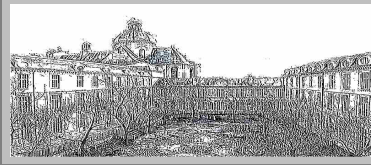


LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 20 novembre
M.P.S.I.2



2023

2024

TD09

◦0◦

♥ Représentez graphiquement $x \mapsto \tan^2(\operatorname{Arcsin}(\cos(\operatorname{Arctan}(\sqrt{x+3})))$ et donnez ses dérivées successives (simplifiez d'abord, évidemment).

On ressort des formules du cours qui exploitent de façon éhontée la forme $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et ses variantes en $\cos^2 = \frac{1}{1 + \tan^2}$.

Elles permettent d'écrire $\cos(\operatorname{Arcsin}(s)) = \sqrt{1 - s^2}$ pour s entre -1 et 1

$$\cos(\operatorname{Arctan}(t)) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \text{ pour } t \text{ quelconque}$$

$$\tan(\operatorname{Arcsin}(s)) = \frac{s}{\sqrt{1 - s^2}} \text{ pour } s \text{ strictement entre } -1 \text{ et } 1$$

On va pouvoir simplifier énormément la formule.

Attention Si vous justifiez $\cos(\operatorname{Arcsin}(s)) = \sqrt{1 - s^2}$ en citant juste $\cos^2 + \sin^2 = 1$, c'est que vous êtes sur une copie de physique

Pour une copie de maths, il faut choisir entre $\cos(\operatorname{Arcsin}(s)) = \sqrt{1 - s^2}$ et $\cos(\operatorname{Arcsin}(s)) = -\sqrt{1 - s^2}$.

Et pour ce faire, il faut dire $\operatorname{Arcsin}(s)$ est entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, son cosinus est donc positif.

Toute la différence entre non matheux et matheux est là : on surveille tout, et pas juste un calcul à la con...

Et pour tout correcteur de maths, elle est essentielle. On sait que vous savez extraire des choses de $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Mais ce n'est pas ça qui fera de vous un ingénieur.

L'ingénieur, c'est celui qui surveille tout, et qui a du recul.

Sinon, c'est juste un calculateur, et un ordinateur coûte bien moins cher que vous pour ça...

On y va, pour x plus grand que -3 : $\cos(\operatorname{Arctan}(\sqrt{x+3})) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\sqrt{x+3})^2}} = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$

et il est entre 0 et 1 puisque c'est un cosinus

$$\tan(\operatorname{Arcsin}(\cos(\operatorname{Arctan}(\sqrt{x+3})))) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x+4}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x+4}}}$$

On élève au carré, et notre application n'est autre que $x \mapsto \frac{1}{x+3}$

On représente donc juste un morceau d'hyperbole. Un morceau, car on a imposé $x \geq -3$.

Quant aux dérivées, elles se calculent sans effort.

sauf si on est con et qu'on n'a toujours pas compris que $x \mapsto \frac{1}{(x+3)^3}$ c'est $x \mapsto (x+3)^{-3}$.

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f^{(3)}(x)$	...	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n+1)}(x)$
$(x+3)^{-1}$	$-(x+3)^{-2}$	$2.(x+3)^{-3}$	$6.(x+3)^{-4}$		$(-1)^n.n!. (x+3)^{-n-1}$	$(-1)^{n+1}.(n+1)!. (x+3)^{-n-2}$

La formule est validée par récurrence sur n .

♥ 0 ♥ Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce déterminant vaudra 2017 ? Si oui, cette valeur sera-t-elle entière, si non, calculez le

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ ? & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

coefficient de X^{23} dans T_{27} .

♥ 1 ♥ On note T_n le $n^{ième}$ polynôme de Tchebychev. Rappelez la relation qui calcule T_{n+2} à l'aide de T_{n+1} et T_n .

♥ 2 ♥ Calculez $T'_n(0)$ pour tout n .

♥ 3 ♥ Que est le coefficient de X^{12} dans T_{15} ?

♠ 0 ♠ Un élève a trouvé le résultat suivant :

$$\begin{array}{llllll} (X^2-1). & (0) & + & X. & (1) & = 1 \quad .(X) \\ (X^2-1). & (4) & + & X. & (4.X) & = 4 \quad .(2.X^2-1) \\ (X^2-1). & (24.X) & + & X. & (12.X^2-3) & = 9 \quad .(4.X^3-3.X) \\ (X^2-1). & (...) & + & X. & (32.X^3-16.X) & = ... \quad .(8.X^4-8.X^2+1) \end{array}$$

Et si finalement, vous me calculiez le coefficient de X^{12} dans T_{16} ?

♦ 0 ♦ Calculez $T_n(17/8)$.

♠ Complétez déjà les cases qu'il n'a pas complétées dans sa précipitation.

Ayant conjecturé quelque chose de joli, il veut écrire proprement sa formule pour tout n . Aidez le.

Il va voir son professeur, tout fier d'avoir deviné une belle formule à démontrer par récurrence. Son professeur lui dit "ah, oui, c'est évident, sans récurrence, pars de $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ et dérive deux fois". Faites le pour lui, en n'omettant aucun détail.

La relation connue est $T_{n+2}(X) = 2.X.T_{n+1}(X) - T_n(X)$

Le polynôme T_n a la même parité que n , c'est du cours. On en déduit que dans T_{15} il n'y a que des termes d'exposant impair. Le coefficient de X^{12} est nul.

Pour calculer $T'_n(0)$, le plus simple est de partir de la formule $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ puis de la dériver (grâce au $\forall \theta$) : $-\sin(\theta).T'_n(\cos(\theta)) = -n.\sin(n.\theta)$. On applique pour θ égal à $\pi/2$: $-1.T'_n(0) = -n.\sin(n.\pi/2)$. On a la

formule close $T'_n(0) = n.\sin(n.\pi/2)$

n modulo 4	0	1	2	3
$T'_n(0)$	0	n	0	$-n$

On peut aussi partir de $T_{n+2}(X) = 2.X.T_{n+1}(X) - T_n(X)$ et dériver

$$T'_{n+2}(X) = 2.X.T'_{n+1}(X) + 2.T_{n+1}(X) - T'_n(X).$$

On applique en 0 : $T'_{n+2}(0) = 2.T_{n+1}(0) - T'_n(0)$. Or, $T_n(0)$ vaut $T_n(\cos(\pi/2))$ c'est à dire $\cos(n.\pi/2)$. Après, il faut mouliner un peu.

	$(X^2-1).$	(0)	$+$	$X.$	(1)	$=$	1	$.(X)$
On complète	$(X^2-1).$	(4)	$+$	$X.$	$(4.X)$	$=$	4	$.(2.X^2-1)$
	$(X^2-1).$	$(24.X)$	$+$	$X.$	$(12.X^2-3)$	$=$	9	$.(4.X^3-3.X)$
	$(X^2-1).$	$(96.X^2-16)$	$+$	$X.$	$(32.X^3-16.X)$	$=$	16	$.(8.X^4-8.X^2+1)$

On la formule : $(X^2-1).T''_n(X) + X.T'_n(X) = n^2.T_n(X)$

On a initialisé. Mais on ne fait pas de récurrence, car on réfléchit avant de calculer¹.

Comme proposé, on part de $\forall \theta$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ et on dérive deux fois :

$$\forall \theta, -\sin(\theta).T'_n(\cos(\theta)) = -n.\sin(n.\theta)$$

$$\forall \theta, -\cos(\theta).T''_n(\cos(\theta)) + \sin^2(\theta).T'_n(\cos(\theta)) = -n^2.\cos(n.\theta)$$

$$\text{On fait un soupçon de trigonométrie } \forall \theta, \cos(\theta).T'_n(\cos(\theta)) + (\cos^2(\theta) - 1).T''_n(\cos(\theta)) = n^2.\cos(n.\theta) = n^2.T_n(\cos(\theta)).$$

$$\text{On change de variable : } \forall x \in [-1, 1], x.T'_n(x) + (x^2 - 1).T''_n(x) = n^2.T_n(x)$$

$$\text{Mais il faut étendre à } \forall x \in \mathbb{C}, x.T'_n(x) + (x^2 - 1).T''_n(x) = n^2.T_n(x).$$

Il suffit d'utiliser le résultat simple : $X.T'_n(X) + (X^2 - 1).T''_n(X) - n^2.T_n(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n , ayant une infinité de racines. Il est forcément nul.

Pour avoir tous les points, il faut utiliser ce théorème d'extension de $[-1, 1]$ à $\mathbb{R}$.

On regarde le polynôme T_{16} . Il s'écrit $a.x^{16} - b.x^{14} + c.x^{12} - d.x^{10} + e.x^8 - f.x^6 + g.x^4 - h.x^2 + i$ avec a égal à 2^{15} (calculable).

On dérive et développe :

$$x.(16.a.x^{15} - 14.b.x^{13} + 12.c.x^{11} - \dots) + (x^2 - 1).(16.15.a.x^{14} - 14.13.b.x^{12} + 12.11.c.x^{10} - \dots) = 16^2.(a.x^{16} - b.x^{14} + c.x^{12} - \dots)$$

$$16.a + 16.15.a = 16^2.a \text{ (génial), puis } -14.b - 16.15.a - 14.13.b = -16^2.b \text{ puis } 12.c + 12.11.c + 14.13.b = 16^2.c \text{ et ainsi}$$

1. c'est ça les maths ; on réfléchit avant de calculer, pour éviter de calculer ; tandis qu'en physique, il faut réfléchir et calculer en même temps

Jetons un œil quand même : $B_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \ln(k)$.

Cette fois, $\left(\frac{1}{n}\right)$ décroît et $\left(\sum_{k=1}^n \ln(k)\right)$ croît. Qui croire...

En fait, elle croît. Mais il faut y aller proprement.

On peut encadrer A_n par $\int_1^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} \cdot dt$ et $0 + \int_1^n \frac{\ln(t)}{t} \cdot dt$.

On calcule ces intégrales par $\left[\frac{(\ln(t))^2}{2}\right]$ et on trouve un équivalent en $\frac{(\ln(n))^2}{2}$.

Et il est facile de perdre des points en tentant de simplifier $\frac{(\ln(n))^2}{2}$.

Rien de simple, à part $\ln\left(\sqrt{n^{\ln(n)}}\right)$ si vous aimez (moi pas).

Pour b , on compare avec $\frac{1}{n} \cdot \int_1^{n+1} \ln(t) \cdot dt$ et $\frac{1}{n} \cdot \left(0 + \int_1^n \ln(t) \cdot dt\right)$.

Après calcul de primitive, un équivalent est $\frac{n \cdot \ln(n) - n}{n}$ et même $\ln(n)$ tout court.

En effet, le -1 et termes du même type ne sont pas visibles dans l'équivalent.

Pour C_n , on a la convergence vers 1.

Et un équivalent est 1.

Ou si vous y tenez, un équivalent est $e^{1/n}$ c'est pareil.

◊5◊

On note W_n la $n^{\text{ième}}$ intégrale de Wallis. Montrez : $(W_{n+p})^2 \leq W_{2n} \cdot W_{2p}$. (un carré, des intégrales, une inégalité...)

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_0^{\pi/2} f(t) \cdot g(t) \cdot dt\right)^2 \leq \left(\int_0^{\pi/2} (f(t))^2 \cdot dt\right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} (g(t))^2 \cdot dt\right)$$

On prend $f = \sin^n$ et $g = \sin^p$ et c'est fini !

On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les fonctions continues :

$$\left(\int_a^b f(t) \cdot g(t) \cdot dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(t))^2 \cdot dt\right) \cdot \left(\int_a^b (g(t))^2 \cdot dt\right)$$

On l'obtient en étudiant $\int_a^b (x \cdot f(t) + g(t))^2 \cdot dt$ comme trinôme du second degré en x ($x^2 \cdot \int_a^b (f(t))^2 \cdot dt + 2 \cdot x \cdot \int_a^b (f(t) \cdot g(t)) \cdot dt + \int_a^b (g(t))^2 \cdot dt$) de signe constant, donc de discriminant négatif ou nul.

◊6◊

♥ On définit : $f = x \mapsto \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \leq 0 \\ a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) & \text{si } 0 < x < \pi \\ \sin(x) & \text{si } \pi \leq x \end{cases}$. Pouvez vous la rendre continue en choisissant bien a et b ?

Même question pour $f = x \mapsto \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \leq \pi/3 \\ a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) & \text{si } \pi/3 < x < 2\pi/3 \\ \sin(x) & \text{si } 2\pi/3 \leq x \end{cases}$. Est elle alors dérivable ?

$f = x \mapsto \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \leq 0 \\ a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) & \text{si } 0 < x < \pi \\ \sin(x) & \text{si } \pi \leq x \end{cases}$ est continue] $-\infty$, 0[car c'est le cosinus

est continue sur]0, π [car c'est un polynôme

est continue sur] π , $+\infty$ [car c'est le sinus.

La seule question est « en 0 et en π ».

On regarde donc en chacun de ces points la limite à droite et la limite à gauche.

La continuité c'est ça (en laissant de côté les ε) : la même limite à droite et à gauche, égale à la valeur de la fonction².

2. là, on redevient « terminalesque », mais surtout on voit ça géométriquement

	à gauche de 0	en 0	à droite de 0		à gauche de π	en π	à droite de π
formule	$\cos(x)$	1	$a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$		$a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$	0	$\sin(x)$
limite	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 1$	$f(0) = 1$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = a$		$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} f(x) = -a$	$f(\pi) = 0$	$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x > \pi}} f(x) = 0$
condition	$a = 1$				$a = 0$		

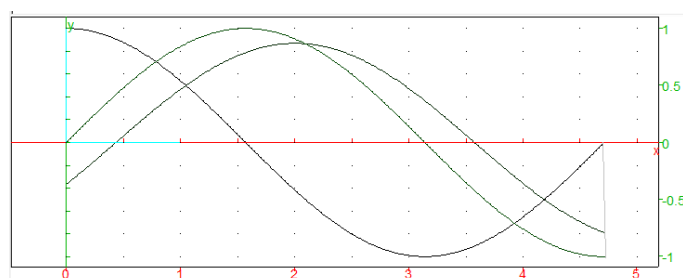
Pas de raccordement continu possible des deux côtés à la fois...

Donc pas de raccordement dérivable !

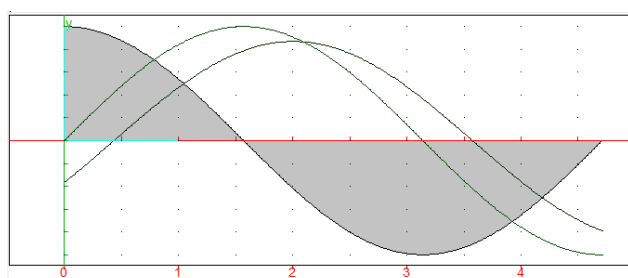
Passons à $f = x \mapsto \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \leq \pi/3 \\ a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) & \text{si } \pi < 3x < 2\pi \\ \sin(x) & \text{si } 2\pi/3 \leq x \end{cases}$.

	à gauche de $\frac{\pi}{3}$	en $\frac{\pi}{3}$	à droite de $\frac{\pi}{3}$		à gauche de $\frac{2\pi}{3}$	en $\frac{2\pi}{3}$	à droite de $\frac{2\pi}{3}$
formule	$\cos(x)$	$\frac{1}{2}$	$a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$		$a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin(x)$
limite	$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/3 \\ x < \pi/3}} f(x) = \frac{1}{2}$	$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$	$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/3 \\ x > \pi/3}} f(x) = \frac{a+b\sqrt{3}}{2}$		$\lim_{\substack{x \rightarrow 2\pi/3 \\ x < 2\pi/3}} f(x) = \frac{-a+b\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 2\pi/3 \\ x > 2\pi/3}} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
condition	$\frac{a+b\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$				$\frac{-a+b\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$		

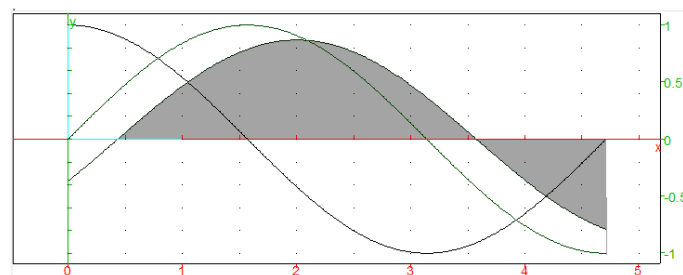
Cette fois, le système a une solution : $a = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$.



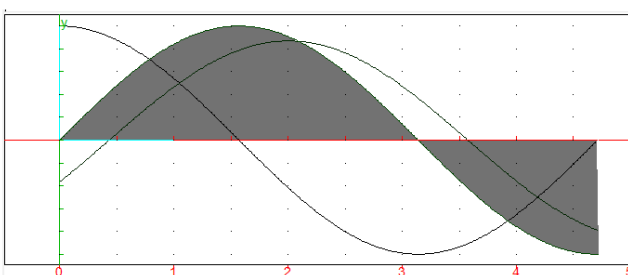
les trois graphes



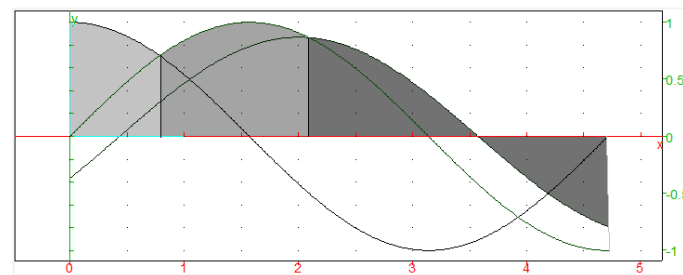
le cosinus tout seul



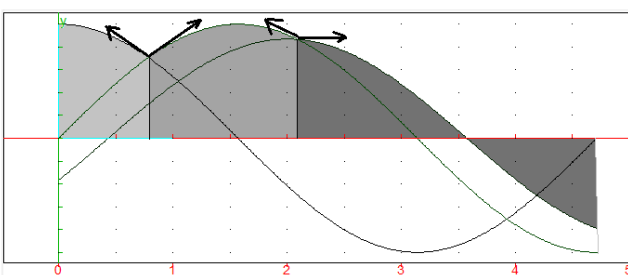
celle du milieu toute seule



le sinus tout seul



la fonction avec ses raccordements



raccordements continus mais non dérivables

70

Résolvez $\begin{cases} 2^a \times 3^b = 2021 \\ 2^b \times 3^a = 2022 \end{cases}$ d'inconnues réelles a et b .

Par passage au logarithme (bijectif), $\begin{cases} 2^a \times 3^b = 2021 \\ 2^b \times 3^a = 2022 \end{cases}$ équivaut à $\begin{pmatrix} \ln(2) & \ln(3) \\ \ln(3) & \ln(2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(2021) \\ \ln(2022) \end{pmatrix}$.

On inverse la matrice, et on trouve $a = \frac{\ln(3) \cdot \ln(2022) - \ln(2) \cdot \ln(2021)}{(\ln(3))^2 - (\ln(2))^2}$ et $b = \frac{\ln(3) \cdot \ln(2021) - \ln(2) \cdot \ln(2022)}{(\ln(3))^2 - (\ln(2))^2}$.

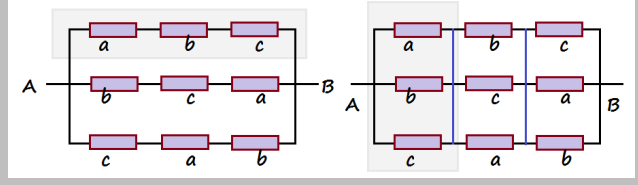
◦8◦

On prend trois réels strictement positifs a , b et c . leur moyenne arithmétique est connue, et leur moyenne harmonique est l'inverse de la moyenne des inverses $\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$.

Montrez que la moyenne harmonique est plus petite que la moyenne arithmétique, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur deux triplets bien choisis (c'est à dire $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \times |\vec{v}|$ produit scalaire face à produit des normes).

$$z^u + z^d + z^v \cdot z^o + z^q + z^v \wedge \geq l \cdot o + d \cdot q + v \cdot v$$

Montrez que la moyenne harmonique est plus petite que la moyenne arithmétique en calculant la résistance entre A et B sur les deux schémas ci-contre.



Qui vont être les deux vecteurs construits à partir de a , b et c dont les composantes permettront d'avoir une belle majoration quand on écrira $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ avec dans $|\vec{u}|$ et $|\vec{v}|$ des sommes de carrés ?

Prenons assez naturellement $\begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ \sqrt{b} \\ \sqrt{c} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{a} \\ 1/\sqrt{b} \\ 1/\sqrt{c} \end{pmatrix}$. leur produit scalaire vaut 9 (ah ?) et les normes donnent nos $a + b + c$ et somme des inverses.

L'inégalité donne

$$9 \leq (a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

et en équilibrant

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \frac{a + b + c}{3}$$

Regardons à présent le premier réseau de résistances.

On a en parallèle trois fois le même modèle en grisé, fait d'étroites résistances a , b et c en série.

Chaque bloc « horizontal » a pour résistance $a + b + c$.

Quand on met ces trois blocs en parallèle (ah on ne dit plus « en parallèles », on dit « en dérivation », c'est trop bête d'y perdre la vision), les conductances s'additionnent : $\frac{1}{R_q} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$.

Bref, entre A et B on a une résistance $\frac{1}{\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{b+c+a} + \frac{1}{c+a+b}}$, ce qui fait $\frac{a+b+c}{3}$.

Quand on met trois fois la même résistance en parallèle, la résistance est divisée par 3.

Prenons alors le schéma de droite. On a cette fois trois blocs « verticaux » consécutifs.

Le premier est fait de trois résistances a , b et c en parallèle. Sa résistance équivalente est donc $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$.

Le bloc suivant a la même résistance, de même que le dernier.

Comme les trois se suivent en série, la résistance équivalente est cette fois

$$3 \times \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Dans le second schéma, il y a plus de connexions, le courant va mieux circuler (moi j'y vois des voitures dans les rues, pas vous ?).

On a donc

$$3 \times \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \frac{a + b + c}{3}$$

L'exercice se généralise à n nombres réels positifs, et n lots de n résistances.

◦9◦

Clément Deslandes a décidé de fabriquer des assiettes plutôt que de faire prof de maths.

Il veut tester la solidité de ses assiettes. Il en prend une et se rend au pied d'un immeuble de 78 étages et il veut savoir depuis quel étage il peut balancer une assiette sans qu'elle se casse. Il veut même connaître l'étage au delà duquel elle se brise.

S'il la lance du sommet et qu'elle se brise, il saura qu'elle ne tient pas 78 étages, mais il ne saura pas à partir de quel étage elle se serait brisée. Alors quoi ?

Il teste au premier étage. L'assiette se brise, il sait qu'elle se brisera quel que soit l'étage. Et si elle ne se brise pas, il recommence au deuxième étage. Si elle se brise, le niveau de rupture est le 1. Sinon, il monte au troisième étage et recommence.

En gros une récurrence. Si elle se rompt à l'étage n , on a l'information, sinon, on passe à l'étage $n + 1$.

C'est un peu long, mais ça se fait. Et au pire il fait 79 tests.

Mais voilà, il a pensé à prendre deux assiettes. Alors que fait-il pour minimiser le nombre de tests « dans le pire cas » ?

On peut envisager « il va au trente-neuvième étage, il jette une assiette ; si elle se brise, il lui en reste une pour tester étage par étage de 0 à 38, et si elle ne se brise pas, il lui en reste deux pour tester du 39 au 78 ». Mais il y a mieux.

Une solution.

On prend l'assiette A et on teste les étages pairs dans l'ordre : 0, 2, 4 et ainsi de suite.

Si l'assiette se rompt à l'étage $2.N$, on sait qu'elle a passé l'étage $2.(N - 1)$. C'est donc que la frontière est « soit $2.N - 2$ soit $2.N - 1$. On jette donc l'assiette B depuis l'étage $2.N - 1$ et on peut conclure.

Dans le pire des cas, on fait $39 + 1$ tests (c'est à l'avant dernier étage qu'est la frontière).

Mais il y a mieux.

On ne cherche pas l'algorithme optimal tout de suite, mais on s'interroge « si j'ai le droit à n lancers, je fais quoi ? ». Notons que dès la première assiette cassée (la A lancée de l'étage N), il faut faire du « étage par étage » avec l'assiette B jusqu'à trouver la frontière : en commençant au dernier cap franchi par A jusqu'à l'étage $N - 1$ (on sait qu'en N , c'est la rupture).

Dès lors, si on a droit à n lancers, le premier lâcher de A ne peut pas se faire au delà de l'étage n (si elle se casse, on remonte avec B étage par étage de 1 à $n - 1$, et on peut être amené à faire donc $1 + (n - 1)$ lancers).

Si elle se brise, on fait $n - 1$ étages avec l'assiette B comme on l'a dit.

Si elle ne se brise pas, il nous reste deux assiettes et $n - 1$ lancers (et $78 - n$ étages).

On va donc lâcher l'assiette depuis l'étage $n + (n - 1)$ (intervalle à explorer avec l'assiette B $[n, 2.n - 1]$ si l'assiette A se brise).

A se brise : $n - 2$ lancers pour explorer l'intervalle mentionné ci dessus.

A ne se brise pas, on la lance cette fois depuis l'étage $n + (n - 1) + (n - 2)$.

Et ainsi de suite.

La somme $n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1$ nous donne alors la plus grande hauteur qu'on puisse atteindre avec n lancers.

Et justement : $78 = 12 + 11 + 10 + \dots + 1$ (nombre triangulaire).

On va donc pouvoir conclure en 12 lancers.

Algorithme

je lâche A depuis le niveau 12				
elle se casse	elle ne se casse pas			
je teste avec B les niveaux 1 à 11	je lâche A depuis le niveau 23			
	elle se casse	elle ne se casse pas		
	je teste avec B les niveaux 13 à 22	je lâche A depuis le niveau 33		
		elle se casse	elle ne se casse pas	
		je teste avec B les niveaux 24 à 32	je lâche A depuis le niveau 43	
			elle se casse	elle ne se casse pas

◦10◦

Пафнутий Львович Чебышёв

On note T_n le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Chebyshev. Calculez $T'_n(1)$. Pour prouver ce que vous allez conjecturer, il y a deux méthodes : l'une par récurrence, et l'autre en regardant la limite en 0 de la formule obtenue par dérivation de $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

On part de $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ (pour tout θ) et on dérive : $-\sin(\theta).T'_n(\cos(\theta)) = -n.\sin(n\theta)$.

On applique pour θ non multiple de π : $T_n(\cos(\theta)) = \frac{n \cdot \sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$.

On fait tendre θ vers 0. Le premier membre tend vers $T_n(1)$ par continuité de T_n .
Le second tend vers n^2 par usage des équivalents.

Si non, on part de $T_n = 2.X.T_{n-1} - T_{n-2}$ et on dérive : $T'_n = 2.T_{n-1} + 2.X.T'_{n-1} - T'_{n-2}$.

On applique en 1 : $T'_n(1) = 2.T_{n-1}(1) + 2.T'_{n-1}(1) - T'_{n-2}(1)$.

$$T'_n(1) = 2 + 2.T'_{n-1}(1) - T'_{n-2}(1)$$

On prouve alors $T'_n(1) = n^2$ par récurrence à double hérédité.

L'initialisation ne pose pas de problème, et pour l'hérédité : $2 + 2.(n-1)^2 - (n-2)^2 = n^2$.

◻11◻

Un exercice d'oral de Polytechnique était posé sous la forme suivante :

soient $(z_0, \dots, z_{n-1})$ n complexes non nuls,

alors il existe une partie P de $\text{range}(n)$ vérifiant $\left| \sum_{p \in P} z_p \right| \geq \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$

L'exercice était posé tel quel avec une indication que l'on donnera plus loin sur un exemple et pour le traitement général. Mais on commencera ici par quelques cas particuliers.

♠♠ Pour $(1, i, -1, -i)$, vérifiez : $|1 + i| \geq \frac{1}{\pi} \cdot (|1| + |i| + |-1| + |-i|)$.

On commence par quatre complexes de module 1 : $(1, i, -1, -i)$. La somme du membre de droite $\frac{1}{\pi} \cdot (|1| + |i| + |-1| + |-i|)$ vaut $\frac{4}{\pi}$. On ne garde que deux des quatre complexes : 1 et i , on effectue la somme : $1 + i$, on en prend le module : $\sqrt{2}$ (calcul direct).

On se doit donc juste de vérifier $\sqrt{2} \geq \frac{4}{\pi}$, c'est à dire $\sqrt{2} \cdot \pi \geq 4$. On le joue à la physicienne en comparant les carrés car tout est positif : $2 \cdot \pi^2 \simeq 2 \cdot 10$ et $4^2 = 16$. C'est rapide.

♠♠ Pour $(1, -j^2, j, -1, j^2, -j)$, vérifiez : $|j - 1 + j^2| \geq \frac{1}{\pi} \cdot (|1| + |-j^2| + |j| + |-1| + |j^2| + |-j|)$.

Pour $(1, -j^2, j, -1, j^2, -j)$ (sommets de l'hexagone régulier), le membre de droite se calcule $\frac{1}{\pi} \cdot (|1| + |-j^2| + |j| + |-1| + |j^2| + |-j|) = \frac{6}{\pi}$ (un peu moins que 2).

Des six complexes, on n'en garde que trois : $-1, j$ et j^2 . On calcule leur somme : $-1 + j + j^2 = -1 - 1$ car $1 + j + j^2 = 0$. On passe au module : $|j - 1 + j^2| = 2 \geq \frac{6}{\pi}$.

♠♠ n est un entier naturel non donné, on pose $z_k = e^{i.k.\pi/n}$ pour k dans $\text{range}(2.n)$.

Justifiez : $\left| \sum_{k=0}^{n-1} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{2.n-1} |z_k|$.

On prend cette fois $2.n$ nombres notés z_k . Dans $e^{i.k.\pi/n}$ on reconnaît une racine d'ordre $2.n$ de l'unité. Nos $2.n$ points sont répartis régulièrement sur le cercle unité. La somme du

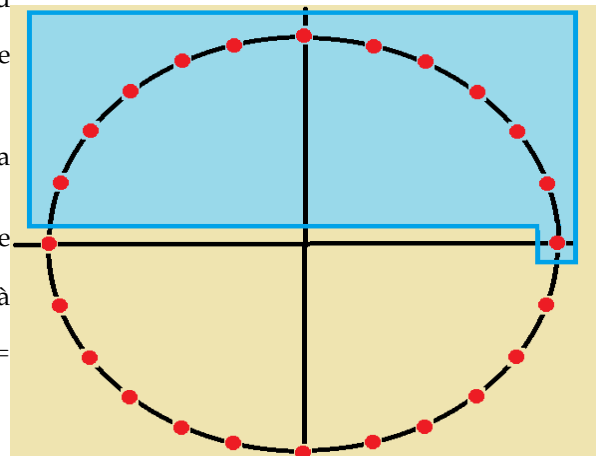
membre de droite $\frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{2.n-1} |z_k|$ vaut $\frac{2.n}{\pi}$ puisqu'ils sont tous de module 1.

Avec $\sum_{k=0}^{n-1} z_k$, on ne garde visiblement que les n premiers. La

somme $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i.k.\pi/n}$ est alors simplement une série géométrique

de premier terme 1 ($k = 0$), de raison $e^{i.\pi/n}$ et de terme à venir $e^{i.n.\pi/n}$ ($k = n$). Cette somme se simplifie : $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i.k.\pi/n} =$

$$\frac{1 - e^{i.\pi}}{1 - e^{i.\pi/n}} = \frac{1 - (-1)}{1 - e^{i.\pi/n}}.$$



On doit en prendre le module. Il y a des façons plus ou moins rusées de le faire.

- La pire : virer le dénominateur par quantité conjuguée (*même si c'est souvent un bon réflexe*), et s'empêtrer dans des cosinus et sinus partout.
- La méthode du bon élève de Terminale : le module de l'inverse est l'inverse du module. On va donc juste calculer le module de $1 - e^{i\pi/n}$. Celui ci vaut $\sqrt{(1 - \cos(\pi/n))^2 + \sin^2(\pi/n)}$. On développe, on simplifie et on arrive à $\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos(\pi/n)}$. On a donc

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{i.k.\pi/n} \right| = \left| \frac{2}{1 - e^{i\pi/n}} \right| = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos(\pi/n)}} \text{ et on est déjà content.}$$

$$\text{Si on va plus loin : } 1 - \cos(\theta) = 2 \cdot \sin^2(\theta/2) : \left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{i.k.\pi/n} \right| = \left| \frac{2}{1 - e^{i\pi/n}} \right| = \frac{2}{2 \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi}{2.n}\right) \right|}.$$

• Mais en fait, il y avait plus rusé (et classique à connaître) :

$$|1 - e^{i\theta}| = |e^{i\theta/2} \cdot (e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})| = |e^{i\theta/2}| \times |e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}| = 1 \cdot 2 \cdot \sin(\theta/2) \text{ puisque } \sin(\theta/2) = \frac{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}{2i} ! \text{ On en reparlera en cours avec le "noyau de Dirichlet".}$$

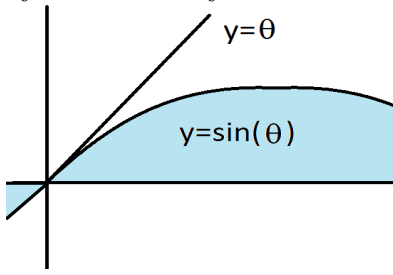
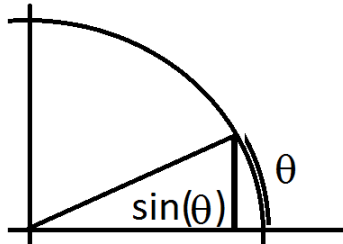
Bref, on est arrivé à $\left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{i.k.\pi/n} \right| = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2.n}\right)}$ et $\frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{2.n-1} |z_k| = \frac{2.n}{\pi}$. Ce serait idiot de ne pas voir un air de famille !

On doit prouver $\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2.n}\right)} \geq \frac{2.n}{\pi}$, ce qui se ramène à $\sin\left(\frac{\pi}{2.n}\right) \leq \frac{\pi}{2.n}$ car tout est positif.

Le physicien dira que pour n petit, on a $\sin(\theta) \simeq \theta$, mais le mathématicien ne s'en contentera jamais. D'autant qu'un symbole $\simeq$ ne devient un $\leq$ que par tricherie doublée de nécessité de "je veux conclure" du mauvais élève qui est prêt à tout pour aboutir à ce qu'on lui demande.

On doit montrer $\sin(\theta) \leq \theta$ pour θ entre 0 et $\pi/2$

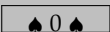
C'est du classique qu'on obtient de multiples façons.

Variation de fonction : l'application $\theta \mapsto \theta - \sin(\theta)$ a une dérivée positive ($1 - \cos$ avec $\cos$ entre -1 et 1), elle est donc croissante. Et comme elle est nulle en 0, elle est positive après 0.	Intégrale : $\sin(\theta) = \int_0^\theta \cos(\alpha).d\alpha \leq \int_0^\theta 1.d\alpha = \theta$. 	Géométrie : le sinus est un trait vertical, l'angle est la mesure d'un arc de cercle "un peu plus long". 
--	--	---

Toute preuve à la physicienne avec un développement limité ou autre sera une arnaque.

$$\text{Si on met tout bout à bout, on a bien } \left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{i.k.\pi/n} \right| = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2.n}\right)} \geq \frac{2.n}{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{2.n-1} |z_k|.$$

Une question où il suffit/faut d'être méthodique. Et qui prend plusieurs arguments les uns après les autres.

 a et b sont deux réels, vérifiant $a < 0 < b$. Prouvez : $|a| \geq \frac{1}{\pi} \cdot (|a| + |b|)$ ou $|b| \geq \frac{1}{\pi} \cdot (|a| + |b|)$.

a est un réel négatif et b un réel positif. On doit prouver $|a| \geq \frac{1}{\pi} \cdot (|a| + |b|)$ ou $|b| \geq \frac{1}{\pi} \cdot (|a| + |b|)$.

On peut traiter différents cas suivant qui de a et b est le plus grand en valeur absolue.

Mais le mieux est de faire des maths, en raisonnant par l'absurde, avec les et et les ou.

Si on n'avait pas " $|a| \geq \frac{1}{\pi} \cdot (|a| + |b|)$ ou $|b| \geq \frac{1}{\pi} \cdot (|a| + |b|)$ ", on aurait " $|a| < \frac{1}{\pi} \cdot (|a| + |b|)$ et $|b| < \frac{1}{\pi} \cdot (|a| + |b|)$ ".

En additionnant les deux, on aurait alors $|a| + |b| \leq \frac{1}{\pi} \cdot (|a| + |b|)$. En simplifiant car la somme $|a| + |b|$ est non nulle, on aurait $\pi < 1$, ce qui est faux. Fin du raisonnement par l'absurde, qui ne dit évidemment pas qui de $|a| \geq \frac{1}{\pi} \cdot (|a| + |b|)$ ou $|b| \geq \frac{1}{\pi} \cdot (|a| + |b|)$ est vraie (il est d'ailleurs possible que les deux le soient...).

On notera qu'on a prouvé ici notre résultat dans le cas où on a deux complexes particuliers du plan : un réel négatif et un réel positif, appelés ici a et b au lieu de z_0 et z_1 . Quoi qu'il en soit, en les appelant z_0 et z_1 au lieu de a et b , on a prouvé qu'une des deux sommes $|z_0|$ ou $|z_1|$ dépasse $\frac{1}{\pi} \cdot (|z_0| + |z_1|)$. On va généraliser à plusieurs termes. Il est bon quand on traite un problème de comprendre un peu où on va et de ne pas se contenter de croire qu'on traite une série d'exercices comme dans un sujet du bac.

Les z_k sont n réels classés par ordre croissant.

Montrez qu'il existe un entier p vérifiant $\left| \sum_{k=0}^{p-1} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$ ou $\left| \sum_{k=p}^{n-1} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$.

Les z_k sont n réels classés par ordre croissant. Il y a donc un moment où on bascule du négatif au positif. On note p cet indice (le plus petit indice k tel que z_k soit un élément de $\mathbb{R}^+$) : $z_0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_{p-1} < 0 < z_p \leq \dots \leq z_{n-1}$.

On va alors poser "tout naturellement" : $a = z_0 + z_1 + \dots + z_{p-1}$ et $b = z_p + z_{p+1} + \dots + z_{n-1}$. On a bien $a \leq 0 \leq b$ (inégalités larges, car a est peut être nul, si il n'y a aucun réel négatif en début de liste).

Par la question précédente, on a donc $|a| \geq \frac{1}{\pi} \cdot (|a| + |b|)$ ou $|b| \geq \frac{1}{\pi} \cdot (|a| + |b|)$.

Et qui est $|a| + |b|$?

Comme a est négatif, on a $|a| = -z_0 - z_1 - \dots - z_{p-1}$. Comme chaque z_i de cette formule est négatif, on a $|a| = |z_0| + |z_1| + \dots + |z_{p-1}|$.

Comme b est positif, on a $|b| = z_p + z_{p+1} + \dots + z_{n-1}$. Comme chaque z_j de cette formule est positif, on a $|b| = |z_p| + |z_{p+1}| + \dots + |z_{n-1}|$.

Le membre de droite $\frac{1}{\pi} \cdot (|a| + |b|)$ devient donc $\frac{1}{\pi} \cdot (|z_0| + \dots + |z_p| + \dots + |z_{n-1}|)$.

L'assertion $|a| \geq \frac{1}{\pi} \cdot (|a| + |b|)$ ou $|b| \geq \frac{1}{\pi} \cdot (|a| + |b|)$ devient donc

$\left| \sum_{k=0}^{p-1} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$ ou $\left| \sum_{k=p}^{n-1} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$ comme attendu.

On a donc répondu à la question $\left| \sum_{i \in P} z_i \right| \geq \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$ en prenant comme partie P les premiers indices de la liste

ou les derniers (en séparant en fait les réels z_i selon leur signe). On note qu'un facteur $\frac{1}{2}$ ferait l'affaire ici à la place du facteur $\frac{1}{\pi}$. Mais on est sur $\mathbb{R}$ et pas sur $\mathbb{C}$.

On prend cette fois à titre d'exemple $z_0 = 2, z_1 = 1 + i, z_2 = i, z_3 = -2 + 3i, z_4 = -5$ et $z_5 = -3 - 4i$. Pour tout α entre $-\pi$ et π , on note A_α l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Arg}(z \cdot e^{-i\alpha})| \leq \pi/2\}$. Justifiez que A_α est un demi plan. Pour tout α , on note $f(\alpha)$ la norme de la somme des z_k qui sont dans A_α . Représentez graphiquement l'application f sur $[-\pi, \pi]$, et calculez l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cdot d\alpha$.

a. on rappelle que l'intégrale d'une fonction est une aire, et ne se calcule pas forcément par des $[F(x)]_{x=a}^b$ avec des exigences du type " f doit être dérivable" à cause d'un cours de Terminale dans lequel on confond à tout bout de champ "nécessaire" et "suffisant"

On trace un dessin pour localiser les points de l'énoncé. Et on calcule les normes demandées pour les sommer :

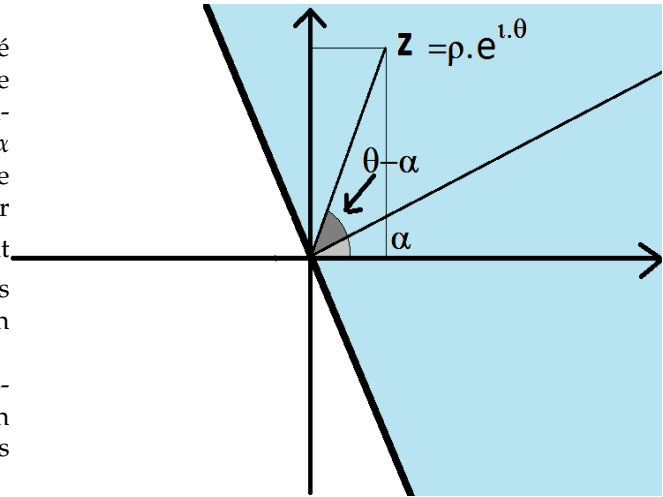
$z_0 = 2$	$z_1 = 1 + i$	$z_2 = i$	$z_3 = -2 + 3i$	$z_4 = -5$	$z_5 = -3 - 4i$
$ z_0 = 2$	$ z_1 = \sqrt{2}$	$ z_2 = 1$	$ z_3 = \sqrt{13}$	$ z_4 = 5$	$ z_5 = 5$

La somme des modules est laide, elle vaut $13 + \sqrt{2} + \sqrt{13}$ et ne se simplifie.

Et la somme des complexes vaut $-7 + i$, même si ça ne sert à rien.

Un ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Arg}(z.e^{-i.\alpha})| \leq \pi/2\}$ est formé de complexes obéissant effectivement à une contrainte d'angle. Écrivons $z = \rho.e^{i.\theta}$ comme souvent. La condition porte sur $\text{Arg}(\rho.e^{i.(\theta - \alpha)})$. Cet argument vaut $\theta - \alpha$ (après réduction si nécessaire). On demande donc que $\theta - \alpha$ soit entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, ce qui revient à bloquer θ entre $\alpha - \frac{\pi}{2}$ et $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Les deux valeurs extrêmes sont distantes de π , la limite est faite de deux demi droites alignées, c'est une droite. Et on est dans le demi plan "du côté de α ".

Il fallait encore une fois travailler en polaires. Quels professeurs de Terminale vous ont fait croire que le plan complexe était fait d'éléments de la forme $x + i.y$ et pas d'éléments de la forme $\rho.e^{i.\theta}$?



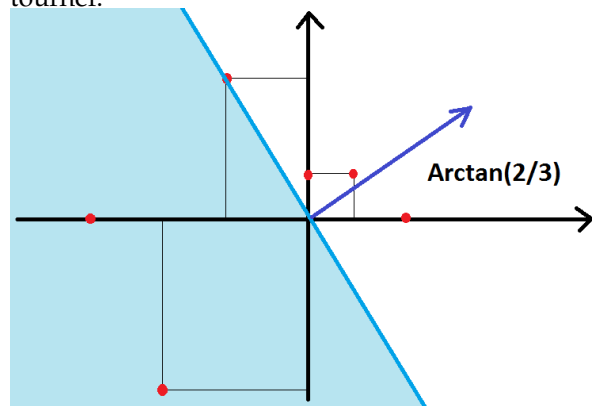
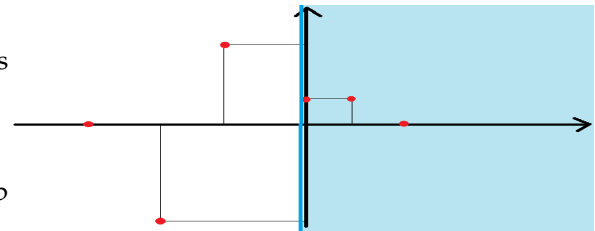
La fonction f va donc compter des sommes comme $|z_1 + z_2 + z_3|$ si z_1, z_2 et z_3 sont dans le demi plan A_α . On va donc faire une étude à la main (il ne faut pas espérer des formules toutes prêtes, il faut mettre les mains dans le cambouis, et accepter de travailler avec des définition).

Le premier demi plan (pour α nul) est l'Est de la carte, avec les arguments entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

On prend trois des complexes : $z_0 = 2, z_1 = 1 + i$ et $z_2 = i$.

La somme vaut $3 + 2.i$ et a pour module $\sqrt{13}$: $f(0) = \sqrt{13}$.

On va rester avec cette valeur tant que le plan ne va pas trop tourner.



Le premier changement va se faire quand la demi droite va contenir le point z_3 .

« A cet instant », le point z_3 s'ajoute à la somme :

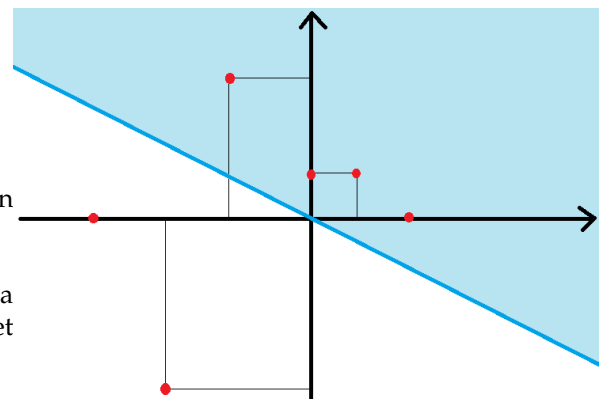
$$z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = 2 + (1 + i) + i + (-2 + 3.i) = 1 + 5.i.$$

Le module vaut $\sqrt{26}$.

On déduit donc que de 0 à $\text{Arctan}(2/3)$, f vaut $\sqrt{13}$.

En $\text{Arctan}(2/3)$, la fonction saute à la valeur $\sqrt{26}$ (elle augmente).

Pourquoi $\text{Arctan}(2/3)$? C'est la direction orthogonale à cette droite.

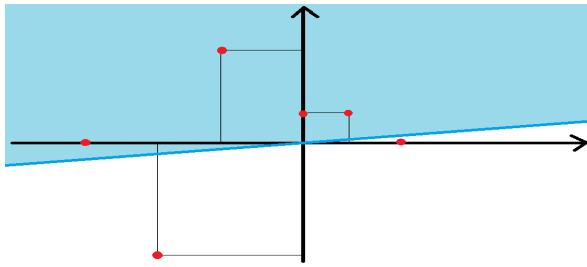


On va pouvoir continuer, jusqu'à ce que le demi plan gagne un nouveau point.

Ou en perde un.

Quand α va atteindre la valeur $\pi/2$, l'axe de découpe sera horizontal. La somme complexe sera faite de z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 . Elle vaudra $-4 + 5.i$. $f(\pi/2)$ vaut alors $\sqrt{41}$.

Mais ça ne dure pas. Dès que α augmente, on perd le point z_0 .

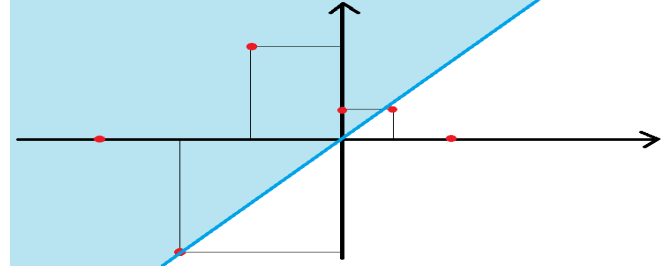
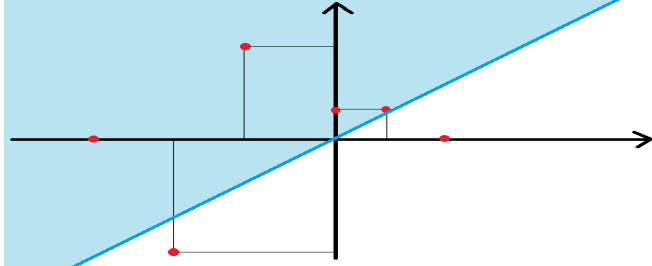


Maintenant, la somme vaut

$(1 + i) + i + (-2 + 3.i) - 5$, et la fonction vaut $\sqrt{61}$.

Elle reste constante égale à cette valeur. Le prochain changement va se faire quand on va perdre z_1 (égal à $1 + i$). On aura alors pour somme complexe $i + (-2 + 3.i) - 5$ puis pour module $\sqrt{65}$.

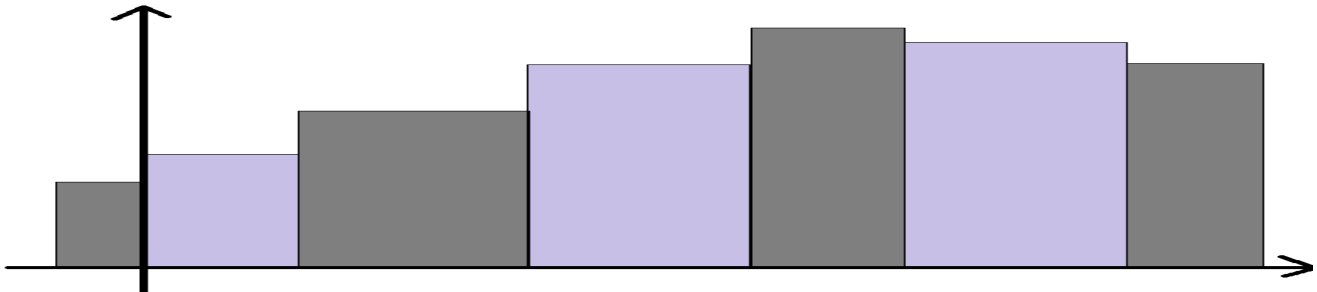
L'étape suivante sera l'arrivée de z_5 (égal à $-3 - 4.i$) dans la somme.



On se dit que pour avoir les valeurs prises par la fonction en escalier, il va falloir dresser un tableau. Comme les z_k sont classés par ordre croissant d'argument, les familles de points dans les demi plans A_α seront faites d'indices consécutifs.

angle α	avant 0	0	$\text{Arctan}(2/3)$	$\pi/2$		$3\pi/4$		après π	
z_0	2	2	2	2					
z_1	$1 + i$	$1 + i$	$1 + i$	$1 + i$	$1 + i$				
z_2		i	i	i	i	i	i		
z_3			$-2 + 3.i$	$-2 + 3.i$	$-2 + 3.i$	$-2 + 3.i$	$-2 + 3.i$	$-2 + 3.i$	
z_4				-5	-5	-5	-5	-5	
z_5							$-3 - 4.i$	$-3 - 4.i$	
somme	$3 + i$	$3 + 2.i$	$1 + 5.i$	$-4 + 5.i$	$-6 + 5.i$	$-7 + 4.i$	-10	$-10 - i$	
$f(\alpha)$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{41}$	$\sqrt{61}$	$\sqrt{65}$	10	$\sqrt{101}$	

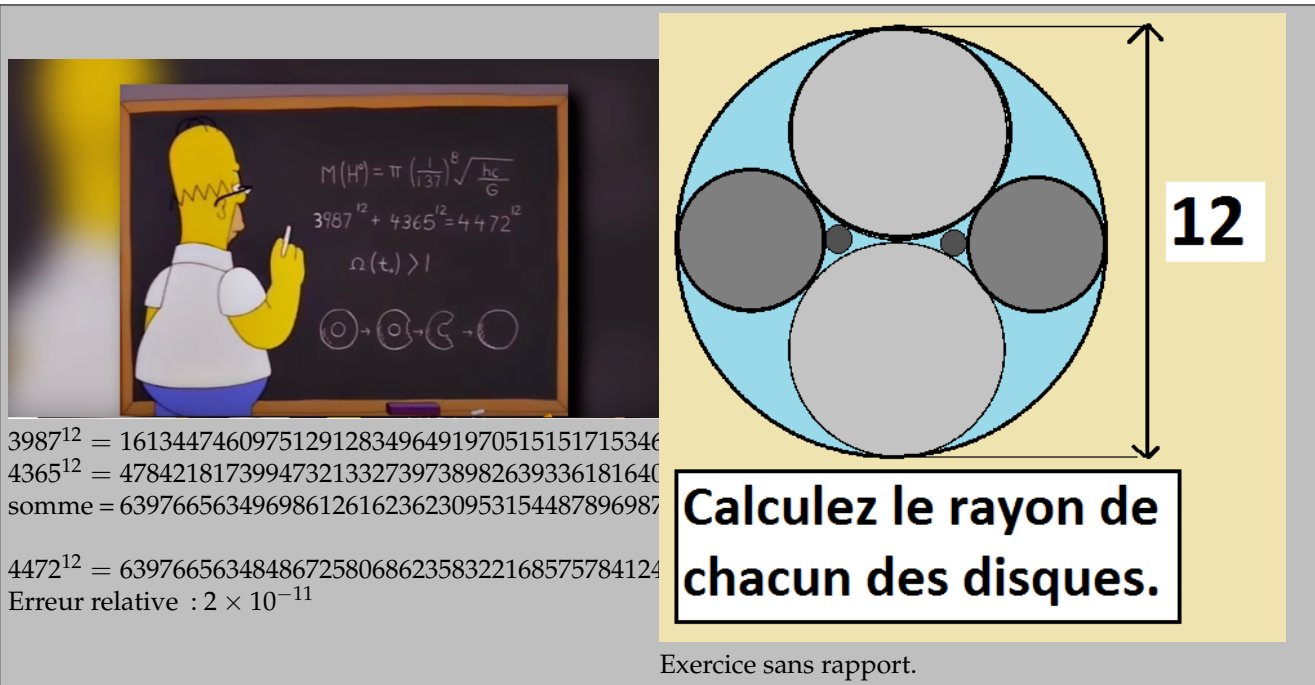
C'est long et laborieux.



Pour le calcul de l'intégrale, on additionne des aires de rectangles comme $\sqrt{26} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right) \right)$.

Le cas général repose aussi sur le demi-plan qui tourne. On calcule la valeur moyenne de l'application f , avec des inégalités dans $\mathbb{C}$ et un peu de trigonométrie. Comme cette valeur moyenne dépasse alors la valeur $\sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$, c'est que f dépasse cette valeur au moins en un point.

On ne le détaillera pas ici.²⁰¹⁸



$M(H^0) = \pi \left(\frac{1}{137}\right)^8 \sqrt{\frac{hc}{G}}$
 $3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$
 $\Omega(t) > 1$
 $\odot \rightarrow \odot \rightarrow \odot \rightarrow \odot$

$3987^{12} = 16134474609751291283496491970515151715346$
 $4365^{12} = 47842181739947321332739738982639336181640$
 somme = 63976656349698612616236230953154487896987

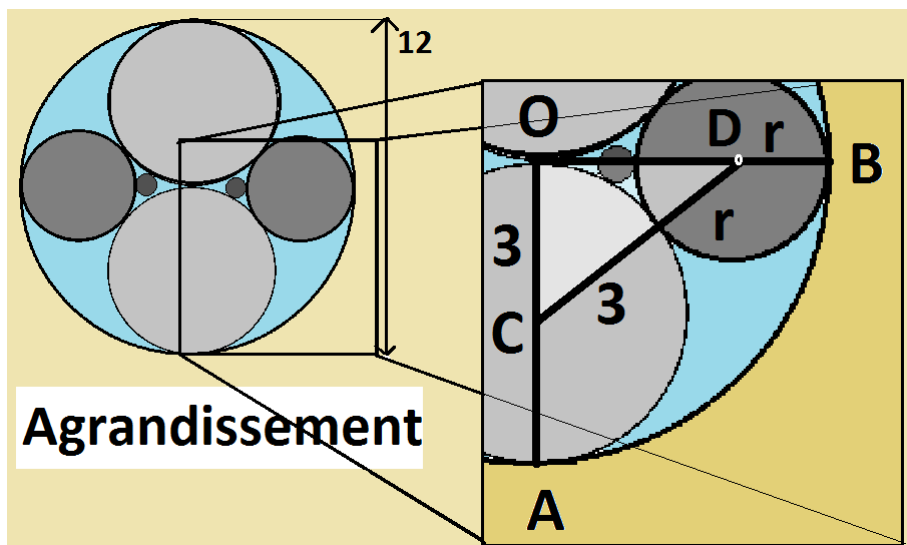
$4472^{12} = 63976656348486725806862358322168575784124$
 Erreur relative : 2×10^{-11}

12

Calculez le rayon de chacun des disques.

Exercice sans rapport.

A gauche, les Simpsons rendent hommage au théorème de Fermat.



Le grand disque a pour diamètre 12 et donc pour rayon 6. Les deux disques moyens ont chacun pour rayon 3 et diamètre 6.

On ne connaît pas le rayon des disques de droite et gauche, on le note r (par symétrie, le même pour les deux).

On nomme O le centre du grand disque, C le centre du disque moyen du bas et D le centre du disque petit de droite.

On a immédiatement $OA = 6$ (diamètre) et $OC = 3$ (rayon).

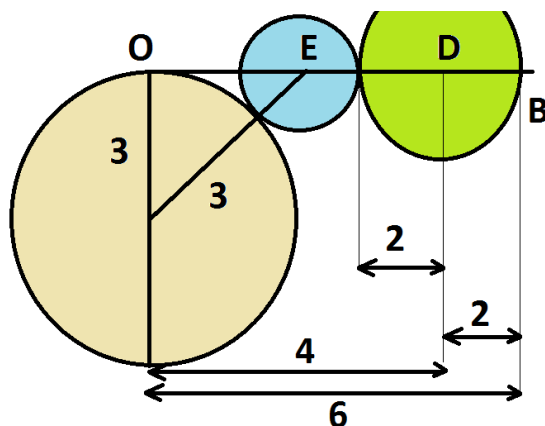
On a aussi $OB = 6$ (diamètre) et $DB = r$ (rayon du petit disque) et $OD = 6 - r$ (différence).

On a aussi $CD = r + 3$ (somme des deux rayons quand les disques sont tangents).

Le théorème de Pythagore dans le triangle $(D O C)$ (rectangle en O) donne : $(r + 3)^2 = 3^2 + (6 - r)^2$.

On simplifie par 9 et par r^2 : $6.r = 36 - 12.r$. On simplifie : $r = 2$

On note que le triangle est alors un célèbre (3, 4, 5) pythagoricien.



On travaille alors avec les tout-petits disques.

On note ρ leurs rayons. On note E le centre d'un tout petit disque, sur le segment $[O, D]$.

Par condition de tangence : $ED = 2 + \rho$.

Par soustraction : $OE = 4 - (2 + \rho) = 2 - \rho$.

Par condition d'alignement aussi : $CE = 3 + \rho$.

On fait encore appel au théorème de Pythagore dans (EOC) : $(3 + \rho)^2 = 3^2 + (2 - \rho)^2$.

On simplifie encore ρ vaut $\frac{2}{5}$

Ce type d'exercice de géométrie est un SANGAKU (littéralement tablettes mathématiques). Il s'agissait de tablettes de bois votives présentes dans certains temples japonais et figurant des énigmes de géométrie euclidienne gravées. Ces objets établissaient un lien avec la vie artistique et la vie religieuse par le biais des mathématiques. Elles apparurent durant l'époque d'Edo (1603-1867) et fabriquées par des membres de toutes les classes sociales. Les sangaku étaient peints en couleur sur des tablettes de bois suspendues à l'entrée de temples et d'autels shintoïstes (Jinja) en offrande aux divinités locales¹. Selon certaines sources, il s'agissait de montrer le talent d'un maître mathématicien à la vue du plus grand nombre. (Wikipedia).

◻12◻

Reliez dans cette grille l'entrée à la sortie du tunnel. Les chiffres inscrits en début de ligne et de colonne indiquent le nombre de cases du tunnel dans la ligne ou colonne. Le tunnel ne se croise pas lui-même, ni ne se touche. Un exemple résolu vous permet de comprendre.

	2	1	1	2	3		5	2	2	0	0		0	3	1	2	1
0							3						2				😊
0							2			😊			3				
2					😊	■	1						1				
2	😊					■	1						1	😊			
5	■	■	■	■	■		2	😊					0				

	1	2	1	2	4		0	2	1	3	0		1	2	3	0	0
0							0						0				
2				😊			0						2	😊			
1							1			😊			1				
3	😊						2	😊					3	😊			
4							3						0				

◻13◻

♥ Soient f et g continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, montrez en identifiant l'intégrale d'un carré :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda^2 \cdot \int_0^1 (f(t))^2 dt + 2\lambda \cdot \int_0^1 f(t) \cdot g(t) dt + \int_0^1 (g(t))^2 dt \geq 0.$$

Déduisez ensuite $\left(\int_0^1 f(t) \cdot g(t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 (f(t))^2 dt \cdot \int_0^1 (g(t))^2 dt$ (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Déduisez enfin $\sqrt{\int_0^1 (f(t) + g(t))^2 dt} \leq \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt} + \sqrt{\int_0^1 (g(t))^2 dt}$ (inégalité triangulaire).

Par linéarité et simple calcul, l'intégrale $\lambda^2 \cdot \int_0^1 (f(t))^2 dt + 2\lambda \cdot \int_0^1 f(t) \cdot g(t) dt + \int_0^1 (g(t))^2 dt$ n'est autre que $\int_0^1 (\lambda \cdot f(t) + g(t))^2 dt$.

L'application intégrée est positive (carré de réel), sur un intervalle pris a priori dans le sens croissant. Elle est positive.

Le trinôme $\lambda^2 \cdot \int_0^1 (f(t))^2 dt + 2\lambda \cdot \int_0^1 f(t) \cdot g(t) dt + \int_0^1 (g(t))^2 dt$ reste de signe constant, positif.

Son discriminant est donc négatif ou nul (sinon, il aurait des racines et changerait de signe en en croisant une).

On a donc

$$\left(\int_0^1 f(t) \cdot g(t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 (f(t))^2 dt \cdot \int_0^1 (g(t))^2 dt$$

Le folklore professionnel retient ainsi comme emblématique le problème dit « des accordeurs de New York » – dans certaines versions, il s'agit de Chicago – selon Enrico Fermi, qui fut certainement l'un des promoteurs majeurs de l'esprit artisanal en physique. Émigré aux États-Unis, Fermi avait l'habitude, dit-on, de poser à ses étudiants, afin de tester leur tempérament de physicien, non un exercice ultra spécialisé de physique atomique ou nucléaire, mais une question du genre : « Combien y a-t-il d'accordeurs de pianos dans la ville ? »

La réponse attendue repose sur le raisonnement suivant :

- a) il y a environ 10 millions d'habitants dans le grand New York, soit 10 puissance 7 ;
- b) à raison de 3 membres par foyer en moyenne, cela correspond à 3 fois 10 puissance 6 foyers ;
- c) dont 1 sur 30 environ possède un piano – c'est le stade le plus critique du raisonnement –, ce qui donne 10 puissance 5 pianos ;
- d) lesquels doivent être accordés, disons, tous les trois ans, soit 10 puissance 3 jours ; d'où 10 puissance 5 : 10 puissance 3 = 10 puissance 2, c'est-à-dire 100 pianos à accorder par jour ;
- e) ce qui, à raison de un ou deux pianos par jour pour chaque accordeur, exige entre 50 et 100 accordeurs – soit quelques dizaines.

J'aime faire de la physique comme Fermi.

Sinon, il y a un prof de maths de Sup (à Henri 4) qui aime bien ajouter à la fin de ses devoirs une petite question de bon sens, d'ordre de grandeur. Avec seulement un quart de ces futurs ingénieurs (qui seront vos supérieurs ou vous égaux) capables de bien répondre.

◦16◦

Calculez $\int_a^b \frac{d\theta}{\sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta)}$.

Il serait bon que l'intervalle $[a, b]$ ne contienne aucun élément de la forme $k \cdot \frac{\pi}{2}$ avec k entier.

Et l'élève qui n'a rien compris dit « il faut éviter que a soit de la forme $k \cdot \frac{\pi}{2}$ et que b soit aussi de la forme $p \cdot \frac{\pi}{2}$ (avec k et p entiers). Certes, il est moins con que celui qui met le même k pour a et b . Mais en fait, il n'a rien compris aux maths, donc à la base du raisonnement.

Certes, on parle de a et b , mais il y a surtout une variable x qui va aller de a à b (oui, une VARIABLE, l'objet capital).

Imaginez que a est égal à $\frac{\pi}{4}$ et b égal à $\frac{11\pi}{3}$. C'est bon, aucun n'est de la forme $k \cdot \frac{\pi}{2}$.

Mais entre a et b , si on veut calculer $\int_{\pi/4}^{11\pi/3} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta) \cdot \sin^2(\theta)}$ il y a $\frac{\pi}{2}$

En fait, il faut que a et b soient ensemble dans un même intervalle $\left] \frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2} \right[$.

Bioche nous incite à trouver une tangente cachée.

Rappelons : $\frac{1}{\cos^2} = \tan'$.

On rappelle aussi $\frac{1}{\sin^2} = \frac{1}{1 - \cos^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \tan^2}} = \frac{1 + \tan^2}{\tan^2} = 1 + \frac{1}{\tan^2}$ (vérifiez : $1 + \frac{c^2}{s^2} = \dots$).

On est donc en présence de $\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \cdot t'$.

On intègre en $\left[\tan(\theta) - \frac{1}{\tan(\theta)} \right]_a^b$

◦17◦

Calculez $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$, $\int_0^{\pi/2} \frac{-\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$ et $\int_0^{\pi/2} \frac{a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$ (non, pas Bioche).

Dans cet exercice, seule la dernière intégrale nous intéresse. Mais on passe par les deux premières pour l'avoir. Il faut savoir comprendre l'enchaînement des questions.

- $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx = \frac{\pi}{2}$ (rectangle).

- $\int_0^{\pi/2} \frac{-\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx = \left[\ln(\cos(x) + \sin(x)) \right]_0^{\pi/2} = 0$ forme en $\frac{u'}{u}$.

- $\int_0^{\pi/2} \frac{a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx = \frac{a+b}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx + \frac{a-b}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{-\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$ combinai-son.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx = \frac{(a+b) \cdot \pi}{4}$$

Et si on s'entraînait à TeX ? $\int_0^{\pi/2} \frac{a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \cdot dx$ c'est

$\int_0^{\pi/2} \frac{a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \cdot dx$.

Et j'ai une préférence pour $\int_0^{\pi/2} \frac{a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \cdot dx$

qui donne une fraction plus jolie : $\int_0^{\pi/2} \frac{a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \cdot dx$

La syntaxe pour une intégrale, c'est $\int$, et on met ensuite en indice avec $_$ et en « exposant » avec $^$. Si il y a plusieurs termes dans l'exposant, on les met dans un groupe par $\{ \}$.

Et π , c'est π .

◦18◦

♥ Une inégalité classique dit $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+n.x$.

Prouvez la de différentes façons : récurrence sur n

formule du binôme que vous coupez

variation de fonction (il faudra dériver plusieurs fois)

formule de Taylor avec reste intégrale

Binôme pour commencer (la récurrence, je la mets à la fin car on généralise un peu à x aussi entre -1 et 0).

Quand on développe : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k = 1 + n.x + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \cdot x^k$ en isolant les deux premiers termes ($k=0$ et $k=1$).

Mais dans la somme $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \cdot x^k$ tout est positif.

On a donc bien $(1+x)^n \geq 1+n.x$.

La formule de Taylor avec reste intégrale c'est $f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k + \frac{h^{n+1}}{n!} \cdot \int_0^1 (1-t)^n \cdot f^{(n+1)}(a+t.h) \cdot dt$, et elle se démontre par récurrence sur n avec des intégrations par parties.

On l'écrit à l'ordre 2 : $f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{1} \cdot \int_0^1 (1-t) \cdot f''(a+t.h) \cdot dt$.

Remarque : Finalement, pas besoin de récurrence, on calcule $\int_0^1 (1-t) \cdot h.f''(a+t.h) \cdot dt$ par parties :

$h^2 \cdot f''(a+t.h)$	$\leftrightarrow$	$h \cdot f'(a+t.h)$	$\leftrightarrow$	$f(a+t.h)$
$(1-t)$	$\hookrightarrow$	-1	$\hookrightarrow$	0

$$\int_0^1 (1-t) \cdot h.f''(a+t.h) \cdot dt = \left[(1-t) \cdot h.f'(a+t.h) \right]_{t=0}^1 + \int_0^1 h.f'(a+t.h) \cdot dt$$

$$\int_0^1 (1-t) \cdot h.f''(a+t.h) \cdot dt = \left[(1-t) \cdot h.f'(a+t.h) \right]_{t=0}^1 + \left[f(a+t.h) \right]_{t=0}^1$$

$$\int_0^1 (1-t) \cdot h.f''(a+t.h) \cdot dt = 0 - h.f'(a) + f(a+h) - f(a)$$

On l'applique à $x \mapsto x^n$ et $a=1$: $f(1+h) = f(1) + x.f'(1) + x^2 \cdot \int_0^1 (1-t) \cdot f''(1+t.x) \cdot dt$

$$(1+x)^n = 1 + n.x + x^2 \cdot \int_0^1 (1-t) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (1+t.x)^{n-2} \cdot dt$$

L'intégrale est positive, et le x^2 devant aussi.

On a encore la minoration.

En fait, on montre même $\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+n.x$ par récurrence sur n .

Pour n égal à 0 : $1 = (1+x)^0 \geq 1+0.x = 1$.

Pour n égal à 1 : $(1+x)^1 \geq 1+1.x$.

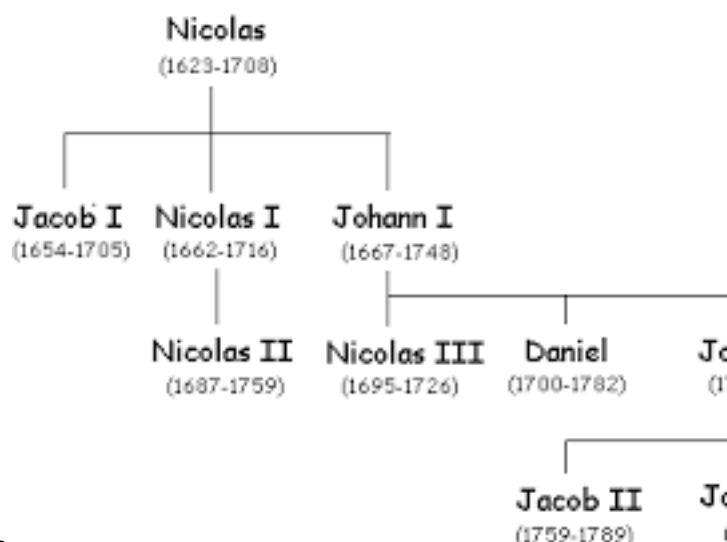
dans les deux cas il y a même égalité.

Prenons maintenant x fixé, ainsi que n quelconque, et supposons $(1+x)^n \geq 1+n.x$.

Multiplions par $1+x$ (positif, puisque $x \geq -1$) : $(1+x)^{n+1} \geq (1+n.x) \cdot (1+x)$.

On développe : $(1+x)^{n+1} \geq 1+n.x+x+n.x^2$.

Mais $n.x^2$ est positif. On a donc bien $(1+x)^{n+1} \geq 1+n.x+x+n.x^2 \geq 1+(n+1).x$.



Cette inégalité porte le nom de Bernoulli. D'accord, mais lequel ?
Jacques, Jean, Daniel, Nicolas ?

◦19◦

♥ Pour la formule de Taylor avec reste intégrale $f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \cdot f^{(n+1)}(a+th) \cdot dt$,
des livres proposent parfois $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x (x-u)^n \cdot f^{(n+1)}(u) \cdot du$. Passez de l'une à l'autre ?

On va considérer que le cours nous donne la première.

On veut ensuite calculer $f(x)$ à l'aide des dérivées en a .

On pose donc $x = a + h$ ou plutôt $h = x - a$ (quantité que le physicien qualifiera de petite et notera même dx , et que le mathématicien qualifiera d'accroissement).

Le terme $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k$ devient $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$. C'est bon.

Conseil : Si vous croisez quelqu'un qui utilise $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$, discutez avec lui.

Mais ne le laissez pas polluer votre esprit. Sa formule n'est pas judicieuse.

Vous allez être trop tenté de développer les $(x-a)^k$ par la formule du binôme, et vous perdrez alors tout l'intérêt de la formule de Taylor.

Quand les termes sont ordonnés suivant les puissances de h , vous les voyez triés : $1 \gg h \gg h^2 \gg h^3$ (pour h « petit »).

Pour x proche de a , la formule $1 \ll (x-a) \ll (x-a)^2 \ll (x-a)^3$ est ordonnée.

Mais les termes $1, x, x^2, x^3$ sont tous « grands », et $x^2 + a \cdot x + 1$ est « grand » tandis que $x^2 - 2a \cdot x + 1$ est « petit ».

Bref, développer les $(x-a)^k$ donne une formule où plus rien n'est petit...

Il faut ensuite passer de $\frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \cdot f^{(n+1)}(a+th) \cdot dt$ à $\frac{1}{n!} \cdot \int_a^x (x-u)^n \cdot f^{(n+1)}(u) \cdot du$.

La factorielle est la même.

Posons ensuite $u = a + th$. Les bornes deviennent a et $a+h$ c'est à dire x .

On a alors $dt = \frac{du}{h}$, $(1-t)^n = \frac{(x-u)^n}{h^n}$.

On a donc h^{n+1} qui s'en va ! C'est la même.

◦20◦

Dérivez et simplifiez $\varphi = t \mapsto \sum_{k=0}^3 \frac{(1-t)^k}{k!} \cdot h^k \cdot f^{(k)}(a+th)$. Calculez $\varphi(1)$ et $\varphi(0)$ en prenant garde au terme $k=0$.

La formule de Taylor sans intégration par parties, et sans récurrence ! Trop fort.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$\varphi(t) =$	$f(a+th)$	$+(1-t) \cdot h \cdot f'(a+th)$	$+\frac{(1-t)^2}{2} \cdot h^2 \cdot f''(a+th)$	$+\frac{(1-t)^3}{6} \cdot h^3 \cdot f^{(3)}(a+th)$
$\varphi(1) =$	$f(a+h)$	$+0$	$+0$	$+0$
$\varphi(0) =$	$f(a)$	$+h \cdot f'(a)$	$+\frac{h^2}{2} \cdot f''(a)$	$+\frac{h^3}{6} \cdot f^{(3)}(a)$

Ensuite, on dérive les produits par rapport à t ne l'oublions pas

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$\varphi(t) =$	$f(a + t.h)$	$+(1 - t).h.f'(a + t.h)$	$+\frac{(1 - t)^2}{2}.h^2.f''(a + t.h)$	$+\frac{(1 - t)^3}{6}.h^3.f^{(3)}(a + t.h)$
$\varphi'(t) =$	$h.f'(a + t.h)$	$-1..h.f'(a + t.h)$ $+(1 - t).h^2.f''(a + t.h)$	$+\frac{-2.(1 - t)}{2}.h^2.f''(a + t.h)$ $+\frac{(1 - t)^2}{2}.h^3.f^{(3)}(a + t.h)$	$+\frac{-3.(1 - t)^2}{6}.h^3.f^{(3)}(a + t.h)$ $+\frac{(1 - t)^3}{6}.h^4.f^{(4)}(a + t.h)$

Les termes se simplifient : $\varphi'(t) = \frac{(1 - t)^3}{6}.h^4.f^{(4)}(a + t.h)$ (vous le voyez mieux ici le décalage $\frac{(1 - t)^n}{n!}$ en face de $h^{n+1}.f^{(n+1)}(a + t.h)$?

Quoi qu'il en soit, $\int_0^1 \varphi'(t).dt = \varphi(1) - \varphi(0)$ donne la formule de Taylor avec reste intégrale.

◦21◦

On pose $f_a = x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$ pour tout réel a non nul.

Montrez pour tout t : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x).f_1(t - x).dx = 2.\pi.f_2(t)$.

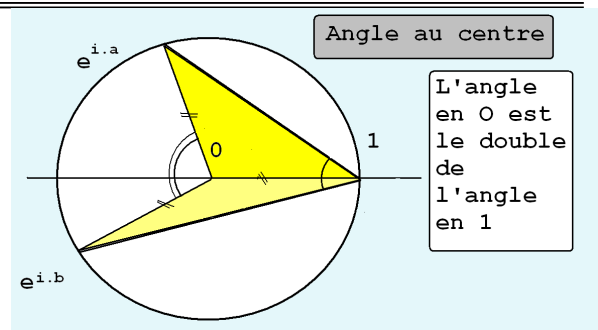
Montrez pour tout t : $2.\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x).f_2(t - x).dx = 3.\pi.f_3(t)$.

α, β et γ sont trois réels distincts. Montrez :

$$\operatorname{Arg}\left(\left(\frac{e^{i.\beta} - e^{i.\gamma}}{e^{i.\alpha} - e^{i.\gamma}}\right)^2\right) = \beta - \alpha.$$

◦22◦

Retrouvez le théorème de l'angle au centre.



◦23◦

Montrez : $\int_0^{\pi/3} \sin^2(t).\cos^3(t).dt \in \left\{ \frac{11.\sqrt{3}}{160}, \frac{9}{128}, \frac{47}{480} \right\}$ (en indiquant laquelle des trois est la bonne ; vous pourrez faire un changement de variable très simple en sinus).

L'existence de $\int_0^{\pi/3} \sin^2(t).\cos^3(t).dt$ ne pose pas de problème.

On la sépare en $\int_0^{\pi/3} \sin^2(t).\cos^2(t).\cos(t).dt$ puis avec Pythagore, elle devient $\int_0^{\pi/3} \sin^2(t).(1 - \sin^2(t)).\cos(t).dt$.

On peut changer de variable en sinus :

$$\int_{s=0}^{s=\sqrt{3}/2} s^2.(1 - s^2).ds$$

On intègre en $\left[\frac{s^3}{3} - \frac{s^5}{5} \right]_0^{\sqrt{3}/2}$. Il reste un $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en facteur, et on a ensuite $\frac{3/4}{3} - \frac{(3/4)^2}{5}$. C'est $\frac{11.\sqrt{3}}{160}$ qui emporte la mise.

*La clef est dans les puissances paires qui permettent de convertir des cosinus en sinus (ou des sinus en cosinus).
Puis dans la puissance impaire qui permet de mettre de côté un $\cos = \sin'$.*

Dans une I.S. (2020), on a trouvé pour a dans $] -1, 1[: J_a = \int_0^\pi \frac{\cos(\theta)}{1 + a \cdot \cos(\theta)} \cdot d\theta = \pi \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a \cdot \sqrt{1-a^2}} \right)$. Mais, le membre de droite n'a pas de valeur en 0. Est ce qu'au moins sa limite en 0 (calculez la) coïncide bien avec J_0 ? On a ensuite intégré le membre de droite^a, et trouvé $I_a = \pi \cdot \left(\ln(a) - \ln \left(\tan \left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2} \right) \right) \right)$. Pour a dans $]0, 1[$. Mais quelle est la limite de cette chose en 0 ? Vérifiez qu'elle se dérive bien ne ce qui est indiqué plus haut. Mon livre donne $I_a = \pi \cdot \ln \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{2} \right)$. C'est la même formule ?

$$a. \text{ bon, c'est quoi alors } I_a = \int_{x=0}^a \left(\int_{\theta=0}^\pi \frac{\cos(\theta)}{1+x \cdot \cos(\theta)} \cdot d\theta \right) \cdot dx$$

Première question : $\pi \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a \cdot \sqrt{1-a^2}} \right)$ a-t-elle une limite quand a tend vers 0 ?

On réduit au dénominateur commun, puis on conjugue

$$\pi \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a \cdot \sqrt{1-a^2}} \right) = \frac{\sqrt{1-a^2} - 1}{a \cdot \sqrt{1-a^2}} = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2} \cdot (\sqrt{1-a^2} + 1)}$$

Ce quotient tend vers 0 quand a tend vers 0.

Et pour a nul, l'intégrale vaut bien 0.

On a intégré $\int \frac{da}{a \cdot \sqrt{1-a^2}}$ par changement de variable en $a = \sin(\theta)$ et trouvé $\ln \left(\tan \left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2} \right) \right)$.

Transformons la différence des logarithmes en logarithme d'un quotient : $-\pi \cdot \ln \left(\frac{\tan(\dots)}{x} \right)$.

On utilise des équivalents : $\text{Arcsin}(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$ (qui vient de $\theta \sim \sin(\theta)$ et d'un changement de variable, ou du taux d'accroissement $\frac{\text{Arcsin}(x) - \text{Arcsin}(0)}{x}$ qui tend vers $\frac{1}{\sqrt{1-0^2}}$).

De même, $\tan(\theta) \sim \theta$. Finalement, $\tan \left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2} \right) \sim \frac{a}{2}$ et $\frac{\tan \left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2} \right)}{a}$ tend vers $\frac{1}{2}$.

Bon on dérive pour vérifier $\ln(a) - \ln \left(\tan \left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2} \right) \right)$

$$\text{et on trouve } a \mapsto \frac{1}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2} \right)} \cdot \frac{1}{\tan \left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2} \right)}.$$

On simplifie $2 \cdot \cos^2(\dots) \cdot \tan(\dots)$ en $2 \cdot \cos(\dots) \cdot \sin(\dots)$ en ayant simplifié les cosinus entre eux.

Ayant identifié le double de l'angle, on a bien notre $\sin \left(2 \cdot \frac{\text{Arcsin}(a)}{2} \right)$ d'où a lui même.

Remarque : j'ai dérivé la composée

$$a \xrightarrow{\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}} \text{Arcsin}(a) \xrightarrow{\frac{1}{2}} \frac{\text{Arcsin}(a)}{2} \xrightarrow{\frac{1}{\cos^2(\dots)}} \tan \left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2} \right) \xrightarrow{\frac{1}{\tan(\dots)}} \ln \left(\tan \left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2} \right) \right).$$

En dérivant sous cette forme, on n'a plus besoin de traîner des formules en $\frac{u'}{u}$ ou $\sin(u) \cdot u'$ et autres... On multiplie des dérivées classiques, mais on les calcule à chaque fois au bon endroit.

Pour égaliser ma formule avec celle du livre : $\ln(a) - \ln \left(\tan \left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2} \right) \right) = \ln \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{2} \right)$ il y a deux approches :

on fait de la trigonométrie pour simplifier	on montre que les deux applications ont la même dérivée et coïncident en un point
$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)}$ $\tan\left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2}\right) = \frac{\sin(\text{Arcsin}(a))}{1 + \cos(\text{Arcsin}(a))}$ $\tan\left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2}\right) = \frac{a}{1 + \sqrt{1 - a^2}}$ $\ln(a) - \ln\left(\tan\left(\frac{\text{Arcsin}(a)}{2}\right)\right)$ $= \ln\left(\frac{a}{1 + \sqrt{1 - a^2}}\right) = \ln\left(1 + \sqrt{1 - a^2}\right)$	A vous...

◦25◦

Vous tirez au hasard uniforme un entier entre 1 et 2019. Quelle est la probabilité qu'il soit multiple de 7 ou de 13 (ou inclusif).

Vous tirez au hasard uniforme un entier entre 1 et 2019. Quelle est la probabilité qu'il soit multiple de 7 ou de 13 (ou exclusif).

La probabilité se compte par « nombre de cas favorables divisé par nombre de cas possibles ».

Les cas possibles, c'est range(1, 2020). Il y a 2019 entiers.

Prenons une question intermédiaire : multiples de 7.

Il y a 7, 14, 21 jusqu'à 2016. Il y en a • à peu près $\frac{2019}{7}$ (réponse de PSI)

- $\left\lceil \frac{2019}{7} \right\rceil$ (réponse de PC)
- le quotient euclidien de 2019 par 7 (réponse de MP)
- $2019 / 7$ (réponse de MP option Python)
- 288

On compte aussi les multiples de 13 : il y en a 155 (même calcul mais avec 13).

Alors pour « multiple de 7 ou multiple de 13 », il y en aurait $288 + 155$?

Non.

Car avec cettedémarche, les multiples de 91 sont comptés deux fois. Une fois comme multiples de 7, une fois comme multiples de 13.

Et il y en a 22 (là on peut en donner la liste).

Il faut les enlever.

Et pour le « ou exclusif », il faudra les enlever deux fois.

Je vous offre un bilan pour toutes les réponses, y compris aux questions non posées :

multiples de 7	$(2019/7) = 288$	S
multiples de 13	$(2019/13) = 155$	T
multiples de 7 et de 13 (donc de 91)	$(2019/(7 * 13)) = 22$	$S \cap T$
multiples de 7 ou de 13	$288 + 155 - 22$	$S \cup T$
multiples de 7 ou de 13 (mais pas les deux)	$288 + 155 - 2.22$	$S \Delta T$

Application numérique : ou inclusif : 20,8 pour cent

ou exclusif : 19,7 pour cent

◦26◦

Calculez $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int_0^1 \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\int_0^1 \frac{x^3 \cdot dx}{\sqrt{1-x^4}}$.
$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\text{Arcsin}(x) \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$
$\int_0^1 \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[-\sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = 1$
$\int_0^1 \frac{x^3 \cdot dx}{\sqrt{1-x^4}} = \left[\frac{1}{2} \cdot \text{Arcsin}(x^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

Et $\int_0^1 \frac{x^3 \cdot dx}{\sqrt{1-x^4}}$ est jouable aussi, trouverez vous ?

◦27◦

Calculez la longueur du graphe du cosinus hyperbolique sur $[0, 1]$.

La longueur du graphe d'une application f de classe C^1 entre $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est donnée par $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} \cdot dt$ (intégrale de la norme du vecteur vitesse de $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$).

On a donc $y = ch(t)$, d'où $f'(t) = sh(t)$ et $\sqrt{1 + (f'(t))^2} = ch(t)$ grâce à la relation de Pythagore et à la positivité du cosinus hyperbolique.

On sait intégrer aisément : $\int_0^1 ch(t) \cdot dt = sh(1)$.

Et on sait intégrer entre deux points quelconques. C'est ce qui explique « à rebours » que le cosinus hyperbolique intervienne dans des problèmes physiques de corde qui pend entre deux points, sous le nom de chaînette.

◦28◦

Résolvez $T_n\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right) = \frac{1}{2}$ d'inconnue n (polynômes de Tchebychev).

Cette fois, $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

On résout donc $\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ d'inconnue n .

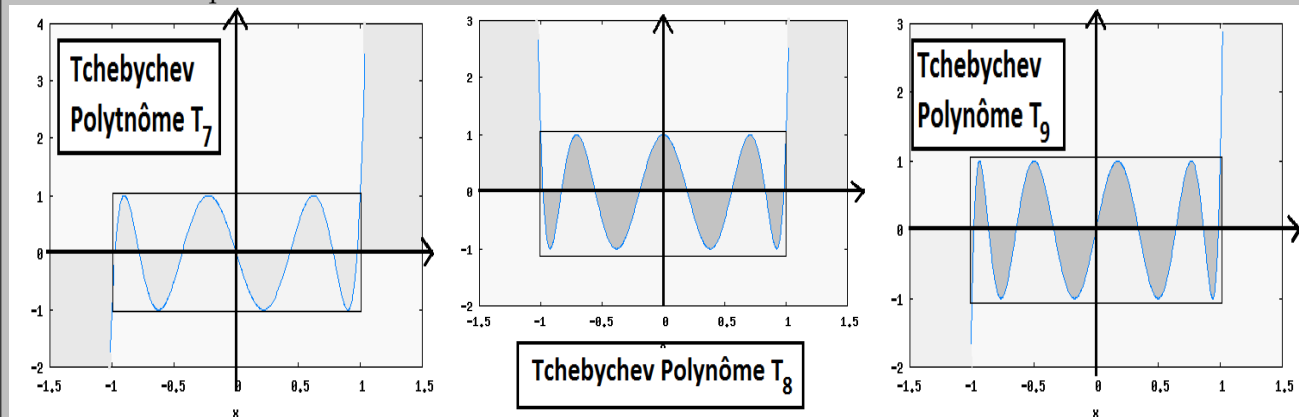
Le cas d'égalité des cosinus donne $n \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} [2 \cdot \pi]$ ou $n \cdot \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} [2 \cdot \pi]$.

On a donc $S_n = \{4 + 24 \cdot k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{-4 + 24 \cdot k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ par exemple 4, 20, 28 et ainsi de suite.

◦29◦

Le polynôme T_n est de degré n , de même que $T_n - 1$. Pourtant, si on cherche ses racines entre -1 et 1 , on n'en trouve pas n .

Ceci veut-il dire qu'il faut les chercher ailleurs ?



Non. C'est juste que certaines sont des racines doubles, à compter suivant leur multiplicité.

◦30◦

Qui est $2 \cdot X \cdot (T_4 \circ T_4) - (T_5 \circ T_3)$?

Calculez le produit des racines de l'équation $2 \cdot T_n(x) = 1$ d'inconnue réelle x .

On pose $Q = 2 \cdot X \cdot (T_4 \circ T_4) - (T_5 \circ T_3)$, et on calcule « par hasard » $Q(\cos(\theta))$ (je devrais écrire $\tilde{Q}(\cos(\theta))$ pour la rigueur).

$$Q(\cos(\theta)) = 2 \cdot \cos(\theta) \cdot (T_4 \circ T_4)(\cos(\theta)) - (T_5 \circ T_3)(\cos(\theta))$$

$$Q(\cos(\theta)) = 2 \cdot \cos(\theta) \cdot T_{16}(\cos(\theta)) - T_{15}(\cos(\theta))$$

$$Q(\cos(\theta)) = 2 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(16 \cdot \theta) - \cos(15 \cdot \theta)$$

$$Q(\cos(\theta)) = \cos(17 \cdot \theta)$$

On reconnaît la caractérisation de T_{17} .

On pouvait d'ailleurs l'obtenir sans repasser par $\cos(\theta)$.

Le produit des racines de $2 \cdot T_n(x) = 1$ fait juste intervenir les formules de Viète :

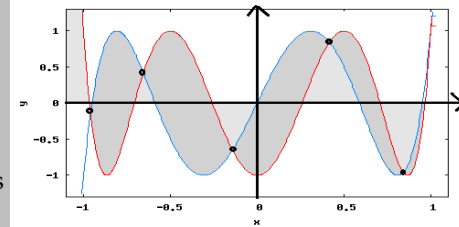
$2 \cdot T_n(x) - 1 = 2 \cdot (2^{n-1} \cdot X^n + \dots - 1)$ et tout dépend du coefficient constant de $2 \cdot T_n - 1$, c'est à dire du coefficient constant de T_n .

On rappelle que ce coefficient constant est $T_n(0)$ c'est à dire $\cos\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right)$.

n	forme du polynôme	produit des racines
n impair, $n = 2.p + 1$	$2^n.X^n - \dots - 1$	2^{-n}
n pair, $n = 4.k$	$2^n.X^n - \dots + 1$	2^{-n}
n impairement pair, $n = 4.k + 2$	$2^n.X^n - \dots - 3$	$-\frac{3}{2^n}$

◦31◦

a est un réel plus grand que 1 ; résolvez $a^2 - 2.a.T_7(x) + 1 = 0$ d'inconnue réelle x (T_n est le $n^{ième}$ polynôme de Pafnouti T.).



◦32◦

♥ On note T_n le $n^{ième}$ polynôme de Tchebychev. Donnez les racines de $T_6 - T_5$ et calculez leur somme.

On résout $T_6(x) = T_5(x)$ d'inconnue réelle x .

On a six racines à trouver (degré).

On cherche déjà entre -1 et 1 en posant $x = \cos(\theta)$ (et en fixant θ entre 0 et π pour ne avoir de doublons).

On résout donc $\cos(5.\theta) = \cos(6.\theta)$ d'inconnue θ .

Les deux cas d'égalité des cosinus donnent $\exists k, 5.\theta = 6.\theta + 2.k.\pi$

$$\exists k, 5.\theta = -6.\theta + 2.k.\pi$$

Le premier modèle donne θ multiple de $2.\pi$ et donc $\cos(\theta) = 1$ (en haut du graphe).

On a aussi la liste $\cos\left(\frac{2.k.\pi}{11}\right)$ pour k de 0 à 5 (on y retrouve la première racine pour k égal à 0).

Inutile de chercher ensuite hors de $[-1, 1]$, on a six racines !

$$\text{Bilan } S_x = \left\{ \cos\left(\frac{2.k.\pi}{11}\right) \mid k \in \text{range}(6) \right\}$$

Le polynôme $T_6 - T_5$ s'écrit $2^5.X - 2^4.X - \dots$ (c'est même $32.X^6 - 16.X^5 - 48.X^4 + 20.X^3 + 18.X^2 - 5.X - 1$ si vous y tenez).

La somme des racines est donc $\frac{1}{2}$, sans effort.

◦33◦

T_n est le $n^{ième}$ polynôme de Tchebychev. Calculez $T_{20}(\sqrt{3}/2)$, $T_{13}(1/2)$ et $T'_{13}(1/2)$.
Résolvez $T_{16}(x) > 1$ d'inconnue réelle x .

Les polynômes de Tchebychev sont caractérisés par $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$.

On a donc très vite $T_{20}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = T_{20}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \cos\left(\frac{20.\pi}{6}\right) = \cos\left(4.\pi - \frac{2.\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2.\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$.

On a aussi $T_{13}\left(\frac{1}{2}\right) = T_{13}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(\frac{13.\pi}{3}\right) = \cos\left(4.\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Pour la dérivation, il faut être vraiment matheux et se préoccuper des variables. On part encore de $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ et on dérive (avant de donner une valeur à θ) :

$-\sin(\theta).T'_n(\cos(\theta)) = -n.\sin(n.\theta)$, puis on donne une valeur à θ , en l'occurrence ici $\pi/3$:

$$-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).T'_{13}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -13.\sin\left(\frac{13.\pi}{3}\right) \text{ donc } \frac{\sqrt{3}}{2}.T'_{13}\left(\frac{1}{2}\right) = 13.\frac{\sqrt{3}}{2} : T'_{13}\left(\frac{1}{2}\right) = 13$$

J'attends la réponse crétinissime des certains : puisque $T_{13}(1/2)$ est une constante, quand on dérive, on trouve 0. Je me demande ce que ceux là font en sciences. Et j'attends hélas aussi d'autres grosses bêtises des personnes pressées d'écrire des formules sans s'interroger d'abord sur qui sont les variables...

Quand la variable x est entre -1 et 1 , on peut l'écrire $x = \cos(\theta)$ et on a $T_n(x) = T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta) \leq 1$.

Quand la variable x a dépassé 1 , par croissance de T_n (dont la dérivée ne peut plus s'annuler et changer de signe, elle a eu toutes ses racines entre -1 et 1), on a alors $T_n(x) > 1$.

Par parité, pour x plus petit que -1 , on a $T_n(x) = T_n(-x) > 1$.

Comme on a étudié tous les cas, on a bien $T_{16}(x) > 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

L'argument est essentiellement visuel sur la forme des polynômes de Tchebychev. On préférera une réponse imparfaite certes avec un petit dessin à la personne qui se lancera dans un long calcul pour expliciter T_{16} et ne pas savoir qu'en faire...

◦34◦

Un professeur étourdi voulait poser l'exercice suivant : « résoudre $T_n\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{1}{2}$ d'inconnue n ». Il a écrit par erreur « résoudre $T_n\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{2}$ d'inconnue n », qui cette fois n'a pas de solution.

♥ 0 ♥ Résolvez quand même pour commencer le vrai exercice, et donnez le nombre de solutions dans `range(100)`.

On doit résoudre $T_n\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{1}{2}$ d'inconnue n .

On rappelle qu'on a déjà croisé : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2}$.

L'équation devient $T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{1}{2}$ et même $\cos\left(\frac{n \cdot \pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Les cas d'égalité des cosinus conduisent à $\exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n \cdot \pi}{12} = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi$ ou $\exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n \cdot \pi}{12} = -\frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi$

On a deux familles pour n entier : $S = \{4 + 24 \cdot k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{-4 + 24 \cdot k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$

Malproprement : $\{4, 20, 28, 44, 52, 68, 76, 92, 100, 116, 124, \dots\}$

Entre 0 et 100 il y a neuf solutions (dont 100 d'ailleurs, donc dans `range(100)` il n'y en a que huit).

◇ 0 ◇ Calculez $T_n\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}\right)$ (appelé u_n) pour n de 0 à 5.

Ayant posé $x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$ on n'a pas d'angle simple vérifiant $\cos(\alpha) = x$. On doit se contenter de faire des calculs du type $2 \cdot x^2 - 1$, $4 \cdot x^3 - 3 \cdot x$ et même $8 \cdot x^4 - 8 \cdot x^2 + 1$.

Mais on rappelle aussi la formule dite de Tchebychev : $T_{n+2}(X) = 2 \cdot X \cdot T_{n+1}(X) - T_n(X)$ qui donne ici $u_{n+2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \cdot u_{n+1} - u_n$ et permet de les calculer de proche en proche :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$	$\frac{2\sqrt{6}-3}{8}$	$-\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{16}$	$\frac{1-12\sqrt{6}}{32}$	$-\frac{31\sqrt{2}+11\sqrt{3}}{64}$

C'est la question qui déprime certains d'entre vous : « du calcul, comment voulez vous que je fasse ça sans me tromper ? ».

◇ 0 ◇ Montrez qu'il existe quatre suites de rationnels (a_n) , (b_n) , (c_n) et (d_n) vérifiant pour tout n :

$u_n = a_n + b_n \cdot \sqrt{2} + c_n \cdot \sqrt{3} + d_n \cdot \sqrt{6}$ et donnez les coefficients du tableau

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= * \cdot a_{n+1} + * \cdot b_{n+1} + * \cdot c_{n+1} + * \cdot d_{n+1} + * \cdot a_n + * \cdot b_n + * \cdot c_n + * \cdot d_n \\ b_{n+2} &= * \cdot a_{n+1} + * \cdot b_{n+1} + * \cdot c_{n+1} + * \cdot d_{n+1} + * \cdot a_n + * \cdot b_n + * \cdot c_n + * \cdot d_n \\ c_{n+2} &= * \cdot a_{n+1} + * \cdot b_{n+1} + * \cdot c_{n+1} + * \cdot d_{n+1} + * \cdot a_n + * \cdot b_n + * \cdot c_n + * \cdot d_n \\ d_{n+2} &= * \cdot a_{n+1} + * \cdot b_{n+1} + * \cdot c_{n+1} + * \cdot d_{n+1} + * \cdot a_n + * \cdot b_n + * \cdot c_n + * \cdot d_n \end{aligned}$$

Pour l'instant, on a bien des formes $u_n = a_n + b_n \cdot \sqrt{2} + c_n \cdot \sqrt{3} + d_n \cdot \sqrt{6}$ avec a_n, b_n, c_n et d_n rationnels :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$	$\frac{2\sqrt{6}-3}{8}$	$-\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{16}$	$\frac{1-12\sqrt{6}}{32}$	$-\frac{31\sqrt{2}+11\sqrt{3}}{64}$
a_n	1	0	$-3/8$	0	$1/32$	0
b_n	0	$1/4$	0	$-1/16$	0	$-31/64$
c_n	0	$1/4$	0	$3/16$	0	$-11/64$
d_n	0	0	$1/4$	0	$-3/8$	0

On note P_n la propriété « les quatre rationnels existent, et on a l'égalité écrite plus haut ».

Et c'est parti pour une récurrence. A double hérédité.

Attention, on est en maths au delà du bac. Le plus important, c'est l'existence de a_n, b_n, c_n et d_n et pas l'égalité. Le comprendrez vous un jour, ou resterez vous malformés par un système prébac et des a priori crétiens ?

On a initialisé l'existence en écrivant le tableau ci dessus.

On se donne un entier n , et on suppose que les deux quadruplets de rationnels (a_n, b_n, c_n, d_n) et $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1})$ existent.

On doit montrer que $(a_{n+2}, b_{n+2}, c_{n+2}, d_{n+2})$ existent. On va les expliciter, ce qui prouvera leur existence.

En passant, on doit prouver $\forall n, (P_n \Rightarrow P_{n+1})$. Quoi de plus simple alors que de suivre la quantification dans son ordre logique :
 $\forall n$: on se donne n quelconque
 $P_n \Rightarrow$: on suppose P_n vraie
 $\Rightarrow P_{n+1}$: on montre que P_{n+1} est vraie.
 C'est bien plus logique que vos « on suppose que P_n est vraie » et dans laquelle n n'est quantifié (une fois encore !) qu'après.

On rappelle alors la formule $u_{n+2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} \cdot u_{n+1} - u_n$.

Avec les hypothèses de récurrence :

$$u_{n+2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} \cdot (a_{n+1} + b_{n+1} \cdot \sqrt{2} + c_{n+1} \cdot \sqrt{3} + d_{n+1} \cdot \sqrt{6}) - (a_n + b_n \cdot \sqrt{2} + c_n \cdot \sqrt{3} + d_n \cdot \sqrt{6})$$

On développe et réordonne, proprement en tenant compte des propriétés de la racine carrée :

$$u_{n+2} = a_{n+1} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} + b_{n+1} \cdot \frac{2 + \sqrt{6}}{2} + c_{n+1} \cdot \frac{\sqrt{6} + 3}{2} + d_{n+1} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{2}}{2} - (a_n + b_n \cdot \sqrt{2} + c_n \cdot \sqrt{3} + d_n \cdot \sqrt{6})$$

On regroupe les termes :

$$u_{n+2} = \left(b_{n+1} + \frac{3 \cdot c_{n+1}}{2} - a_n \right) \cdot 1 + \left(\frac{a_{n+1}}{2} + \frac{3 \cdot d_{n+1}}{2} - b_n \right) \cdot \sqrt{2} + \left(\frac{a_{n+1}}{2} + d_{n+1} - c_n \right) \cdot \sqrt{3} + \left(\frac{b_{n+1}}{2} + \frac{c_{n+1}}{2} - d_n \right) \cdot \sqrt{6}$$

Pour conclure, il suffit de dire qu'on définit alors a_{n+2} , b_{n+2} , c_{n+2} et d_{n+2} par les formules suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+2} = & b_{n+1} & + 3 \cdot c_{n+1} / 2 & - a_n \\ b_{n+2} = & a_{n+1} / 2 & & + 3 \cdot d_{n+1} / 2 & - b_n \\ c_{n+2} = & a_{n+1} / 2 & & + d_{n+1} & - c_n \\ d_{n+2} = & b_{n+1} / 2 & + c_{n+1} / 2 & & - d_n \end{cases}$$

(en alignant proprement pour que les choses soient agréables à lire et faciles à interpréter).

Une fois qu'on a écrit cette définition, on peut poser :

$$u_{n+2} = a_{n+2} + b_{n+2} \cdot \sqrt{2} + c_{n+2} \cdot \sqrt{3} + d_{n+2} \cdot \sqrt{6}$$

et dire qu'on a (presque) fini l'hérédité de la récurrence.

On note que c'est « on définit alors... », on a bien la formule » et non encore et toujours « on écrit la formule et on identifie », qui traduit les implications dans le mauvais sens. Mais là encore, on vous a fait croire que faire des maths c'était écrire des formules partout, faire des calculs et écrire des $\Rightarrow$. Quelle détresse, quelle tristesse. Quel manque d'intelligence. Comme si la littérature n'était que conjugaison.

Pourquoi « presque fini » ? Parce qu'il faut encore dire qu'on a défini des suites de rationnels.

Pour l'instant, on a défini des suites. mais pourquoi des rationnels ?

Les deux premiers quadruplets sont faits de rationnels. Et la formule « matricielle » plus haut dit que si (a_n, b_n, c_n, d_n) et $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1})$ sont deux quadruplets de rationnels, alors $(a_{n+2}, b_{n+2}, c_{n+2}, d_{n+2})$ est un quadruplet de rationnels.

- L'argument est « sommes, produits de rationnels » comme $a_{n+2} = b_{n+1} + \frac{3 \cdot c_{n+1}}{2} - a_n$.
- L'argument encore plus court est « $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un anneau ».
- L'argument de pachyderme est « on écrit $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ et ainsi de suite, jusqu'à arriver à $a_{n+2} = \frac{\text{truc}}{\text{bidule}}$ ». C'est indigeste au possible.

Ah qu'il est facile de croire qu'on va avoir les points parce qu'on aura écrit des formules. Mais si on n'a pas dit qu'on travaillait par récurrence. Si on n'a pas dit que l'hérédité était double. Si on a tout concentré sur les formules au lieu de l'existence. Si on oublié de propager « rationnels ».

Au fait, pourquoi ai-je parlé de « formule matricielle » ?

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \\ d_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

ou même

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \\ d_{n+2} \\ a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1.5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \\ a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

Mais ça, ce sera pour plus tard dans l'année.

◇ 0 ◇ Calculez $a_{2,n}$ et $d_{2,n}$ pour n de 0 à 3.

◇ 1 ◇ Montrez que chaque $a_{2,n}$ est de la forme $\frac{i_n}{2^{2,n+1}}$ avec i_n entier impair (pour n dans $\mathbb{N}^*$) et chaque $d_{2,n}$ de la forme $\frac{j_{2,n}}{2^{2,n+1}}$ avec $j_{2,n}$ entier.

L'énoncé nous dit de ne nous intéresser qu'aux termes d'indice pair : $u_{2,n}$, c'est à dire $\cos(2.n.\theta)$

avec $\theta = \text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}\right)$:

n	0	1	2	3
$u_{2,n} = \cos(n.2.\theta)$	1	$\frac{2.\sqrt{6}-3}{8}$	$\frac{1-12.\sqrt{6}}{32}$	$\frac{6.\sqrt{6}-99}{128}$
$a_{2,n}$	0	$\frac{-3}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{-99}{128}$
$d_{2,n}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{3}{64}$
$b_{2,n}$ et $c_{2,n}$	0	0	0	0

On peut se lancer dans un grand calcul pour avancer de deux étapes.

Ceci nous permet de dire (tout de suite ?) que par récurrence évidente (?) sur n $b_{2,n}$ et $c_{2,n}$ sont nuls.

On montrerait aussi que $a_{2,n+1}$ et $b_{2,n+1}$ sont toujours nuls aussi.

En fait, on a envie de prouver $u_{2,n} = a_{2,n} + d_{2,n}.\sqrt{6}$ et $u_{2,n} = b_{2,n+1}.\sqrt{2} + c_{2,n+1}.\sqrt{3}$ pour tout n .

Mais on peut aussi écrire : $u_{2,n} = \cos(2.n.\theta) = \cos(n.(2.\theta))$.

On travaille donc en fait avec l'angle $2.\theta$.

$$u_{2,(n+2)} = T_{2,n+4}(\cos(\theta)) = \cos((n+2).2.\theta) = 2.\cos(2.\theta).\cos((n+1).2.\theta) - \cos(n.2.\theta)$$

On remplace $\cos(2.\theta)$ par $\frac{2.\sqrt{6}-3}{8}$: $u_{2,(n+2)} = \frac{2.\sqrt{6}-3}{4}.u_{2,(n+1)} - u_{2,n}$

On recommence une récurrence plus simple (quoique à double hérédité) pour une propriété appelée Q_n :

il existe $a_{2,n}$ et $d_{2,n}$, rationnels, vérifiant $u_{n,2,n} = a_{2,n} + d_{2,n}.\sqrt{6}$, et $2^{2,n+1}.a_{2,n}$ est un entier impair et enfin et $2^{2,n+1}.d_{2,n}$ est un entier.

L'initialisation est faite.

On se donne n , et on suppose que Q_n et Q_{n+1} sont vraies.

On calcule alors $u_{2,n+4}$ par la formule citée plus haut : $u_{2,(n+2)} = \cos((n+2).2.\theta) = 2.\cos(2.\theta).\cos((n+1).2.\theta) - \cos(n.2.\theta)$.

On remplace par les valeurs connues et l'hypothèse de récurrence :

$$u_{2,(n+2)} = \frac{2.\sqrt{6}-3}{4}.(a_{2,n+2} + d_{2,n+2}.\sqrt{6}) - a_{2,n} - d_{2,n}.\sqrt{6}$$

On développe et regroupe : $u_{2,(n+2)} = \left(\frac{-3.a_{2,n+2}}{4} + 3.d_{2,n+2} - a_{2,n}\right) + \left(\frac{a_{2,n+2}}{2} - \frac{3.d_{2,n+2}}{4} - d_{2,n}\right).\sqrt{6}$.

On pose donc bien $a_{2,n+4} = \left(\frac{-3.a_{2,n+2}}{4} + 3.d_{2,n+2} - a_{2,n}\right)$ et $d_{2,n+4} = \left(\frac{a_{2,n+2}}{2} - \frac{3.d_{2,n+2}}{4} - d_{2,n}\right)$.

ce sont des rationnels, par les hypothèses Q_n et Q_{n+1} .

Il reste à voir si $2^{2,n+5}.a_{2,n+4}$ est un entier impair et $2^{2,n+5}.d_{2,n+4}$ entier.

$$2^{2,n+5}.a_{2,n+4} = 2^{2,n+5}.\left(\frac{-3.a_{2,n+2}}{4} + 3.d_{2,n+2} - a_{2,n}\right) = -3.(2^{2,n+3}.a_{2,(n+1)}) + 12.(2^{2,n+3}.d_{2,(n+1)}) - 16.(2^{2,n+1}.a_{2,n})$$

dans cette expression, tous les termes entre parenthèses sont des entiers par hypothèse de récurrence, et selon l'énoncé ils s'écrivent même ainsi :

$$2^{2,n+5}.a_{2,n+4} = -3.i_{2,n+3} + 12.j_{2,n+3} - 16.i_{2,n}.$$

C'est un entier. Comme $12.j_{2,n+3} - 16.i_{2,n}$ est visiblement pair, et comme $-3.i_{2,n+3}$ est impair, la somme est impaire.

A ce stade, l'entier $i_{2,n+5}$ est entier et impair.

On passe à

$$2^{2,n+5}.d_{2,n+4} = 2^{2,n+5}.\left(\frac{a_{2,n+2}}{2} - \frac{3.d_{2,n+2}}{4} - d_{2,n}\right) = 2.(2^{2,n+3}.a_{2,(n+1)}) - 3.(2^{2,n+3}.d_{2,(n+1)}) - 16.(2^{2,n+1}.d_{2,n})$$

c'est un entier.

La récurrence s'achève.

◊ 0 ◊ Déduisez que l'équation $u_n = \frac{1}{2}$ d'inconnue n n'a aucune solution.

On se demande alors si $u_{2.n}$ peut valoir une fois au moins $\frac{1}{2}$.

Il faudrait pour cela que $\frac{i_{2.n}}{2^{2.n+1}} + \frac{j_{2.n+1}}{2^{2.n+1}} \cdot \sqrt{6}$ soit égal à $\frac{1}{2}$.

Par irrationalité de $\sqrt{6}$, il faudrait que $j_{2.n+1}$ soit nul (pourquoi pas), et $\frac{i_{2.n}}{2^{2.n+1}}$ soit égal à $\frac{1}{2}$. Pour ce faire, il faudrait que $i_{2.n}$ simplifie les nombreux 2 du dénominateur. Or, il est impair. C'est impossible.

Mais serait il possible qu'un u_n tout court (d'indice pair ou impair) soit égal à $\frac{1}{2}$?

Mais si tel était le cas, $u_{2.n}$ serait égal à $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1$ c'est à dire $\frac{-1}{2}$.

L'équation $\frac{i_{2.n}}{2^{2.n+1}} + \frac{j_{2.n+1}}{2^{2.n+1}} \cdot \sqrt{6} = \frac{-1}{2}$ est tout aussi impossible.

Bref, jamais $\cos\left(n \cdot \text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}\right)\right)$ ne prendra une valeur simple (en tout cas, jamais il ne vaudra $\frac{1}{2}$).

◊ 35 ◊

Trouvez a et b sachant : $a + b = 15$ et $a^2 + b^2 = 30$.

On a à la fois $a + b = 15$ et $15^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b = 30 + 2.a.b$.

On raisonne par équivalences : $a + b = 15$ et $a.b = \frac{15^2 - 30}{2}$.

a et b sont les deux racines de l'équation $x^2 - 15.x + \frac{15^2 - 30}{2} = 0$ d'inconnue réelle x .

◊ 36 ◊

Calculez $T'_n(0)$ pour tout n .

Pour calculer $T'_n(0)$, le plus simple est de partir de la formule $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ puis de la dériver (grâce au $\forall \theta$) : $-\sin(\theta).T'_n(\cos(\theta)) = -n.\sin(n.\theta)$. On applique pour θ égal à $\pi/2$: $-1.T'_n(0) = -n.\sin(n.\pi/2)$. On a la

formule close $T'_n(0) = n.\sin(n.\pi/2)$

$n \text{ modulo } 4$	0	1	2	3
$T'_n(0)$	0	n	0	$-n$

On peut aussi partir de $T_{n+2}(X) = 2.X.T'_{n+1}(X) - T_n(X)$ et dériver

$T'_{n+2}(X) = 2.X.T'_{n+1}(X) + 2.T'_{n+1}(X) - T'_n(X)$.

On applique en 0 : $T'_{n+2}(0) = 2.T'_{n+1}(0) - T'_n(0)$. Or, $T_n(0)$ vaut $T_n(\cos(\pi/2))$ c'est à dire $\cos(n.\pi/2)$. Après, il faut mouliner un peu.

◊ 37 ◊

Montrez : $ch^2 = 1 + (ch')^2$. Quel est le minimum de l'application ch ?

C'est juste $ch^2 = 1 + sh^2$.

On l'a en écrivant pour tout x : $ch(x) + sh(x) = e^x$ et $ch(x) - sh(x) = e^{-x}$. Il ne reste plus qu'à multiplier les deux. Le minimum de ch est en 0 et il vaut 1.

Lycee Charlemagne

MPSI2

Année 2023/24

Pafnouti encore

◊ 0 ◊

Montrez l'existence pour tout n de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos\left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)}$ noté S_n . Calculez S_0 et S_1 .

L'existence de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos\left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)}$ ne pose qu'un problème : serait il possible que l'un des $\cos\left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)$ soit nul.

Ceci revient à dire que $\frac{2.k.\pi}{2.n+1}$ s'écrit $\frac{2.p+1}{2}.\pi$ (que de variables entre n , p et k). Par produit en croix, ceci revient à demander que $4.k$ soit égal au nombre impair $(2.n+1).(2.p+1)$, ce qui est impossible.

On calcule
$$S_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{\cos\left(\frac{2.k.\pi}{2.1+1}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{2.1.\pi}{3}\right)} = -2$$

On ne calcule même pas la somme S_0 ! Elle est vide, et vaut 0.

La somme S_2 est faite de deux termes : $\frac{1}{\cos\left(\frac{2.\pi}{5}\right)}$ et $\frac{1}{\cos\left(\frac{4.\pi}{5}\right)}$. On rappelle $\cos\left(\frac{2.\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et on calcule
$$\cos\left(\frac{4.\pi}{5}\right) = 2.\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{5+1-2.\sqrt{5}}{8} - 1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

On passe aux inverses et on somme :
$$\frac{4}{\sqrt{5}-1} - \frac{4}{\sqrt{5}+1} = 4.\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}+1).(\sqrt{5}-1)} = \frac{4.2}{5-1} = 2$$

On résume :

n	0	1	2
S_n	0	-2	2

 On ne voit pas trop quoi déduire pour l'instant.

On traite tout de suite le calcul de $\cos(2.\pi/5)$. On résout l'équation $\cos(3.\theta) = \cos(2.\theta)$ d'inconnue θ de deux façons :

• cas d'égalité des cosinus :

$3.\theta = 2.\theta \mod 2.\pi$	$3.\theta = -2.\theta \mod 2.\pi$
$2.k.\pi$ avec k dans $\mathbb{Z}$	$\frac{2.p.\pi}{5}$ avec p dans $\mathbb{Z}$

• polynômes de Tchebychev : $4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta) = 2.\cos^2(\theta) - 1$
on factorise $4.X^3 - 2.X^2 - 3.X + 1 = (X-1).(4.X^2 + 2.X - 1)$

$\cos(\theta) = 1$	$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\cos(\theta) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$
$2.k.\pi$ avec k dans $\mathbb{Z}$	$\varepsilon.\text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) + 2.n.\pi$	$\varepsilon.\text{Arccos}\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) + 2.n.\pi$

En revenant à l'inconnue pertinente $\cos(\theta)$, les deux résolutions donnent des solutions à appairer :

$\cos(2.k.\pi)$	$\cos\left(\frac{2.\pi}{5} + 2.n.\pi\right)$	$\cos\left(\frac{4.\pi}{5} + 2.n.\pi\right)$
$\cos(\theta) = 1$	$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\cos(\theta) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

en tenant compte des signes.

◇ 0 ◇ Sachant $\cos\left(\frac{2.\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, calculez S_2 .

L'existence de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos\left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)}$ ne pose qu'un problème : serait-il possible que l'un des $\cos\left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)$ soit nul.

Ceci revient à dire que $\frac{2.k.\pi}{2.n+1}$ s'écrit $\frac{2.p+1}{2}.\pi$ (que de variables entre n , p et k). Par produit en croix, ceci revient à demander que $4.k$ soit égal au nombre impair $(2.n+1).(2.p+1)$, ce qui est impossible.

◇ 0 ◇ On introduira le polynôme $\prod_{k=1}^n \left(X - \cos\left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)\right)$ qu'on notera $P_n(X)$. Pour tout n , on note

encore T_n le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebychev, toujours caractérisé par $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ pour tout angle θ .
Donnez la liste des racines réelles de l'équation $T_{2.n+1}(x) = 1$ et de l'équation $T'_{2.n+1}(x) = 0$.

◇ 1 ◇ Déduisez : $T_{2.n+1}(X) - 1 = 2^{2.n}.(X-1).(P_n(X))^2$ (polynôme que l'on notera Q_n).

◇ 2 ◇ Calculez $Q_n(0)$ et montrez $Q'_n(0) = (-1)^n.(2.n+1)$.

On se fixe n et on regarde le polynôme $T_{2.n+1}(X) - 1$. Il est de degré $2.n+1$.

On ne se contente pas de faire du calcul rapide. On fait des maths, avec des variables.

On résout déjà $T_{2.n+1}(x) - 1 = 0$ sur $[-1, 1]$ en posant $x = \cos(\theta)$.

Pour être précise, on pose $\theta = \text{Arccos}(x)$, ce qui force θ à être entre 0 et π .

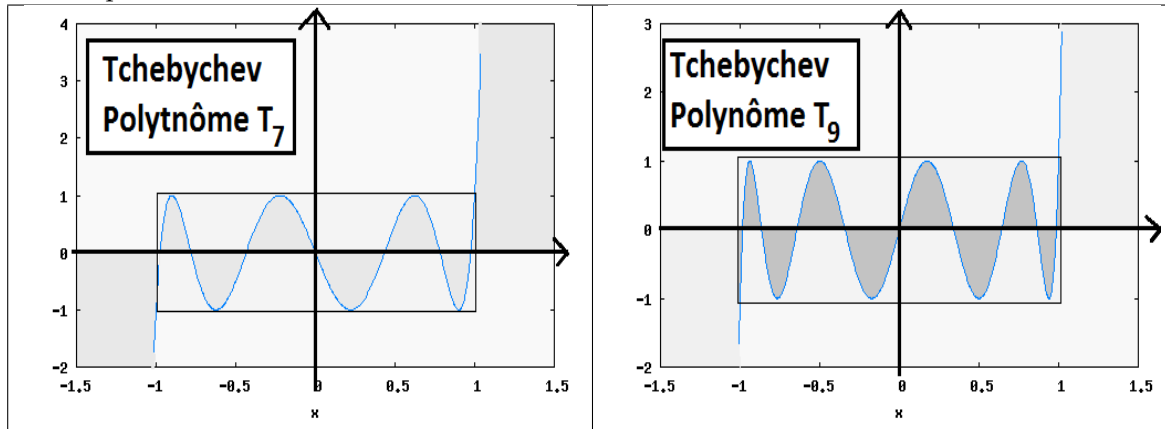
L'équation devient
$$\frac{T_{2.n+1}(\cos(\theta))}{x} = \frac{1}{\cos(\theta)} \quad \text{soit} \quad \frac{\cos((2.n+1)\theta)}{x} = \frac{\cos(0)}{\cos(\theta)}.$$

On trouve $(2.n+1).\theta = 0 \mod 2.\pi$, ce qui donne $\theta = \frac{2.k.\pi}{2.n+1}$ avec k de 0 à n (car on a posé $\theta = \text{Arccos}(x)$, ce qui

le force à rester entre 0 et π).

On tient $n + 1$ racines x entre -1 et 1 : $\cos\left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

On continue à faire des maths. On a $n + 1$ racines pour une équation de degré $2.n + 1$. Il en manque encore n . C'est beaucoup !



Faut il les chercher hors de $[-1, 1]$?

Si x est plus grand que 1, on a $T_{2.n+1}(x) = \cosh((2.n+1) \cdot \text{Argch}(x)) > 1$. Il n'y a pas de nouvelle racine.

Si x est plus petit que -1 , on a $T_{2.n+1}(x) = -T_{2.n+1}(-x) < -1$. Il n'y a pas de nouvelle racine non plus.

Il faut les chercher dans $\mathbb{C}$? C'est délicat.

Ou alors il faut faire comme un P.C. : ne même pas voir qu'il y a une difficulté

(le P.S.I. voit qu'il y a une difficulté, mais il est déjà heureux d'avoir $n + 1$ racines).

Regardons la suite de l'énoncé, et ayons une idée de la forme des polynômes de Tchebychev.

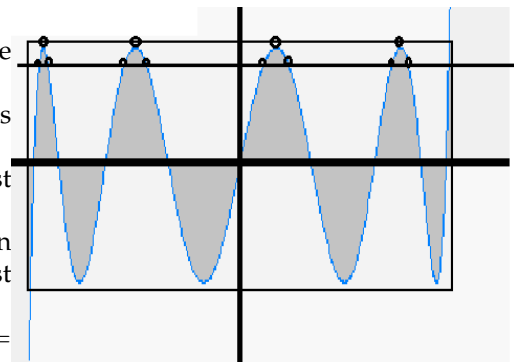
Les racines que l'on a trouvées sont peut être des racines doubles...

C'est pourquoi on va regarder la dérivée du polynôme, qui est ici $T'_{2.n+1}$ puisque le -1 a une dérivée nulle.

Or, en dérivant la formule $T_{2.n+1}(\cos(\theta)) = \cos((2.n+1).\theta)$, on trouve $\sin(\theta).T'_{2.n+1}(\cos(\theta)) = (2.n+1) \cdot \sin((2.n+1).\theta)$ (c'est par rapport à θ qu'on a dérivé).

On divise et on évite à θ les multiples de π : $T'_{2.n+1}(\cos(\theta)) =$

$$(2.n+1) \cdot \frac{\sin((2.n+1).\theta)}{\sin(\theta)}.$$



Quatre racines doubles

On pose $\theta = \text{Arccos}(x)$ et on travaille sur $]0, \pi[$. Pour θ de la forme $\frac{p.\pi}{2.n+1}$ avec p de 1 à $2.n$, on a $2.n$ angles, puis $2.n$ réels de $[-1, 1]$.

On a la liste des $2.n$ racines du polynôme $T'_{2.n+1}$ (qui ne peut pas en avoir plus) : les $\cos\left(\frac{p.\pi}{2.n+1}\right)$

On résume entre -1 et 1

racines de $T_{2.n+1}(x) - 1$	$\cos\left(\frac{0.\pi}{2.n+1}\right) = 1$		$\cos\left(\frac{2.\pi}{2.n+1}\right)$		
racines de $T'_{2.n+1}(x)$		$\cos\left(\frac{\pi}{2.n+1}\right)$	$\cos\left(\frac{2.\pi}{2.n+1}\right)$	$\cos\left(\frac{3.\pi}{2.n+1}\right)$	
racines de $T_{2.n+1}(x) - 1$	$\cos\left(\frac{4.\pi}{2.n+1}\right)$		$\cos\left(\frac{6.\pi}{2.n+1}\right)$		...
racines de $T'_{2.n+1}(x)$	$\cos\left(\frac{4.\pi}{2.n+1}\right)$	$\cos\left(\frac{5.\pi}{2.n+1}\right)$	$\cos\left(\frac{6.\pi}{2.n+1}\right)$	$\cos\left(\frac{7.\pi}{2.n+1}\right)$	

Le polynôme $T_{2.n+1}(X) - 1$ a une racine simple, suivie de n racines doubles.

Le polynôme $(T_{2.n+1}(X) - 1)'$ a $2.n$ racines simples.

On a toutes leurs racines, et elles sont réelles.

On a les racines du polynôme $T_{2.n+1} - 1$. On le factorise :

$T_{2.n+1}(X) - 1 = \mu \cdot (X - 1) \cdot \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1} \right) \right)^2$ car 1 est racine simple, et les autres doubles (le degré est cohérent).

Le nombre μ est le coefficient dominant.

Or, on sait que T_n commence par $2^{n-1} \cdot X^n$.

On déduit que T_n commence par $2^{2.n+1-1} \cdot X^{2.n+1}$:

$$T_{2.n+1}(X) - 1 = 2^{2.n} \cdot (X - 1) \cdot \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1} \right) \right)^2$$

On calcule $Q_n(0) = T_{2.n+1}(0) - 1 = -2^{2.n} \cdot \text{dsp} \prod_{k=1}^n \left(\cos \left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1} \right) \right)^2$.

Il est plus facile d'aller chercher le premier :

$$T_{2.n+1}(0) - 1 = T_{2.n+1} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) - 1 = \cos \left(\frac{2.n+1}{2} \cdot \pi \right) - 1 = -1$$

On calcule aussi $Q'_n(0) = T'_{2.n+1}(0)$ et on ne se risque même pas avec le membre

$2^{2.n} \cdot (X - 1) \cdot \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1} \right) \right)^2$ qui contient beaucoup de termes à la dérivation.

On rappelle ensuite ce qu'on a déjà écrit : $T'_{2.n+1}(\cos(\theta)) = (2.n+1) \cdot \frac{\sin((2.n+1).\theta)}{\sin(\theta)}$. On applique en $\pi/2$:

$$T'_{2.n+1}(0) = (2.n+1) \cdot \frac{\sin \left(\frac{2.n+1}{2} \cdot \pi \right)}{\sin(\pi/2)}$$
 et on exploite la semi périodicité du sinus : $\sin(n.\pi + \theta) = (-1)^n \cdot \sin(\theta)$,

$$\text{donc } \sin \left(\frac{2.n+1}{2} \cdot \pi \right) = (-1)^n \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = (-1)^n.$$

$$\text{On résume : } Q'_n(0) = T'_{2.n+1}(0) = (2.n+1) \cdot \frac{(-1)^n}{1}$$

Je rappelle qu'il est correct d'écrire $\sin(n.\pi + \theta) = \sin(n.\pi) \cdot \cos(\theta) + \cos(n.\pi) \cdot \sin(\theta) = 0 + (-1)^n \cdot \sin(\theta)$.

Mais qu'est ce que c'est ridicule et lourd. C'est prouver noir sur blanc qu'on a encore besoin de petites roues pour faire du vélo. C'est aussi idiot que de prendre sa calculatrice pour calculer $17 + 5$.

Mais je dirai à votre décharge qu'on ne vous a jusqu'à présent pas ouvert l'esprit et tout transformée en calculs idiots, bourrins et lourdingues, au lieu de vous faire visualiser les choses. Vivement qu'on fasse des maths au collège et au lycée...

◇ 0 ◇ Montrez que si H est un polynôme factorisé sous les deux formes $H(X) = a_d \cdot \prod_{k=1}^d (X - r_k) = \sum_{p=0}^q a_p \cdot X^p$,

alors on a $\frac{H'(X)}{H(X)} = \sum_{k=0}^d \frac{1}{X - r_k}$ et $\frac{H'(0)}{H(0)} = \frac{a_1}{a_0}$ (en supposant que 0 n'est pas racine de H).

◇ 1 ◇ Calculez S_n pour tout n .

On part de la formule $H(X) = a_d \cdot \prod_{k=1}^d (X - r_k)$ (ici, le polynôme est de degré d et de terme dominant $a_d \cdot X^d$). On dérive, en généralisant la formule

$$(u.v)' = u'.v + u.v'$$

$$(u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w' \text{ et même } \left(\prod_{k=1}^d u_k \right)' = \sum_{i=1}^n (u_i)' \cdot \left(\prod_{\substack{k \leq d \\ k \neq i}} u_k \right) \text{ si on veut être rigoureux.}$$

Remarque : si vous ne comprenez pas après un trimestre que $\left(\prod_{k=1}^d u_k \right)' = \sum_{i=1}^n (u_i)' \cdot \left(\prod_{\substack{k \leq d \\ k \neq i}} u_k \right)$ est la généralisation de $(u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$, est il prudent d'envisager MP ?

Ici, chaque $(X - r)$ se dérive en 1 : $H'(X) = a_d \cdot \sum_{i=1}^d \prod_{\substack{k \leq d \\ k \neq i}} (-1) \cdot (X - r_k)$, et en version malpropre :

$$H'(X) = a_d \cdot (X - r_2) \cdot (X - r_3) \dots (X - r_d) + a_d \cdot (X - r_1) \cdot (X - r_3) \dots (X - r_d) + a_d \cdot (X - r_1) \dots (X - r_{d-1})$$

Et en version avec des mots : d termes où à chaque fois, il manque un facteur du produit.

On divise par le produit où tout le monde est là :

$$\frac{H'(X)}{H(X)} = \sum_{i=1}^d \frac{\prod_{\substack{k \leq d \\ k \neq i}} (X - r_k)}{\prod_{k \leq d} (X - r_k)} = \sum_{i=1}^d \frac{1}{X - r_i}$$

puisque à chaque fois, il manque un terme entre numérateur et dénominateur.

Maintenant, il y a une idée de physicien qui est jolie :³

$$\ln(H(X)) = \ln(a_k) + \sum_{k=1}^d \ln(X - r_k)$$

car le logarithme du produit est la somme des logarithmes.

Il ne reste plus qu'à dériver : $\frac{H'(X)}{H(X)} = 0 + \sum_{k=1}^d \frac{1}{X - r_k}$.

C'est facile à voir et à retenir.

Mais c'est discutable. En effet, pour parler de logarithme, il faut être sur un intervalle inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$. La formule n'est donc démontrable que "zone par zone". Mais cette méthode a l'avantage de faire comprendre.

Sinon, si on est niveau "je débute dans le post-bac", on écrit pour quatre termes :

$$H(X) = a_4 \cdot (X - a_1) \cdot (X - a_2) \cdot (X - a_3) \cdot (X - a_4)$$

et on dérive :

$$H'(X) = \begin{array}{l} a_4 \cdot (X - a_2) \cdot (X - a_3) \cdot (X - a_4) \\ + a_4 \cdot (X - a_1) \cdot (X - a_2) \cdot (X - a_4) \\ + a_4 \cdot (X - a_1) \cdot (X - a_2) \cdot (X - a_3) \end{array} + \begin{array}{l} a_4 \cdot (X - a_1) \cdot (X - a_3) \cdot (X - a_4) \\ + a_4 \cdot (X - a_1) \cdot (X - a_2) \cdot (X - a_4) \\ + a_4 \cdot (X - a_1) \cdot (X - a_2) \cdot (X - a_3) \end{array}$$

il ne reste plus qu'à diviser.

On repart de la forme développée : $H(X) = \sum_{k=0}^q a_k \cdot X^k$ (de terme dominant $a_d \cdot X^d$).

On calcule en 0 : $H(0) = \sum_{k=0}^q a_k \cdot 0^k = a_0$ (si si, le terme 0^0 reste et il vaut 1 ; mais il y a des crétins qui face à un polynôme sous forme $\sum_k a_k \cdot X^k$ se disent qu'en 0 ça vaut 0, juste parce qu'ils obéissent aux calculs sans réfléchir et avec le nez collé à la feuille par le poids d'une formation débilitante).

On dérive : $H'(X) = \sum_{k=1}^q a_k \cdot k \cdot X^{k-1}$ (le terme en X^0 a une dérivée nulle).

On calcule en 0 : $H'(0) = a_1$.

Malproprement : $\frac{H(X)}{H'(X)} = \frac{a_d \cdot X^d + \dots + a_2 \cdot X^2 + a_1 \cdot X + a_0}{d \cdot a_d \cdot X^{d-1} + \dots + 2 \cdot a_2 \cdot X + a_1}$, puis $\frac{H(X)}{H'(X)} = \frac{a_0}{a_1}$.

On divise : $\frac{H'(0)}{H(0)} = \frac{a_1}{a_0}$ mais aussi $\frac{H'(0)}{H(0)} = - \sum_{i=1}^d \frac{1}{r_i}$

C'est une de nos formules de Viète, déjà croisées :

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = \frac{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_3 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_2 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4} = - \frac{\text{coefficient de } X}{\text{coefficient constant}} = - \frac{P'(0)}{P(0)}$$

On a établi un résultat sur $H'(0)/H(0)$ pour tout polynôme H . Et on a des polynômes comme T_n , Q_n et P_n .
Par exemple : $Q_n(X) = 2^{2 \cdot n} \cdot (X - 1) \cdot (P_n(X))^2$ se dérive en

$$Q'_n(0X) = 2^{2 \cdot n} \cdot (P_n(X))^2 + 2^{2 \cdot n} \cdot (X - 1) \cdot 2 \cdot P_n(X) \cdot P'_n(X)$$

On divise : $\frac{Q'_n(X)}{Q_n(X)} = \frac{1}{X - 1} + 2 \cdot \frac{P'_n(X)}{P_n(X)}$. En 0 : $\frac{Q'_n(0)}{Q_n(0)} = -1 + 2 \cdot \frac{P'_n(0)}{P_n(0)}$.

Comme on les a calculés : $Q_n(0) = -1$ et $Q'_n(0) = (-1)^n \cdot (2 \cdot n + 1)$.

3. n'allez pas dire à Solène que j'ai dit du bien des idées des physiciens...

La formule donne directement $\frac{3^n - \frac{2^{n+1}}{3}}{1 - \frac{2}{3}}$ (et je ne calcule pas le nombre de termes, je m'en contrefiche).

On simplifie en $3^{n+1} - 2^{n+1}$ (assez compact et prévisible).

$$\sum_{k=0}^n 2.k.3.(n-k) = 6. \sum_{k=0}^n k.(n-k) = 6. \left(\sum_{k=0}^n n.k - \sum_{k=0}^n k^2 \right) = 6.n. \sum_{k=0}^n k - 6. \sum_{k=0}^n k^2$$

Le cours donne $6.n. \frac{n.(n+1)}{2} - 6. \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$.

On simplifie en $n.(n^2 - 1)$; joli quand même.

$$\prod_{k=1}^n \sqrt{2.k} = \sqrt{\prod_{k=1}^n 2.k} = \sqrt{\left(\prod_{k=1}^n 2 \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^n k \right)} = \sqrt{2^n . n!} = 2^{n/2} . \sqrt{n!}$$

et on n'a guère mieux...