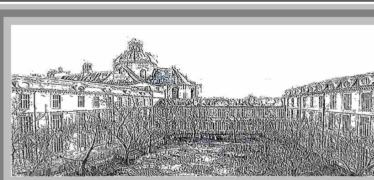
LYCEE CHARLEMAGNE 2023 2024

Lundi 20 novembre

M.P.S.I.2



TD09

∘0∘ ♡ Représentez graphiquement $x \longmapsto \tan^2(Arcsin(\cos(Arctan(\sqrt{x+3}))))$ et donnez ses dérivées successives *(simplifiez d'abord, évidemment)*.

♡ 0 ♡ Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce déterminant vaudra 2017 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ ? & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$? Si oui, cette valeur sera-t-elle entière, si non, calculez le coefficient de X^{23} dans T_{27}.

∘1∘ ♡ 1 ♡ On note T_n le n^{ieme} polynôme de Tchebychev. Rappelez la relation qui calcule T_{n+2} à l'aide de T_{n+1} et T_n.

♡ 2 ♡ Calculez $T'_n(0)$ pour tout n.

♡ 3 ♡ Que est le coefficient de X^{12} dans T_{15} ?

♠ 0 ♠ Un élève a trouvé le résultat suivant :

$$\begin{array}{llllll} (X^2-1). & (0) & + & X. & (1) & = & 1 & .(X) \\ (X^2-1). & (4) & + & X. & (4.X) & = & 4 & .(2.X^2-1) \\ (X^2-1). & (24.X) & + & X. & (12.X^2-3) & = & 9 & .(4.X^3-3.X) \\ (X^2-1). & (...) & + & X. & (32.X^3-16.X) & = & ... & .(8.X^4-8.X^2+1) \end{array}$$

Et si finalement, vous me calculiez le coefficient de X^{12} dans T_{16} ?

♢ 0 ♢ Calculez $T_n(17/8)$.

♠ Complétez déjà les cases qu'il n'a pas complétées dans sa précipitation.
Ayant conjecturé quelquechose de joli, il veut écrire proprement sa formule pour tout n. Aidez le.
Il va voir son professeur, tout fier d'avoir deviné une belle formule à démontrer par récurrence. Son professeur lui dit *"ah, oui, c'est évident, sans récurrence, pars de $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta))$ et dérive deux fois"*. Faites le pour lui, en n'omettant aucun détail.

∘2∘ On constate
$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array}$$
et
$$\begin{array}{lcccccccccccc} 11^0 & = &&&&&&1&&&&& \\ 11^1 & = &&&&&1&&1&&&& \\ 11^2 & = &&&&1&&2&&1&&& \\ 11^3 & = &&&1&&3&&3&&1&& \\ 11^4 & = &&1&&4&&6&&4&&1& \\ 11^5 & \neq &1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array}$$
.

Qu'est ce qui ne va pas entre le triangle de Pascal et les carrés d'entiers ?

∘3∘ Comparez (pour la relation d'ordre) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2}$, $\int_1^{n+1} \frac{dt}{1+t^2}$ et $1+\int_0^n \frac{dt}{t^2+1}$.

∘4∘ Pour tout n on pose : $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{n}$, $C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n)}{k}$. Montrez que (A_n) et (C_n) sont croissantes.
Montrez que B_n est décroissante.
Étudiez la convergence de chacune par comparaison série intégrale.
Donnez un équivalent en $+\infty$ simple de chacune.

∘5∘ On note W_n la n^{ieme} intégrale de Wallis. Montrez : $(W_{n+p})^2 \leqslant W_{2.n}.W_{2.p}$. (un carré, des intégrales, une inégalité...)

∘6∘ ♡ On définit : $f = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \cos(x) & si & x \leqslant 0 \\ a.\cos(x)+b.\sin(x) & si & 0 < x < \pi \\ \sin(x) & si & \pi \leqslant x \end{array} \right|$. Pouvez vous la rendre continue en choisissant bien a et b ?

Même question pour $f = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \cos(x) & si & x \leqslant \pi/3 \\ a.\cos(x)+b.\sin(x) & si & \pi < 3.x < 2.\pi \\ \sin(x) & si & 2.\pi/3 \leqslant x \end{array} \right|$. Est elle alors dérivable ?

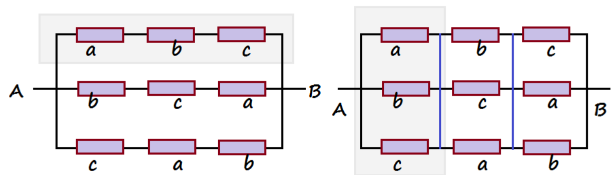
∘7∘ Résolvez $\left\{ \begin{array}{cccc} 2^a & \times 3^b & = & 2021 \\ 2^b & \times 3^a & = & 2022 \end{array} \right|$ d'inconnues réelles a et b.

∘8∘ On prend trois réels strictement positifs a, b et c. leur moyenne arithmétique est connue, et leur moyenne harmonique est l'inverse de la moyenne des inverses $\dfrac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$.

Montrez que la moyenne harmonique est plus petite que la moyenne arithmétique, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur deux triplets bien choisis (c'est à dire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \leqslant |\overrightarrow{u}| \times |\overrightarrow{v}|$ produit scalaire face à produit des normes).

$a.\alpha + b.\beta + c.\gamma \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$

Montrez que la moyenne harmonique est plus petite que la moyenne arithmétique en calculant la résistance entre A et B sur les deux scémas ci-contre.



∘9∘ Clément Deslandes a décidé de fabriquer des assiettes plutôt que de faire prof de maths.
Il veut tester la solidité de ses assiettes. Il en prend une et se rend au pied d'un immeuble de 78 étages et il veut savoir depuis quel étage il peut balancer une assiette sans qu'elle se casse. Il veut même connaître l'étage au delà duquel elle se brise.
S'il la lance du sommet et qu'elle se brise, il saura qu'elle ne tient pas 78 étages, mais il ne saura pas à partir de quel étage elle se serait brisée. Alors quoi ?
Il teste au rez de chaussée. L'assiette se brise, il sait qu'elle se brisera quel quel que soit l'étage. Et si elle ne se brise pas, il recommence au premier étage. Si elle se brise, le niveau de rupture est le 1. Sinon, il monte au deuxième étage et recommence.
En gros une récurrence. Si elle se rompt à l'étage n, on a l'information, sinon, on passe à l'étage $n+1$.
C'est un peu long, mais ça se fait. Et au pire il fait 79 tests.

Mais voilà, il a pensé à prendre deux assiettes. Alors que fait il pour minimiser le nombre de tests « dabns le pire cas » ?

On peut envisager « il va au trente neuvième étage, il jette une assiette ; si elle se brise, il lui en reste une pour tester étage par étage de 0 à 38, et si elle réchappe, il lui en reste deux pour tester du 39 au 78 ». Mais il y a mieux.

∘10∘ On note T_n le n^{ieme} polynôme de Пафнутий Львович Чебышёв. Calculez $T_n'(1)$. Pour prouver ce que vous allez conjecturer, il y a deux méthodes ; l'une par récurrence, et l'autre en regardant la limite en 0 de la formule obtenue par dérivation de $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$.

∘11∘ Un exercice d'oral de Polytechnique était posé sous la forme suivante :

> soient $(z_0, \dots z_{n-1})$ n complexes non nuls,
>
> alors il existe une partie P de `range(n)` vérifiant $\left|\sum\limits_{p\in P} z_p\right| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.\sum\limits_{k=0}^{n-1}|z_k|$

l'exercice était posé tel quel avec une indication que l'on donnera plus loin sur un exemple et pour le traitement général. Mais on commencera ici par quelques cas particuliers.

♠ 0 ♠ Pour $(1,\ i, -1, -i)$, vérifiez : $|1+i| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|1|+|i|+|-1|+|-i|)$.

♠ 1 ♠ Pour $(1, -j^2,\ j, -1,\ j^2, -j)$, vérifiez : $|j-1+j^2| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|1|+|-j^2|+|j|+|-1|+|j^2|+|-j|)$.

♠ 2 ♠ n est un entier naturel non donné, on pose $z_k = e^{i.k.\pi/n}$ pour k dans $range(2.n)$.
Justifiez : $\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} z_k\right| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.\sum\limits_{k=0}^{2.n-1}|z_k|$.

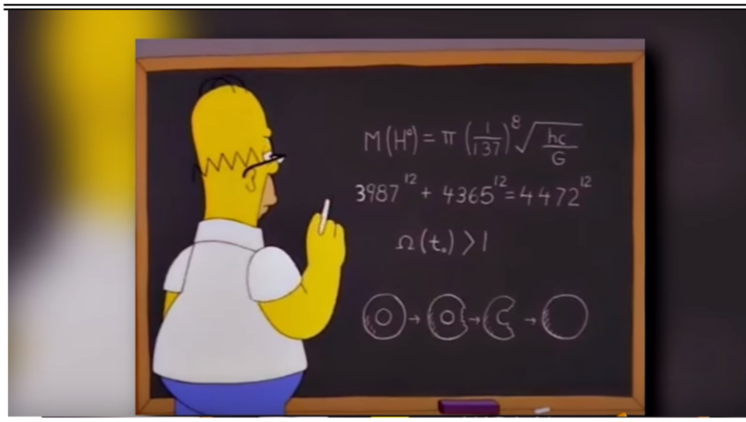
♠ 3 ♠ a et b sont deux réels, vérifiant $a < 0 < b$. Prouvez : $|a| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$ ou $|b| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$.

♠ 4 ♠ Les z_k sont n réels classés par ordre croissant.
Montrez qu'il existe un entier p vérifiant $\left|\sum\limits_{k=0}^{p-1} z_k\right| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.\sum\limits_{k=0}^{n-1}|z_k|$ ou $\left|\sum\limits_{k=p}^{n-1} z_k\right| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.\sum\limits_{k=0}^{n-1}|z_k|$.

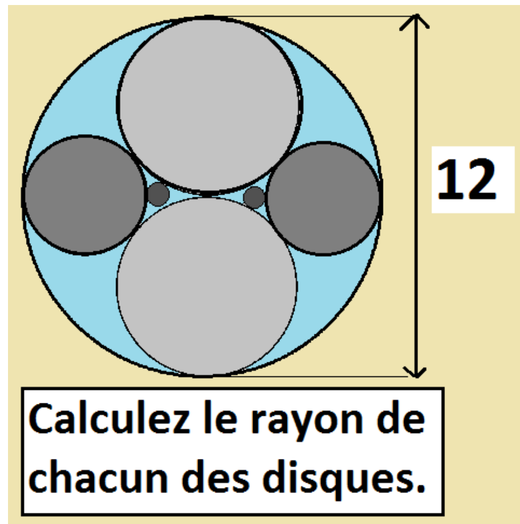
♠ 5 ♠ On prend cette fois à titre d'exemple $z_0 = 2$, $z_1 = 1+i$, $z_2 = i$, $z_3 = -2+3.i$, $z_4 = -5$ et $z_5 = -3-4.i$.
Pour tout α entre $-\pi$ et π, on note A_α l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |Arg(z.e^{-i.\alpha})| \leqslant \pi/2\}$. Justifiez que A_α est un demi plan.

Pour tout α, on note $f(\alpha)$ la norme de la somme des z_k qui sont dans A_α. Représentez graphiquement l'application f sur $[-\pi,\ \pi]$, et calculez l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha).d\alpha$ [1].

Le cas général repose aussi sur le demi-plan qui tourne. On calcule la valeur moyenne de l'application f, avec des inégalités dans $\mathbb{C}$ et un peu de trigonométrie. Comme cette valeur moyenne dépasse alors la valeur $\sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$, c'est que f dépasse cette valeur au moins en un point. On ne le détaillera pas ici. 2018



$3987^{12} = 161344746097512912834964919705151517153464 81$



Exercice sans rapport.

∘12∘

$4365^{12} = 478421817399473213327397389826393361816406 25$

somme = 639766563496986126162362309531544878969871 06

$4472^{12} = 639766563484867258068623583221685757841244 16$

Erreur relative : 2×10^{-11}

∘13∘ Reliez dans cette grille l'entrée à la sortie du tunnel. Les chiffres inscrits en début de ligne et de colonne indiquent le nombre de cases du tunnel dans la ligne ou colonne. Le tunnel ne se croise pas lui même, ni ne se touche. Un exemple résolu vous permet de comprendre.

	2	1	1	2	3
0					
0					
2				☺	■
2	☺				■
5	■	■	■	■	■

	5	2	2	0	0
3					
2			☺		
1					
1					
2		☺			

	0	3	1	2	1
2					☺
3					
1					
1		☺			
0					

	1	2	1	2	4
0					
2				☺	
1					
3	☺				
4					

	0	2	1	3	0
0					
0					
1				☺	
2		☺			
3					

	1	2	3	0	0
0					
2		☺			
1					
3	☺				
0					

∘14∘ ♡ Soient f et g continues de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$, montrez en identifiant l'intégrale d'un carré :

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2.\int_0^1 (f(t))^2.dt + 2.\lambda.\int_0^1 f(t).g(t).dt + \int_0^1 (g(t))^2.dt \geqslant 0.$

Déduisez ensuite $\left(\int_0^1 f(t).g(t).dt\right)^2 \leqslant \int_0^1 (f(t))^2.dt.\int_0^1 (g(t))^2.dt$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz)*

Déduisez enfin $\sqrt{\int_0^1 (f(t)+g(t))^2.dt} \leqslant \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2.dt} + \sqrt{\int_0^1 (g(t))^2.dt}$ *(inégalité triangulaire)*.

1. on rappelle que l'intégrale d'une fonction est une aire, et ne se calcule pas forcément par des $[F(x)]_{x=a}^{b}$ avec des exigences du type "f doit être dérivable" à cause d'un cours de Terminale dans lequel on confond à tout bout de champ "nécessaire" et "suffisant"

∘15∘ Mettre dans le grille tous les entiers de 1 à 9 (certains sont déjà placés) pour que les trois additions en ligne et en colonne soient correctes :

			=	11
	6		=	14
			=	20
=	=	=		
13	23	.9		

et

			=	18
		2	=	15
			=	12
=	=	=		
23	16	.6		

A cause de vous, cette `hotte` est `purif`iée. Elle adore `cacher` les `menus`. Si je ne ne prends plus de `train`, je suis `assist`é. Elle est en `route` avec sa bûche. `Dure` luttes pour avoir des `boutures`. Il cherche des `branchettes` faute de `lattes`. Elle `adore` les `bobards`. J'ai pris un `coup` avec la bûche. Des `jeux` en `quoi` ?

∘16∘ La consommation quotidienne des français en pizza, ça fait combien de terrains de football ?

∘17∘ ♡ Calculez $\displaystyle\int_a^b \frac{d\theta}{\sin^2(\theta).\cos^2(\theta)}$.

∘18∘ Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}.dx$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{-\sin(x)+\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}.dx$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{a.\cos(x)+b.\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}.dx$ (non, pas Bioche).

∘19∘ ♡ Une inégalité classique dit $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1+n.x$.

Prouvez la de différentes façons : récurrence sur n

formule du binôme que vous coupez

variation de fonction (il faudra dériver plusieurs fois)

formule de Taylor avec reste intégrale

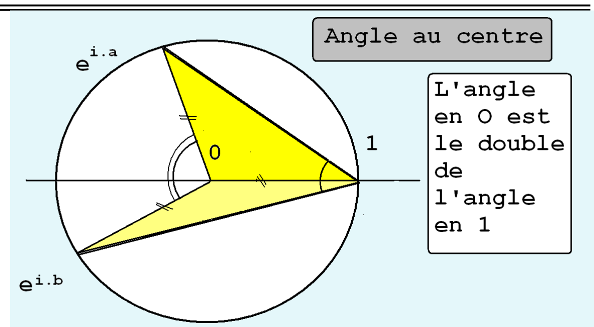
∘20∘ ♡ Pour la formule de Taylor avec reste intégrale $f(a+h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.h^k + \frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n.f^{(n+1)}(a+t.h).dt$, des livres proposent parfois $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.(x-a)^k + \frac{1}{n!}.\int_a^x (x-u)^n.f^{(n+1)}(u).du$. Passez de l'une à l'autre ?

∘21∘ Dérivez et simplifiez $\varphi = t \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{(1-t)^k}{k!}.h^k.f^{(k)}(a+t.h)$. Calculez $\varphi(1)$ et $\varphi(0)$ en prenant garde au terme $k=0$.

∘22∘ On pose $f_a = x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ pour tout réel a non nul.

Montrez pour tout t : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x).f_1(t-x).dx = 2.\pi.f_2(t)$.

Montrez pour tout t : $2.\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x).f_2(t-x).dx = 3.\pi.f_3(t)$.



α, β et γ sont trois réels distincts. Montrez : $Arg\left(\left(\frac{e^{i.\beta}-e^{i.\gamma}}{e^{i.\alpha}-e^{i.\gamma}}\right)^2\right) = \beta-\alpha$.

∘23∘ Retrouvez le théorème de l'angle au centre.

∘24∘ Montrez : $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin^2(t).\cos^3(t).dt \in \left\{\frac{11.\sqrt{3}}{160},\ \frac{9}{128},\ \frac{47}{480}\right\}$ *(en indiquant laquelle des trois est la bonne ; vous pourrez faire un changement de variable très simple en sinus).*

∘25∘ ♡ Montrez $2.\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt = \sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$ par changement de variable. Ou par parties.

∘26∘ Dans une I.S. (2020), on a trouvé pour a dans $]-1,\ 1[$: $J_a = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(\theta)}{1+a.\cos(\theta)}.d\theta = \pi.\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a.\sqrt{1-a^2}}\right)$. Mais, le

membre de droite n'a pas de valeur en 0. Est ce qu'au moins sa limite en 0 (calculez la) coïncide bien avec J_0 ?
On a ensuite intégré le membre de droite[2], et trouvé $I_a = \pi.\Big(\ln(a) - \ln\Big(\tan\Big(\frac{Arcsin(a)}{2}\Big)\Big)\Big)$. Pour a dans $]0,\ 1[$.
Mais quelle est la limite de cette chose en 0 ?
Vérifiez qu'elle se dérive bien ne ce qui est indiqué plus haut.
Mon livre donne $I_a = \pi.\ln\Big(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{2}\Big)$. C'est la même formule ?

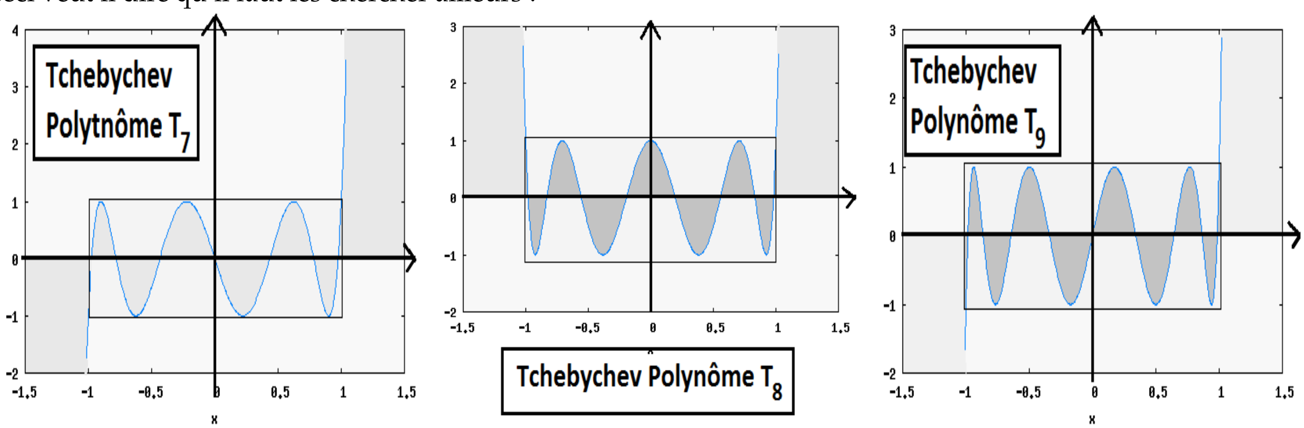
$\boxed{\circ 27\circ}$ Vous tirez au hasard uniforme un entier entre 1 et 2019. Quelle est la probabilité qu'il soit multiple de 7 ou de 13 (ou inclusif).
Vous tirez au hasard uniforme un entier entre 1 et 2019. Quelle est la probabilité qu'il soit multiple de 7 ou de 13 (ou exclusif).

$\boxed{\circ 28\circ}$ Calculez $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x.dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3.dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

$\boxed{\circ 29\circ}$ Calculez la longueur du graphe du cosinus hyperbolique sur $[0,\ 1]$.
La longueur du graphe d'une application f de classe C^1 zntre $(a,\ f(a))$ et $(b,\ f(b))$ est donnée par $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}.dt$
(intégrale de la norme du vecteur vitesse de $t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$.

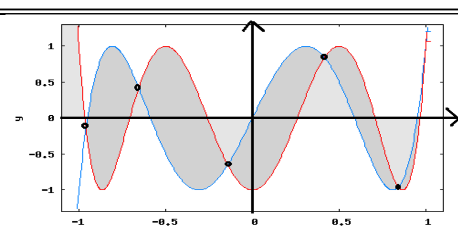
$\boxed{\circ 30\circ}$ Résolvez $T_n\Big(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\Big) = \dfrac{1}{2}$ d'inconnue n *(polynômes de Tchebychev).*

$\boxed{\circ 31\circ}$ Le polynôme $T_n$est de degré n, de même que $T_n - 1$. Pourtant, si on cherche ses racines entre -1 et 1, on n'en trouve pas n.
Ceci veut il dire qu'il faut les chercher ailleurs ?



$\boxed{\circ 32\circ}$ Qui est $2.X.(T_4 \circ T_4) - (T_5 \circ T_3)$?
Calculez le produit des racines de l'équation $2.T_n(x) = 1$ d'inconnue réelle x.

$\boxed{\circ 33\circ}$ a est un réel plus grand que 1 ; résolvez $a^2 - 2.a.T_7(x) + 1 = 0$ d'inconnue réelle x (T_n est le n^{ieme} polynôme de Pafnouti T.).



$\boxed{\circ 34\circ}$ ♡ On note T_n le n^{ieme} polynôme de Tchebychev. Donnez les racines de $T_6 - T_5$ et calculez leur somme.

$\boxed{\circ 35\circ}$ T_n est le n^{ieme} polynôme de Tchebychev. Calculez $T_{20}(\sqrt{3}/2)$, $T_{13}(1/2)$ et $T'_{13}(1/2)$.
Résolvez $T_{16}(x) > 1$ d'inconnue réelle x.

2. bon, c'est quoi alors $I_a = \displaystyle\int_{x=0}^{a}\Big(\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\cos(\theta)}{1+x.\cos(\theta)}.d\theta\Big).dx$

◦36◦

Un professeur étourdi voulait poser l'exercice suivant : « résoudre $T_n\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ d'inconnue n ». Il a écrit par erreur « résoudre $T_n\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ d'inconnue n », qui cette fois n'a pas de solution.

♡ 0 ♡ Résolvez quand même pour commencer le vrai exercice, et donnez le nombre de solutions dans **`range(100)`**.

◇ 0 ◇ Calculez $T_n\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}\right)$ (appelé u_n) pour n de 0 à 5.

◇ 1 ◇ Montrez qu'il existe quatre suites de rationnels (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) vérifiant pour tout n : $u_n = a_n + b_n.\sqrt{2} + c_n.\sqrt{3} + d_n.\sqrt{6}$ et donnez les coefficients du tableau

- $$\begin{array}{lcllllllll} a_{n+2} & = & *.a_{n+1} & +*.b_{n+1} & +*.c_{n+1} & +*.d_{n+1} & +*.a_n & +*.b_n & +*.c_n & +*.d_n \\ b_{n+2} & = & *.a_{n+1} & +*.b_{n+1} & +*.c_{n+1} & +*.d_{n+1} & +*.a_n & +*.b_n & +*.c_n & +*.d_n \\ c_{n+2} & = & *.a_{n+1} & +*.b_{n+1} & +*.c_{n+1} & +*.d_{n+1} & +*.a_n & +*.b_n & +*.c_n & +*.d_n \\ d_{n+2} & = & *.a_{n+1} & +*.b_{n+1} & +*.c_{n+1} & +*.d_{n+1} & +*.a_n & +*.b_n & +*.c_n & +*.d_n \end{array}$$

◇ 2 ◇ Calculez $a_{2.n}$ et $d_{2.n}$ pour n de 0 à 3.

◇ 3 ◇ Montrez que chaque $a_{2.n}$ est de la forme $\dfrac{i_n}{2^{2.n+1}}$ avec i_n entier impair (pour n dans $\mathbb{N}^*$) et chaque $d_{2.n}$ de la forme $\dfrac{j_{2.n}}{2^{2.n+1}}$ avec $j_{2.n}$ entier.

◇ 4 ◇ Déduisez que l'équation $u_n = \dfrac{1}{2}$ d'inconnue n n'a aucune solution.

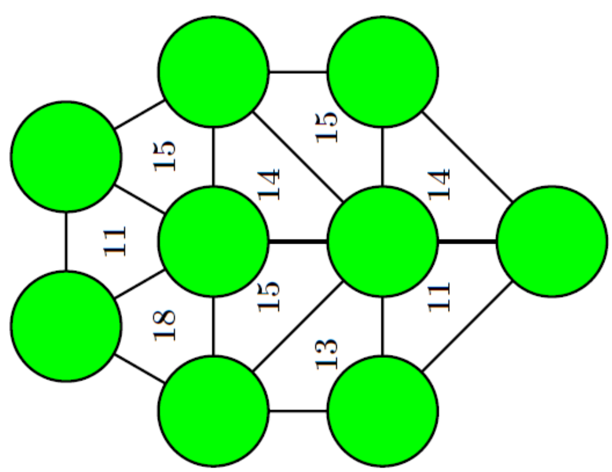
◦37◦ Trouvez a et b sachant : $a+b = 15$ et $a^2+b^2 = 30$.

◦38◦ Calculez $T_n'(0)$ pour tout n.

◦39◦ Montrez : $ch^2 = 1 + (ch')^2$. Quel est le minimum de l'application ch ?

◦40◦

Dans chaque triangle, le nombre écrit à l'intérieur du triangle doit être égal à la somme des nombres inscrits dans les trois cercles qui sont aux sommets du triangle. De plus, les neuf cercles contiennent chacun un des nombres de 1 à 9 sans les répéter. Complète cette figure en plaçant les jetons numérotés dans les cercles.



Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k.3^{n-k}$.

Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2.k.3.(n-k)$.

Calculez $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sqrt{2.k}$.

◦41◦

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24
.	Pafnouti encore	.

◇ 5 ◇ Montrez l'existence pour tout n de $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos\left(\dfrac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)}}$ noté S_n. Calculez S_0 et S_1.

$\boxed{\diamond\ 6\ \diamond}$ Sachant $\cos\left(\frac{2.\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, calculez S_2.

$\boxed{\diamond\ 7\ \diamond}$ On introduira le polynôme $\boxed{\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)\right)}$ qu'on notera $P_n(X)$. Pour tout n, on note encore T_n le n^{ieme} polynôme de Tchebychev, toujours caractérisé par $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ pour tout angle θ. Donnez la liste des racines réelles de l'équation $T_{2.n+1}(x) = 1$ et de l'équation $T'_{2.n+1}(x) = 0$.

$\boxed{\diamond\ 8\ \diamond}$ Déduisez : $T_{2.n+1}(X) - 1 = 2^{2.n}.(X-1).(P_n(X))^2$ (polynôme que l'on notera Q_n).

$\boxed{\diamond\ 9\ \diamond}$ Calculez $Q_n(0)$ et montrez $Q'_n(0) = (-1)^n.(2.n+1)$.

$\boxed{\diamond\ 10\ \diamond}$ Montrez que si H est un polynôme factorisé sous les deux formes $H(X) = a_d.\prod_{k=1}^{d}(X - r_k) = \sum_{p=0}^{q} a_p.X^p$, alors on a $\frac{H'(X)}{H(X)} = \sum_{k=0}^{d}\frac{1}{X - r_k}$ et $\frac{H'(0)}{H(0)} = \frac{a_1}{a_0}$ (en supposant que 0 n'est pas racine de H).

$\boxed{\diamond\ 11\ \diamond}$ Calculez S_n pour tout n.