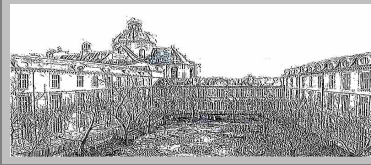


LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 27 novembre
M.P.S.I.2



2023

2024

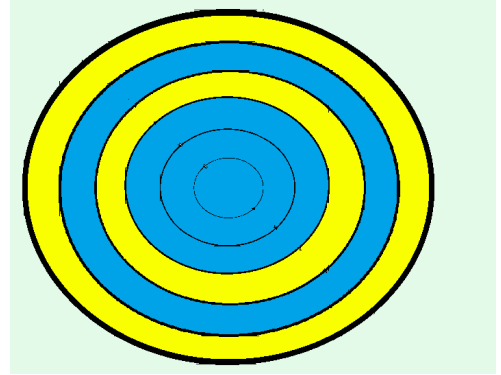
TD10

◦0◦ Montrez : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos^3(\theta) = \frac{\cos(3\theta) + 3 \cdot \cos(\theta)}{4}$.

Exprimez $\theta \mapsto \cos(8\theta)$ comme combinaison linéaire de $\theta \mapsto \cos^k(\theta)$ pour θ de 0 à 8.

◦1◦ T_n est le $n^{ième}$ polynôme de Tchebychev. Calculez $T_{20}(\sqrt{3}/2)$, $T_{13}(1/2)$ et $T'_{13}(1/2)$.
Résolvez $T_{16}(x) > 1$ d'inconnue réelle x .

♣ Il fallait découper le gâteau (ci contre vu du dessus) en deux parts égales. Au lieu d'effectuer une découpe "en argument", on a effectué une découpe "en module". Sur le schéma, on a des cercles concentriques de rayons entiers 1 à 6. Montrez que les deux parts colorées sont égales.



◦2◦ Re-répartissez ce découpage en deux parts égales.

◦3◦ La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = F_1 = 1$ et pour tout $n : F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Montrez pour tout $n : \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \leq F_n \leq 2^n$.

Résolvez : F_n est pair d'inconnue entière n .

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour tout $n : U_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$. Montrez que (U_n) est une suite géométrique de raison (à gauche) M (c'est à dire $U_{n+1} = M \cdot U_n$ et déduisez $U_n = M^n \cdot U_0$).

Montrez : $M^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$ par récurrence sur n (est ce une convention de poser $M^0 = I_2$ ou bien est ce logique ?).

On rappelle : $\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = a.d - b.c$. Montrez pour tout couple de matrices : $\det(A.B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Déduisez : $F_{n-1} \cdot F_{n+1} - (F_n)^2 = (-1)^{n-1}$ pour tout n . Oui, il s'agit d'utiliser le déterminant !

Déduisez que le seul facteur commun à F_n et F_{n+1} est 1.

◦4◦ ♡ Montrez que $(a, b) \mapsto (2.a + 3.b, 3.a + 4.b + 1)$ (notée g) est bijective de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$ par exemple en donnant sa réciproque g vérifiant $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = Id$.

(au fait, qui a oublié de vérifier avant la bijectivité que l'on a bien une application de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$?)

Montrez que pour $(a, b) \mapsto (2.a + 3.b, 2.a + 4.b + 1)$ (notée h), il existe une application h de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$ vérifiant $h^{-1} \circ h = Id_{\mathbb{Z}^2}$.

◦5◦ Guillaume Deslandes (ex MPSI2, livre chez Ellipses traduit aux presses du MIT) vous a donné des poids (pardon des masses) de 100, 300, 900 grammes ainsi que 2, 7 et 8, 1 kilogrammes. Montrez qu'avec une balance de type Roberval (deux plateaux), vous pouvez peser toute quantité de 0 à 10 kilos (par tranches de 100 grammes) et même plus. Prouvez que c'est un système de poids optimal.

Vous jouez contre Guillaume Deslandes^a. Sur la table, il y a neuf plaquettes, numérotées de 1 à 9. Chacun prend à tour de rôle une tablette à la fois. Le premier qui a dans ses tablettes trois tablettes dont la somme vaut 15 a gagné.

Indication :

2	9	
	5	
6		8

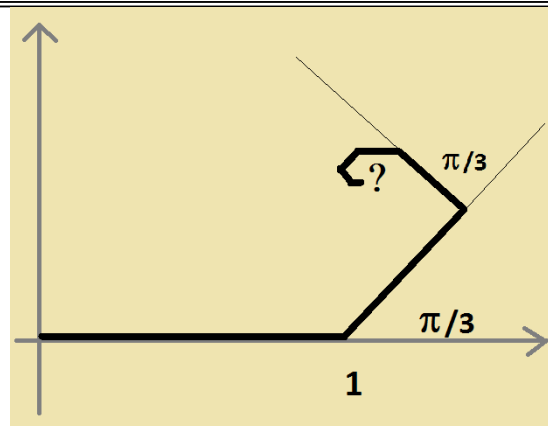
a. ancien élève de MPSI2, ancien colleur de MPSI2, prof de Prépas, auteur avec son frère (aussi ancien MPSI2) d'un livre d'énigmes chez Ellipses préfacé par Cédric Villani

Vous voulez gagner à tout prix. Vous commencez ou vous laissez Guillaume entamer ?

On part de l'origine. On avance de une unité dans la direction du demi-axe réel positif. On tourne de $\pi/3$. On avance d'une demi unité. On tourne de $\pi/3$. On avance d'un quart d'unité. On tourne de $\pi/3$. On avance d'un huitième d'unité. On tourne de $\pi/3$. On avance d'un seizième d'unité. A chaque fois, on tourne du même angle $\pi/3$, et on divise la distance par 2. Vers quel point se dirige-t-on ?

En gardant le même angle $\pi/3$ mais en remplaçant le rapport 1/2 par un autre rapport r , est-il possible de converger vers le point d'affixe i ?

C'est un exercice très simple sur la série géométrique.



Écrivez un script Python avec module turtle.

Voici les notes et totaux de trois élèves au concours de l'École Nationale Fédérale d'Ornithologie et Ingénierie Robotique ÉVOLUÉE :

élève	français	physique	mathématiques	total
Raiman-Phénomélaaaale	5	4	9	120
Décha-Pourléboufai	2	6	8	114
Endual-N'mi	0	10	11	157

Quelle note aurait du avoir l'élève Endual-N'mi en français pour avoir un total de 200 et être admissible ? Quel total aura un élève qui aura vingt en mathématiques et zéro partout ailleurs.

Vous calculez $(4 + 5)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} \binom{2018}{k} 4^k 5^{2018-k}$. Quel est le plus grand nombre dans le membre de droite ?

Complétez : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (on fait tomber les colonnes sur les lignes).

Trouvez deux ensembles A et B vérifiant $\text{Card}(P(A) \cup P(B)) = 11$.

Trouvez deux ensembles A et B vérifiant $\text{Card}(P(A) \cup P(B)) = 10$.

Rappel : $P(A)$ est l'ensemble de toutes les parties de A .

Par exemple $P(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

$P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$P(\{u\}) = \{\emptyset, \{u\}\}$

La suite u est définie par $u_0 = 7$, $u_1 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2.u_n$. (u_n) est-elle croissante ? Est-elle croissante à partir d'un certain rang ?

On définit alors le vecteur d'observation $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Donnez la matrice M vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = M.U_n$.

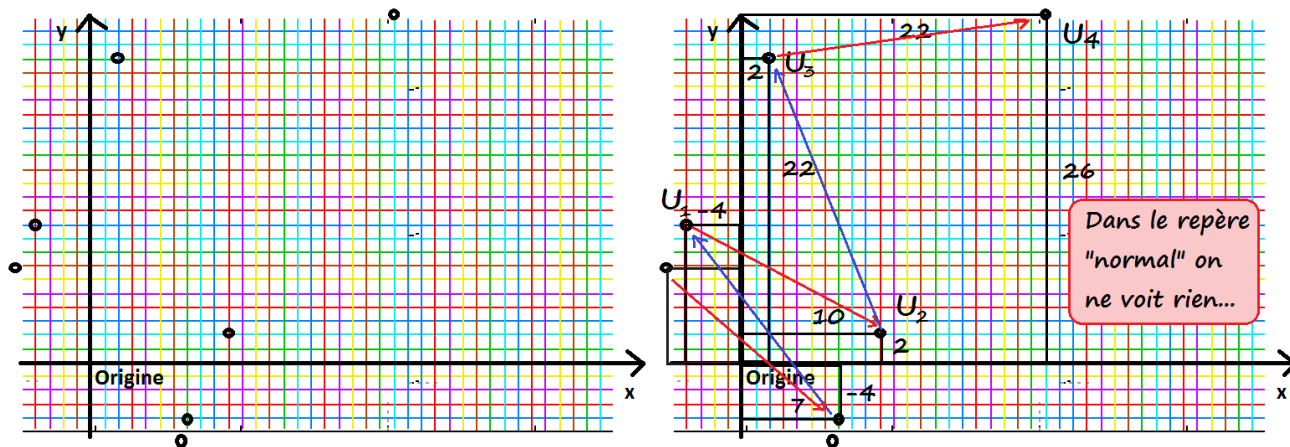
Donnez une matrice D vérifiant $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(D)$ et $\det(M) = \det(D)$.

Trouvez une matrice P inversible de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ vérifiant $M.P = P.D$ (et inversez P).

Calculez D^n , M^n , U_n et u_n .

Résolvez $u_n \geq 2017$ d'inconnue entière n .

Placez dans le plan les points U_n pour n de -2 à 4 (repère orthonormé, échelle à choisir). Tracez le nouveau repère qui garde la même origine 0 mais prend pour axes $\text{Vect}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\text{Vect}(\vec{i} + 2.\vec{j})$. Donnez les coordonnées des points U_n dans ce repère.



On pose $A = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$. Calculez $A^2, B^2, A.B, B.A$, ainsi que $A + B$.

Calculez A^n et B^n . Pourquoi peut-on utiliser la formule du binôme pour $(A + B)^n$ et pourquoi donne-t-elle $A^n + B^n$? Retrouvez la matrice M^n .

◦13◦ ♡ A est une matrice carrée de taille 2 de trace 7 et de déterminant 10. Montrez alors : $A^2 = 7.A - 10.I_2$.

On pose $B = A - 2.I_2$ et $C = A - 5.I_2$. Montrez : $B.C = C.B$ et exprimez B^2 comme multiple de B et C^2 comme multiple de C .

Exprimez A comme combinaison de B et C .

◦14◦ a est une suite arithmétique vérifiant $\sum_{k=0}^{10} a_k = 374$. Pouvez-vous retrouver la raison ? Et le premier terme ?

Et si j'ajoute $\sum_{k=0}^{20} a_k = 1\,344$?

◦15◦ ♣ $\pm 1 \pm 1 \pm 1$ est-il égal à ± 3 ?

De toutes les matrices de taille 2 à coefficients ± 1 , lesquelles ont le déterminant le plus grand ?

◦16◦ Montrez que toute matrice carrée de taille 2 ayant pour trace 1 et pour déterminant 1 a pour puissance sixième I_2 .

◦17◦ ♡ On pose $a_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)^2 \cdot k^2}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{3 \cdot n^3}$ pour tout n . Montrez qu'elles forment un couple de suites adjacentes (limite non demandée).

◦18◦ ♡ La matrice M vérifie $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$ et $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Trouvez-la et diagonalisez-la.

◦19◦ ♡ Calculez $\int_0^1 \frac{t \cdot dt}{\sqrt{t^4 + 8t^2 + 17}}$ (et l'élève s'écria « arg »).

◦20◦ La matrice $\begin{pmatrix} & 7 \\ -140 & \end{pmatrix}$ se diagonalise en $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Calculez la somme des termes de M^{2018} .

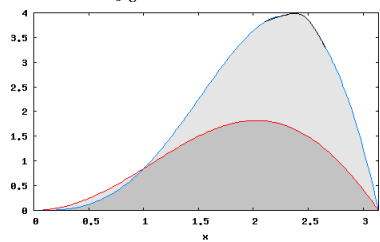
◦21◦ ♡ Démontrez : $\text{Tr}(A.B) = \text{Tr}(B.A)$ pour A de taille 3 sur 2 et B de taille 2 sur 3. (la trace est la somme des termes de la diagonale (principale), et elle ne se calcule que si la matrice est carrée...)

◦22◦ ♡ La suite u est du type $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n, u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$. On sait : $u_0 = 4, u_1 = 3, u_2 = -9$ et $u_3 = -63$. Trouvez a et b .
Trouvez α et β vérifiant $\forall n \leq 1, u_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot 3^n$. Montrez alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot 3^n$.

◦23◦ ♡ Montrez $2 \cdot \int_0^1 \sqrt{1+t^2} \cdot dt = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)$ (par parties et remontez chercher $\ln(t + \sqrt{1+t^2})$).
Pardon ? Déjà posé ?

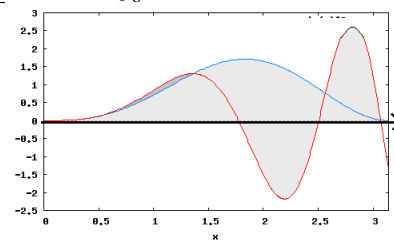
♥ Calculez

$$\int_0^{\pi} t \cdot \sin(t) \cdot dt$$



$$\int_0^{\pi} t^2 \cdot \sin(t) \cdot dt$$

$$\int_0^{\pi} t \cdot \sin^2(t) \cdot dt$$



$$\int_0^{\pi} t \cdot \sin(t^2) \cdot dt$$

◦24◦

◦25◦

Montrez que les matrices de la forme $\begin{pmatrix} ch(\theta) & sh(\theta) \\ sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix}$ en forment un sous-groupe, et montrez que ce sous groupe est commutatif.

Appel : $ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $sh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

◦26◦

Du côté de chez Roger Mansuy Vrai ou Faux :

A	$\sum_{k=-n-1}^{n+1} (-1)^k = 0$	I	$\sum_{k=1}^n a^{\ln(k)} = \sum_{j=1}^{[\ln(n)]} a^j$
B	$\sum_{k=1}^n k = \sum_{j=0}^n j$	J	$\sum_{k=1}^n a^{2.k} = \sum_{j=1}^{2.n} a^j$
C	$\sum_{k=1}^n k = \sum_{j=0}^n (n-j)$	K	$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n a_{i,j} \right) = \sum_{j=i}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right)$
E	$\sum_{k=1}^n k = \sum_{j=1}^n (n+1-j)$	L	$\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n 1 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$
F	$\sum_{k=1}^n (u_k - 2.u_{k+1} + u_{k+1}) = u_1 + u_{n+2}$	M	$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$
G	$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} a_k = \sum_{p=0}^{[n/2]} a_{2.p}$	N	$\sum_{k=0}^n 3^k = 3^{n+1} - 1$
H	$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} a_k = \sum_{p=0}^{[n/2]} a_{2.p+1}$	O	$\sum_{k=0}^n 5^k = \frac{5^{k+1} - 1}{4}$

◦27◦

L'entier 2017 est la somme de deux nombres palindromes ; trouvez les. Rappel : exemples de palindromes 134431, 54366345, 98589.

Faites de même pour 2018. Montrez que c'est impossible pour 2019.

Allez, trouvez moi les millésimes à venir qui seront des sommes de deux palindromes.

◦28◦

♥ Résolvez « $n - 14$ divise 2020 et $n + 3$ divise 2025 »

Et si vous utilisiez Python ?

◦29◦

♣ Vérifiez que l'on définit une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ par $a \blacktriangleleft b$ si a impair et b pair ou $(b-a)/2 \in \mathbb{N}$. Classez la liste

$[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$ par ordre croissant. Donnez la borne supérieure de l'ensemble des nombres premiers (en a-t-il encore une si on travaille sur $(\mathbb{Z}, \blacktriangleleft)$?). Donnez la borne supérieure de l'ensemble des nombres impairs. Donnez la borne supérieure de l'ensemble des diviseurs de 2015. L'ensemble des multiples de 3 a-t-il une borne supérieure ? Rappel : la borne supérieure d'un ensemble est son plus petit majorant. Pour l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$, la borne supérieure de $[0, 1[$ est 1. Celle de $[0, 1]$ aussi.

◦30◦

Il paraît que le critère de divisibilité par 7 est de la forme

si on part de $\overline{abc\,def\,ghi}$ par exemple, on calcule $\overline{abc} - \overline{def} + \overline{ghi}$

si on part de $\overline{ab\,cde\,fgh\,ijk}$ par exemple, on calcule $\overline{ab} - \overline{cde} + \overline{fgh} - \overline{ijk}$

et on regarde si le nombre est multiple de 7.

Cette démonstration est elle aussi valable pour la divisibilité par 13 ?

- 31◦ ♡ a - Sans calculatrice : prouvez $(1,01)^{100} > 2$.
 b - Sans calculatrice, prouvez : $\frac{100\,001}{1\,000\,001} > \frac{1\,000\,001}{10\,000\,001}$.
 c - Sans calculatrice, prouvez : $4^{53} > 5^{45}$ (idée : 125 et 128).
 d - Sans calculatrice, donnez les vingt premiers chiffres de l'écriture décimale de $(\sqrt{1\,001} - \sqrt{1\,000})^{12}$.

- 32◦ ♡ Simplifiez $ch(\ln(x + \sqrt{1+x^2}))$.
 Résolvez $ch(2.x) = (ch(x))^2$ d'inconnue réelle x .

- 33◦ Il paraît que $3 \cdot \text{Atan}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{Arccos}\left(\frac{44}{125}\right) = \pi$. Mais même si la calculatrice du physicien le valide avec treize décimales, seul le cerveau du mathématicien peut le justifier. Cadeau : $117^2 = 13\,689$.

- 34◦ ♡ N est tel que $N/2$ est un carré parfait, $N/3$ un cube parfait et $N/5$ une puissance cinquième d'entier. Et N est non nul, évidemment. Trouvez en un (*pensez à décomposer N en produit de facteurs premiers*).

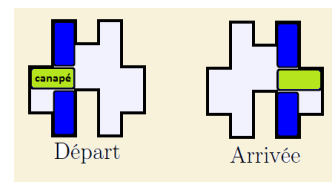
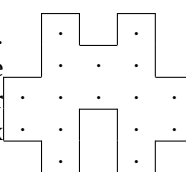
- 35◦ Diagonalisez $\begin{pmatrix} 1+5.i & -4 \\ -8 & 1-7.i \end{pmatrix}$ (notée M). Calculez la partie réelle de la trace de M^4 et le déterminant de M^5 .

- 36◦ Diagonalisez ces trois matrices $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

- 37◦ ♡ La suite u est donnée par $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et pour tout n , $u_{n+2} = 5.u_{n+1} - 6.u_n$. Pour tout n , on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Complétez A pour avoir $U_{n+1} = A.U_n$ pour tout n . Calculez sa trace, son déterminant. Trouvez D diagonale et semblable à A . Levez A à la puissance n . Calculez u_n pour tout n .
 ♡ En Terminale, on vous aurait demandé de regarder la suite a définie par $a_n = u_{n+1} - 2.u_n$ pour tout n . Vérifiez qu'elle est géométrique de raison 3. Montrez que b définie par $b_n = u_{n+1} - 3.u_n$ pour tout n est aussi géométrique. Calculez a_n et b_n pour tout n .
 Comprenez le rapport avec la diagonalisation qui dit : $P^{-1}.U_{n+1} = D.(P^{-1}.U_n)$.

- 38◦ La chambre de Bintou est un truc pas permis, conçu par un élève ayant fait de la S.I.I. complètement bourré, vous en avez ci contre le plan vu de haut. Et en plus, elle a un canapé et deux armoires qui ont une forme rectangulaire qui occupent les rectangles repérés sur le schéma.

Et elle doit les déplacer aux emplacements du troisième dessin. Elle a le droit de les faire glisser, mais pas de les soulever ou de les faire tourner. Combien de déplacements ? Et comment coder ces déplacements pour transmettre l'information sans faire dix ou douze dessins ?



- 39◦ ♡ Diagonalisez $\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -30 & 14 \end{pmatrix}$ (noté A). Montrez que l'équation $M^2 = A$ n'a aucune solution dans $M_2(\mathbb{R})$.
 Combien pouvez vous en trouver dans $M_2(\mathbb{C})$?

- 40◦ ♡ Montrez que toute matrice réelle symétrique de taille 2 a deux valeurs propres distinctes, sauf si elle est déjà diagonale.

- 41◦ Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto e^{3.t}$.
 Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \mapsto e^t \cdot \cos(t)$ et $t \mapsto e^t \cdot \cos(t+1)$.
 Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 3 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \mapsto e^t \cdot \cos(2.t)$ et $t \mapsto e^{3.t}$.
 Donnez l'équation différentielle homogène d'ordre 4 à coefficients constants dont deux solutions sont $t \mapsto e^t \cdot \cos(3.t)$ et $t \mapsto e^{3.t} \cdot \cos(t)$.

◦42◦ Résolvez $(1+t^2).y'_t + (1+t).y_t = 0$ d'inconnue y fonction de t .

◦43◦ ♥ Sachant $y_0 = 2$ et $2^t.y'_t + 3^t.y_t = 0$, calculez y_1 . Sachant $y_0 = 2$ et $2^t.y'_t + 2^t.y_t = 1$, calculez y_1 .

◦44◦ ♥♣ On donne $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$. On doit diagonaliser A . C'est moche, les valeurs propres sont des irrationnels.

Sauf que le corps sur lequel on travaille est $\text{range}(11)$ pour l'addition et la multiplication modulo 11. Et là, tout doit aller vite.

Résolvez alors l'équation $A^n = A$ d'inconnue entière n .

◦45◦ On a diagonalisé : $\begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -30 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (formule $M = P.D.P^{-1}$). Donnez des diagonalisations de M avec une autre matrice diagonale D' .

Donnez des diagonalisations de M avec d'autres matrices de passage P' .

Diagonalisez M^2 et M^{-1} et ${}^t M$ (${}^t M$ c'est $\begin{pmatrix} -18 & -30 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$, on rappelle ${}^t(A.B) = {}^t B.{}^t A$).

◦46◦ ♥ Montrez que $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$ mais pas leur somme ni leurs produits.

◦47◦ Se souvenant de la relation $\text{Tr}(A.B) = \text{Tr}(B.A)$ l'élève Hirai du Bahu prétend : $\text{Tr}(A.B.C) = \text{Tr}(A.C.B)$ pour tout triplet (A, B, C) de matrices de formats compatibles. Montrez qu'il a tort.

◦48◦ ♥ ε est un réel strictement positif. La suite (a_n) vérifie $a_{n+2} = 4.a_{n+1} - (4 - \varepsilon^2).a_n$ pour tout n avec $a_0 = \alpha$ et $a_1 = 2.\alpha + 2.\beta$.

Calculez a_n pour tout n .

Donnez la limite de a_n lorsque ε tend vers 0 (il faudra lever une forme indéterminée).

◦49◦ Montrez pour toute matrice carrée de taille 2 sur 2 : $M^2 - \text{Tr}(M).M + \det(M).I_2 = 0_{2,2}$.
Exprimez $\det(M)$ à l'aide de $(\text{Tr}(M))^2$ et $\text{Tr}(M^2)$.

Montrez qu'on n'a pas forcément pour M carrée de taille 3 sur 3 : $M^2 - \text{Tr}(M).M + \det(M).I_3 = 0_{3,3}$.

Montrez, pour M carrée de taille 3 que $M^3 - \text{Tr}(M).M^2 + \frac{\text{Tr}(M)^2 - \text{Tr}(M^2)}{2}.M$ est un multiple de I_3 (quel coefficient reconnaissez vous ?).

◦50◦ ♥ Pouvez vous ajuster a et b pour que le maximum de $a.\cos + b.\sin$ soit égal à 4, atteint en $\frac{2.\pi}{3}$?

♥ Pouvez vous ajuster a, b et c pour que le maximum de $a.\cos + b.\sin + c$ soit égal à 4, atteint en $\frac{2.\pi}{3}$ et le minimum égal à -1 atteint en $-\frac{\pi}{3}$?

♥ Pouvez vous ajuster a, b et c pour que le maximum de $a.\cos + b.\sin + c$ soit égal à 4, atteint en $\frac{2.\pi}{3}$ et le minimum égal à -1 atteint en $\frac{\pi}{6}$?

◦51◦ Montrez que pour tout a de $] -1, 1[$ les intégrales I_a et J_a existent

$$I_a = \int_0^\pi \ln(1 + a.\cos(\theta)).d\theta \quad J_a = \int_0^\pi \frac{\cos(\theta)}{1 + a.\cos(\theta)}.d\theta$$

Calculez J_a par le changement de variable habituel.

β est un réel de $]0, 1[$ fixé. On se donne a et $a+h$ dans $[-\beta, \beta]$, montrez

$$\left| \ln(1 + (a+h).\cos(\theta)) - \ln(1 + a.\cos(\theta)) - \frac{h.\cos(\theta)}{1 + a.\cos(\theta)} \right| \leq \frac{h^2.\cos^2(\theta)}{2.(1-\beta)^2}$$

(c'est Taylor Lagrange sur $a \mapsto \ln(1 + a.\cos(\theta))$).

Déduisez : $\left| \frac{I_{a+h} - I_a}{h} - J_a \right| \leq |h| \cdot \int_0^\pi \frac{\cos^2(\theta)}{(1-\beta)^2}.d\theta$.

Déduisez $(a \mapsto I_a)' = (a \mapsto J_a)$. Calculez I_0 puis I_a pour tout a .