langue artificille imaginée au vingtième siècle pour les échanges internationaux, comme l'espéranto

◦19◦

♡ Résoudre
$sh(t) \leqslant 2 \leqslant ch(t)$
d'inconnue réelle t.



On résout $sh(t) \leqslant 2$ en passant à l'argument sinus hyperbolique (croissant et bijectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) car on le connaît :

$$t \leqslant Argsh(2) = \ln(2+\sqrt{5})$$

Sinon, on pose $X = e^t$ et l'équation devient $X - \dfrac{1}{X} \leqslant 4$ avec X positif.
On aboutit à $X^2 - 4.X - 1 \leqslant 0$ avec toujours X positif (entre les racines, mais positif) : $X \leqslant 2+\sqrt{5}$.
On trouve $t \leqslant \ln(2+\sqrt{5})$. La même. Fort heureusement.

Mais on exige aussi $2 \leqslant ch(t)$.
Cette fois, on ne passe pas à l'argument cosinus hyperbolique, car on n'a pas de bijectivité.
Cette équation a en effet un ensemble de solutions en deux intervalles $]-\infty,\ -\ln(2+\sqrt{3})] \cup [\ln(2+\sqrt{3}),\ +\infty[$.

Finalement, le jeu d'inéquations a pour ensemble de solutions

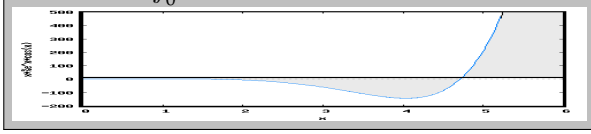
$$]-\infty,\ -\ln(2+\sqrt{3})] \cup [\ln(2+\sqrt{3}),\ \ln(2+\sqrt{5})]$$

Intersection de deux ensembles. Comme on le voit sur le dessin.

Remarque : *La phrase « je passe à l'arcsinus et je simplifie » ou « je passe à l'arctangente et je simplifie » est souvent une grosse ânerie...*
En fait, c'en est même toujours une.
Et elle doit vous faire prendre conscience de la notion d'injectivité justement... $f(x) = a$ ne donne pas $x = f^{-1}(a)$ si f^{-1} n'existe pas...
Par exemple $\sin(x) = a$ donne $\sin(x) = \sin(Arcsin(a))$ (là d'accord), mais c'est tout...

◦20◦

♡ Montrez $\displaystyle\int_0^{2.\pi} \cos(t).t.e^t.dt = \pi.e^{2.\pi}$.



Vous pourrez intégrer par parties, quitte à finir par retomber sur la même fonction au bout d'un moment.
Ou alors, vous pourrez essayer une primitive de la forme $t \longmapsto ((a.t+b).\sin(t) + (c.t+d).\cos(t)).e^t$.
Vous pourrez aussi mettre sous la forme $t.e^{(1+i).t}$ et intégrer par parties.

On note J l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2.\pi} \cos(t).t.e^t.dt$ et on intègre par parties, sachant qu'il n'existe pas de formule géniale pour $\int u.v.w'$.

$\cos(t)$	$\hookleftarrow$	$\sin(t)$
$t.e^t$	$\hookrightarrow$	$e^t + t.e^t$

$$: J = \Big[t.\sin(t).e^t\Big]_0^{2.\pi} - \int_0^{2.\pi} e^t.\sin(t).dt - \int_0^{2.\pi} t.e^t.\sin(t).dt.$$

Le terme crochet est nul.
On note K le terme $\displaystyle\int_0^{2.\pi} e^t.\sin(t).dt$ qu'on sait pouvoir calculer assez rapidement.
On intègre par parties la dernière intégrale :

$\sin(t)$	$\hookleftarrow$	$-\cos(t)$
$t.e^t$	$\hookrightarrow$	$e^t + t.e^t$

$J = -K - \Big[\cos(t).t.e^t\Big]_0^{2.\pi} - \displaystyle\int_0^{2.\pi} t.e^t.\cos(t).dt$ (comptez bien les signes moins).
On fait passer de l'autre côté et on a exprimé $2.J$ à l'aide d'intégrales qui doivent subir le même sort.

Bref, calculable.

La méthode a priori sera ici la plus efficace.
On se dit qu'une primitive va rester dans le monde des exponentielles, des polynômes et des lignes trigonométriques.

On tente sa chance avec une chose comme $t \longmapsto ((a.t+b).\sin(t)+(c.t+d).\cos(t)).e^t$.
Il suffit de la dériver et de demander les bonnes conditions aux coefficients pour que ça marche.

fonction	$(a.t+b).\sin(t).e^t$	$(c.t+d).\cos(t).e^t$
dérivée	$(a).\sin(t).e^t$	$(c).\cos(t).e^t$
	$(a.t+b).\cos(t).e^t$	$-(c.t+d).\sin(t).e^t$
	$(a.t+b).\sin(t).e^t$	$(c.t+d).\cos(t).e^t$
total	$((a-c).t+b+a-d).\sin(t).e^t$	$((c+a).t+d+c+b).\cos(t).e^t$

Pour que tout marche bien, on va poser quatre conditions : $\begin{array}{rrrrcl} a & & -c & & = & 0 \\ a & +b & & -d & = & 0 \\ a & & +c & & = & 1 \\ & b & +c & +d & = & 0 \end{array}$.

On résout et on trouve $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{1}{2}$, $c=\dfrac{1}{2}$ et $d=0$.

> *Mais attention, on est matheux. On réfléchit au sens des implications et on fout à la poubelle les réflexes de Terminable. Ceux qui vous valaient des points non pas parce que vous raisonniez, mais parce que vous pensiez qu'il y avait des mots à écrire toujours pour avoir l'air d'un matheux et pour faire plaisir au prof.*
> *Disons le tout de suite, l'élève qui rédige ici dans le sens des implications*
> *« on identifie »,* $\begin{array}{rrrrcl} a & & -c & & = & 0 \\ a & +b & & -d & = & 0 \\ a & & +c & & = & 1 \\ & b & +c & +d & = & 0 \end{array} \Rightarrow a=c=\frac{1}{2}=-b$
> *a perdu.*
> *Le seul sens utile est* $(a,b,c,d)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},,\frac{1}{2},,0\right) \Rightarrow systeme \Rightarrow fonction.$
> *Bref, c'est du « on se démerde pour que ça marche, et on propose et vérifie ».*
> *Ce que 'on ne vous a jamais appris à faire en maths.*
> *Alors que c'est ce que vous faites dans la vie.*
> *Comme si des crétins avaient figé les maths et les avaient désolidarisées du raisonnement logique pour en faire un cercueil devant lequel on s'agenouille bêtement.*

On reprend donc le seul sens intelligent une fois les calculs faits au brouillon :

fonction	$\frac{t-1}{2}.\sin(t).e^t$	$\frac{t}{2}.\cos(t).e^t$
dérivée	$\frac{1}{2}.\sin(t).e^t$	$\frac{1}{2}.\cos(t).e^t$
	$\frac{t-1}{2}.\cos(t).e^t$	$-\frac{t}{2}.\sin(t).e^t$
	$\frac{t-1}{2}.\sin(t).e^t$	$\frac{t-1}{2}.\cos(t).e^t$
total	0	$t.\cos(t).e^t$

Il ne reste plus qu'à calculer en 0 et en π.

> *L'effort est moins visible dans la rédaction « on propose/on vérifie » que dans la double intégration par parties.*
> *Mais l'intelligence est apparente.*

Sinon, on peut aussi passer par les complexes.
$\int_0^{2.\pi} \cos(t).t.e^t.dt$ est la partie réelle de $\int_0^{2.\pi} e^{i.t}.t.e^t.dt$.

On va donc calculer $\int_0^{2.\pi} t.e^{(1+i).t}.dt$ par parties

$e^{(1+i).t}$	$\hookleftarrow$	$\dfrac{e^{(1+i).t}}{(1+i)}$
t	$\hookrightarrow$	1

puis directement.

$$\int_0^{2.\pi} t.e^{(1+i).t}.dt = \left[\frac{e^{(1+i).t}.t}{1+i}\right]_0^{2.\pi} - \frac{1}{1+i}.\int_0^{2.\pi} e^{(1+i).t}.dt = \left[\frac{e^{(1+i).t}.t}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^2}.e^{(1+i).t}\right]_0^{2.\pi}$$

On a la change d'avoir $\dfrac{1}{(1+i)^2} = -\dfrac{i}{2}$, et ensuite, on utilise la quantité conjuguée.
Le reste n'est que calcul.

∘21∘ Pour tout n, on pose $\boxed{B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}$

Montrez que (B_n) est croissante, majorée par 2 (comparaison série intégrale, ou somme télescopique $1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.(k-1)}$).

Déduisez que (B_n) converge. On note $\boxed{\zeta(2)}$ sa limite.

Déduisez que pour tout p de $\mathbb{N}^*$, la suite $B_{p,n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2.p}}$ converge.

On calcule pour tout n : $B_{n+1} - B_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. La suite est croissante (série à termes positifs).

On majore :

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

On télescope, il reste $B_n \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 2$.

La suite est croissante, majorée (le majorant ne dépend bien plus de n), elle converge vers son plus petit minorant (inférieur ou égal à 2).

Terme à terme, on majore $\frac{1}{k^{2.p}}$ par $\frac{1}{k^2}$(l'exposant a augmenté).
On somme : $B_{p,n} \leqslant B_n \leqslant 2$ pour tout n (on veut un majorant ne contenant plus de n).
La suite $(B_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée. Elle converge.

On va prouver que $\zeta(2)$ vaut $\frac{\pi^2}{6}$ par diverses méthodes.

I∼0) **Vitesse de convergence.**
Montrez que (B_n) et $\left(B_n + \frac{1}{n}\right)$ forment n couple de suites adjacentes, de limite $\zeta(2)$.

L'une doit croître, c'est (B_n).
L'autre doit décroître, c'est $\left(B_n + \frac{1}{n}\right)$.

En effet : $\left(B_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(B_n + \frac{1}{n}\right) = \left(B_{n+1} - B_n\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$

$$\left(B_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(B_n + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$\left(B_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(B_n + \frac{1}{n}\right) = \frac{n + (n+1).n - (n+1)^2}{(n+1)^2.n} \text{ ligne } *$$

$$\left(B_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(B_n + \frac{1}{n}\right) = \frac{-1}{(n+1)^2.n}$$

$$\left(B_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(B_n + \frac{1}{n}\right) < 0$$

Une question simple, mais qui permet de tester votre intelligence. Si à la ligne $*$, vous avez mis comme dénominateur commun $(n+1)^2.n.(n+1)$, vous êtes pour moi définitivement perdus...

Celle qui décroît doit majorer celle qui croît : $\left(B_n + \frac{1}{n} > B_n\right)$.

La différence doit tendre vers 0 : c'est $\frac{1}{n}$.

On a alors le schéma usuel : $B_1 \leqslant B_2 \leqslant \ldots \leqslant B_n \leqslant B_{n+1} \leqslant C_{n+1} \leqslant C_n \leqslant \ldots \leqslant C_2 \leqslant C_1$.
Ceci prouve que (B_n) est croissante majorée,
(B_n) converge vers son plus petit majorant λ, inférieur à tout C_k.
(B_n) est décroissante minorée,
(C_n) converge vers son plus grand minorant μ, supérieur à tout B_k.
λ et μ sont égaux car la différence $C_n - B_n$tendait vers 0
On ajoute donc

$$B_1 \leqslant B_2 \leqslant \ldots \leqslant B_n \leqslant B_{n+1} \leqslant \zeta(2) \leqslant C_{n+1} \leqslant C_n \leqslant \ldots \leqslant C_2 \leqslant C_1$$

I∼1) **Donnez un entier n pour lequel vous êtes sûr d'avoir $|B_n - \zeta(2)| \leqslant 10^{-5}$.**

Pour avoir $\zeta(2) - B_n \leqslant 10^{-5}$ il suffit d'avoir $C_n - B_n \leqslant 10^{-5}$.

Le rang proposé vérifie $\dfrac{1}{n} \leqslant 10^{-5}$.

Si vous avez le courage de calculer 10^5 termes dans la somme, je dis d'accord.

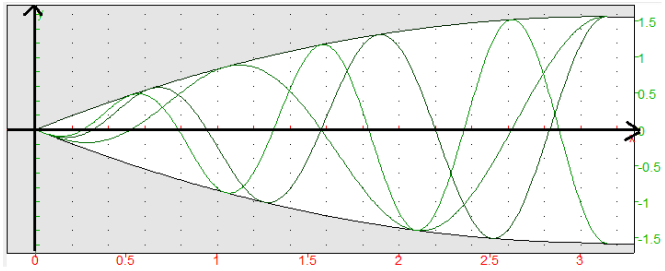
II∼0) **Première méthode (Fourier, Dirichlet).**

Montrez : $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right).\cos(k.t).dt = \frac{1}{k^2}$ pour tout entier naturel k.

Intégration par parties, ou primitive explicite (obtenue en la posant a priori) :

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right).\cos(k.t).dt = \left[\frac{k^2.t^2.\sin(k.t) - 2.k^2.\pi.t.\sin(k.t) + 2.k.t.\cos(k.t) - 2.\sin(k.t) - 2.k.\Pi.\cos(k.t)}{2.k^3.\pi}\right]_{t=0}^{\pi}$$

Il reste bien juste k^{-2}.



II∼1) **Déduisez : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right).\frac{\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.t\right)}{2.\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.dt.$**

On part de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ avec la question précédente.

On trouve une somme d'intégrales qu'on transforme en intégrale d'une somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right).\sum_{k=1}^{n} \cos(k.t).dt$$

Il est temps de faire appel à Dirichlet et à son noyau

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k.t) = \frac{\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.t\right)}{2.\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

On fait passer $\dfrac{1}{2}$ de l'autre côté :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right).\sum_{k=1}^{n} \cos(k.t).dt = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right).\left(\frac{\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.t\right)}{2.\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}\right).dt$$

On isole $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right).\frac{1}{2}.dt$ de valeur $\dfrac{-\pi^2}{6}$ (l'application est négative entre 0 et π).

On notera qu'on n'a pas le droit d'écrire $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k.t) = \frac{\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.t\right)}{2.\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$ en $t = 0$ (point au borne de notre domaine).

Mais c'est un point isolé, et en ce point, notre application se prolonge quand même par continuité.

II∼2) **Montrez que $t \longmapsto \left(\dfrac{t^2}{2.\pi} - t\right).\dfrac{1}{2.\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ notée φ se prolonge par continuité en 0 et y est même dérivable.**

On utilise l'équivalent $\sin(\theta) \sim \theta$ (quand θ tend vers 0).
$\varphi(t)$ est équivalent à $\left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right).\frac{1}{2.\frac{t}{2}}$ c'est à dire $\left(\frac{t}{2.\pi} - 1\right)$.
$\varphi(t)$ est équivalent à la constante non nulle -1. C'est donc qu'il tend vers -1.

Passons à la limite éventuelle des taux d'accroissement : $\frac{\varphi(t)+1}{t}$ (puisque $-\varphi(0)$ vaut $+1$).
On réduit au dénominateur commun :

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0}{t} = \frac{\left(\frac{t^2}{2.\pi} - t\right) + 2.\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2.t.\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

On utilise le développement limité $\sin(x) = x + o(x^2)$ quand x tend vers 0 :

$\frac{\varphi(t) - \varphi(0}{t} = \frac{\frac{t^2}{2.\pi} + o(t^2)}{2.t.\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ (oui, $o(t^2)$ et $o(4.t^2)$ ou $\frac{o(t^2)}{4}$, c'est du pareil au même, ce sont des choses qui tendent vers 0 plus vite que t^2).
Passons aux équivalents pour le dénominateur $2.t.\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ est équivalent à t^2.
Et le numérateur est équivalent à $\frac{t^2}{2.\pi}$ (puisque $f(t) + o(f(t))$ c'est « par définition même » équivalent à $f(t)$).
Le quotient est équivalent à la constante numérique $\frac{1}{2.\pi}$(après simplification des t^2).
Il tend donc vers ce nombre.
On a donc une limite des taux d'accroissements, c'est la définition de « dérivable ».
Le graphe en lui même n'a aucun intérêt.

> Elle aurait pû ne pas être définie en 0, ou avoir une demi tangente verticale.
> Ceci nous aurait empêché d'intégrer par parties.

II∼3) **En intégrant par parties, montrez que $\int_0^\pi \varphi(t).\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.t\right).dt$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini.**

Puisque φest dérivable, on va la dériver (en posant $k = \frac{2.n+1}{2}$) :

$$\int_0^\pi \varphi(t).\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.t\right).dt = \left[-\varphi(t).\frac{\cos(k.t)}{k}\right]_0^\pi + \frac{1}{k}.\int_0^\pi \varphi'(t).\cos(k.t).dt$$

Le terme crochet se calcule et tend vers 0 quand k tend vers l'infini (avec n).
L'autre terme se majore en valeur absolue :

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{k}.\int_0^\pi \varphi'(t).\cos(k.t).dt\right| \leqslant \frac{1}{k}.\int_0^\pi |\varphi'(t)|.|\cos(k.t)|.dt \leqslant \frac{1}{k}.\int_0^\pi |\varphi'(t)|.dt$$

Le majorant tend vers 0 quand k tend vers l'infini avec n.
Par encadrement, $\frac{1}{k}.\int_0^\pi \varphi'(t).\cos(k.t).dt$ tend vers 0 aussi.

Conseil : | Pour faire tendre une intégrale vers 0 (intégrale dépendant d'un paramètre n), la meilleure solution (au moins avec vos outils) est de l'encadrer.

> Petit point à devoir compléter : φ est non seulement dérivable, même en 0, mais il faudrait vérifier qu'elle est C^1 (φ' est continue, pour que $\int_0^\pi \varphi'(t).dt$ ait un sens).

II∼4) **Déduisez que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge vers $\frac{\pi^2}{6}$ quand n tend vers l'infini.**

C'est la conclusion logique de ce qui précède.

III∼0) **Entrainement.**
♡ Copiez une ligne de zêta, xi et sigma minuscule : ζ et ξ et ς.

$\zeta\ \zeta$

oui, c'est bon !

IV∼0) **Deuxième méthode (Wallis et parties).**
On pose pour tout n : $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2.n}(t).dt$ et on pose aussi : $J_n = \int_0^{\pi/2} t^2.\cos^{2.n}(t).dt$ et $K_n = \frac{J_n}{I_n}$.
Montrez : $I_n = \binom{2.n}{n}.\frac{\pi}{2^{2.n+1}}$ (oui, Wallis).

C'est du « cours ».
On calcule la première : $I_0 = \frac{\pi}{2}$ (fonction constante).
On intègre I_{n+1} par parties :

$$I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2.n+1}(t).\cos(t).dt = \Big[\cos^{2.n+1}(t).\sin(t)\Big]_{t=0}^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (2.n+1).\cos^{2.n}(t).\sin(t)\Big).\Big(\sin(t)\Big).dt$$

Le crochet est nul (merci le sinus en 0, merci le cosinus en $\frac{\pi}{2}$).
Dans l'intégrale $(2.n+1).\int_0^{\pi/2} \cos^{2.n}(t).\sin^2(t).dt$, on remplace $\sin^2(t)$ par $1-\cos^2(t)$:
$I_{n+1} = (2.n+1).(I_n - I_{n+1})$ (le terme I_{n+1} est de retour).
On a donc obtenu : $\boxed{I_{n+1} = \frac{2.n+1}{2.n+2}.I_n}$

On met en boucle cette propriété avec ensuite un produit de pairs et un produit d'impairs.
Ou même, puisqu'on nous offre la formule, on effectue une récurrence pour établir en effet $I_n = \binom{2.n}{n}.\frac{\pi}{2^{2.n+1}}$.
C'est vrai pour n égal à 0.

Supposons ensuite, pour n donné quelconque $I_n = \binom{2.n}{n}.\frac{\pi}{2^{2.n+1}}$.
On passe au suivant : $I_{n+1} = \frac{2.n+1}{2.n+2}.I_n$

$$I_{n+1} = \frac{(2.n+1)}{2.(n+1)}.\binom{2.n}{n}.\frac{\pi}{2^{2.n+1}}$$
$$I_{n+1} = \frac{(2.n+1)}{2.(n+1)}.\frac{(2.n)!}{n!.n!}.\frac{\pi}{2^{2.n+1}}$$
$$I_{n+1} = \frac{(2.n+1)!}{(n+1)!.n!}.\frac{\pi}{2.2^{2.n+1}}$$
$$I_{n+1} = \frac{(2.n+2)}{2.(n+1)}.\frac{(2.n+1)!}{(n+1)!.n!}.\frac{\pi}{2.2^{2.n+1}} \text{ (joli !)}$$
$$I_{n+1} = \frac{(2.n+2)!}{(n+1)!.(n+1)!}.\frac{\pi}{2^2.2^{2.n+1}} \text{ et c'est fini}$$

IV∼1) Montrez : $I_n = 2.n.\int_0^{\pi/2} t.\cos^{2.n-1}(t).\sin(t).dt$.

On repart de $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2.n}(t).dt$ et on intègre par parties :

$\cos^{2n}(t)$	$\hookrightarrow$	$-2.n.\cos^{2.n-1}(t).\sin(t)$
1	$\hookleftarrow$	t

Le terme crochet est nul (en 0 c'est t et en $\frac{\pi}{2}$ c'est $\cos^{2.n}(t)$).
L'autre terme est exactement l'intégrale ci dessus.

IV∼2) Montrez : $J_{n-1} - J_n = \int_0^{\pi/2} t^2.\sin(t).\cos^{2.n-2}(t).\sin(t).dt$.

C'est direct $J_{n-1} = \int_0^{\pi/2} t^2.\cos^{2.n-2}(t).dt$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} t^2.\cos^{2.n}(t).dt$

On soustrait, on réunit, on factorise $t^2.\cos^{2.n-2}(t)$ et on remplace $1-\cos^2(t)$ par $\sin^2(t)$ qu'on sépare même en deux facteurs, pourquoi pas.

IV∼3) Déduisez : $J_{n-1}-J_n=\dfrac{1}{2.n-1}.\left(\dfrac{I_n}{n}+J_n\right)$ (par parties).

IV∼4) Déduisez : $\dfrac{J_{n-1}}{I_n}-K_n=\text{‘}\dfrac{1}{2.n-1}.\left(\dfrac{1}{n}+K_n\right)$ puis $K_{n-1}-K_n=\dfrac{1}{2.n^2}$.

IV∼5) Montrez pour tout t de $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$: $t\leqslant\dfrac{\pi}{2}.\sin(t)$.

IV∼6) Déduisez : $0\leqslant J_n\leqslant\dfrac{\pi^2}{8.(n+1)}.I_n$ et $0\leqslant K_n\leqslant\dfrac{\pi^2}{8.(n+1)}$.

IV∼7) Retrouvez la valeur de $\zeta(2)$.

V∼0) **Troisième méthode et généralisation (Viète et trigonométrie).**
On pose $P_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\binom{2.n+1}{2.k+1}.X^{n-k}$. Donnez son degré, son coefficient dominant, et vérifiez que ses racines sont les $\cot^2\left(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\right)$ pour k de 1 à n inclus.

Tous les termes de $P_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\binom{2.n+1}{2.k+1}.X^{n-k}$ sont des puissances de X avec un coefficient réel devant. On a un polynôme.

Son terme de plus haut degré est pour k égal à 0 : $(-1)^0.\binom{2.n+1}{2.0+1}.X^{n-0}$.
Le degré est donc n et le coefficient dominant est $\binom{2.n+1}{2.0+1}=\dfrac{2.n+1}{1}$ ce qui fait $2.n+1$.

Quand on va factoriser, il ne faudra pas oublier ce coefficient dominant.

On va tester chaque $\cot^2\left(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\right)$ en vérifiant que chaque $P\Big(\cot^2\left(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\right)\Big)$ est nul.
Mais il faudra se méfier. Plusieurs variables s'appellent k et on risque d'écrire des bêtises.
On se donne k et on calcule

$$P\Big(\cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)\Big)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p.\binom{2.n+1}{2.p+1}.\Big(\cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)\Big)^{n-p}=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p.\binom{2.n+1}{2.p+1}.\frac{\cos^{2.n-2.p}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}{\sin^{2.n-2.p}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$$

On factorise le terme $\dfrac{1}{\sin^{2.n}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$ non nul :

$$P\Big(\cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)\Big)=\frac{1}{\sin^{2.n}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}.\sum_{p=0}^{n}(-1)^p.\binom{2.n+1}{2.p+1}.\cos^{2.n-2.p}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right).\sin^{2.p}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)$$

On peut commencer à penser à une formule du binôme pour $(\cos+\sin)^{2.n}$.
Mais il n'y a qu'un terme sur deux. Et il y a des signes moins.

Et on est en droit d'avoir l'illumination :
Développons $(\cos+i.\sin)^{2.n+1}$ et ne gardons que la partie imaginaire.

$$(\cos+i.\sin)^{2.n+1}=\sum_{q=0}^{2.n+1}\binom{2.n+1}{q}.\cos^{2.n+1-q}.(i)^q.\sin^q$$

$$i.\Im m\Big((\cos+i.\sin)^{2.n+1}\Big)=\sum_{\substack{0\leqslant q\leqslant 2.n+1\\ q\ impair}}\binom{2.n+1}{q}.\cos^{2.n+1-q}.(i)^q.\sin^q=\sum_{p=0}^{n}\binom{2.n+1}{2.p+1}.\cos^{2.n+1-(2.p+1)}.(i)^{2.p+1}.\sin^{2.p+1}$$

On a donc en sortant le i

$$\Im m\Big((\cos + i.\sin)^{2.n+1}\Big) = \sum_{p=0}^{n} \binom{2.n+1}{2.p+1}.\cos^{2.n-2.p}.(-1)^p.\sin^{2.p+1}$$

Mais si on l'applique en $x = \dfrac{k.\pi}{2.n+1}$ le premier membre est $\Im m\Big(e^{i.\frac{k.\pi}{2.n+1}}\Big)^{2.n+1}$ ce qui fait 0 (partie imaginaire d'un réel).
Le second membre est nul, et c'est lui notre $P\Big(\cot\Big(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\Big)\Big)$ (au facteur $\sin^{2.n}\Big(\frac{k.\pi}{2.n+1}\Big)$ près, mais il n'y change rien).

On a donc bien prouvé $P\Big(\cot\Big(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\Big)\Big) = 0$ pour tout k de 1 à n.

V∼1) **Déduisez : $P_n = (2.n+1).\prod_{k=1}^{n}\Big(X - \cot^2\Big(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\Big)\Big)$.**

Les n réels cités à la question précédente sont tous racines du polynômes et sont tous distincts (stricte monotonie de la cotangente au carré sur l'intervalle $]0,\ \pi/2[$).
On en a n et le polynôme est de degré n.
On le factorise donc en $\prod_{k=1}^{n}(X - racine_k)$ avec en plus le coefficient dominant devant.

V∼2) **Montrez pour tout x de $\Big]0,\ \dfrac{\pi}{2}\Big[$: $\sin(x) < x < \tan(x)$ puis $0 < \dfrac{1}{x^2} - \cot^2(x) < 1$.**

L'application $x \longmapsto x - \sin(x)$ a pour dérivée $x \longmapsto 1 - \cos(x)$.
Sa dérivé est positive.
Cette application est croissante.
Comme elle est nulle en 0, elle est positive sur $]0,\ +\infty[$ et a fortiori sur $]0,\ \pi/2[$.

L'application $x \longmapsto \tan(x) - x$ a pour dérivée $x \longmapsto 1 + \tan^2(x) - 1$.
On utilise les mêmes mots clefs : dérivée positive, application croissante, nulle en 0 donc positive.

Sur $]0,\ \pi/2[$ tous les termes de $\sin(x) < x < \tan(x)$ sont positifs. On peut élever au carré (monotonie) et passer aux inverses (stricte décroissance) :

$$\frac{1}{\sin^2(x)} > \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\tan^2(x)} > 0$$

On tient donc déjà $0 < \dfrac{1}{x^2} - \cot^2(x)$.

Ensuite, $\dfrac{1}{x^2} - \cot^2(x) =$
A faire.

V∼3) **Montrez ensuite pour tout entier p : $0 < \dfrac{1}{x^{2.p}} - \cot^{2.p}(x) < \dfrac{p}{x^{2.(p-1)}}$ (pensez aux identités remarquables de la famille de la série géométrique).**

Il faut vraiment tout vous dire !

$$a^p - b^p = (a-b).(a^{p-1} + a^{p-2}.b + a^{p-3}.b^2 + \ldots + b^{p-1})$$

C'est la généralisation de $a^2 - b^2 = (a-b).(a+b)$ et $a^3 - b^2 = (a-b).(a^2 + a.b + b^2)$. Classique à connaître (d'ailleurs dans le programme). Proprement :

$$a^p - b^p = (a-b).\sum_{k=0}^{p-1} a^{p-k-1}.b^k$$

Et ceci se démontre en développant

$$(a-b).\sum_{k=0}^{p-1} a^{p-k-1}.b^k = \sum_{k=0}^{p-1} a^{p-k}.b^k - \sum_{k=0}^{p-1} a^{p-k-1}.b^{k+1}$$

et en télescopant.

On applique ici à $a = 1/x^2$ et $b = \cos^2(x)$ (positifs). On a donc

$$(x^{-2})^p - (\cot^2(x))^p = (x^{-2} - \cot^2(x)).\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{p-k-1}.cot^{2.k}(x)$$

Le membre de gauche est bien $\dfrac{1}{x^{2.p}} - \cot^{2.p}(x)$.

Les deux termes du membre de droit sont positifs, leur produit est positif. Ceci donne déjà $0 < \dfrac{1}{x^{2.p}} - \cot^{2.p}(x)$ que j'avais failli oublier (cela dit, c'est juste $x < \tan(x)$ qu'on élève à la puissance $-2.p$).

Mais revenons au produit $\left(\dfrac{1}{x^2} - \cot^2(x)\right).\sum_{k=0}^{p-1}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{p-k-1}.cot^{2.k}(x)$; on majore chacun des deux facteurs positifs. $(x^{-2} - \cot^2(x))$ est plus petit que 1 on l'a dit plus haut.

La somme contient p termes de la forme $\dfrac{\cot^{2.k}(x)}{x^{2.(p-k-1)}}$. Chacun est majoré par $\dfrac{\dfrac{1}{x^{2.k}}}{x^{2.(p-k-1)}}$ en utilisant $0 < \cot^j(x) < \frac{1}{x^j}$ qui vient de $0 < x < \tan(x)$.
On majore donc par $p.\frac{1}{x^{2.p-2}}$ (nombre de termes fois majorant de chacun).

V∼4) **Déduisez : $0 < \left(\dfrac{2.n+1}{\pi}\right)^{2.p}.\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^{2.p}} - \sum_{k=1}^{n}\cot^{2.p}\left(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\right) < p.\left(\dfrac{2.n+1}{\pi}\right)^{2.p-2}.\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^{2.(p-2)}}$.**

Les réels $\dfrac{k.\pi}{2.n+1}$ sont tous entre 0 et $\pi/2$. On peut leur appliquer le résultat précédent $0 < \dfrac{1}{x^{2.p}} - \cot^{2.p}(x) < \dfrac{p}{x^{2.(p-1)}}$:

$$0 < \frac{(2.n+1)^{2.p}}{k^{2.p}.\pi^{2.p}} - \cot^{2.p}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right) < p.\frac{(2.n+1)^{2.p-2}}{\pi^{2.p-2}}.\frac{1}{k^{2.p-2}}$$

On a n encadrements que l'on peut sommer de $k = 1$ à $k = n$ [4]

$$0 < \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(2.n+1)^{2.p}}{k^{2.p}.\pi^{2.p}} - \cot^{2.p}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)\right) < p.\frac{(2.n+1)^{2.p-2}}{\pi^{2.p-2}}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2.p-2}}$$

Dans le majorant de droite, on a sorti de la somme tout ce qui ne dépendait pas de k.
On sépare la première somme en deux : $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(2.n+1)^{2.p}}{k^{2.p}.\pi^{2.p}}$ et $\sum_{k=1}^{n}\cot^{2.p}\left(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\right)$ et on sort $\dfrac{(2.n+1)^{2.p}}{\pi^{2.p}}$ de la première.

V∼5) **En exploitant les formules de Viète dans P_n après avoir divisé par $n^{2.p}$ (puis choisi $p = 1$ et $p = 2$), dédisez $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$.**

On a montré plus qu'il ne faut. Prenons $p = 1$ (c'est légitime) dans

$$0 < \left(\frac{2.n+1}{\pi}\right)^{2.p}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2.p}} - \sum_{k=1}^{n}\cot^{2.p}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right) < p.\left(\frac{2.n+1}{\pi}\right)^{2.p-2}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2.(1-1)}}$$

On trouve

$$0 < \left(\frac{2.n+1}{\pi}\right)^{2}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2}} - \sum_{k=1}^{n}\cot^{2}\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right) < \sum_{k=1}^{n}1$$

La somme $\sum_{k=1}^{n}\cot^{2}\left(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\right)$ est la somme des racines du polynôme P du début.
C'est donc au signe près le coefficient de X^{n-1} dans le polynôme « renormalisé » (divisé par son coefficient dominant).

$$P_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\binom{2.n+1}{2.k+1}.X^{n-k} = \binom{2.n+1}{1}.X^{n-k} - \binom{2.n+1}{3}.X^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}(-1)^k.\binom{2.n+1}{2.k+1}.X^{n-k}$$

4. si on multiplie des inégalités, on surveille les signes ; si on les additionne, ça ne sert à rien

La somme des racines se calcule

$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right) = \frac{\binom{2.n+1}{3}}{\binom{2.n+1}{1}} = \frac{(2.n+1).(2.n).(2.n-1)}{6.(2.n+1)} = \frac{n.(2.n-1)}{3}$$

On remplace donc

$$0 < \left(\frac{2.n+1}{\pi}\right)^2 . \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{n.(2.n-1)}{3} < \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

On divise par $\left(\frac{2.n+1}{\pi}\right)^2$ pour isoler notre somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{n.(2.n-1)}{3} . \frac{\pi^2}{(2.n+1)^2} < \frac{\pi^2.n}{(2.n+1)^2}$$

Le majorant $\frac{\pi^2.n}{(2.n+1)^2}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini (degrés à comparer entre numérateur et dénominateur).
Par encadrement $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{n.(2.n-1)}{3} . \frac{\pi^2}{(2.n+1)^2}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Mais $\frac{n.(2.n-1)}{3} . \frac{\pi^2}{(2.n+1)^2}$ est équivalent à
$dsp \frac{2.n^2}{3} . \frac{\pi^2}{4.n^2}$ et tend vers $\frac{2.\pi^2}{12}$ ce qui refait bien $\frac{\pi^2}{6}$.

VI∼0) **Compléments.**
Montrez : $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2.p-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2.p)^2} = \frac{\pi^2}{24}$.
VI∼1) Calculez $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2.p-1)^4}$ et $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2.p)^4}$.
VI∼2) Montrez : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2.k}{k}.k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
VI∼3) Montrez à la « Euler » : $\prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right) = \zeta(2)$ où $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.

VII∼0) **Accélération de la convergence.**
Pour tout k, on pose $v_k = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k.(k+1)}$. Montrez : $\forall n,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{k^3}$.
VII∼1) Montrez que la série de terme général v_k converge et que sa somme vaut $\zeta(2) - 1$.
VII∼2) Montrez : $0 \leqslant \zeta(2) - 1 - \sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \frac{1}{2.k^2}$ par comparaison série intégrale.
VII∼3) Pour quel entier n la somme $\sum_{k=1}^{n} v_k$ est elle une approximation de $\zeta(2)$ à 10^{-5} près ?
VII∼4) On pose ensuite $w_k = v_k - \frac{1}{k.(k+1).(k+2)}$. Exprimez $\sum_{n=1}^{+\infty} w_k$ à l'aide de $\zeta(2)$.
VII∼5) Pour quel entier n la somme $\sum_{k=1}^{n} w_k$ est elle une approximation de $\zeta(2) - \frac{5}{4}$ à 10^{-5} près ?
VII∼6) Écrivez une procédure Python qui pour n donné calcule $\sum_{k=1}^{n} w_k$.

∘22∘ ♡ Sur que intervalle $(x \longmapsto (x^2-1).e^{2.x})^{(n)}$ est elle négative ? (oui, formule de Leibniz)

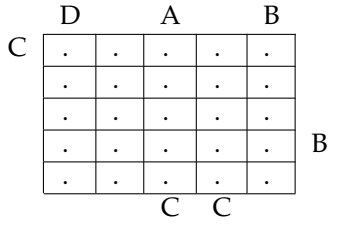
On applique la formule de Leibniz en posant $u = x \longmapsto x^2 + 1$ et $v = x \longmapsto e^{2.x}$.
Les dérivées de chacun sont connues, en particulier $u^{(k)} = 0$ (fonction nulle) pour $n \geqslant 3$.

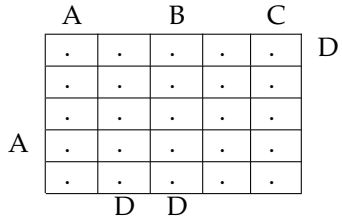
On a donc $(u.v)^{(n)} = u.v^{(n)} + n.u'.v^{(n-1)} + \dfrac{n.(n-1)}{2}.u''.v^{(n-2)}$ et c'est tout.
On passe à l'étage des réels : $\forall x,\ (u.v)^{(n)}(x) = (x^2-1).2^n.e^{2.x} + n.(2.x).2^{n-1}.e^{2.x} + n.(n-1).2^{n-2}.e^{2.x}$ (formule valable y compris pour $n = 0$, 1 u 2 car les $n.(n-1)$ sont alors nuls).
On factorise : $(u.v)^{(n)}(x) = 2^{n-2}.(4.x^2 - 4 + 4.n.x + n^2 - n).e^{2.x}$.
Le signe est celui de $4.x^2 + 4.n.x + n^2 - n - 4$.
On calcule l'éventuel discriminant : $\Delta = 16.n + 64$, toujours positif.

Et la réponse est la dérivée n^{ieme} est négative sur $\left[\dfrac{-n-\sqrt{n+4}}{2}, \dfrac{-n+\sqrt{n+4}}{2}\right]$

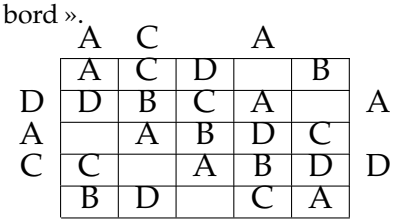
Rappel : Mathématiquement, des choses comme $(e^{2.x})^{(n-k)}$ ou $(x^2-1)^{(k)}$ sont des horreurs sans nom[a].
Ce qui a du sens, c'est $(x \longmapsto e^{2.x})^{(n)}$.
ou $u^{(n)}$ en ayant pose $u = x \longmapsto e^x$.
C'est pourquoi je dirai finalement le plus grand bien de la physique, où on dérive non pas des fonctions, mais des formules littérales.
Et avec la notation de Landau (utilisée aussi en maths), on peut écrire
$\dfrac{d^n((x^2-1).e^{2.x})}{dx^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \dfrac{d^k(x^2-1)}{dx^k} . \dfrac{d^{n-k}(e^{2.x})}{dx^{n-k}}$
Et là, c'est nickel, d'une grande rigueur, d'une énorme propreté. Bien plus facile que les formules $(u.v)^{(n)} = u.v^{(n)} + n.u'.v^{(n-1)} + \dfrac{n.(n-1)}{2}.u''.v^{(n-2)}$ dont on dit ensuite « et je les applique en x ».
Alors quoi ? Je reconnais que les physiciens sont plus rigoureux que les matheux sur ce coup là ? OUI !
Mais j'aoute une chose : la notation $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ (dite « de Landau ») appartient en fait au monde de l'informatique (dérivation formelle). Et je retombe sur les pattes de ma propre rigueur.

a. enfin, si, j'ai bien un nom, mais il va vexer la partie de vous qui estime que la physique c'est bien

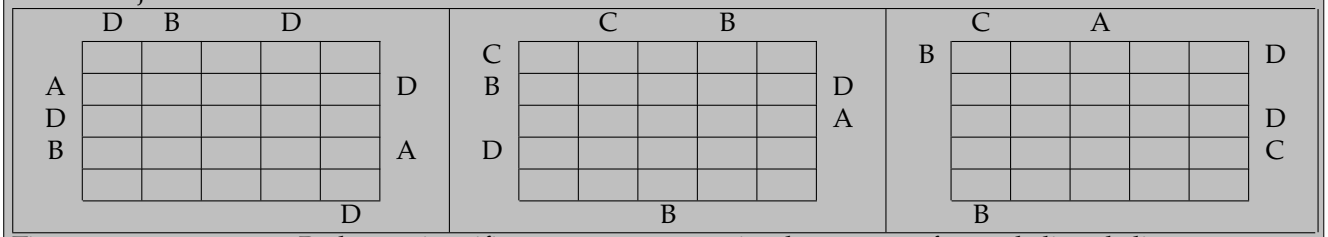




Règle du jeu : sur chaque ligne, les lettres de A à D et une case transparente. Et au bout, l'indication de « qui on voit depuis ce bord ».



A vous de jouer :



Tiens, et un programme Python qui vérifie que pour une matrice donnée sous forme de liste de listes comme [[D,B,A,O,C], [A, C, B, D,O], [O,D,C,A,B], [B, O, D, C, A], [C, A, O, B, D]][a] pour la première
que chaque ligne est chaque colonne est bien formée des cinq symboles ?
Et même qui ensuite vous dit même quelle est la première lettre (autre que O) visible depuis chaque extrémité de ligne et/ou de colonne.

a. convention : lettre O pour la case vide

	D	B		D		
	D	B	A		C	
A	A	C	B	D		D
D		D	C	A	B	
B	B		D	C	A	A
	C	A		B	D	
					D	

		C		B		
C		C	A	B	D	
B	B	A	C	D		D
	C	B	D		A	A
D	D		B	A	C	
	A	D		C	B	
			B			

	C		
B		B	
	C		
	A	C	
	D	A	
	B	D	
	B		

Paris aux prestigieuses ***scè***nes est la capitale mondiale capitale du ***lu***xe. On y rencontre plein de ***ti******t***is qui ru***s***ent et bi***s***ent des copines à l'air cool. On voit plein de péni***ches*** à la ***S***eine et plein de b***us*** faciles à c***it***er. On entend parfois soupirer des touristes subjugués par l'abî***m***e dans la ***T***our : "Ah que j'aurais aimé connaître vos ***motiv***ations, Ei***ffel*** !"

Et Joël Martin en Haute-Savoie (ah le ***g***oût de Mont-***B***lanc) :

Les amateurs de ***p***entes collectionnent les ***f***aces, ***é***patés par les f***a***ces et les ***p***entes e***ff***ilées. Une grimpeuse qui apprécie la Ver***t***e quand elle est ***j***olie, et surtout la Ver***t***e ennei***g***ée, parcourt le mont sans craindre le vi***de***. Une autre lu***g***e sous la Ver***t***e. Mais gare à l'excès de ***gl***isse quand se déchaîne le ***v***ent... détr***e***sse sur les f***a***ces !

◦23◦ Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{2+\cos^2(x)}.dx$ (Bioche ?).

Existence assurée avec le mot clef continuité (et la seule locution « dénominateur jamais nul ne suffit pas).
Le $\cos(x).dx$ me donne envie de poser $s = \sin(x)$, et d'ailleurs Bioche me le confirme.
Et le dénominateur est une fonction de s : $2+\cos^2(x) = 3-\sin^2(x)$.
L'intégrale devient $\displaystyle\int_0^1 \frac{ds}{3-s^2}$. On décompose en $\displaystyle\frac{1}{2.\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}-s}+\frac{1}{\sqrt{3}+s}\Big)$ puis on intègre en logarithme.
On trouve $\displaystyle\frac{\ln(\sqrt{3}+1)-\ln(\sqrt{3}-1)}{2.\sqrt{3}}$ et si on y tient $\displaystyle\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{2.\sqrt{3}}$. Ce dernier passage, vous devez pouvoir le faire tout seul, en simplifiant $\displaystyle\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ en utilisant la quantité conjuguée.

◦24◦ Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}.d\theta$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}.d\theta$ (Bioche toujours ? mais déjà, sont elles égales, et que vaut leur somme ?).

L'existence de ces intégrales ne pose pas de problème (continuité, dénominateur strictement positif).
Les changements de variable vont peut être créer des difficultés en $\displaystyle\frac{\pi}{2}$.

Déjà, de 0 à $\pi/2$, le sinus et le cosinus font la même chose, mais pas dans le même sens.
N'aurait on a pas $I = J$? Si.
Dans I on change de variable : $\theta = \displaystyle\frac{\pi}{2} - t$.
On a donc $d\theta = -dt$, puis $\cos(\theta) = \sin(t)$ et $\sin(\theta) = \cos(t)$. Et enfin $\displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi/2} \ldots = \int_{t=\pi/2}^{0} \ldots$.
Les bornes ont changé de sens, mais le $d\theta$ change le signe.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}.d\theta = \int_{\pi/2}^0 \frac{\cos(t)}{\sin^3(t)+\cos^3(t)}.(-dt) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sin^3(t)+\cos^3(t)}.dt$$

Les deux intégrales sont égales.

Calculons alors leur somme :

$$I+J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)+\sin(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}.d\theta$$

Mais on rappelle $u^3+v^3 = (u+v).(u+v).(u^2-u.v+v^2)$.
On calcule donc ici

$$I+J = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2(\theta)+\cos(\theta).\sin(\theta)+\sin^2(\theta)}.d\theta$$

On dit merci qui : merci Pythagore : $\displaystyle I+J = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cos(\theta).\sin(\theta)}$.
Et même merci Bioche. Il nous dit de poser $t = \tan(\theta)$ (invariance par $\theta \longmapsto \theta+\pi$ qui ne change pas le $d\theta$ et change le signe du cosinus et du sinus).

L'intégrale devient $2.I = I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2(\theta)} . \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\theta)} + \tan(\theta)} .d\theta$ en faisant attention en $\frac{\pi}{2}$.

On a donc

$$2.I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)+t} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\frac{2.t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

Il peut être judicieux de poser $u = \frac{2.t+1}{\sqrt{3}}$ pour saisir et ne rien gâcher quand on intègre en $Arctan\left(\frac{2.t+1}{\sqrt{3}}\right)$.

Tous calculs faits : $\boxed{I = J = \frac{2.\pi}{3.\sqrt{3}}}$ *(et Xcas le donne en moins d'une seconde...)*

◦25◦ Calculez $\int_0^1 Arctan(\sqrt{1-x^2}).dx$ (parties et $s = \sin(\theta)$ par exemple).

Cette intégrale existe, car la fonction sous le signe somme est continue. Pas forcément dérivable il est vrai, à cause de $\sqrt{1-x^2}$ en 1.

On va quand même intégrer par parties, car $Arctan$ est connue pour sa dérivée :

$$\int_0^1 Arctan(\sqrt{1-x^2}).dx = \left[x.Arctan(\sqrt{1-x^2})\right] + \int_0^1 \frac{2.x}{(2-x^2).2.\sqrt{1-x^2}}.x.dx$$

1	$\hookleftarrow$	x
$Arctan(\sqrt{1-x^2})$	$\hookrightarrow$	$\frac{1}{1+(\sqrt{1-x^2})^2}.\frac{-2.x}{2.\sqrt{1-x^2}}$

Le terme crochet est nul. Et l'intégrale est celle de $\frac{x^2}{(2-x^2).2.\sqrt{1-x^2}}$! Il reste du travail.

On va pose « naturellement » $x = \sin(\theta)$.

> Si, c'est quand même assez naturel, puisque on a $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ou même simplement $\sqrt{1-x^2}$ qui fait penser aux lignes trigonométriques.

Ou plutôt on pose $\theta = Arcsin(x)$ pour éviter toute ambigüité.
L'intégrale devient (et on va la noter I)

$$\int_0^1 \frac{2.x}{(2-x^2).\sqrt{1-x^2}}.x.dx = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{2.\sin^2(\theta)}{(2-\sin^2(\theta)).\cos(\theta)}.\cos(\theta).d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{2.\sin^2(\theta)}{(2-\sin^2(\theta))}d\theta$$

(avec un dénominateur qui effectivement ne s'annule jamais).

Si on a croisé déjà des intégrales de ce type, on se dit qu'on va forcer $\frac{1}{\cos^2(\theta)}$ et $\tan(\theta)$ à venir.
De l'habitude, ou le fait d'avoir un jour croisé Bioche.

On remplace le 2 par $2.\cos^2(\theta) + 2.\sin^2(\theta)$.

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{2.\sin^2(\theta)}{(2-\sin^2(\theta))}.d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{2.\sin^2(\theta)}{(2.\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))}.d\theta$$

On factorise de force $\cos^2(\theta)$ au dénominateur (attention en $\pi/2$).

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{2.\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta).(2+\tan^2(\theta))}.d\theta$$

On a envie de l'écrire $I = \int_0^{\pi/2} \frac{2.\tan^2(\theta)}{(2+\tan^2(\theta))}d\theta$, mais on perd la présence de la dérivée de la tangente, dont on a grand besoin.

Il faut encore remplacer $\sin^2(\theta)$ par $\frac{\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}$.

Et cette fois, en posant $t = \tan(\theta)$ on a (enfin) $I = \int_{t=0}^{t\to+\infty} \frac{2.t^2}{(2+t^2).(1+t^2)}.d\theta$.

On décompose en éléments simples $\frac{T}{(1+T).(2+T)} = \frac{2}{2+T} - \frac{1}{1+T}$:

$$I = \int_{t=0}^{t\to+\infty} \left(\frac{2}{2+t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right).d\theta$$

Pour arriver à $\frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2}$.

Si vous avez trouvé un chemin plus court, n'hésitez pas...

◦26◦ Calculez $\int_a^b \frac{d\theta}{\sin^2(\theta).\cos^2(\theta)}$.

Comme indiqué en cours, il ne faut pas qu'il se niche le moindre multiple de $\frac{\pi}{2}$ entre a et b. Par exemple, a et b sont tous deux entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ strictement.

On identifie vite $\int_a^b \frac{4.d\theta}{\sin^2(2.\theta)}$ et on intègre en cotangente.

$$\int_a^b \frac{4.d\theta}{\sin^2(2.\theta)} = \left[\frac{-2}{\tan(2.\theta)}\right]_a^b$$

Sinon, que disait Bioche ?

θ donne	$-\theta$	$\pi-\theta$	$\pi-\theta$
$\sin^2(\theta)$ donne	$\sin^2(-\theta) = \sin^2(-\theta)$	$\sin^2(\pi-\theta) = \sin^2(-\theta)$	$\sin^2(\pi+\theta) = \sin^2(-\theta)$
$\cos^2(\theta)$ donne	$\cos^2(-\theta) = \cos^2(-\theta)$	$\cos^2(\pi-\theta) = \cos^2(-\theta)$	$\cos^2(\pi+\theta) = \cos^2(-\theta)$
$\frac{d\theta}{\sin^2(\theta).\cos^2(\theta)}$ donne	$\frac{-d\theta}{\sin^2(\theta).\cos^2(\theta)}$	$\frac{-d\theta}{\sin^2(\theta).\cos^2(\theta)}$	$\frac{d\theta}{\sin^2(\theta).\cos^2(\theta)}$
on prend ?	non	non	oui

On va donc poser $t = \tan(\theta)$ et tout exprimer à l'aide de t.

$\frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} = dt$ et $\cos^2(\theta) = \frac{1}{1+t^2}$ puis $\sin^2(\theta) = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$.

L'intégrale (sans bornes [5] pour être tranquille) :

$$\int \frac{1+t^2}{t^2}.dt = \int \frac{dt}{t^2} + \int dt = t - \frac{1}{t}$$

Question bonus : vous voyez le rapport entre $\frac{-2}{\tan(2.\theta)}$ et $\tan(\theta) - \frac{1}{\tan(\theta)}$?

Vous avez vingt secondes.

Sinon, on peut aussi remplacer 1 au numérateur par $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)$.

$$\int_a^b \frac{d\theta}{\sin^2(\theta).\cos^2(\theta)} = \int_a^b \frac{\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta).\cos^2(\theta)}.d\theta = \int_a^b \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} + \int_a^b \frac{d\theta}{\sin^2(\theta)}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer en $\tan(\theta)$ et $-cotan(\theta)$.

◦27◦ Calculez $\int_0^\pi \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)}$ (changez de variable en tangente, mais prenez garde aux bornes).

Réflexe basique avant de commencer : l'existence.

> *Monsieur, ce n'est pas demandé !*
> *Si !*
> *Vous n'êtes plus dans les petites classes où on dit « puisque le prof dit de la calculer, c'est qu'elle existe, je lui fais confiance ».*
> *Non, vous allez devenir ingénieurs, pas techniciens sous les ordres d'un ingénieur.*

L'application sous le signe somme est continue. l'intégrale existe.

5. cent bornes ? Je préfère « mille bornes », coup fourré

Monsieur, j'ai écrit « le dénominateur ne s'annule pas, la fonction existe », et vous avez barré. Pourquoi ?
Parce que l'existence ne suffit pas. On rappelle que $1_{\mathbb{Q}}$ est définie en tout point mais son intégrale de 0 à 1 n'existe pas...
Tous les mots ont leur importance.

Maintenant on change de variable, et c'est Bioche qui nous recommande $\theta \to \theta + \pi$ donc $t = \tan(\theta)$, $\theta = Arctan(t)$ et $d\theta = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = \int_0^{0} \frac{1}{2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}.\frac{dt}{(1+t^2)} = 0$$

NON !
Le changement de variable n'est pas un difféomorphisme. Il a un défaut d'injectivité. Et de continuité. En $\dfrac{\pi}{2}$.
Il faut découper :

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}.\frac{dt}{(1+t^2)} + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}.\frac{dt}{(1+t^2)}$$

C'est même $2.\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)}$ pour des raisons de symétrie.
On passe le $(1+t^2)^2$ au numérateur, et simplifie :

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^2}{2.(1+t^2)^2+(1-t^2)^2}.dt$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^2}{3.t^4+2.t^2+3}.dt$$

Il faut encore décomposer en éléments simples en la variable t^2 pour commencer. Puis intégrer.

Plus rapide : on force la main avec un peu d'habitude pour voir $\dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$ dérivée de la tangente, et de la tangente :

$$2.\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = 2.\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2.\sin^2(\theta)+2.\cos^2(\theta)+\cos^2(\theta)}.d\theta$$

$$2.\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = 2.\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2.\sin^2(\theta)+3.\cos^2(\theta)}.d\theta$$

$$2.\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = 2.\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2.\tan^2(\theta)+3}.\frac{d\theta}{\cos^2(\theta)}$$

On a une forme en $\dfrac{u'}{2.u^2+3}$, on sait faire !

$$2.\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = 2.\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}.\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\tan(\theta)\right)^2+1}.\frac{d\theta}{\cos^2(\theta)}$$

$$2.\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\cos^2(\theta)} = 2.\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{3}}.\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\tan(\theta)\right)^2+1}.\frac{\sqrt{2}.d\theta}{\sqrt{3}.\cos^2(\theta)}$$

On trouve $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.Arctan\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\tan(\theta)\right)\right]_{\theta=0}^{\pi/2} = \dfrac{\sqrt{2}.\pi}{\sqrt{3}.2}$ comme tout à l'heure.

◦28◦ ♡ Calculez $\int_0^{\pi/4} \cos^5(t).dt$ en utilisant la règle de Bioche.

$t \to -t$	$t \to \pi - t$	$t \to \pi + t$	$t \to 2.\pi + t$
$-\cos^5(t).dt$	$\cos^5(t).dt$	$-\cos^5(t).dt$	$\cos^5(t).dt$
Non	Oui	Non	Oui

On va donc changer de variable en $s = \sin(t)$ pour commencer :

$$\int_0^{\pi/4} \cos^5(t).dt = \int_0^{\sqrt{2}/2} (\sqrt{1-s^2})^5.\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \int_0^{\sqrt{2}/2} (1-s^2)^2.ds = \left[s - 2.\frac{s^3}{3} + \frac{s^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}/2}$$

C'est d'ailleurs ce qu'on fait « à la main », en écrivant $\int_0^{\pi/4} \cos^4(t).\cos(t).dt = \int_0^{\pi/4} (1-\sin^2(t))^2.\cos(t).dt$ pour avoir une forme en $P(u).u'$.

Et le changement en $t = \tan(x/2)$? Une horreur.

◦29◦ ♡ Calculez $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t).dt}{\sin(t)+\cos(t)}$ (pas Bioche).

L'intégrale existe. Et que dit Binoche [6] ? De poser $u = \tan(t/2)$, car rien d'autre ne passe.

L'intégrale devient $\int_0^1 \frac{\frac{2.x}{1+x^2}}{\frac{2.x}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2}} . \frac{2.dx}{1+x^2}$. Et nous voilà à devoir décomposer en éléments simples $\frac{4.x}{(1+x^2).(1+2.t-t^2)}$

On attend une forme $\frac{a.x+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1-\sqrt{2}} + \frac{d}{x-1+\sqrt{2}}$ (degré 4, quatre coefficients à trouver, logique).

On calcule c et d par la méthode des pôles, et on s'attend à ce qu'ils soient « conjugués » par rapport à $\sqrt{2}$.

On trouve ensuite a par l'équivalent en $+\infty$. On trouve finalement

$$\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{2.(x-1-\sqrt{2})} - \frac{1}{2.(x-1+\sqrt{2})}$$

On intègre avec trois logarithme et un arctangente. les bornes sont assez simples, on regroupe tout, les logarithmes se simplifient $\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t).dt}{\sin(t)+\cos(t)} = \frac{\pi}{4}}$

Mais en fait, il y a plus simple en s'inspirant d'un autre exercice :

$$2.\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t).dt}{\sin(t)+\cos(t)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)+\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}.dt + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)-\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}.dt = \frac{\pi}{2} + \Big[\ln(\cos(t)+\sin(t))\Big]_{t=0}^{\pi/2}$$

◦30◦ Calculez $\int_0^1 \sin(Arctan(x)).dx$ (parties ?).

L'intégrale $\int_0^1 \sin(Arctan(x)).dx$ existe, tout est continu sous le signe somme, par composition. Ensuite, une formule du cours dit :

$$\sin(Arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

D'où vient elle ? De $\tan(Arctan(x)) = x$, $1 + \tan^2(Arctan(x)) = 1 + x^2$,

$$\cos^2(Arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(Arctan(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Il ne reste plus qu'à dire que $\cos(Arctan(x))$ est bien positif ($Arctan(x)$ est entre $-\pi/2$ et $\pi/2$), et à multiplier : $\sin = \tan . \cos$.

Mais alors, on calcule juste $\int_0^1 \frac{x.dx}{\sqrt{1+x^2}}$ dans laquelle on identifie une forme en $u'.u^\alpha$. On a un terme crochet assez simple : $\left[\sqrt{1+x^2}\right]_{x=0}^{x=1}$ ou $\left[(1+x^2)^{1/2}\right]_{x=0}^{x=1}$ si on préfère. La valeur cherchée est donc $\boxed{\sqrt{2}-1}$

---

6. mea culpa, j'ai écrit Binoche au lieu de Bioche... mais qui n'est pas tombé amoureux des actrices de sa génération...

∘31∘ ♡ Calculez $\int_0^x \cos(\theta).d\theta$ en effectuant tous les changements de variable que peuvent préconiser les règles de Bioche.

L'intégrale existe, et on va tester les changements préconisés par Bioche, sur un intervalle convenable

changement	$\theta \to -\theta$	$\theta \to \pi - \theta$	$\theta \to \pi + \theta$	$\theta \to \theta + 2.\pi$
$\cos(\theta).d\theta$ donne	$\to -\cos(\theta).d\theta$	$\to -\cos(\theta).(-d\theta)$	$\to -\cos(\theta).(d\theta)$	$\to \cos(\theta).d\theta$
oui/non	non	oui	non	oui
		$s = \sin(\theta)$ et $\theta = Arcsin(s)$		$t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$
		$d\theta = \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$		$d\theta = \frac{2.dt}{1+t^2}$

Le premier donne $\int_0^x \cos(\theta).d\theta = \int_{s=0}^{s=\sin(x)} \sqrt{1-s^2}.\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \int_{s=0}^{s=\sin(x)} ds = \sin(x)$.

Et le second : $\int_0^x \cos(\theta).d\theta = \int_{t=0}^{t=\tan(\theta/2)} \frac{1-t^2}{1+t^2}.\frac{2.dt}{1+t^2}$.

On reste perplexe, sauf si on se dit que ça va s'intégrer en sinus si tout va bien. On propose donc de dériver $t \longmapsto \frac{2.t}{1+t^2}$ et on trouve $t \longmapsto \frac{2.(1+t^2)-2.t.(2.t)}{(1+t^2)^2}$. Bingo !

$$\int_0^x \cos(\theta).d\theta = \int_{t=0}^{t=\tan(\theta/2)} \frac{1-t^2}{1+t^2}.\frac{2.dt}{1+t^2} = \Big[\frac{2.t}{1+t^2}\Big]_{t=0}^{\tan(\theta/2)} = \frac{2.\tan(\theta)}{1+(\tan(\theta/2))^2} = \sin(\theta)$$

sous réserve d'être sur un intervalle gentil.

∘32∘ Calculez (géométriquement pour l'une) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}.dt$ et $\int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2}.dt$.

La première se calcule géométriquement : l'aire d'un demi disque au dessus de l'axe $0x$, de rayon 1.

Mais on peut aussi poser $t = \sin(\theta)$ *(en fait, proprement, on pose $\theta = Arcsin(t)$ pour définir l'intervalle)* :

$$\int_{t=-1}^1 \sqrt{1-t^2}.dt = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(\theta)}.\cos(\theta).d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta).d\theta$$

On linéarise car les sommes sont plus faciles à intégrer que les produits :

$$\int_{t=-1}^1 \sqrt{1-t^2}.dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2.\theta)}{2}.d\theta = \Big[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2.\theta)}{4}\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi$$

L'autre est du même type mais hyperbolique.

$$\int_{t=-1}^1 \sqrt{1+t^2}.dt = \int_a^b ch(\theta).(ch(\theta).d\theta) = \int_a^b \frac{1+ch(2.\theta)}{2}.d\theta = \Big[\frac{\theta}{2} + \frac{sh(2.\theta)}{4}\Big]_a^b$$

avec b caractérisé par $sh(b) = 1$, ce qui donne $\begin{array}{lllll} e^b & - & e^{-b} & = 2 \\ e^b & \times & e^{-b} & = 1 \end{array}$ soit $\begin{array}{lllll} e^b & + & (-e^{-b}) & = 2 \\ e^b & \times & (-e^{-b}) & = -1 \end{array}$.

e^b est la racine positive de $X^2 + 2.X - 1$. On a donc $b = \ln(1+\sqrt{1+1^2})$ et a est son opposé par imparité.

Le final est $\int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2}.dt = \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$

∘33∘ Calculez ces versions trigonométriques et hyperboliques $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}.dt$ et $\int_0^{\ln(2)} \frac{sh^2(t)}{ch^2(t)}.dt$.

Les deux intégrales existent par continuité des fonctions sous le signe somme *(avec des dénominateurs jamais nuls)*.

Dans la première, on reconnait le carré d'une tangente. Or, $1 + \tan^2 = \tan'$.

On ajoute et soustrait 1 :

$$\boxed{\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}.dt = \int_0^{\pi/4} (1+\tan^2(\theta)).d\theta - \int_0^{\pi/2} d\theta = [\tan(\theta) - \theta]_0^{\pi/4} 1 - \frac{\pi}{4}}$$

Pour $\int_0^{\ln(2)} \frac{sh^2(t)}{ch^2(t)}.dt$, on fait de même en dérivant : $\left(\frac{sh}{ch}\right)' = \frac{ch}{ch} - \frac{sh}{ch^2}.sh = 1 - th^2$.

On a donc $\boxed{\int_0^{\ln(2)} \frac{sh^2(t)}{ch^2(t)}.dt = \int_0^{\ln(2)} (th^2(t) - 1).dt + \int_0^{\ln(2)} dt = [t - th(t)]_0^{\ln(2)} = \ln(2) - \frac{3}{5}}$

On a en effet $th(\ln(2)) = \dfrac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}} = \dfrac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} = \dfrac{3}{5}$.

∘34∘ La suite u est définie par $u_0 = 7$, $u_1 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2.u_n$. (u_n) est elle croissante ? Est elle croissante à partir d'un certain rang ?

On calcule les premiers termes.

7	−4	10	2	22	26	70

On peut affirmer : $u_1 < u_0$: la suite n'est pas croissante.

La négation de suite croissante n'est pas « suite décroissante », c'est « il existe n tel que... ».

En revanche, à partir du rang 2, tous les termes de la suite sont positifs.
Récurrence : C'est vrai pour u_2 et u_3.
Si pour un n donné, u_n et u_{n+1} sont positifs, alors u_{n+2} est positif (combinaison).
A partir du rang 3, la suite est croissante.

Direct : $u_{n+1} = u_n + 2.u_{n-1} \geqslant u_n$ puisque u_{-1} est positif.
Cette fois, pas de récurrence.
Ah, il faut savoir quand faire une récurrence, et quand faire une preuve directe.
Et ça, ce n'est pas un truc qui s'apprend par cœur comme une classicication périodique ou une chanson de...
C'est une question d'intelligence.

∘35∘ ♡ Montrez que la dérivée de $t \longmapsto \int_0^t f(u).sh(t-u).du$ *(où f est une application continue)* est $.t \longmapsto \int_0^t f(u).ch(t-u).du$.
(vous serez conduit à écrire $sh(t).\int_0^t f(u).ch(u).du - ch(t).\int_0^t f(u).sh(u).du$).

Résultat pas évident si on ne l'attaque pas par le bon bout. Il faut voir où t intervient. On développe

$$sh(t-u) = sh(t).ch(u) - sh(u).ch(t)$$

On sort de l'intégrale ce qui ne dépend pas de la variable d'intégration u :

$$\int_0^t f(u).sh(t-u).du = sh(t).\int_0^t ch(u).f(u).du - ch(t).\int_0^t sh(u).f(u).du$$

On des produits, qu'on dérive alors avec chacun deux termes, en rappelant que $t \longmapsto \int_0^t h(t).dt$ se drive en $t \longmapsto h(t)$:

$f(t) =$	$sh(t).\int_0^t ch(u).f(u).du$	$-ch(t).\int_0^t sh(u).f(u).du$
$f'(t) =$	$ch(t).\int_0^t ch(u).f(u).du$	$-sh(t).\int_0^t sh(u).f(u).du$
	$+sh(t).ch(t).f(t)$	$-ch(t).sh(t).f(t)$

Les termes de la deuxième ligne s'en vont.
On refusionne ceux de la première ligne :

$$f'(t) = \int_0^t \Big(ch(t).ch(u).f(u) - sh(t).sh(u).f(u)\Big).du$$

On regroupe $ch(t).ch(u) - sh(t).sh(u)$ en $ch(t-u)$ et c'est fini !

Attention : *On rappelle que $t \longmapsto \int_0^t f(x).dx$ se dérive en $x \longmapsto f(x)$.*
Et c'est tout.
Il suffit d'écrire $\int_0^t f(x).dx = F(t) - F(0)$ et de dériver.
Ah oui, il reste des élèves qui écrivent que la dérivée c'est $F'(t) - F'(0)$.
ceux là, je ne peux plus rien pour eux (hormis leur dire de jouer le 12, le 4 et le 7 au tiercé comme ça si ils gagnent, ça ne leur aura pas servi à rien de venir au lycée.
Sinon, à ces crétins, je peux dire que $x \longmapsto \sin(x)$ c'est aussi $x \longmapsto \sin(x) - \sin(0)$ et donc, avec leurs idées à la noix, ça se dérive en $x \longmapsto \cos(x) - \cos(0)$. Etonnant, non ?

◦36◦

35	+		−		=	37
−	■	+	■	+	■	■
	+	9	+		=	14
−	■	+	■	×	■	■
	×		+		=	61
=	■	=	■	=	■	■
26	■	23	■	19	■	■

29	−		+		=	31
−	■	×	■	+	■	■
	+		+	2	=	17
−	■	−	■	×	■	■
	×		−		=	30
=	■	=	■	=	■	■
12	■	17	■	17	■	■

Il faut complétez les cases avec les nombres de 2 à 9 (l'un d'entre eux est déjà en place). Il faut que les trois opérations en lignes et trois opérations en colonne soient exactes.

A faire ?

◦37◦

Montrez l'existence d'une suite de polynômes P_n vérifiant $t^n + \frac{1}{t^n} = P_n(\left(t + \frac{1}{t}\right))$ pour tout entier naturel n et tout réel t non nul (on prouvera l'existence par récurrence double, et on ne cherchera pas à les expliciter).

On doit montrer *(par récurrence)* l'existence d'une suite de polynômes.

C'est plus intelligent que des formules comme $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2.(n+1)^2}{4}$. Il ne s'agit pas de montrer une égalité mais l'existence d'un polynôme. En le construisant. Ou en montrant qu'il existe *(en le construisant à partir des précédents)*.

Initialisation : P_0, P_1 et P_2 existent

n	0	1	2	3
P_n	2	X	$X^2 - 2$	$X^3 - 3.X$
vérification	$1 + \frac{1}{1} = 2$	$t + \frac{1}{t} = \left(t + \frac{1}{t}\right)$	$t^2 + \frac{1}{t^2} = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2$	$t^3 + \frac{1}{t^3} = \left(t + \frac{1}{t}\right)^3 - 3.\left(t + \frac{1}{t}\right)$

Hérédité. On se donne un n et on suppose que tous les polynômes existent jusqu'au rang n,vérifiant la relation.

On doit construire celui de rang $n+1$: $t^{n+1} + \frac{1}{t^{n+1}} = P_{n+1}(\left(t + \frac{1}{t}\right))$?

Partons de $t^n + \frac{1}{t^n} = P_n(\left(t + \frac{1}{t}\right))$ (au rang n) et multiplions par $\left(t + \frac{1}{t}\right)$:

$$\left(t^n + \frac{1}{t^n}\right).\left(t + \frac{1}{t}\right) = P_n(\left(t + \frac{1}{t}\right)).\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

$$t^{n+1} + \frac{1}{t^{n+1}} = P_n(\left(t + \frac{1}{t}\right)).\left(t + \frac{1}{t}\right) - \left(t^{n-1} + \frac{1}{t^{n-1}}\right)$$

et justement, par hypothèse de rang $n-1$:

$$t^{n+1} + \frac{1}{t^{n+1}} = P_n(\left(t + \frac{1}{t}\right)).\left(t + \frac{1}{t}\right) - P_{n-1}\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

Le membre de droite est un polynôme en $\left(t + \frac{1}{t}\right)$, on l'appelle $P_{n+1}(\left(t + \frac{1}{t}\right))$ avec $P_{n+1}(X) = P_n(X) \times X - P_{n-1}(X)$.

La récurrence s'achève.

Remarque : *La difficulté n'est pas de prouver une formule, mais de trouver la formule à prouver (le nouveau polynôme).*

En Terminale, la récurrence, c'est « prouver $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n.(n+1).(2.n+1)}{2}$ *» par exemple. On sait ce qu'on doit prouver, on fait des calculs.*

Ici, c'est « $\exists P_n$ ». C'est donc à vous de construire P_{n+1}, et on ne vous dit pas de montrer que P_{n+1} est égale à ceci ou cela. C'est en ça que c'est vraiment des maths. C'est à vous de construire. Il y a donc une part d'initiative : « je pose $P_{n+1} = \ldots$ *».*

On vérifie quand même que chaque P_n est bien un polynôme.

Et on note au passage que le lien avec es polynômes de Tchebychev est visible si on y regarde de près ($2.\cos(\theta) = e^{i.\theta} + e^{-i.\theta} = t + \frac{1}{t}$ *en posant* $t = e^{i.\theta}$.

◦38◦

♡ On note T_n le n^{ieme} polynôme de Tchebychev. Calculez $T_{12}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$.

Partant de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2.\theta)}{2}$, on a $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

On a donc immédiatement

$$T_{12}\Big(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\Big) = \cos\Big(12.\frac{\pi}{8}\Big) = \cos\Big(\frac{3}{2}\Big) = 0$$

◦39◦ Résolvez $T_n\Big(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\Big) = \frac{1}{2}$ d'inconnue n *(polynômes de Tchebychev)*.

Cette fois, $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \cos\Big(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\Big) = \cos\Big(\frac{\pi}{12}\Big)$.

On résout donc $\cos\Big(n.\frac{\pi}{12}\Big) = \cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big)$ d'inconnue n.

Le cas d'égalité des cosinus donne $n.\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}\ [2.\pi]$ ou $n.\frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3}\ [2.\pi]$.

On a donc $\boxed{S_n = \{4+24.k.\pi \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{-4+24.k.\pi \mid k \in \mathbb{N}^*\}}$ par exemple 4, 20, 28 et ainsi de suite.

◦40◦ Calculez $\int_{-1}^{1} T_5(t).T_4(t).dt$ où T_n est le n^{ieme} polynôme de Tchebychev (on est en maths, on réfélechit avant d'écrire douze formules !)

Pour $\int_{-1}^{1} T_5(t).T_4(t).dt$, on ne remplace rien car on a $T_n(t)$ et pas $T_n(\cos(\theta))$.

On peut certes calculer explicitement $T_5(t)$ et $T_4(t)$, puis leur produit.

Mais quand bien même on ne connaît pas tous les coefficients, on écrit ce qu'on sait par parité :

$$T_4(X).T_5(X) = (8.X^4 - a.X^2 + b).(16.X^5 - c.X^3 + d.X)$$

C'est un polynôme qui n'a que des termes d'exposant impair : X^9,X^7, X^5, X^3 et X.

Chaque intégrale comme $\int_{-1}^{1} t^5.dt$ est nulle. La somme est nulle.

La clef est dans « fonction impaire, intervalle symétrique ».

◦41◦ Les nombres | 1 | 1/2 | 1/3 | 1/4 | 1/5 | 1/6 | 1/7 | 1/8 | 1/9 | 1/10 | sont inscrits au tableau. Un élève en efface deux *(disons a et b)* et écrit à la place le nombre $a.b + a + b$. Il n'y a plus que neuf nombres, par exemple | 1 | 1/2 | 1/3 | 1/4 | 1/5 | 1/6 | 1/8 | 1/10 | 17/63 |. Un autre élève passe et fait de même, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un nombre. Indiquez quel sera le dernier nombre écrit, même si vous ne savez pas l'ordre dans lequel les élèves ont effectué leurs éliminations.

L'ordre dans lequel on effectue les opérations semble n'avoir aucune importance ?

C'est étrange.

Mais si on prend des entiers pour se simplifier la vie, c'est le cas :

1	2	3	5
5			
23			
143			

1	2	3	5
	11		
		71	
143			

1	2	3	5
5			
		23	
143			

1	3	2	5
7			
		17	
143			

Définissions la loi $*$ par$a * b = a + b + a.b$.

Elle est commutative et associative.

On a donc $(a*b)*(c*d) = ((a*b)*c)*d = (a*c)*(b*d) = ((b*d)*c)*a$ et ainsi de suite.

Finalement, qu'importent donc les résultats intermédiaires, tout ce qu'on fait, c'est calculer $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \ldots * \frac{1}{10}$ (sans parenthèses de priorité).

On peut donc calculer ce nombre « à la main », dans l'ordre qu'on veut
$$\begin{aligned} 1 * \frac{1}{2} &= 2 \\ 2 * \frac{1}{3} &= 3 \\ 3 * \frac{1}{4} &= 4 \\ 9 * \frac{1}{10} &= 10 \end{aligned}$$

Et on se dit qu'il doit y avoir un truc.

Remarque : *Je trouve cet exercice génial pour raconter l'importance de la commutativité et de l'associativité.*
Testez le si vous donnez des petits cours à un élève de collège pour vous faire de l'argent de poche.

En fait, il y a un truc : $a * b = (1+a).(1+b) - 1$.
C'est la multiplication classique « translatée de 1 ».
Notre pr*duit $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \ldots * \frac{1}{10}$ est donc juste $(1+1).\left(\frac{3}{2}\right).\left(\frac{4}{3}\right).\left(\frac{5}{4}\right)\ldots\left(\frac{10}{9}\right) - 1$.
Et cette fois, c'est le cours « produit télescopique » qui sert ! Trop fort ! Je l'aime deux fois plus cet exercice.

∘42∘

Développez $(u+v+w).(u+v-w).(u-v+w).(-u+v+w)$. a, b et c sont les longueurs de trois côtés d'un triangle et vérifient $2.(a^8+b^8+c^8) = (a^4+b^4+c^4)^2$. Montrez que le triangle est rectangle. Réciproque ?

On développe $(u+v+w).(u+v-w)$ et $(u-v+w).(-u+v+w)$
Le premier donne $(u+v)^2 - w^2$ et le second $-((u-v)+w).((u-v)-w)$ c'est à dire $w^2 - (u-v)^2$.
On effectue à présent $(u^2+v^2-w^2+2.u.v).(u^2+v^2-w^2-2.u.v)$ au signe près.
On trouve donc cette fois $(u^2+v^2-w^2)^2 - 4.u^2.v^2$.
On développe le premier : $u^4+v^4+w^4+2.u^2.v^2-2.u^2.w^2-2.v^2.w^2$ et $-4.u^2.v^2$ pour le second :

$$(u+v+w).(u+v-w).(u-v+w).(-u+v+w) = 2.(u^2.v^2+u^2.w^2+v^2.w^2) - (u^4+v^4+w^4)$$

Remarque : Si on prend le calcul avec méthode, par le bon bout, c'est très simple. Sinon, c'est la mort.
C'est la différence que je vois entre mathématiques et physique.
En mathématiques, un calcul peut être esthétique. Un physique, celui qui fait le calcul doit être efficace, c'est tout ce qu'on lui demande ; pas d'esthétisme, mais du papier.

Sinon, il importe que votre réponse soit symétrique dans les rôles joués par u, v et w.
Je me demande aussi si il n'aurait pas été simple de poser $s = u+v+w$ et de développer $s.(s-2.w).(s-2.v).(s-2.u)$.
En tout cas, on prend du recul, on le fait joliment, et pas en se ruant sur des lignes qui débordent.
On se donne un triangle de cotés a, b et c. On suppose $2.(a^8+b^8+c^8) = (a^4+b^4+c^4)^2$.
Ou quitte à développer $2.(a^8+b^8+c^8) = a^8+b^8+c^8+2.(a^4.b^4+a^4.c^4+b^4.c^4)$.

On doit arriver à quelquechose comme $a^2+b^2=c^2$. Ou $a^2+c^2=b^2$. Ou $-a^2+b^2+c^2=0$.
On pose donc $u=a^2$, $v=b^2$ et $=c^2$ dans l'expression précédente :

$$(a^2+b^2+c^2).(a^2+b^2-c^2).(a^2-b^2+c^2).(-a^2+b^2+c^2) = 2.(a^4.b^4+a^4.c^4+b^4.c^4) - (a^8+b^8+c^8)$$

Ceci est nul par l'hypothèse développée plus haut.
Par intégrité, on a l'une des quatre possibilités :

$a^2+b^2+c^2=0$	$a^2+b^2-c^2=0$	$a^2-b^2+c^2=0$	$-a^2+b^2+c^2=0$
impossible	triangle rectangle		
	hypoténuse c	hypoténuse b	hypoténuse a

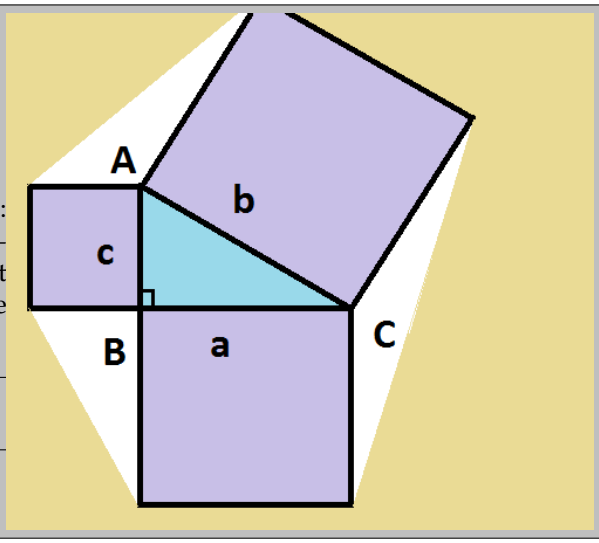
Réciproquement, si le triangle est rectangle, par symétrie des rôles on pourra supposer $c^2 = a^2+b^2$ et reporter dans la différence

$$2.(a^8+b^8+(a^2+b^2)^4) - (a^4+b^4+(a^2+b^2)^2)^2$$

On trouve $2.(2.a^8+2.b^8+4.a^6.b^2+6.a^4.b^4+4.a^2.b^6) - (2.a^4+2.b^4+2.a^2.b^2)$ et tout se simplifie.

Remarque : *On peut aussi estimer qu'avec* $(a^2+b^2+c^2).(a^2+b^2-c^2).(a^2-b^2+c^2).(-a^2+b^2+c^2) = 2.(a^4.b^4+a^4.c^4+b^4.c^4) - (a^8+b^8+c^8)$ *on a de quoi raisonner par équivalences.*

Le concours Kangourou propose l'exercice suivant : $(A,\ B,\ C)$ est un triangle rectangle en B *(côtés a, b etc, hypoténuse b)*. On construit des carrés sur les côtés.On obtient ainsi une figure qu'on complète en hexagone. Montrez que l'aire de l'hexagone est $2.a.c + 2.(a^2 + c^2)$.



Calculez celle là : $\int_0^1 x.4^x.dx$.

Montrez cette inégalité :

◦43◦ $\forall x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan(x) \geqslant 1 + 2.\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

On a évidemment des pièces faciles à déterminer.

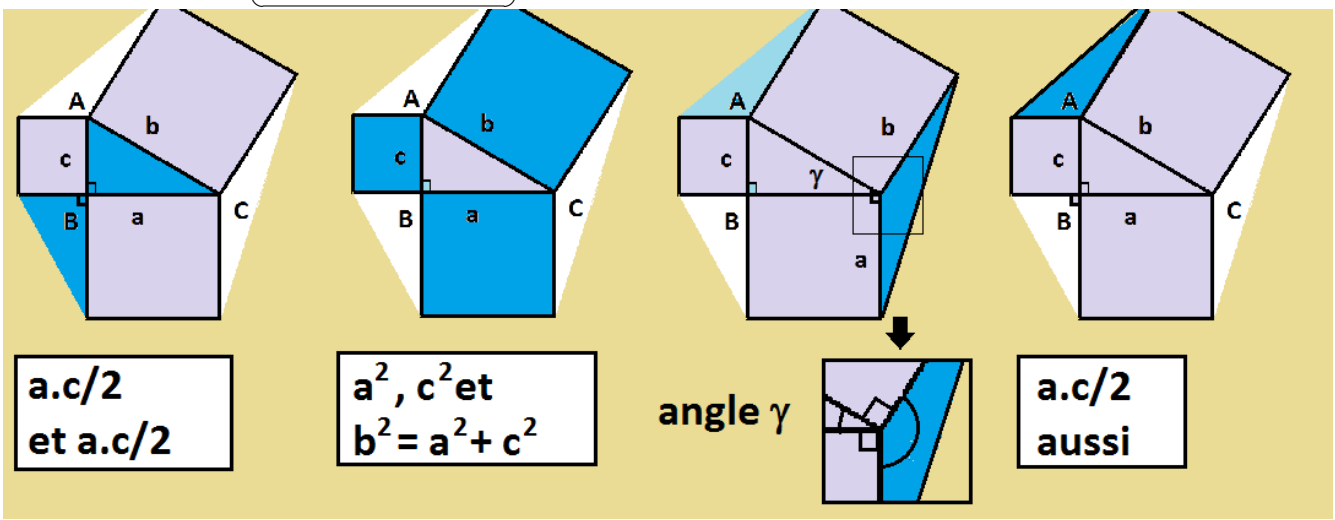
Le triangle $(A,\ B,\ C)$ d'aire $a.c/2$. Son symétrique par rapport à B de même aire $a.c/2$. Ou alors, on colle les deux triangles rectangles et on récupère un rectangle de côtés a et c.	Les deux « petits » carrés d'aires a^2 et c^2.	Le grand carré d'aire b^2. mais par théorème de Pythagore, il a pour aire $a^2 + c^2$.	Il reste deux triangles basés sur le grand carré. Prenons celui en C pour des raisons de symétrie des rôles. Il a pour côtés a et c *(et l'autre est plus lourd à déterminer)*.

L'aire d'un triangle est le produit des deux côtés fois le sinus de l'angle, divisé par 2. C'est la formule base fois hauteur divisé par 2.
Il faut donc déterminer le sinus de l'angle obtus en C. Par complémentarité, on le mesure en faisant un tour autour de C : $\gamma + \frac{\pi}{2} + inconnu + \frac{\pi}{2} = 2.\pi$.
L'angle obtus en C vaut $\pi - \gamma$. Son sinus vaut donc $\sin(\pi - \gamma)$ c'est à dire $\sin(\gamma)$. Dans le triangle rectangle en B, on a $\sin(\gamma) = \frac{oppose}{hypothenuse} = \frac{c}{b}$.

L'aire du triangle marqué en C est donc $a.b.\frac{c}{b}.\frac{1}{2}$. On trouve $\frac{a.c}{2}$.

Il en va de même pour l'autre triangle.[7]

L'aire totale est donc $\boxed{2.a.c + 2.(a^2 + c^2)}$



$\int_0^1 x.4^x.dx$ se calcule par parties. $\frac{4.\ln(4) - 3}{(\ln(4))^2}$.

7. on peut le prouver d'autres façons, en déformant le triangle initial

L'inégalité $\forall x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan(x) \geqslant 1+2.\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ est en effet une inégalité de convexité, issue de la formule de Taylor avec reste intégrale.

L'application *tan* a pour dérivée première $1+\tan^2$ et pour dérivée seconde $2.\tan.(1+\tan^2)$.
Cette dérive seconde est positive sur $[0,\ \pi/2[$, la tangente est convexe.
Son graphe est au dessus de ses tangentes.
Et la tangente en $\frac{\pi}{4}$ a pour équation $y=1+2.\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ *(coefficients directeur* 2 *venant de* $1+\tan^2(\pi/4)$ *).*

La question est évidemment parfaitement traitable par une étude de fonction différence qui est décroissante sur $[0,\ \pi/4]$ *puis croissante sur* $[\pi/4,\ \pi/2[$ *et admet un minimum (nul) en* $\pi/4$.

◦44◦ Un triangle pythagoricien (rectangle à côtés entiers) peut il avoir des hauteurs entières ?
Un triangle pythagoricien (rectangle à côtés entiers) peut il avoir des médianes entières ?

◦45◦ ♣ (a_n) est une suite d'entiers naturels. On suppose : $((a_n)!)$ est croissante, $(a_{n!})$ est décroissante et a_{12} vaut 12 que vaut a_{2019} ?

(a_n) est une suite d'entiers naturels. On peut donc définir $(a_n)!$ pour tout entier naturel n. Pour que cette suite soit croissante, il faut et il suffit, « par composition inverse » que (a_n) soit croissante. A un petit détail près : la suite peut « s'amuser un certain temps » à prendre les valeurs 0 et 1 ; l'application avec des factorielles sera croissante, car constante. Mais comme un terme vaut 12, la suite est contrainte de croitre (mais elle pourrait faire des bêtises du style

$$(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 12,\ldots)$$

et par la fonction factorielle, on obtiendrait

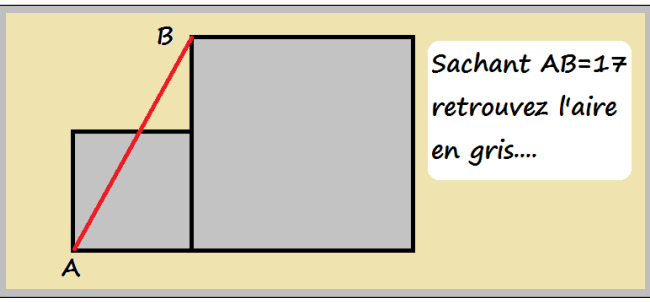
$$(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 24,\ 479001600,\ldots)$$

Mais la suite « extraite » $(a_1,\ a_1,\ a_2,\ a_6,\ a_{24},\ a_{120},\ \ldots)$ devrait décroître. Or, la voici extraite d'une suite croissante. Elle est donc à la fois croissante et décroissante. Elle est constante.
La suite croissante contient une suite constante.
Comme un terme vaut 12, ils valent tous 12

Une remarque d'ailleurs, due à monsieur Pierre de Fermat : comment la suite d'entiers naturels $(a_{n!})$ *peut elle décroitre sans devenir stationnaire ?*

◦46◦

Sachant $x = 45678^3 - 45676^3$,
calculez $\sqrt{\frac{x-2}{6}}$.
Les deux figures en gris sont des carrés.



Posons $a = 45677$ pour centrer les choses.
On a alors $x = 45678^3 - 45676^3 = (a+1)^3 - (a-1)^3 = (a^3+3.a^2+3.a+1) - (a^3-3.a^2+3.a-1)$.
On simplifie : $x = 6.a^2+2$.
On soustrait, on divise par 6 : $\frac{x-2}{6} = a^2$.
La racine cherchée vaut donc 45 677

Le problème de géométrie utilise simplement le théorème de Pythagore.
On note a et b les côtés des deux carrés. Dans le triangle rectangle d'hypoténuse AB, on a $B^2 = a^2+b^2$.
Mais les aires des deux carrés sont justement a^2 et b^2. La somme des aires est donc 17^2

◦47◦ Un triangle est dit grectangle si la racine carrée de l'hypoténuse est la somme des racines carrées des deux autres côtés. Existe-t-il des triangles à la fois grectangles et rectangles ? Est il vrai que tout triangle grectangle est aussi rectangle ?

On veut $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}$ au lieu de $a^2+b^2=c^2$.
Et le nom hypoténuse ne veut plus dire grand chose.
Je vous donne un exemple pour commencer ?

Justement, tout est là.
Il n'y a pas de triangle grectangle !

Dans un triangle (A,B,C), on a $AB \leqslant AC+BC$ (inegalite triangulaire).
On traduit : $c \leqslant a+b$.
Et ceci est incompatible avec $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}$ (qui donne $a+b+2.\sqrt{a.b}=c$ et imposerait donc $a=0$ ou $b=0$).

Il n'existe pas de triangle grectangle, donc il n'existe pas de triangle à la fois rectangle et grectangle.
Mais par pure logique, tout triangle grectangle est automatiquement rectangle.

◦48◦

♡ Montrez que l'application tan est injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (indication : π est irrationnel).
Est elle bijective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$?
Montrez que l'application sin est injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$?
Montrez que l'application cos n'est pas injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Si on part de $\tan(a)=\tan(b)$ avec a et b rationnels (donc différents des irrationnels $\frac{\pi}{2}+k.\pi$), on aboutit à l'existence de k dans $\mathbb{Z}$ vérifiant $a-b=k.\pi$.
Si k est non nul, le membre de droite est irrationnel et celui de gauche rationnel. C'est impossible.
Il ne reste que $k=0$ et donc $a=b$.

Elle n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ puisque la valeur 1 n'est pas atteinte *(il faudrait qu'un rationnel $\frac{p}{q}$ soit égal à un irrationnel $\frac{\pi+4.k.\pi}{4}$ avec k entier)*.

Pour le sinus, on part de $\sin(a)=\sin(b)$.
Ceci conduit à deux possibilités : $a=b+2.k.\pi$ ou $a=\pi-b+2.k.\pi$ avec k entier.
La première donne ($a=b$ et $k=0$) ou alors $\pi=\frac{a-b}{2.k}$ qui est impossible.
La deuxième donne $\pi=\frac{a+b}{2.k+1}$ qui est impossible *(irrationnel à gauche, rationnel à droite)*.
Éliminez l'impossible, il ne reste que $a=b$.

Pour le cosinus, un contre-exemple suffit : 1 et -1 ont la même image *(parité)*.