♡ 0 ♡ Énoncez et prouvez la formule d'intégration par parties. 2 pt.

♡ 1 ♡ Sachant $\tan(\theta) = 7$, calculez $\tan(3.\theta)$. 1 pt.

♡ 2 ♡ Résolvez $(2+i).z.(3-i) = 6+8.i$ d'inconnue complexe z. 1 pt.

♡ 3 ♡ Voici l'écriture décimale d'un rationnel $4.56\overline{012}012012...$ (le motif répétitif est 012) : de qui s'agit il ? 2 pt.

♢ 0 ♢ Montrez : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2.x}{(x+1).(x+2).(x+3)}.dx == \ln\left(\frac{3^3}{2^4}\right)$. 4 pt.

♢ 1 ♢ Résolvez $9^x = 12 \times 3^x + 27$ d'inconnue réelle x. 2 pt.

♣ 0 ♣ Résolvez $9^z = 12 \times 3^z + 27$ d'inconnue complexe z. 4 pt.

♢ 2 ♢ Résolvez $|z| + i.z = 2$ d'inconnue complexe z. 2 pt.

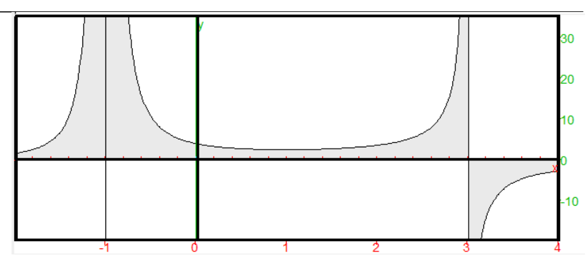
♣ 1 ♣ On sait $x + x.y + y = 666$ et $(x,\ y) \in \mathbb{N}^2$. Calculez $x + y$. 3 pt.

♯ 0 ♯ Vous ne trouvez pas ? Pas grave. Écrivez une procedure qui pour un entier n donné va donner la liste des solutions dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de l'équation $x + x.y + y = n$. 3 pt.

♢ 3 ♢ Calculez $\displaystyle\int_0^1 t^7.e^{-t^2}.dt$. 4 pt.

♢ 4 ♢ Montrez : $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{Arcsin(t)}{\sqrt{1+t}}.dt = \sqrt{2}.\pi - 4.\sqrt{2}$ (en considérant qu'il s'agit de $\displaystyle\lim_{a\to -1}\int_a^1 \frac{Arcsin(t)}{\sqrt{1+t}}.dt$ si la racine au dénominateur vous embête). 3 pt.

♢ 5 La fraction rationnelle F dont le graphe est donné ci-contre n'a que deux pôles réels : 3 et -1 et son dénominateur est de degré inférieur ou égal à 3 et elle vérifie $F() \sim_{x\mapsto+\infty} -\dfrac{2}{x}$. Donnez le degré de son dénominateur et de son numérateur et donnez la forme des trois termes de la décomposition en éléments simples de $F(x)$. 3 pt.



On précise aussi $F(0) = 4$ et $F(-2) = \dfrac{8}{5}$. Déterminez $F(x)$ pour tout x. 3 pt.
Combien l'équation $F(x) = 4$ a-t-elle de solutions ? Résolvez l'équation $F(x) \geqslant 4$. 3 pt.

Indication : $23 \times 29 = ?$

E est l'ensemble des entiers de 0 à 50 inclus.

$c(n)$ est la propriété « n est multiple de 5 », $C = \{n \in E \mid c(n)\}$
$t(n)$ est la propriété « n est multiple de 3 », $T = \{n \in E \mid t(n)\}$
$p(n)$ est la propriété « n est un nombre premier » $P = \{n \in E \mid p(n)\}$

Donnez le cardinal de C, T, $C \cap T$ et $C \cup T$ (on donne $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$). 2 pt.
Comptez le nombre de solutions dans E de l'équation "$p(n) \Rightarrow (t(n) \Rightarrow c(n))$". (passez par son complémentaire) 2 pt.

♢ 5 ♢ Qui de 2, -1 ou 3 est racine de $X^3 - (10+7.i).X^2 + (21+58.i).X - 111.i$? Montrez que les trois racines de l'équation forment un triangle rectangle ? 3 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 7 novembre
M.P.S.I.2

2023 2024
IS07
CORRECTION

Question rapides. IS07

Pour u et v continues, dérivables à dérivées continues, on a $\int_a^b u'(x).v(x).dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u(x).v'(x).dx$.
Il suffit de partir de $\int_a^b u'.v + \int_a^b u.v' = \int_a^b (u.v)' = [u.v]$.

Avec $\tan(a) = 3$, on a $\tan(2.a) = \dfrac{2.3}{1-3^2} = -\dfrac{3}{4}$ puis $\tan(3.a) = \dfrac{3 - \frac{3}{4}}{1 - 3.\frac{-3}{4}} = \dfrac{9}{13}$.

Par équivalences : $\Big((2+i).z.(3-i) = 6+8.i\Big) \Leftrightarrow \Big((7+i).z = 6+8.i\Big) \Leftrightarrow \Big(z = \dfrac{6+8.i}{7+i}\Big)$
On trouve $z = \dfrac{(6+8.i).(7-i)}{(7+i).(7-i)} = \dfrac{42+8+(5-5).i}{49+1} = 1+i$. Unique solution, sans passer par $z = x+i.y$, on a un cerveau quand même !

Un rationnel. IS07

On décide de poser $a = 4.56\overline{012}012012012....$ On a alors $10^3.a = 4560.12\overline{012}012012012....$

Pour la lisibilité, j'aligne : $\begin{array}{ccccccccccccccccccc} 10^3.a & = & 4 & 5 & 6 & 0, & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & \ldots \\ a & = & & & & 4, & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & \ldots \end{array}$

On a donc $(10^3-1).a = 4555,56000\ldots = 455556.10^{-2}$ puis

$$a = \frac{455556.10^{-2}}{999} = \frac{45\,556}{99\,900} = \frac{32537\,963}{60\,060}$$

La dernière simplification n'est pas demandée.

Une intégrale. IS07

On décompose en éléments simples, on intègre en logarithme. Mais on le fait déjà sur $[0,\ A]$

$$\int_0^A \frac{2.x}{(x+1).(x+2).(x+3)}.dx = \int_0^A \Big(\frac{-1}{x+1} + \frac{4}{x+2} - \frac{3}{x+3}\Big).dx = \Big[\ln(x+1) - 4.\ln(x+2) - 3.\ln(x+3)\Big]_0^A$$

Le terme fusionné $\ln\Big(\dfrac{(A+1).(A+3)^3}{(A+2)^4}\Big)$ tend vers $\ln(1)$ quand A tend vers l'infini, et il reste bien $3.\ln(3) - 4.\ln(2)$.

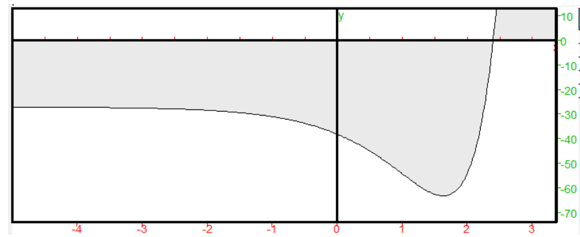
Equation en puissances de x dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$. IS07

$9^x = 12\times 3^x + 27$ donne envie de poser $y = 3^x$. Faisons le. On a alors $9^x = (3^2)^x = 3^{2.x} = 3^{x.2} = (3^x)^2 = y^2$.
L'équation devient un système (quand on change de variable, on garde l'information dans un système, ça évite d'oublier de revenir en arrière) :

$$\begin{array}{ccc} y^2 & = & 12.y \quad +27 \\ y & = & 3^x \end{array}$$

On résout l'équation du second degré (second degré, on va avoir deux racines !) puis on revient à x $3^x = 6+3.\sqrt{7}$ *ou* $3^x = 6-3.\sqrt{7}$.

On refuse la seconde car $\sqrt{7}$ est plus grand que $\sqrt{4}$ (mais on savait d'avance que l'une des racines de l'équation en y état positive et l'autre négative, avec le produit des racines !) et on passe au logarithme $\boxed{S = \left\{ \dfrac{\ln(6+3.\sqrt{7})}{\ln(3)} \right\}}$ On pouvait bien sûr proposer et vérifier. Mais ensuite, il fallait garantir qu'il n'y avait qu'une racine réelle.



Sur $\mathbb{C}$ en revanche, l'équation $3^z = 6 + 3.\sqrt{7}$ a une infinité de solutions, de même que l'équation $3^z = 6 - 3.\sqrt{7}$.
On écrit $z = x + i.y$ et $3^z = e^{(x+i.y).\ln(3)}$.
On est ramené à $e^{x.\ln(3)}.e^{i.y.\ln(3)} = (6+3.\sqrt{7}).e^{i.2.k.\pi}$ et à $e^{x.\ln(3)}.e^{i.y.\ln(3)} = (3.\sqrt{7}-6).e^{i.\pi+i.2.k.\pi}$. On a donc deux ensembles

$$S = \left\{ \frac{\ln(6+3.\sqrt{7})}{\ln(3)} + i.\frac{2.k.\pi}{\ln(3)} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \bigcup \left\{ \frac{\ln(3.\sqrt{7}-6)}{\ln(3)} + i.\frac{(2.k+1).\pi}{\ln(3)} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Chiffre de la bête et nombres entiers. IS07

Avec $x + x.y + y = 666$ on pense ne pas avoir assez d'informations. Mais on est ans $\mathbb{N}$. On va donc vouloir chercher des histoires de diviseurs et multiples.
Mais il n'y a pas de produit. Sauf si on ajoute 1 :

$$(x + x.y + y = 666) \Leftrightarrow (x + x.y + y + 1 = 667)$$

Et ceci nous conduit à $(x+1).(y+1) = 667$. Or, 667 n'a que deux diviseurs : 23 et 29.

On a donc quatre issues

$x+1=1$	$x+1=667$	$x+1=23$	$x+1=29$
$y+1=667$	$y+1=0$	$y+1=29$	$y+1=23$
$x+y=0+666$		$x+y=28+22=50$	
$0+0.666+666=666$		$28+22.28+28=666$	

et dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ il y en a d'autres.

Et sinon, en toute généralité, on peut attaquer brutalement. Pour `n` donné, on prend tous les couples `(x, y)` « avec `x` et `y` pas trop gros », pour chacun, on teste si `x+x*y+y` est égal à `n`.
Si c'est le cas, on mémorise le couple dans une liste `S` dans laquelle on avait d'abord rien mis.
Quels couples tester ? Tous ceux avec `x` et `y` plus petits que n, même si c'est brutal.

```
def solutions(n) : #int -> list of t-uple of int
....S = [ ] #la liste des solutions, d'abord vide
....for x in range(n+1) : #x peut aller de 0 à n, on le sait
........for y in range(n+1) : #y aussi, même si il n'ira pas au delà de n/x
............if x+x*y+y == n : #on teste
................S.append((x,y)) #on ajoute le t-uple (couple) (x, y)
....return(S)#bonne indentation, on a tout parcouru
```

On pourrait alléger avec `y in range(n//x)` car `y` ne peut pas dépasser `n/x`.
Voici les solutions pour 2023 puis 2024 :
`[(0, 2023), (1, 1011), (3, 505), (7, 252), (10, 183), (21, 91), (22, 87), (43, 45), (45, 43), (87, 22), (91, 21), (183, 10), (252, 7), (505, 3), (1011, 1), (2023, 0)]`

`[(0, 2024), (2, 674), (4, 404), (8, 224), (14, 134), (24, 80), (26, 74), (44, 44), (74, 26), (80, 24), (134, 14), (224, 8), (404, 4), (674, 2), (2024, 0)]`

Equation dans $\mathbb{C}$ avec des modules. IS07

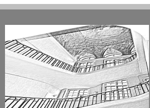
Version cartésienne : on pose $z = x + i.y$ avec x et y réels.

On résout
$$\begin{array}{lcll} |z| + i.z = 2 & \Leftrightarrow & \sqrt{x^2+y^2} - y + i.x = 2 & \\ |z| + i.z = 2 & \Leftrightarrow & \sqrt{x^2+y^2} - y = 2 & et \quad x = 0 \\ |z| + i.z = 2 & \Leftrightarrow & |y| - y = 2 & et \quad x = 0 \\ |z| + i.z = 2 & \Leftrightarrow & y = -1 & et \quad x = 0 \end{array}$$
en résolvant $|y| - y = 2$ par disjonction de cas

(y positif conduit à une contradiction et y négatif conduit à la solution trouvée).
Comme pour toute équation, on terme par $S = \{-i\}$

Version polaire : on pose cette fois $z = \rho.e^{i.\theta}$ avec ρ positif et θ entre $-\pi$ et π. L'équation devient $\rho + \rho.e^{i.(\theta+\pi/2)} = 2$ puis $\rho.\dfrac{1+e^{i.(\theta)+\pi/2}}{2} = 1$ et même $\rho.\dfrac{e^{i.(\theta+\pi/2)/2}+e^{-i.(\theta+\pi/2)}}{2.}.e^{i.(\theta+\pi/2)/4} = 1$
et donc $\rho.\cos\Big(\dfrac{\theta+\pi/2}{2}\Big).e^{i.(\theta+\pi/2)/4} = 1.e^{i.0}$. On identifie l'argument : $\theta + \dfrac{\pi}{2} = 2.0 + 4.k.\pi$ puis le module $\rho.\cos(0) = 1$. On retrouve le même complexe $-i$ sous la forme $e^{-i.\pi/2}$.

Version géométrique. J'espérais avoir une illumination soudaine, mais je reste sec. Dommage.



Intégrale. IS07

$\displaystyle\int_0^1 t^7.e^{-t^2}.dt$ existe. On peut intégrer par parties pour diminuer peu à peu l'exposant :

$t.e^{-t^2}$	$\hookleftarrow$	$-e^{-t^2}/2$
t^6	$\hookrightarrow$	$6.t^5$

$$\int_0^1 t^7.e^{-t^2}.dt = \Big[-\frac{e^{-t^2}}{2}.t^6\Big] + 3.\int_0^1 t^5.e^{-t^2}.dt$$

On recommence avec

$t.e^{-t^2}$	$\hookleftarrow$	$-e^{-t^2}/2$
t^4	$\hookrightarrow$	$4.t^3$

puis

$t.e^{-t^2}$	$\hookleftarrow$	$-e^{-t^2}/2$
t^2	$\hookrightarrow$	$2.t$

$$\int_0^1 t^7.e^{-t^2}.dt = \Big[-\frac{e^{-t^2}}{2}.t^6\Big] + 3.\Big(\Big[-\frac{e^{-t^2}}{2}.t^4\Big] + 2.\int_0^1 t^3.e^{-t^2}.dt\Big)$$

$$\int_0^1 t^7.e^{-t^2}.dt = \Big[-\frac{e^{-t^2}}{2}.t^6\Big] + 3.\Big(\Big[-\frac{e^{-t^2}}{2}.t^4\Big] + 2.\Big(\Big[-\frac{e^{-t^2}}{2}.t^2\Big]_0^1 + \int_0^1 t.e^{-t^2}.dt\Big)\Big)$$

et la dernière intégrale $\displaystyle\int_0^1 t.e^{-t^2}.dt$ se calcule par primitive directe $\Big[-\frac{e^{-t^2}}{2}\Big]_0^1$.
On recolle les morceaux et on termine le calcul

$$\int_0^1 t.e^{-t^2}.dt = \frac{1-e^{-1}}{2},\ \int_0^1 t^3.e^{-t^2}.dt = \frac{1}{2} - e^{-1},\ \int_0^1 t^3.e^{-t^2}.dt = 1 - \frac{5.e^{-1}}{2},\ \int_0^1 t^3.e^{-t^2}.dt = 3 - 8.e^{-1}$$

On peut aussi commencer par changer de variable : $u = t^2$ et donc $du = 2.t.dt$

$$\int_{t=0}^1 t^7.e^{-t^2}.dt = \int_{u=0}^1 u^3.e^{-u}.\frac{du}{2}$$

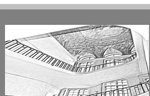
mais on n'échappe quand même pas à l'intégration par parties.

Ensuite, il reste la solution « je cherche a priori une primitive sous la forme $t \longmapsto (a_7.t^7 + a_6.t^6 + a_5.t^5 + a_4.t^4 + a_3.t^3 + a_2.t^2 + a_1.t + a_0).e^{-t^2}$ ». On la dérive

$$t \longmapsto \left(\begin{array}{cccccccc} & & 7.a_7.t^6 & +6.a_6.t^5 & +5.a_5.t^4 & +4.a_4.t^3 & +3.a_3.t^2 & +2.a_2.t & +a_1 \\ -2.a_7.t^8 & -2.a_6.t^7 & -2.a_5.t^6 & -2.a_4.t^5 & -2.a_3.t^4 & -2.a_2.t^3 & -2.a_1.t^2 & -2.a_0.t & \end{array}\right) \times e^{-t^2}$$

et on demande à ce qu'elle coïncide avec $t \longmapsto t^7.e^{-t^2}$. On trouve un système $-2.a_7 = 0$, $-2.a_6 = 0$, $7.a_7 - 2.a_5 = 1$, $6.a_5 - 2.a_3 = 0$ et ainsi de suite.
On trouve que beaucoup sont nuls et finalement

$$\int_a^b t^7.e^{-t^2}.dt = \Big[-\frac{t^6+3.t^4+6.t^2+6}{2}.e^{-t^2}\Big]_a^b$$



Intégrale en *Arcsin*. IS07

Arc-sinus est réputée pour sa dérivée (utilisable sur $]-1,\ 1[$ seulement, on va donc travailler avec des bornes a et b) :

$Arcsin(t)$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$	$\hookleftarrow$	$2.\sqrt{1+t}$

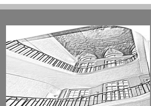
(pour la seconde ligne, considérer $t \longmapsto (1+t)^{-1/2}$ pour ne pas faire appel à d'inutiles « par cœur »).

$$\int_a^b \frac{Arcsin(t)}{\sqrt{1+t}}.dt = \Big[2.Arcsin(t).\sqrt{1+t}\Big] - 2.\int_a^b \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t^2}}.dt = \Big[2.Arcsin(t).\sqrt{1+t}\Big] - 2.\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-t}}.dt$$

On tient donc une primitive explicite :

$$t \longmapsto 2.\sqrt{1+t}.Arcsin(t) + 4.\sqrt{1-t}$$

On peut alors prendre les bornes -1 et 1 sans problème.



Fraction rationnelle. IS07

A priori, à cause des pôles, le dénominateur de la fraction devrait être $(X+1).(X-3)$. Et il ne peut pas y avoir d'autre pôle.

Mais si tel était le cas, la décomposition donnerait des termes $P(X) + \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{X-3}$ et ceci ne coïnciderait pas avec notre graphe.

On aurait un changement de signe au passage de -1. C'est donc qu'on a $P(X) + \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{a'}{(X+1)^2} + \dfrac{b}{X-3}$. Le terme dominant en -1 est alors $\dfrac{a'}{(X+1)^2}$ qui ne change pas de signe (même infini en $(-1)^+$ qu'en $(-1)^-$ et on voit sur le graphe que a' est positif). Le dénominateur est donc $\boxed{(X+1)^2.(X-3)}$

Reste à connaître le numérateur. Il n'est pas de degré 3 ni plus, sinon la fraction ne tendrait pas vers 0 à l'infini. Il est donc de degré 0, 1 ou 2.
Mais s'il était de degré 1, alors il aurait une racine r, et en ce point on aurait $F(r) = 0$. Ce qui n'est pas le cas sur le graphe. On élimine le numérateur de degré 1.

Rien ne permet cependant de refuser le cas d'une fraction $\dfrac{\lambda}{(X+1)^2.(X-3)}$. Mais la suite nous dit que $F(x)$ est équivalent à $\dfrac{-2}{x}$ quand x tend vers l'infini. Or, la forme $\dfrac{\lambda}{(x+1)^2.(x-3)}$ est équivalent à $\dfrac{\lambda}{x^3}$ en $+\infty$.
On cherche donc les deux formes à la fois :

$$\frac{a}{X+1} + \frac{a'}{(X+1)^2} + \frac{b}{X-3} = \frac{\lambda.X^2 + \mu.X + \nu}{(X+1)^2.(X-3)}$$

Rappelons que notre intérêt est de garder les dénominateurs sous forme factorisée, règle je ne sais combien de la prépa.

Quelles informations nous donne le graphe ? a' est positif (comportement en -1). b est négatif (comportement en 3). λ est égal à -2 (comportement en $+\infty$).

L'énoncé nous donne aussi $F(0) = 4$ d'où $\dfrac{\nu}{(0+1)^2.(0-3)} = 4$. On trouve la valeur de ν et c'est -12.

Il nous manque μ et c'est $F(-2)$ qui nous le donne : $-\dfrac{8}{5} = \dfrac{-2.(-2)^2 - 2.\mu - 12}{(-2+1)^2.(-2-3)}$; $\mu = \dfrac{-8+12+8}{-2} = -6$.

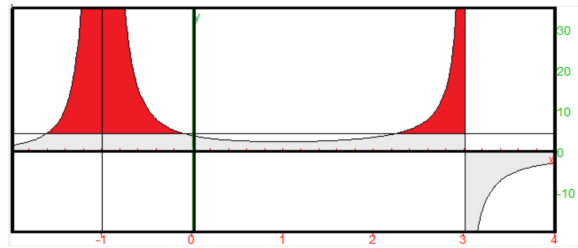
$$\frac{-2.X^2 - 6.X - 12}{(X+1)^2.(X-3)} = \frac{1}{X+1} + \frac{2}{(X+1)^2} - \frac{3}{X-3}$$

La partie décomposition en éléments simples est offerte ici, mais pas demandée dans l'énoncé.

On connaît au moins une solution de l'équation $F(x) = 4$ et c'est $x = 0$. Mais il peut y en avoir d'autres. D'ailleurs, graphiquement (avec le théorème des valeurs intermédiaires) on en devine 3. Peut on en avoir plus ? Ce serait incohérent. D'ailleurs, on résout par produit en croix

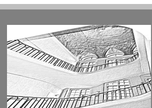
$$-(2.x^2 + 6.x + 12) = 4.(x+1)^2.(x-3)$$

c'est une équation de degré 3. Tous calculs faits : $-4.x^3 + 2.x + 14.x = 0$ et 0 est bien racine évidente.



Les deux autres racines sont des horreurs : $\boxed{S = \left\{0,\ \frac{1+\sqrt{57}}{4},\ \frac{1-\sqrt{57}}{4}\right\}}$

Quant à l'inéquation $F(x) \geqslant 4$, on peut graphiquement donner $\left[\frac{1-\sqrt{57}}{4},\ -1\right[\cup \left] -1,\ 0\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{57}}{4},\ 3\right[$



Entiers de 0 à 50, multiples et nombres premiers. IS07

Qui sont les multiples de 3 de 0 à 50 ? : 0, 3, 6, 9, 12 jusqu'à 48 (c'est 3×16). Ce sont les 3.k avec k in range(17). Il y en a 17.

Qui sont les multiples de 5 de 0 à 50 ? : 0, 5, 10, 15, 20 jusqu'à 50 (c'est 5×10). Ce sont les $5 \times k$ avec k in range(11). Il y en a 11 (et on peut donner la liste, il y a d'ailleurs 6 multiples de 10 et cinq autres multiples glissés entre eux).

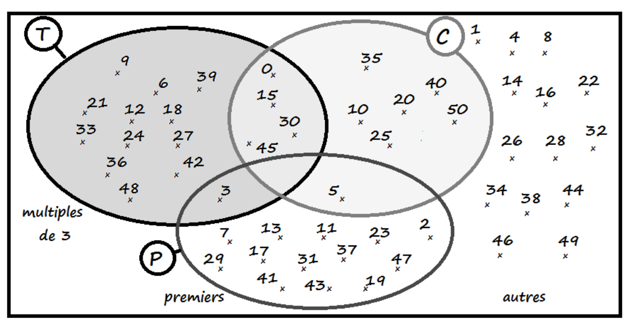
Les nombres de $C \cap T$ sont les multiples de 15 : 0, 15, 30 et 45.

Si on additionne ensuite $Card(C) + Card(T)$, on a les multiples de 5 ou de 3. mais les multiples de 15 sont comptés deux fois.

$Card(T)$	$Card(C)$	$Card(T \cap C)$	$Card(C \cup T)$
multiples de 3	multiples de 5	multiples de 15	multiples de 3 ou 5
17	11	4	$17 + 11 - 4$
$Card(C \cup T) = Card(C) + Card(T) - Card(C \cap T)$			
0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48	0, 5, 10, 15, 20, 25, 30 35, 40, 45, 50	0, 15, 30, 45	0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21 24, 25, 27, 30, 33, 35, 36, 39, 40, 42, 45, 48

On pouvait aussi remplir les listes.

On peut remplir le diagramme de Venn.

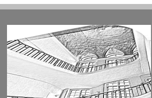


Ensuite, on résout $p(n) \Rightarrow (t(n) \Rightarrow c(n))$.
Comme proposé, on passe par sa négation :

$\overline{p(n) \Rightarrow (t(n) \Rightarrow c(n))} = \left(p(n) \text{ et } \overline{t(n) \Rightarrow c(n)}\right)$

$\overline{p(n) \Rightarrow (t(n) \Rightarrow c(n))} = \left(p(n) \text{ et } t(n) \text{ et } \overline{c(n)}\right)$

On trouve les nombres premiers qui sont multiples de 3 mais pas de 5.
Il n'y a que 3.
Et le complémentaire est « tout sauf 3 », de cardinal $51 - 1$ ce qui fait 50.



Equation de degré 3. IS07

$$3^3 - (10 + 7.i).3^2 + (21 + 58.i).3 - 111.i = 0$$

$2^3 - (10 + 7.i).2^2 + (21 + 58.i).2 - 111.i \neq 0$ et $(-1)^3 - (10 + 7.i).(-1)^2 + (21 + 58.i).(-1) - 111.i$. La racine réelle est 3.
La somme des racines vaut $10 + 7.i$ et leur produit vaut $111.i$. On note a et b les deux autres racines. Leur somme vaut $7 + 7.i$ et leur produit $37.i$.
On résout donc ensuite $z^2 - (7 + 7.i).z + 37.i = 0$ de discriminant $(7 + 7.i)^2 - 4.37.i$.
Le discriminant vaut $49 - 49 + 2.49.i - 4.37.i$ c'est à dire $-50.i$.
On résout alors $x^2 - y^2 = 0$, $2.x.y = -50$ (et pas besoin de $x^2 + y^2$ c'est direct). On trouve $\delta = 5 - 5.i$ (ou son opposé).

Les trois racines sont donc

	A	B	C
affixe	3	$z_C = \dfrac{7+7.i+5-5.i}{2} = 6+i$	$z_C = \dfrac{7+7.i-5+5.i}{2} = 1+6.i$

On peut mesurer les longueurs

	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{CA}$
affixe	$z_B - z_A = 3+i$	$z_C - z_B = -5+5.i$	$z_A - z_C = 2-6.i$
norme	$\sqrt{9+1} = \sqrt{10}$	$\sqrt{25+25} = \sqrt{50}$	$\sqrt{9+36} = \sqrt{45}$
	$BC^2 = 50 = 45+10 = AB^2 + AC^2$		

Le théorème de Pythagore permet de conclure.

Mais je préfère $z_{AC} = (1+6.i) - 3 = -2+6.i$, $z_{AB} = 6+i-3 = 3+i$ et $z_{AC} = -2.i.z_{AB}$.
La présence de ce i montre qu'on passe de $\overrightarrow{AB}$ à $\overrightarrow{AC}$ par rotation d'angle $\pi/2$.